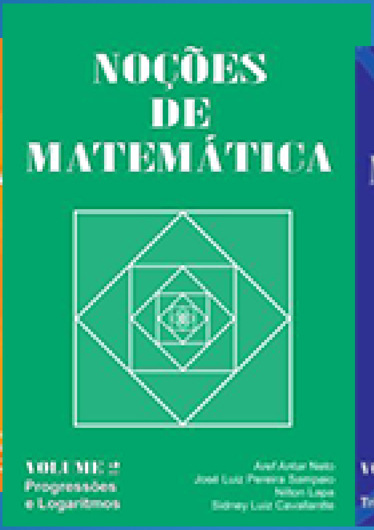
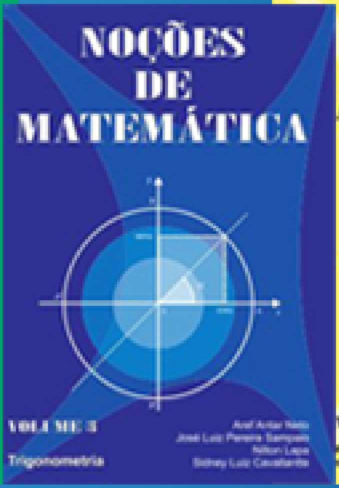
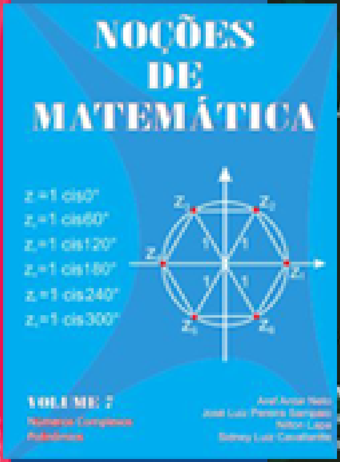
COLEÇÃO

NOÇÕES DE MATEMÁTICA







PARTE I

Capítulo 1 – **Noções de lógica**
Capítulo 2 – **Conjuntos**

Capítulo

1

Noções de lógica

1.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas *noções* de lógica, necessárias para o bom desenvolvimento do nosso curso. Essa apresentação será feita de modo simples e pouco rigoroso, pois um tratamento rigoroso exigiria não um, mas vários capítulos, o que certamente não é conveniente, uma vez que o nosso curso não pretende ser um curso de lógica e sim de matemática. Além do mais, seria pouco didático *tentar* esgotar o assunto para o principiante. Realmente, parece que o melhor modo de estudar um assunto novo é fazê-lo pelo menos em dois níveis: numa primeira abordagem, o estudo deve ser feito do modo mais intuitivo possível e vendo, o mais rápido possível, algumas aplicações; numa segunda abordagem, tenta-se ir mais a fundo.

1.2 – SENTENÇAS

Na linguagem natural encontramos vários tipos de sentenças: declarativas, interrogativas, exclamativas etc. O que distingue a sentença declarativa das outras é o fato de poder ser **verdadeira ou falsa**.

Exemplo

Considere as seguintes sentenças:

a) Vá tomar banho.
b) Que dia é hoje?
c) Não ponha a mão aí.
d) Todos os homens são corruptos.
e) Alguns estudantes são relaxados.
f) $4 + 3 > 9$
g) $5 < 2$
h) O Brasil não é um país da América Latina.
i) $5 + 2 = 7$ e $7 - 4 = 1$

As sentenças a, b e c não são declarativas, pois não faz sentido dizer que são verdadeiras ou falsas. As outras são declarativas.

Para nós só interessarão as sentenças declarativas e, assim, daqui em diante, ao usarmos a palavra "sentença", entenda-se "sentença declarativa".

Os valores "verdadeiro" e "falso" são chamados valores de verdade (ou, "valores lógicos").

1.3 – SENTENÇAS ABERTAS

Uma *sentença aberta* é uma expressão que pode ser obtida de uma sentença, substituindo alguns (ou todos) nomes por *variáveis* (variáveis são letras do alfabeto).

Consideremos por exemplo a sentença:

"José é loiro."

Se substituirmos o nome **José** pela variável x obteremos a sentença aberta:

"x é loiro."

a qual não é, obviamente, verdadeira nem falsa.

Outros exemplos de sentenças abertas:

a) $x + 4 > 7$
b) $x - y = 15$
c) x é irmão de y.
d) Se x é irmão de y então x é filho de z.

É importante notar que uma sentença aberta pode ter mais de uma variável.

Exercícios Resolvidos

1.1) Das sentenças abaixo, diga quais são declarativas:

a) Bom Natal!
b) João não é irmão de Antônio.
c) Você gosta de sorvete?
d) Resolva este problema.

Solução

a) Esta sentença está apenas expressando um desejo, não sendo, pois, verdadeira nem falsa. Assim, não é uma sentença declarativa.
b) Após uma investigação poderemos decidir se João é ou no irmão de Antônio e, portanto, poderemos classificar a sentença em verdadeira ou falsa. Assim, esta é uma sentença declarativa.
c) Esta sentença não poderá ser verdadeira nem falsa e, assim, não é declarativa.
d) Esta sentença também pode ser classificada em verdadeira ou falsa e, portanto, é declarativa.

1.2) Das expressões abaixo, diga se são sentenças declarativas ou sentenças abertas:

a) $4 + 6 = 11$
b) $x - 3 = 2$
c) $4 - x \leq 7$
d) $4 > 9$ e $5 + 2 = 1$

Solução

São declarativas: a e d
São abertas: b e c

Exercícios Propostos

1.3) Das sentenças abaixo, diga quais são declarativas:

a) $4 + 9 = 8$
b) Se $4 < 2$ então $5 > 9$
c) Onde estamos?
d) Não é verdade que $5 + 2 = 7$
e) Vá embora.
f) Todos os homens são mortais.

1.4) Das expressões abaixo, diga quais são sentenças declarativas e quais são sentenças abertas:

a) $x^2 - 5x + 6 > 0$
b) $4x - 5 = 0$
c) $3 + 4 = 12$
d) Se $x = 8$ então $4 = 5$
e) $4 > 1$ e $7 = 4$

1.4 – SENTENÇA ABERTA COM UMA VARIÁVEL

Consideremos agora uma sentença aberta de apenas uma variável. Suponhamos que ao colocarmos o nome de um elemento no lugar da variável, obtenhamos uma sentença verdadeira; diremos então que o elemento **satisfaz** a sentença aberta.

O conjunto de todos os elementos cujos nomes poderão ser colocados no lugar da variável será denominado **conjunto-universo**, o qual simbolizaremos por **U**.

O conjunto dos elementos de U que *satisfazem* a sentença aberta será chamado **conjunto-verdade** (ou **conjunto-solução**) da sentença aberta, sendo simbolizados por **V** (ou por **S**).

Exemplos

a) Seja a sentença aberta: $x^2 = 9$ e $U = \{1; -1; 2; -2; 3; -3\}$.
Os elementos de U que satisfazem a sentença aberta são 3 e –3. Assim, o conjunto-verdade é:

$$V = \{3; -3\}$$

b) Seja a sentença aberta $x^2 = 9$ e $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Neste caso, o único elemento de U que satisfaz a sentença dada é 3 e assim temos:

$$V = \{3\}$$

Os exemplos ressaltam que o conjunto-verdade de uma sentença aberta depende do conjunto-universo adotado.

1.5 – SENTENÇA ABERTA COM VÁRIAS VARIÁVEIS

Se a sentença aberta tiver duas variáveis, o conjunto-universo e o conjunto-verdade serão conjuntos de **pares ordenados**, sendo as variáveis substituídas em ordem alfabética.

Exemplo

Considere a sentença aberta:
$2x + y = 10$ e U = {(1; 8); (8; 1); (2; 6); (3; 5)}

Vemos que o par (1; 8) satisfaz a sentença aberta, pois substituindo x por 1 e y por 8 obtemos uma sentença verdadeira. O par (8; 1) não satisfaz a sentença aberta, pois substituindo x por 8 e y por 1 obtemos uma sentença falsa. Vemos ainda que o par (2; 6) satisfaz e o par (3; 5) não satisfaz. Assim, o conjunto-verdade é:

V = {(1; 8); (2; 6)}

Se a sentença aberta tiver três variáveis, trabalharemos com trincas ordenadas; se tiver quatro variáveis, trabalharemos com quádruplas ordenadas e assim por diante, sempre respeitando a ordem alfabética ao efetuarmos as substituições.

1.6 – EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES

Equações são sentenças abertas que exprimem igualdade. Assim, por exemplo, as sentenças abertas:

$$4x - 1 = 7, \quad 3x^2 = 4x + 1, \quad \sqrt{x} - 1 = 9$$

são equações.

Dizemos que uma equação é uma **identidade** se e somente se o conjunto-verdade é igual ao conjunto-universo, isto é, a equação é satisfeita para todos os elementos do universo.

Exemplos

a) Considere a equação: $x + x = 2x$. É óbvio que esta equação será satisfeita para qualquer número. Dizemos então que é uma identidade.
b) A equaçâo $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ é uma identidade muito conhecida.
c) Considere a equação $x^2 = 9$ e o universo U = {0; 1; 2; 3; 4}. O conjunto-verdade desta equação é V = {3}. Como o conjunto-verdade não coincide com o universo, então a equação não é uma identidade (em relação ao universo dado).
d) Considere novamente a equação $x^2 = 9$ e o universo U' = {3; –3}. Neste caso, todos os elementos do universo satisfazem a equação. Diremos então que a equação $x^2 = 9$ é uma identidade em relação ao universo U' = {3; –3}.

Os exemplos **c** e **d**, acima, ressaltam que uma equação pode ser identidade em relação a um universo, mas pode não ser identidade em relação a outro universo.

Inequações são sentenças abertas que exprimem desigualdade.
Assim, por exemplo, as sentenças abertas abaixo são inequações:

a) $x > 3$ (x é maior que 3)
b) $x < y$ (x é menor que y)
c) $x + y \neq 4$ (x mais y é diferente de 4)
d) $x \geq y$ (x é maior ou igual a y)
e) $x \leq y$ (x é menor ou igual a y)

Observações:

1) Consideremos as desigualdades $a > b$ e $c > d$. Costuma-se dizer que elas têm o **mesmo sentido**. Consideremos agora as desigualdades $a > b$ e $c < d$. É costume dizer que elas têm sentidos opostos.

2) Por uma questão de "costume", lemos a desigualdade:

$$a > b$$

do seguinte modo: "a é maior que b". No entanto, dizer que "$a > b$" é a mesma coisa que dizer que "$b < a$". Assim, obviamente, podemos ler a desigualdade:

$$a > b$$

de qualquer um dos seguintes modos:

"a é maior que b"
"b é menor que a"

Exercícios Resolvidos

1.5) Dê o conjunto-verdade de cada uma das sentenças abertas abaixo (em relação ao universo indicado):

a) $x - 3 = 7$ $U = \{2; 4; 6; 8; 10\}$
b) $x - 2 > 3$ $U = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
c) $x^2 = 16$ $U = \{2; -2; 3; -3; 4; -4\}$
a) $x^2 = 16$ $U = \{2; 4; 6; 8\}$

Solução

a) Dos elementos de U, o único que satisfaz a sentença aberta é 10. Assim: $V = \{10\}$
b) $V = \{6; 7; 8; 9\}$
c) $V = \{4; -4\}$
d) Embora tenhamos a mesma sentença aberta do item anterior, o conjunto-verdade neste caso será diferente do anterior, pois aqui o único elemento de U que satisfaz é 4. Assim: $V = \{4\}$

1.6) Dê o conjunto-verdade de cada sentença aberta (em relação ao universo indicado):

a) $x - y = 1$ $U = \{(5; 4); (4; 5); (7; 2); (10; 9)\}$
b) $x > y$ $U = \{(1; 2); (2; 1); (5; 2)\}$
c) $x + y > z$ $U = \{(1; 3; 2); (2; 3; 7); (4; 3; 3)\}$

Solução

a) Os únicos pares ordenados que satisfazem são (5; 4) e (10; 9). Portanto $V = \{(5; 4); (10; 9)\}$
É conveniente destacar que, neste caso, o par ordenado (5; 4) satisfaz a sentança aberta, enquanto o par ordenado (4; 5) não satisfaz.

b) Neste caso, os pares ordenados que satisfazem são (2; 1) e (5; 2). Portanto V = {(2; 1); (5; 2)}

c) Façamos as substituições para verificarmos as trincas ordenadas que satisfazem:

	$x + y > z$	
(1; 3; 2)	$1 + 3 > 2$	verdade
(2; 3; 7)	$2 + 3 > 7$	falso
(4; 3; 3)	$4 + 3 > 3$	verdade

Portanto: V = {(1; 3; 2); (4; 3; 3)}

Exercícios Propostos

1.7) Dê o conjunto-verdade de cada sentença aberta:

a) $4 + x = 9$ U = {3; 5; 7; 9; 10}
b) $x + 2 > 7$ U = {4; 5; 6; 7; 8; 9}
c) $x + 2 > 7$ U = {5; 6; 7; 8}
d) $x^2 = 4$ U = {–1; –2; –3; +1; +2; +3}

1.8) Dê o conjunto-verdade de cada sentença aberta:

a) $x - y = 2$ U = {(10; 8); (5; 3); (3; 5); (2; 0)}
b) $y - x = 1$ U = {(8; 7); (4; 5); (1; 0); (0; 1)}
e) $2x - y > z$ U = {(1; 2; 3); (4; 2; 3); (1; 0; 1)}

1.7 – QUANTIFICADORES

A partir de uma sentença aberta, podemos obter uma sentença de dois modos:

1°) substituindo as variáveis por nomes.
2°) usando os **quantificadores**

Quantificadores são expressões do tipo:

"Existe um x tal que..."

"Para todo x..."

Exemplo

Consideremos a sentença aberta: $x + 3 = 10$. Podemos substituir a variável por nomes, obtendo sentenças como, por exemplo:

$4 + 3 = 10$, $8 + 3 = 10$ etc.

Podemos, também, recorrer ao uso dos quantificadores, obtendo a sentença

"Existe um x tal que $x + 3 = 10$"

que obviamente é verdadeira, e a sentença

"Para todo x, $x + 3 = 10$"

que obviamente é falsa.

Podemos usar vários quantificadores em uma mesma sentença.

Exemplo

a) Para todo x, existe um y tal que $x > y$.
b) Para todo x e para todo y, $x < y$.

O quantificador "Para todo x..." é chamado **quantificador universal** e é simbolizado por $\forall$ **x** (costuma ser lido também: "qualquer que seja x...").

O quantificador "Existe um x tal que..." é chamado **quantificador existencial** e é simbolizado por $\exists$**x.**

Assim, a sentença "Existe um x tal que $x > 7$" pode ser simbolizada por:

$$\exists x,\ x > 7$$

e a sentença "Para todo x, $x + 3 = 10$" pode ser simbolizada por:

$$\forall x,\ x + 3 = 10$$

É conveniente observar que quando dizemos: "Existe um x tal que..." *não* estamos dizendo que esse x é único. Por exemplo, a sentença:

"Existe um x tal que $x > 7$"

é verdadeira, embora haja mais de um número que é maior que 7.

Alguns autores representam a expressão

"Existe um único x tal que..." pelo símbolo $\exists x$.

1.8 – USO IMPLÍCITO DO QUANTIFICADOR UNIVERSAL

Algumas vezes ocorre que o quantificador universal é omitido. Por exemplo, é muito comum em livros de matemática encontrarmos a propriedade comutativa da multiplicação de números reais expressa assim:

"Sendo x e y números reais, $xy = yx$"

quando, a rigor, deveria ser expressa assim:

"Sendo x e y números reais, $\forall x,\ \forall y,\ xy = yx$"

Desde que não haja perigo de confusão, o quantificador universal poderá ser omitido.

1.9 – CONECTIVOS

A partir de sentenças simples (atômicas) podemos formar sentenças compostas (moleculares) usando os conectivos. Os conectivos que consideraremos são os seguintes:

e	ou	se ... então	se e somente se	não

Por exemplo, consideremos as seguintes sentenças simples:

"João é loiro."
"José é inteligente."

Usando o conectivo **e** podemos formar a sentença molecular:

"João é loiro e José é inteligente."

Usando o conectivo **se... então...**, podemos formar a seguinte sentença molecular:

"Se João é loiro, então José é inteligente."

Consideremos agora a sentença simples:

"4 é igual a 3"

Usando o conectivo **não**, podemos formar a seguinte sentença molecular:

"4 não é igual a 3"

Nos itens seguintes analisaremos com mais detalhe cada conectivo.

1.10 – CONECTIVO "e"

O conectivo **e** costuma ser representado pelo símbolo $\wedge$. Assim, se **p** representa a sentença

"João é loiro"

e **q** representa a sentença

"José é inteligente",

a sentença composta

"João é loiro e José é inteligente"

será representada por:

$$p \wedge q$$

A sentença $\mathbf{p \wedge q}$ é chamada **conjunção** das sentenças p e q.

Considera-se que a sentença $p \wedge q$ será verdadeira apenas no caso em que tanto **p** como **q** forem verdadeiras. Se uma delas (ou ambas) for falsa, a sentença $p \wedge q$ será considerada falsa. Usando o símbolo **V** para "verdadeira" e **F** para "falsa", podemos resumir o que foi dito acima através da chamada *tabela-verdade*:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplos

a) A sentença molecular "4 = 3 + 1 e 5 > 2" é verdadeira, pois a sentença atômica "4 = 3 + 1" é verdadeira e a sentença atômica "5 > 2" também é verdadeira.

b) Seja p a sentença 4 > 3 e q a sentença 7 < 5. A sentença p é verdadeira e a sentença q é falsa. Assim, a sentença molecular $p \wedge q$ é falsa.

Observação: A "sentença" composta $a < b \wedge b < c$ pode ser representada de modo mais sintético do seguinte modo: $a < b < c$

1.11 – CONECTIVO "ou"

A palavra **ou** na linguagem natural pode aparecer com dois sentidos: *exclusivo* e *inclusivo*.

O sentido *exclusivo* aparece no seguinte exemplo:

"Depois de terminadas as provas, o aluno será aprovado **ou** será reprovado."

Neste caso, obviamente, não se admite que as duas possibilidades possam ser verdadeiras: ser aprovado e ser reprovado; uma possibilidade exclui a outra.

O sentido *inclusivo* aparece no seguinte exemplo:

"O cheque será pago desde que contenha a assinatura de João **ou** de Antônio."

Neste caso entendemos que se o cheque contiver apenas a assinatura de João, ele será pago. Se contiver apenas a assinatura de Antônio, ele será pago. Mas, se contiver ambas as assinaturas, é óbvio que também será pago. Portanto estamos diante de um caso em que **podem** ocorrer as duas possibilidades, enquanto que no caso do "ou" exclusivo **não** podem ocorrer as duas possibilidades.

Como curiosidade vale a pena destacar que em latim há duas palavras diferentes para os dois sentidos de **ou**:

vel para o ou inclusivo e **aut** para o ou exclusivo

Daqui em diante usaremos apenas o "ou" inclusivo e o simbolizaremos por $\vee$ (inicial da palavra "vel").

Sendo **p** e **q** sentenças, a sentença "$p \vee q$" é chamada **disjunção** de p e q.

A sentença "$p \vee q$" é considerada falsa apenas quando tanto "p" como "q" são falsas. Em qualquer outra situação, "$p \vee q$" é considerada verdadeira. Isto pode ser esquematizado através de uma tabela-verdade:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplos

a) A sentença: "$4 + 2 = 6$ ou $5 > 1$" é verdadeira.
b) A sentença: "$4 + 2 = 6$ ou $5 > 9$" é verdadeira.
c) A sentença: "$6 < 2$ ou $7 > 3$" é verdadeira.
d) A sentença: "$7 < 5$ ou $3 > 8$" é falsa.

Observação: A "sentença" composta "$a < b \vee a = b$" pode ser representada por "$a \leq b$". Do mesmo modo, $a \geq b$ representa "$a > b \vee a = b$".

1.12 – CONECTIVO "não"

Dada uma sentença **p**, podemos formar a **negação de p** do seguinte modo:

"é falso que p"

ou então: "não é verdade que p"

ou ainda, inserindo a palavra "não" em p.

Exemplo

A negação da setença

"João é loiro"

pode ser escrita

"Não é verdade que João seja loiro"

ou então

"É falso que João seja loiro"

ou ainda: "João não é loiro."

A negação de **p** será indicada por ~p e deverá obedecer à seguinte tabela-verdade:

p	~p
V	F
F	V

Exercícios Resolvidos

1.9) Sendo **p** a sentença: "Os gatos têm penas" e **q** a sentença: "José é estudioso", traduza para a linguagem natural as seguintes sentenças:

a) $\sim p$
b) $\sim q$
c) $p \wedge q$
d) $p \vee q$
e) $p \wedge \sim q$
f) $\sim p \vee \sim q$

Solução

a) Os gatos não têm penas.
b) José não é estudioso.
e) Os gatos têm penas e José é estudioso.
d) Os gatos têm penas ou José é estudioso.
e) Os gatos têm penas e José não é estudioso.
f) Os gatos não têm penas ou José não é estudioso.

1.10) Sendo **p** a sentença: "José é alto" e **q** a sentença: "Pedro é baixo", simbolize as seguintes sentenças da linguagem natural:

a) Pedro é baixo e José é alto.
b) Pedro é baixo ou José é alto.
c) Pedro não é baixo.
d) José é alto e Pedro não é baixo.
e) José não é alto ou Pedro não é baixo.

Solução

a) $q \wedge p$
b) $q \vee p$
c) $\sim q$
d) $p \wedge \sim q$
e) $\sim p \vee \sim q$

1.11) Sendo **p** a sentença: "João é alto" e **q** a sentença: "João é loiro", simbolize as seguintes sentenças:

a) João é alto e loiro.
b) É falso que João seja alto e loiro.
e) Não é verdade que João seja alto ou loiro.
d) João é alto, mas não é loiro.
e) João não é alto nem loiro.

Solução

a) $p \wedge q$
b) $\sim(p \wedge q)$
c) $\sim(p \vee q)$
d) $p \wedge \sim q$
e) $\sim p \wedge \sim q$

Exercícios Propostos

1.12) Sendo **p** a sentença: "Salvador fica na Bahia" e **q** a sentença: "Pássaros voam", traduza para a linguagem natural:

a) $\sim p$
b) $\sim q$
c) $p \wedge q$
d) $p \vee q$
e) $p \vee \sim q$
f) $\sim p \wedge q$
g) $\sim(p \vee q)$
h) $\sim(p \wedge q)$

1.13) Sendo **p** a sentença: "Pedro é moreno" e **q** a sentença: "Maria é bonita" simbolize as sentenças:

a) Pedro é moreno e Maria é bonita.
b) Pedro não é moreno e Maria não é bonita.
c) Não é verdade que Pedro seja moreno e Maria seja bonita.
d) Maria não é bonita ou Pedro é moreno.

1.13 – CONECTIVO "se... então..."

Sejam duas sentenças **p** e **q**. A sentença:

"Se p então q"

é denominada **condicional** e é representada por:

$$p \Rightarrow q$$

Assim, por exemplo, a sentença:

"Se João é alto então Maria é loira."

pode ser escrita assim:

João é alto $\Rightarrow$ Maria é loira

O condicional $p \Rightarrow q$ pode ser lido também de um dos seguintes modos:

1º) p implica q
2º) p somente se q
3º) p é condição suficiente para q
4º) q é condição necessária para p

A sentença $p \Rightarrow q$ só é considerada falsa quando p é verdadeira e q é falsa. Nos outros casos é verdadeira. Assim, a tabela-verdade é:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplos

a) A sentença "$5 > 2 \Rightarrow 3 + 1 = 4$" é verdadeira.
b) A sentença "$12 > 7 \Rightarrow 3 < 2$ é falsa.
c) A sentença "$5 < 2 \Rightarrow 7 = 2 + 5$" é verdadeira.
d) A sentença "$5 < 2 \Rightarrow 1 > 3$" é verdadeira.

1.14 – CONECTIVO "se e somente se"

A sentença composta:

$$p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow p$$

pode ser escrita de modo mais sintético:

$$p \Leftrightarrow q$$

Esta última é chamada **bicondicional** e pode ser lida dos seguintes modos:
1º) p se e somente se q
2º) q se e somente se p
3º) p é equivalente a q
4º) q é equivalente a p
5º) p é condição necessária e suficiente para q
6º) q é condição necessária e suficiente para p

Exemplos

a) A sentença "x é par se e somente se x^2 é par" pode ser escrita:

$$x \text{ é par} \Leftrightarrow x^2 \text{ é par}$$

b) A sentença "A condição necessária e suficiente para que $5 > 2$ é que $3 < 7$" pode ser escrita:

$$5 > 2 \Leftrightarrow 3 < 7$$

A tabela-verdade de $p \Leftrightarrow q$ é:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

isto é, para que $p \Leftrightarrow q$ seja verdadeira devemos ter **p** e **q** ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Exercícios Resolvidos

1.14) Sendo **p** a sentença "Maria é loira", **q** a sentença "João é alto" e **r** a sentença "José é inteligente", simbolize as seguintes sentenças:

a) Se João é alto então Maria é loira.
b) José é inteligente se João é alto.
c) Maria é loira implica João é alto.
d) José é inteligente somente se Maria é loira.
e) Maria é loira é condição suficiente para que João seja alto.
f) Maria é loira é condiçao necessária para que João seja alto.
g) Maria é loira é condição necessária e suficiente para que João seja alto.

Solução

a) $q \Rightarrow p$
b) Reparemos primeiramente que esta sentença pode ser escrita assim:

"Se João é alto então José é **inteligente**"

Portanto seu símbolo é $q \Rightarrow r$.

c) $p \Rightarrow q$
d) $r \Rightarrow p$
e) $p \Rightarrow q$
f) $q \Rightarrow p$
g) $p \Leftrightarrow q$

1.15) Consideremos as sentenças **p**, **q**, **r** e **s** dadas por:

(p) $4 > 3$
(r) $2 > 6$
(q) $5 < 9$
(s) $7 > 9$

Dê o valor verdadeiro ou falso às sentenças:

a) $p \Rightarrow q$
b) $p \Rightarrow r$
c) $p \Rightarrow s$
d) $r \Rightarrow q$
e) $r \Rightarrow s$
f) $p \Leftrightarrow q$
g) $p \Leftrightarrow r$
h) $r \Leftrightarrow s$

Solução

Confrontando com as tabelas-verdade obtemos:

a) V
b) F
c) F

d) V
e) V
f) V
g) F
h) V

1.16) Sendo **p**, **q** e **r** sentenças, determine a tabela-verdade das seguintes sentenças moleculares:
a) ~(p ∧ ~q)
b) (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

Solução

a)

p	q	~q	p ∧ ~q	~(p ∧ ~q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

b)

p	q	r	p ∧ q	p ∧ r	(p ∧ q) ∨ (p ∧ r)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

1.17) Considere a sentença p: "Todos os coelhos usam óculos".
Qual das duas sentenças abaixo é a negação de p?

q: "Nenhum coelho usa óculos."
r: "Existe pelo menos um coelho que não usa óculos."

Solução

Lembremos que a negação de p obedece a tabela-verdade abaixo, isto é, quando p é verdadeira, ~p é falsa, e quando p é falsa, ~p é verdadeira.

p	~p
V	F
F	V

A sentença **q** não é a negação de p, pois poderia ocorrer de **p** e **q** serem simultaneamente falsas. Para tanto, bastaria que houvesse, por exemplo, apenas **dois coelhos que usassem óculos**. A sentença **r** é a negação de p, pois é fácil perceber que quando **p** for verdadeira, **r** será falsa e quando **p** for falsa, **r** será verdadeira.

Exercícios Propostos

1.18) Consideremos as sentenças **p**, **q**, **r** e **s** dadas por:

p: 4 = 7
r: 8 > 6
q: 3 < 2
s: 7 < 9

Simbolize as seguintes sentenças:

a) Se 7 < 9 então 4 = 7
b) 8 > 6 se 3 < 2
c) 3 < 2 implica 7 < 9
d) 8 > 6 somente se 4 = 7
e) 3 < 2 é condição necessária para que 7 < 9
f) 3 < 2 é condição suficiente para que 7 < 9
g) A condição necessária para que 4 = 7 é que 8 > 6
h) A condição suficiente para que 3 < 2 é que 7 < 9
i) A condição necessária e suficiente para que 7 < 9 é que 3 < 2
j) 4 = 7 é equivalente a 7 < 9

1.19) Sendo **p**, **q**, **r** e **s** as sentenças do exercício anterior, dê o valor verdadeiro ou falso:

a) $p \Rightarrow q$
b) $r \Rightarrow s$
c) $r \Rightarrow p$
d) $r \Leftrightarrow s$
e) $p \Leftrightarrow q$
f) $r \Leftrightarrow q$
g) $\sim p \Rightarrow q$
h) $\sim r \Rightarrow s$
i) $\sim r \Rightarrow \sim q$
j) $\sim(r \Leftrightarrow q)$
k) $\sim(p \Leftrightarrow s)$
l) $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee q)$

1.20) Construa as tabelas-verdade das seguintes sentenças moleculares:

a) $(p \wedge q) \vee (\sim r)$
b) $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge p)$

1.21) Dê a negação de cada sentença:

a) Todos os marcianos usam camisola.
b) Nenhum camelo tem rabo.
c) Existe pelo menos um habitante na Lua.

Capítulo 2

Conjuntos

2.1 – INTRODUÇÃO

Para apresentarmos rigorosamente o conceito de conjunto, deveríamos recorrer a um tratamento axiomático, o que foge ao nível do nosso curso. Assim, contentar-nos-emos com uma idéia *intuitiva* e *aproximada*: conjunto é **coleção de objetos**. Os objetos que formam um conjunto são os seus **elementos**. De modo geral, os objetos que formam um conjunto podem ser de qualquer tipo: números, países, pessoas, pontos etc.

É usual representar os conjuntos por letras maiúsculas e os elementos por letras minúsculas. Se quisermos indicar que o objeto **a** é elemento do conjunto **A** escreveremos:

$$a \in A$$

que podemos ler: "a pertence a A".

Se o objeto a não é elemento de A, escrevemos:

$$a \notin A$$

que pode ser lido: "a não pertence a A".

Um dos modos de se representar um conjunto é escrever os *nomes* de seus elementos entre chaves. Assim, por exemplo, o conjunto formado pelos números 3, 6 e 7 pode ser representado por:

$$A = \{3; 6; 7\}$$

Este modo de representar pode, em certos casos, ser usado mesmo que haja um número elevado de elementos. Por exemplo, o conjunto dos números inteiros que vão de 1 a 800 pode ser assim representado:

$$B = \{1; 2; 3; 4; ...; 800\}$$

Em alguns casos, este modo de representação pode ser usado para conjuntos infinitos. Como exemplo, podemos representar o conjunto de todos os números inteiros maiores que 7:

$$C = \{8; 9; 10; 11; ...\}$$

Um outro modo de representar um conjunto é dando uma sentença aberta que seus elementos devem satisfazer. Assim, por exemplo, o conjunto dos estados do Brasil pode ser representado por:

$$A = \{x \mid x \text{ é estado do Brasil}\}$$

que lemos: "A é o conjunto dos x tais que x é estado do Brasil."

Note que a barra vertical "$|$" é lida "tal que".

Exemplo

Consideremos o conjunto dos números naturais: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ..\}$ e seja **A** o conjunto dos números naturais menores que 6. Podemos representar o conjunto A por:

$$A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

ou então:

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$$

que lemos: "A é o conjunto dos x pertencentes a $\mathbb{N}$, tais que $x < 6$."

Alguns autores usam, no lugar da barra vertical, dois pontos ou então ponto e vírgula. Assim, o conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x < 6\}$$

pode também ser representado por:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x < 6\} \text{ ou } A = \{x \in \mathbb{N} ; x < 6\}$$

2.2 – IGUALDADE DE CONJUNTOS

Dizemos que os conjuntos **A** e **B** são iguais se e somente se possuem os mesmos elementos, isto é, todo elemento de A é também elemento de B e todo elemento de B é também elemento de A. Para indicar que A é igual a B escrevemos:

$$A = B$$

Observe que, quando escrevemos A = B, A e B são o *mesmo conjunto*, isto é, A e B são nomes diferentes de um mesmo conjunto.

Exemplo

a) Os conjuntos: $A = \{3; 4; 7\}$ e $B = \{4; 7; 3\}$ são iguais, pois têm os mesmos elementos, embora estejam escritos em ordem diferente.
b) $\{1; 5; 6\} = \{1; 5; 6; 5\}$
Repare que neste caso os dois conjuntos têm os mesmos elementos (embora em um deles o número 5 esteja representado duas vezes), isto é, os dois conjuntos têm três elementos.

2.3 – O CONJUNTO VAZIO

Vimos que podemos representar um conjunto dando uma sentença aberta que seus elementos devem satisfazer. No entanto pode ocorrer que a sentença aberta não seja satisfeita por nenhum elemento. Por exemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} | x^2 = -4\}$$

Obviamente não há nenhum número natural cujo quadrado seja negativo e portanto o conjunto A não possui elementos. Dizemos que o conjunto A é **vazio**. O símbolo do conjunto vazio é

$$\varnothing$$

2.4 – ALGUNS CONJUNTOS NUMÉRICOS

Neste item citaremos apenas alguns conjuntos numéricos que servirão para os nossos primeiros exercícios. Mais adiante citaremos outros conjuntos numéricos.

a) $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$
É o conjunto dos números naturais.
b) $\mathbb{N}^* = \{1; 2; 3;...\} = \{x \in \mathbb{N} | x \neq 0\}$
De modo geral, o asterisco colocado no alto do símbolo de um conjunto numérico indica exclusão do zero.
c) $\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$
É o conjunto dos números inteiros.
d) $\mathbb{Z}^* = \{...; -3; -2; -1; 1; 2; 3;...\}$
e) $\mathbb{Z}_+ = \{0; 1; 2; 3;...\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\}$
f) $\mathbb{Z}_- = \{...; -3; -2; -1; 0\} = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 0\}$
g) $\mathbb{Z}_+^* = \{1; 2; 3;...\} = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\}$
h) $\mathbb{Z}_-^* = \{...;-3; -2; -1\} = \{x \in \mathbb{Z} | x < 0\}$

Exercícios Resolvidos

2.1) Dado o conjunto $A = \{2; 6; 5; 7\}$, dê o valor verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $2 \in A$
b) $6 \notin A$
c) $8 \notin A$
d) $9 \in A$
e) $\{6; 7; 2; 5\} = A$
f) $\{2; 6; 5; 7; 2; 5\} = A$

Solução

a) V
b) F
c) V
d) F
e) V
f) V

2.2) Dê o valor verdadeiro ou falso:

a) $4 \in \{2; 4; 5\}$
b) $4 \in \{4\}$
c) $4 = \{4\}$
d) $\{0\} = \varnothing$
e) $-8 \in \mathbb{N}$
f) $-8 \in \mathbb{Z}$
g) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$
h) $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$
i) $0 \in \mathbb{Z}_-$

Solução

a) V
b) V
c) F (o elemento 4 não é a mesma coisa que o conjunto formado pelo número 4).
d) O conjunto {0} possui um elemento que é o número zero. Portanto não é vazio e assim a sentença é falsa.
e) F
f) V
g) F
h) V
i) V

2.3) Represente os seguintes conjuntos enumerando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x > 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x < 8\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} | 3 < x < 8\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{N} | 4 \leq x < 11\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{Z} | x > -3\}$

f) $F = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 4\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{Z} | -4 < x \leq 2\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é par } \wedge 5 \leq x < 18\}$

Solução

a) A = {4; 5; 6; 7;...}
b) B = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}
c) C = {4; 5; 6; 7}
d) D = {4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}
e) E = {–2; –1; 0; 1; 2; 3;...}
f) F = {...; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4}
g) G = {–3; –2; –1; 0; 1; 2}
h) H = {6; 8; 10; 12; 14; 16}

2.4) Represente os seguintes conjuntos enumerando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k \wedge k \in \mathbb{N}\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k + 1 \wedge k \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \{x | x \text{ é par } \wedge 7 \leq x \leq 9\}$

d) $D = \{x : x \in \mathbb{N} \wedge 9 < x < 5\}$

Solução

a) Aqui a variável k pode ser **qualquer** número natural. Portanto:

$$\begin{cases} \text{para } k = 0 \text{ temos } x = 2(0) = 0 \\ \text{para } k = 1 \text{ temos } x = 2(1) = 2 \\ \text{para } k = 2 \text{ temos } x = 2(2) = 4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

e assim podemos escrever: A = {0; 2; 4; 6; 8; ...}

b) Neste caso também, a variável k pode assumir qualquer valor natural. Fazendo algumas substituições:

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow x = 2(0) + 1 = 1 \\ k = 1 \Rightarrow x = 2(1) + 1 = 3 \\ k = 2 \Rightarrow x = 2(2) + 1 = 5 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Assim: A = {1; 3; 5; ...}

c) Neste caso, o único número par que está entre 7 e 9 é o número 8 e portanto C = {8}.

d) Não há nenhum número natural que satisfaça a sentença aberta: $9 < x < 5$; portanto D = Ø.

Exercícios Propostos

2.5) Dê o valor de V ou F:

a) $5 \in \{3; 4; 5; 7\}$
b) $7 \notin \{3; 4; 5; 7\}$
c) $8 \notin \{3; 4; 5; 7\}$
d) $10 \in \{2; 4; 6; 8\}$
e) $5 \in \{5\}$
f) $5 = \{5\}$
g) $0 \in \{0\}$
h) $\{0\} = \varnothing$
i) $0 \in \varnothing$
j) $7 \in \varnothing$
k) $-5 \in \mathbb{Z}$
l) $-5 \in \mathbb{Z}_+$
m) $-5 \in \mathbb{Z}_-$
n) $0 \in \mathbb{Z}_+$
o) $0 \in \mathbb{Z}^*$

2.6) Represente os seguintes conjuntos enumerando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x < 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x \geq 2\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x < 5\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{Z} | -5 \leq x < 3\}$

e) $E = \{x | x \in \mathbb{Z}^* | -3 \leq x \leq 3\}$

f) $F = \{x : x \in \mathbb{Z}^- | x > -6\}$

g) $G = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ é ímpar e } 4 \leq x \leq 8\}$

h) $H = \{x \in \mathbb{N} | x = 3k, k \in \mathbb{N}\}$

i) $I = \{x \in \mathbb{N} | x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}\}$

j) $J = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k - 1, k \in \mathbb{N}^*\}$

k) $K = \{x : x \in \mathbb{N}, 4 < x < 6\}$

l) $L = \{x : x \in \mathbb{N}, 8 < x < 7\}$

2.5 – SUBCONJUNTO

Consideremos dois conjuntos **A** e **B**. Dizemos que **A está contido em B** se e somente se **todo** elemento de A é também elemento de B. Para indicar que "A está contido em B" escrevemos:

$$A \subset B$$

Exemplos

a) Sendo $A = \{1; 2\}$ e $B = \{1; 2; 3\}$ temos $A \subset B$
b) $\{3; 5; 6\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
e) $\{3; 5; 6\} \subset \{3; 5; 6\}$
d) $\{4\} \subset \{2; 4; 6\}$

Outros modos de ler $A \subset B$ são:

A é parte de B A é subconjunto de B B contém A

Quando queremos dizer que "A não está contido em B" escrevemos: $A \not\subset B$. Assim, por exemplo, temos:

$$\{3; 4\} \not\subset \{3; 5; 7\}$$

Podemos dizer que um conjunto está contido em si mesmo (veja exemplo c acima).

Dizemos que A é **subconjunto próprio de** B (ou que "A está contido propriamente em B") se e somente se

$$A \subset B \text{ e } A \neq B$$

Exemplos

a) Sendo $A = \{3; 4\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4\}$ temos $A \subset B$ e $A \neq B$. Portanto podemos dizer que A é subconjunto próprio de B.
b) Dados $A = \{3; 5; 6\}$ e $B = \{5; 3; 6\}$, temos $A \subset B$ e $A = B$. Portanto A é subconjunto de B, mas *não* é subconjunto próprio de B.

Alguns autores, para indicar que $A \subset B$, usam também a notação $B \supset A$. Vamos dar novamente a definição de subconjunto, de modo mais formal: Sendo A e B conjuntos, dizemos que A está contido em B **se e somente se**

$$\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$$

Façamos $A = \varnothing$. Repare que a sentença:

$$\forall x, x \in \varnothing \Rightarrow x \in B$$

é verdadeira, pois:

1º) $x \in \varnothing$ é sempre falsa.
2º) lembrando das tabelas-verdade, sabemos que uma condicional de antecedente falso é sempre verdadeira.

Portanto, podemos dizer que $\varnothing \subset B$, qualquer que seja o conjunto B, isto é, o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.

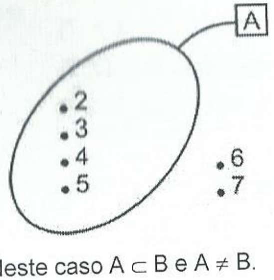
É importante não confundir o uso dos símbolos $\in$ e $\subset$. O primeiro serve para indicar que um objeto é *elemento* de um *conjunto*. O segundo serve para indicar que um *conjunto* está contido em outro *conjunto*.

2.6 – DIAGRAMAS DE VENN

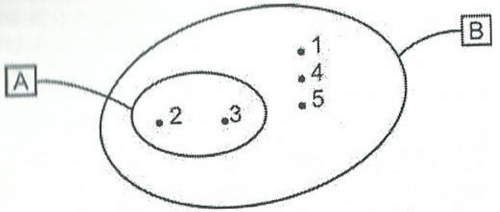
Um bom modo de visualizar as relações entre os conjuntos é através dos diagramas de **Venn** (John Venn, inglês, 1834 - 1923). Os conjuntos são representados por regiões planas interiores a uma curva fechada e simples ("simples", aqui, significa não-entrelaçada).

Exemplos

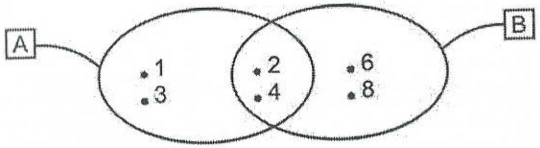
a) Seja $A = \{2; 3; 4; 5\}$
$3 \in A$
$7 \notin A$



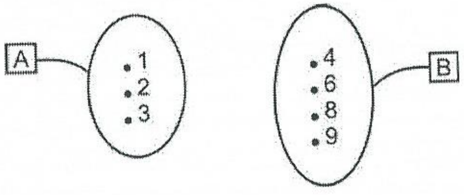
b) Sejam $A = \{2; 3\}$ e $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Neste caso $A \subset B$ e $A \neq B$.



c) Tomemos agora $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e $B = \{2; 4; 6; 8\}$. A e B têm alguns elementos comuns (mas não todos).



d) Sejam $A = \{1; 2; 3\}$ e $B = \{4; 6; 8; 9\}$. Neste caso não há elementos comuns.



Exercícios Resolvidos

2.7) Dado $A = \{2; 3; 6\}$, dê o valor V ou F:

a) $2 \in A$
b) $2 \subset A$
c) $\{2; 6\} \in A$
d) $\{2; 6\} \subset A$
e) $\{2\} \in A$
f) $\{2\} \subset A$
g) $\varnothing \in A$
h) $\varnothing \subset A$

Solução

a) V c) F e) F g) F
b) F d) V f) V h) V

2.8) Dê o valor de V ou F:

a) $\{3; 5; 7\} \subset \{3; 4; 5; 8\}$
b) $\{3; 5; 7\} \subset \{3; 5; 7\}$
c) $\{2; 3; 4; 5\} \supset \{3; 5\}$
d) $\{3; 5;\} \subset \{2; 3; 4; 5\}$
e) $\varnothing \subset \{2; 3\}$
f) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
g) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{N}$
h) $\mathbb{Z}_+^* \not\subset \mathbb{N}$

Solução

a) F c) V e) V g) F
b) V d) V f) V h) F

2.9) Dê o valor de V ou F:

a) {2; 3} é subconjunto de {1; 2; 3; 4}
b) {2; 3} é subconjunto próprio de {1; 2; 3; 4}
e) {3; 5; 9} é subconjunto de {3; 5; 9}
d) {3; 5; 9} é subconjunto próprio de {3; 5; 9}

Solução

a) V b) V c) V d) F

2.10) Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, dê o valor de V ou F:

a) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
b) $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$
c) $A \subset \varnothing \Rightarrow A = \varnothing$

Solução

a) V b) V c) V

2.11) Considere as seguintes sentenças:

1°) Nenhum esportista é preguiçoso.
2°) Carlos é advogado.
3°) Todos os advogados são preguiçosos.

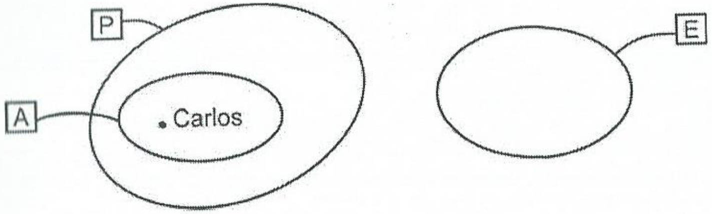
Admitindo que as três sentenças são verdadeiras, verifique qual das sentenças a seguir é certamente verdadeira:

a) Todos os preguiçosos são advogados.
b) Algum esportista é advogado.
e) Alguns advogados são esportistas.
d) Carlos não é esportista.

Solução

Sejam {
A = conjunto dos advogados
E = conjunto dos esportistas
P = conjunto dos preguiçosos

Das premissas (premissas são as sentenças iniciais, supostas verdadeiras) concluímos que o diagrama dos conjuntos é:



a) Esta não pode ser considerada obrigatoriamente verdadeira, pois o que sabemos é que "todos os advogados são preguiçosos" (isto é, $A \subset P$), mas ninguém nos garante que todos os preguiçosos são advogados (isto é, $P \subset A$).
b) Não há elemento comum aos conjuntos P e E. Portanto, a sentença b é falsa.
c) Pela mesma razão anterior, a sentença c é falsa.
d) A sentença d é verdadeira.

Exercícios Propostos

2.12) Sendo A = {1; 2; 4; 6; 9}, dê o valor de V ou F:

a) $4 \in A$
b) $4 \subset A$
c) $\{2; 9\} \in A$
d) $\{2; 9\} \subset A$
e) $\{4\} \in A$
f) $\{4\} \subset A$
g) $\varnothing \in A$
h) $\varnothing \subset A$
i) $\{2; 5\} \subset A$
j) $\{1; 2; 7\} \not\subset A$
k) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Z}$
l) {2; 1} é subconjunto de A
m) {2; 1} é subconjunto próprio de A
n) {1; 2; 4; 9; 6} é subconjunto de A
o) {1; 2; 4; 9; 6} é subconjunto próprio de A

2.13) Considere as seguintes premissas:
(I) Quem sabe caçar borboletas não é engraçado.
(II) Coelhos não sabem andar de bicicleta.
(III) Quem não sabe andar de bicicleta é engraçado.

Dentre as sentenças a seguir, diga qual pode ser conclusão das premissas:

a) Quem não sabe andar de bicicleta é coelho.
b) Quem sabe andar de bicicleta não é engraçado.
c) Quem não sabe caçar borboletas é engraçado.
d) Coelhos não sabem caçar borboletas.
e) As pessoas engraçadas não sabem andar de bibicleta.

2.14) Dadas as premissas:

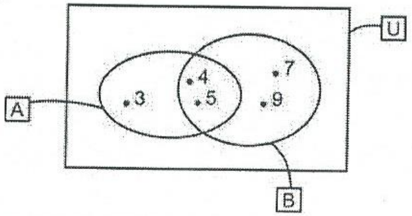
(I) Todos os médicos são pobres.
(II) Artistas são chatos.
(III) Margarido é médico.
(IV) Nenhum chato é pobre.

Assinale entre as sentenças a seguir aquela que pode ser considerada uma conclusão das premissas:

a) Alguns pobres são chatos.
b) Margarido não é artista.
c) Existe pelo menos um médico que é artista.
d) Alguns artistas são pobres.

2.7 – CONJUNTO UNIVERSO

De modo geral, nas aplicações da teoria dos conjuntos, todos os conjuntos considerados são subconjuntos de um mesmo conjunto U denominado **conjunto-universo**. Nos diagramas é "usual" representar o universo por um retângulo e dentro dele os seus subconjuntos. Assim, por exemplo, sendo U = ℕ, A = {3; 4; 5} e B = {4; 5; 7; 9} temos:



2.8 – INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

Sejam os conjuntos A e B subconjuntos de U. A interseção de A e B é o conjunto formado por todos os elementos de U, comuns a A e B. A interseção de A e B é indicada por:

$$A \cap B$$

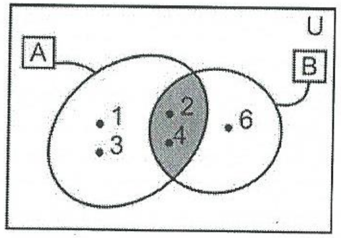
que podemos ler: "A inter B".

Exemplos

a) Dados A = {1; 2; 3; 4} e B = {2; 4; 6}, os elementos comuns a A e B são 2 e 4. Assim:

$$A \cap B = \{2; 4\}$$

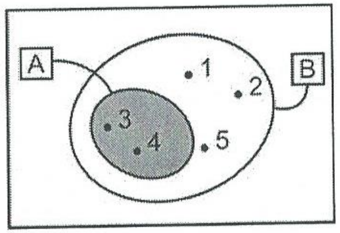
No diagrama a interseção está sombreada.



b) Sejam A = {3; 4} e B = {1; 2; 3; 4; 5}. Neste caso os elementos comuns são 3 e 4, e portanto:

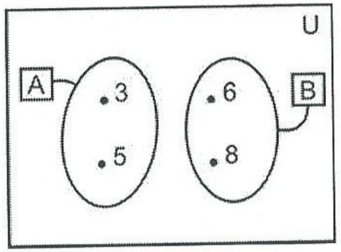
$$A \cap B = \{3; 4\}$$

Repare que, neste caso, $A \subset B$ e assim $A \cap B = A$.
No diagrama a interseção está sombreada.



c) Sejam A = {3; 5} e B = {6; 8}. Aqui não há elementos comuns e então a interseção é vazia:

$$A \cap B = \varnothing$$



Consideremos dois conjuntos A e B tais que $A \cap B = \varnothing$. Neste caso dizemos que A e B são disjuntos. É o que acontece no exemplo c acima.

De modo mais formal, podemos dar a definição de interseção de conjuntos do seguinte modo:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

2.9 – UNIÃO DE CONJUNTOS

Consideremos os conjuntos A e B, ambos subconjuntos de U. **A união (ou reunião) de A e B** é o conjunto de todos os elementos de U que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos. A união de A e B é indicada por:

$$A \cup B$$

que podemos ler: "A união B".

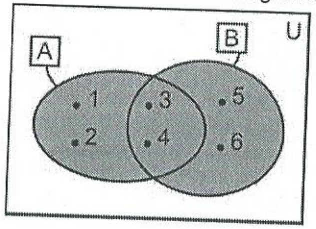
De modo mais formal:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

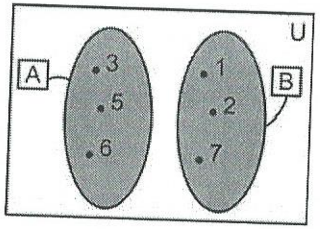
Exemplos

a) A = {1; 2; 3; 4}
B = {3; 4; 5; 6}
$A \cup B$ = {1; 2; 3; 4; 5; 6}

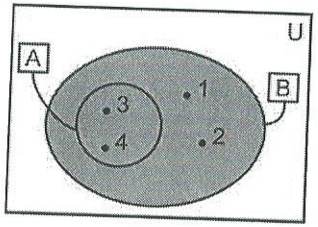
A união de A e B está sombreada no diagrama.



b) $A = \{3; 5; 6\}$
$B = \{1; 2; 7\}$
$A \cup B = \{1; 2; 7; 3; 5; 6\}$



c) $A = \{3; 4\}$
$B = \{1; 2; 3; 4\}$
$A \cup B = \{3; 4; 1; 2\}$



2.10 – PROPRIEDADES

Sejam A, B e C subconjuntos quaisquer de U. É fácil verificar as seguintes propriedades:

I) $A \cup A = A$	IV) $A \cap \varnothing = \varnothing$
II) $A \cap A = A$	V) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$
III) $A \cup \varnothing = A$	VI) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$
comutativas	
VII) $A \cup B = B \cup A$	VIII) $A \cap B = B \cap A$
associativas	
IX) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	X) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
distributivas	
XI) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
XII) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$	

2.11 – DIFERENÇA

Sejam A e B subconjuntos de U. A diferença entre A é o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B, isto é, é o conjunto de todos os elementos de A com exceção dos que são comuns a A e B. A diferença entre A e B é indicada por:

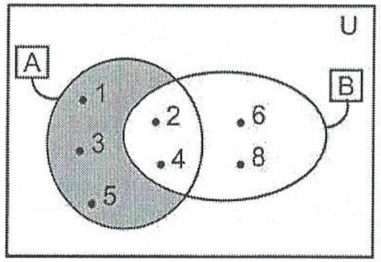
$$A - B$$

Temos então:

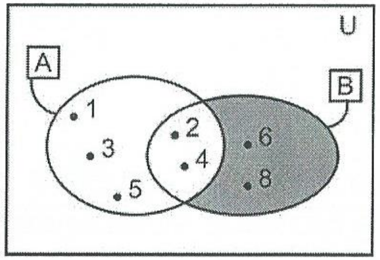
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Exemplos

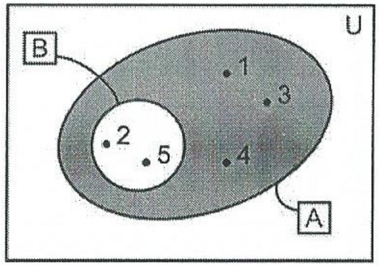
a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
$B = \{2; 4; 6; 8\}$
$A - B = \{1; 3; 5\}$



b) $A = \{1; 2; 3; 4: 5\}$
$B = \{2; 4; 6; 8\}$
$B - A = \{6; 8\}$



c) $A = \{1; 2: 3; 4; 5\}$
$B = \{2; 5\}$
$A - B = \{1; 3; 4\}$



d) A = {2; 3; 4; 5}
B = {1; 2; 3:4; 5}
A – B = ∅

e) A = {3; 4; 5}
B = {2; 7; 8}
A – B = {3; 4; 5} = A
B – A = {2; 7; 8} = B

É importante observar que, em geral, $A - B \neq B - A$.

2.12 – COMPLEMENTAR

Sejam A e B subconjuntos de U tais que $A \subset B$. Neste caso, a diferença B – A é denominada **complementar de A em B** e é indicada por:

$$C_B^A$$

Temos então:

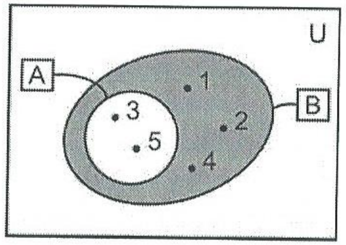
$$A \subset B \Leftrightarrow B - A = C_B^A$$

Exemplo

Tomemos os conjuntos A = {3; 5} e B = {1; 2; 3; 4; 5}. Neste caso $A \subset B$ e portanto a diferença B – A pode ser chamada de "complementar de A em B".

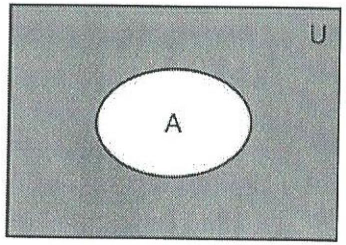
$$B - A = C_B^A = \{1; 2; 4\}$$

No diagrama está sombreado C_B^A.



Quando quisermos o complementar de A em U, podemos usar uma das notações:

$$C_U^A = C_A = A' = \bar{A}.$$



2.13 PROPRIEDADES

Sejam A, B e C subconjuntos quaisquer de U. Valem as seguintes propriedades:

I) $A - A = \emptyset$	V) $\emptyset' = U$
II) $A - \emptyset = A$	VI) $U' = \emptyset$
III) $\emptyset - A = \emptyset$	VII) $A \cup A' = U$
IV) $(A')' = A$	VIII) $A \cap A' = \emptyset$

Leis de De Morgan

IX) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
X) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
XI) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
XII) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Observação: Augustus De Morgan (1806-1871) embora tenha nascido na Índia era de família e formação inglesas. Juntamente com George Boole (inglês, 1815-1864) é considerado o iniciador da lógica moderna.

Exercícios Resolvidos

2.15) Dados: A = {2; 5; 7; 9; 8}, B = {7; 9; 6; 4}, C = {2; 4; 5; 6; 7; 8; 9} e D = {9; 6; 0; 1}, determine:

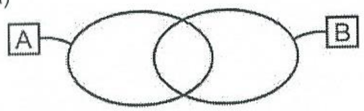
a) $A \cap B$
b) $A \cup B$
c) $A \cup (B \cap D)$
d) $A \cap (B \cup D)$
e) $A - B$
f) $B - A$
g) C_C^A
h) C_C^B

Solução

a) {7; 9}
b) {2; 5; 7; 9; 8; 6; 4}
c) {2; 5; 7; 9; 8; 6}
d) {7; 9}
e) {2; 5; 8}
f) {6; 4}
g) {4; 6}
h) {2; 5; 8}

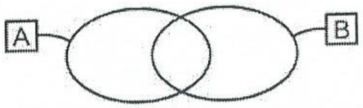
2.16) Nos diagramas abaixo, sombreie as regiões pedidas:

a)



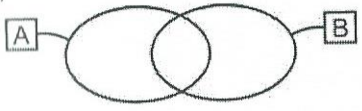
$A \cap B$

b)



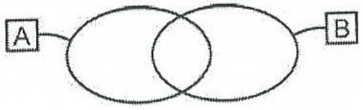
$A \cup B$

c)



A – B

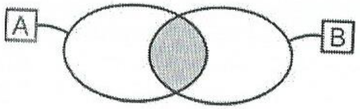
d)



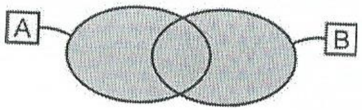
B – A

Solução

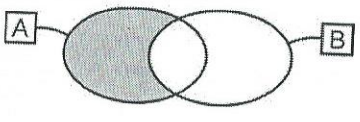
a)



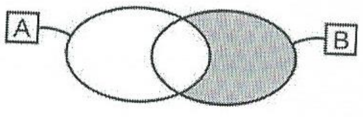
b)



c)

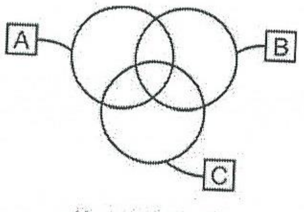


d)



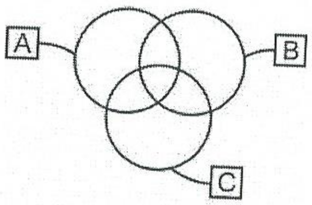
2.17) Nos diagramas abaixo, sombreie as regiões pedidas:

a)



$(A \cup B) \cap C$

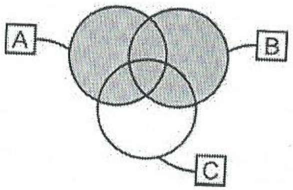
b)



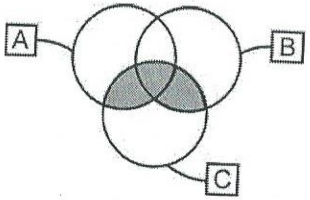
$A \cap B \cap C$

Solução

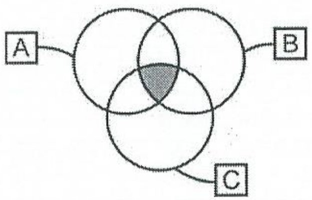
a) Em primeiro lugar sombreamos $A \cup B$:



Em seguida fazemos a interseção da região sombreada com C. obtendo finalmente:

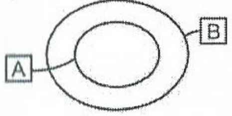


b) A operação de interseção é associativa, isto é, tanto faz obter $(A \cap B) \cap C$ como $A \cap (B \cap C)$. O que queremos é a região comum aos três conjuntos. Portanto:



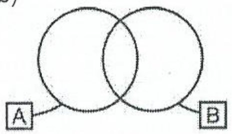
2.18) Sombreie, quando possível, as regiões pedidas:

a)



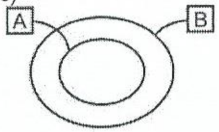
C_B^A

b)



C_B^A

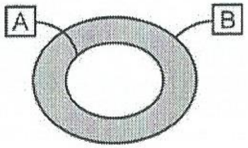
c)



C_A^B

Solução

a) Aqui temos $A \subset B$; portanto existe C_B^A que é dado por $B - A$.

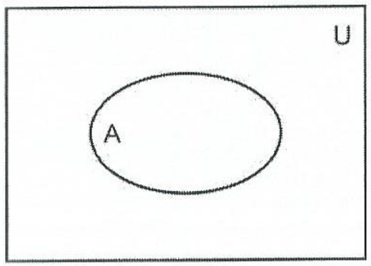


b) Neste caso $A \not\subset B$ e portanto não existe C_B^A embora exista a diferença $B - A$.

c) Para este caso, $B \not\subset A$ e assim não está definido C_A^B .

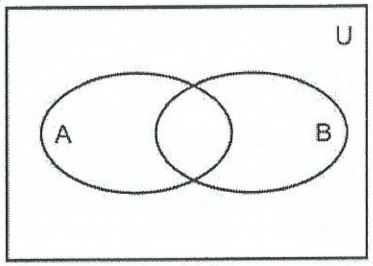
2.19) Sombreie as regiões pedidas:

a)



A'

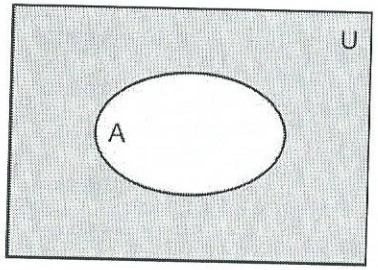
b)



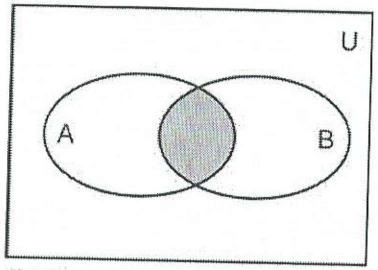
$(A \cap B)'$

Solução

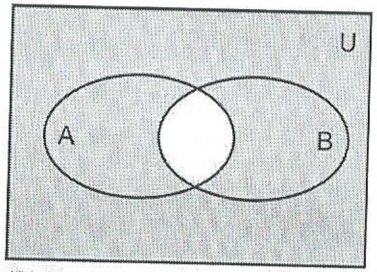
a) $A' = C_U^A = U - A$



b) Façamos primeiramente $A \cap B$ (figura a) e em seguida o complementar de $A \cap B$ (figura b).



(fig. a)



(fig. b)

Exercícios Propostos

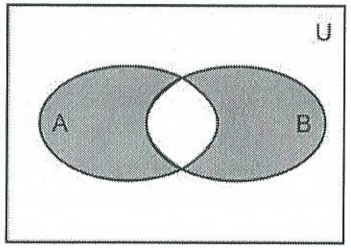
2.20) Dados A = {2; 4; 6; 8; 10}, B = {1; 3; 5; 7; 9}, C = {3; 4; 6}, D = {1; 5; 4; 8} e E = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10} determine:

a) $B \cup C$
b) $B \cap C$
c) $A \cup (B \cap C)$
d) $(A \cap C) \cup D$
e) $A \cap B$
f) $A \cup C \cup D$
g) $A \cap C \cap D$
h) $A - C$
i) $C - A$
j) C_E^D
k) $C_E^{(B \cap D)}$
l) $E - (B \cap C)$

2.21) Sejam A e B subconjuntos de U. A **diferença simétrica** de A e B é indicada por $A \Delta B$ e definida por:

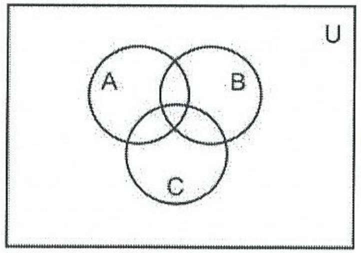
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Dados: A = {4; 6; 8; 1; 7} e B = {5; 9; 1; 8}, determine $A \Delta B$.



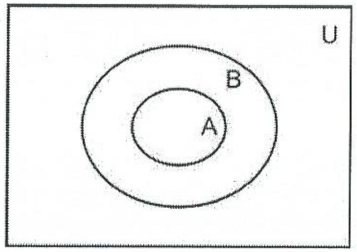
2.22) Dado o diagrama ao lado, sombreie as regiões pedidas:

a) $A \cap C$
b) $A \cap B \cap C$
c) $A - B$
d) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
e) $(B \cap C) - A$
f) A'
g) $[(A - B) \cup C]'$



2.23) Dado o seguinte diagrama, apenas uma das sentenças abaixo é verdadeira. Qual?

a) $A' \subset B'$
b) $A' - B' = A - B$
e) $A' \cap B' = B'$
d) $A' \cap B' = \emptyset$
e) $A' \cup B' = \cup$



2.24) Sejam A, B, C, D subconjuntos quaisquer de U. Dê o valor V ou F às sentenças:

a) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = A$
b) $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$
c) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$

d) $A \subset B \Rightarrow A - B = A$
e) $A \subset B \Rightarrow A - B = \varnothing$
f) $A \subset B \Rightarrow B - A = C_B^A$
g) $A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$
h) $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$
i) $A' - B' = A - B$
j) $A' - B' = B - A$
k) $A - B = A \cap B'$
l) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

2.25) Dê o valor V ou F:

a) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-$
b) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-^*$
c) $\mathbb{N} - \{0\} = \mathbb{N}*$
d) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \varnothing$
e) $C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}^*} = \mathbb{Z}_-$
f) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$
g) $\mathbb{Z}_+$ e $\mathbb{Z}_-$ são disjuntos
h) $\mathbb{Z}_+^*$ e $\mathbb{Z}_-^*$ são disjuntos

2.14 – NÚMERO DE ELEMENTOS

Dado um conjunto **finito** A, indicamos o número de elementos de A por n_A. Assim, por exemplo, se $A = \{2; 3; 7; 9\}$ temos: $n_A = 4$.

Outra notação para n_A é #A. Assim, no exemplo anterior temos: #A = 4.

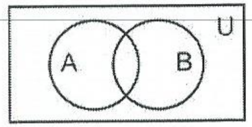
Exemplos

a) $A = \{1; 2; 3\}$	$n_A = 3$	#A = 3
b) $B = \{7; 9\}$	$n_B = 2$	#B = 2
c) $C = \{8\}$	$n_C = 1$	#C = 1
d) $D = \varnothing$	$n_D = 0$	#D = 0

Exemplo

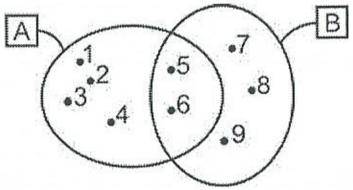
Sejam $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ e $B = \{6; 7; 8; 9\}$
Temos: $A \cup B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
$A \cap B = \{6; 7\}$
Portanto: $n_{A \cup B} = 7$ e $n_{A \cap B} = 2$
Consideremos os conjuntos finitos **A** e **B**, ambos subconjuntos de U. É fácil verificar (analisando o diagrama) que:

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$$



Exemplo

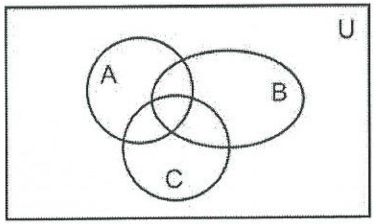
Sejam $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e $B = \{5; 6; 7; 8; 9\}$
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
$A \cap B = \{5; 6\}$
$n_A = 6$
$n_B = 5$
$n_{A \cup B} = 9$
$n_{A \cap B} = 2$



Tomemos a sentença $n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$.
Fazendo as substituições, temos: $9 = 6 + 5 - 2$, que é obviamente verdadeira.
Para o caso em que $A \cap B = \varnothing$ (isto é, A e B são disjuntos) temos:

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B$$

Consideremos agora os conjuntos A, B e C, todos eles subconjuntos de U. É fácil verificar, pela análise do diagrama, que:



$$n_{A \cup B \cup C} = n_A + n_B + n_C - n_{A \cap B} - n_{A \cap C} - n_{B \cap C} + n_{A \cap B \cap C}$$

Exercícios Resolvidos

2.26) Sendo $n_{A \cup B} = 38$, $n_{A \cap B} = 12$ e $n_B = 15$, calcule n_A.

Solução

$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$
$38 = n_A + 15 - 12$
$n_A = 35$

2.27) Em uma escola os alunos devem estudar uma língua que pode ser o francês ou o inglês. Se quiserem poderão estudar as duas. Sabendo que:

- há 200 alunos estudando francês
- há 130 alunos estudando inglês
- o total de alunos da escola é 300

determine quantos alunos estudam francês e inglês.

Solução

Sendo: I = conjunto dos estudantes de inglês
F = conjunto dos estudantes de francês

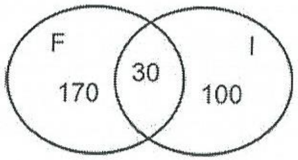
Temos: $n_I = 130$, $n_F = 200$, $n_{I \cup F} = 300$

$n_{I \cup F} = n_I + n_F - n_{I \cap F}$

$300 = 130 + 200 - n_{I \cap F}$

$n_{I \cap F} = 30$

Portanto há 30 alunos estudando francês e inglês. Levando em conta que o total dos que estudam francês é 200, concluímos que os que estudam *apenas* francês são em número de 170 (isto é, 200 – 30).
Lembrando que o total de estudantes de inglês é 130, concluímos que há 100 que estudam *apenas* inglês.

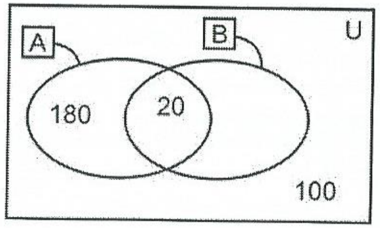


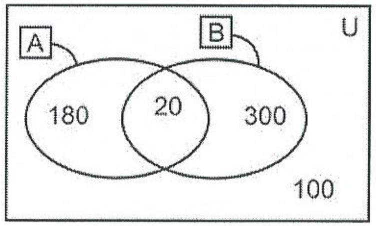
2.28) Em uma escola, cujo total de alunos é 600, foi feita uma pesquisa sobre os refrigerantes que os alunos costumam beber. Os resultados foram:

- 200 alunos bebem o refrigerante A
- 20 alunos bebem o refrigerante A e o refrigerante B
- 100 alunos não bebem A nem B.

a) Quantos bebem apenas o refrigerante A?
b) Quantos bebem apenas o refrigerante B?
c) Quantos bebem B?
d) Quantos bebem A ou B?

Solução





Na maioria dos casos é mais fácil analisar problemas deste tipo através dos diagramas e não através da fórmula. Seja U o conjunto de todos os alunos da escola. Há 100 alunos que não estão no conjunto A nem em B. Há 20 alunos que estão ao mesmo tempo em A e em B. Como o total de alunos de A é 200, concluímos que o número de alunos que bebem apenas o refrigerante A é: 200 – 20 = 180.
O total de alunos da escola é 600 e portanto, descontando os 100 que não estão em A nem em B. temos que $n_{A \cup B} = 500$. Como o conjunto A tem 200 elementos, o número de elementos que estão **apenas** em B é: 500 – 200 = 300.
Portanto, podemos dar as respostas:
a) 180
b) 300
e) 320
d) 500

Exercícios Propostos

2.29) Sabendo que $n_A = 47$, $n_B = 30$ e $n_{A \cup B} = 60$, determine:
a) $n_{A \cap B}$
b) $n_{A - B}$
c) $n_{B - A}$

2.30) Sejam A, B e C conjuntos finitos. Sabe-se que $n_{A \cap B \cap C} = 8$, $n_{A \cap B} = 15$, $n_{A \cap C} = 20$, $n_{B \cap C} = 24$, $n_C = 50$, $n_B = 60$ e $n_{A \cup B \cup C} = 129$. Determine:
a) n_A
b) $n_{B - A}$
c) $n_{C - A}$
d) $n_{A - B}$
e) $n_{(A \cap B) - C}$
f) $n_{A \cup C}$

2.31) Os conjuntos A e B são ambos finitos e subconjuntos de U. Sabe-se que $n_A = 30$, $n_B = 36$, $n_U = 68$, $n_{A \cup B} = 50$. Determine:
a) $n_{A \cap B}$
b) $n_{A'}$
c) $n_{B'}$
d) $n_{B \cap A'}$

2.32) Foi feita uma pesquisa entre 3.600 pessoas sobre os jornais que costumam ler e o resultado foi que:

- 1.100 lêem "O Diário"
- 1.300 lêem "O Estado"
- 1.500 lêem "A Folha"
- 300 lêem "O Diário" e "O Estado"
- 500 lêem "A Folha" e "O Estado"
- 400 lêem "A Folha" e "O Diário"
- 100 lêem "A Folha", "O Diário" e "O Estado"

a) Quantas pessoas lêem apenas "O Diário?
b) Quantas pessoas lêem apenas "O Estado"?
e) Quantas pessoas lêem apenas "O Estado" e "A Folha"?
d) Quantas pessoas não lêem nenhum dos três jornais?
e) Quantas pessoas lêem apenas um dos três jornais?
f) Quantas pessoas lêem mais de um dos três jornais?

2.33) Em uma escola, foi feita uma pesquisa entre os alunos para saber que revista costumam ler e o resultado foi que, dos alunos consultados:

- 40% lêem a revista "Olhe"
- 37% lêem a revista "Pois é"
- 17% lêem "Olhe" e "Pois é"

a) Quantos por cento não lêem nenhuma das duas?
b) Quantos por cento lêem apenas "Olhe"?
c) Quantos por cento lêem apenas uma das duas revistas?

2.15 – CONJUNTOS DE CONJUNTOS

Pode acontecer que os elementos de um conjunto sejam também conjuntos.

Exemplo

Consideremos o conjunto: A = {{3; 4}, {5; 6; 7}, {8}}
Neste caso o conjunto A tem 3 elementos, que são os conjuntos:

{3; 4}, {5; 6; 7} e {8}

Portanto, podemos escrever:

$$\{3; 4\} \in A$$
$$\{5; 6; 7\} \in A$$
$$\{\{3; 4\}, \{5; 6; 7\}\} \subset A$$

Mas **não** podemos escrever:

$$\{3;4\} \subset A;\ 3 \in A;\ 8 \in A$$

2.16 – CONJUNTO DAS PARTES DE UM CONJUNTO

Consideremos um conjunto finito A.
Chamamos de **conjunto das partes de A** o conjunto cujos elementos são *todos* os subconjuntos de A. O conjunto das partes de A é representado por:

P(A)

Exemplo

Seja A = {2; 5}. Os subconjuntos de A são:

{2}, {5}, {2; 5} e ∅

Portanto:

P(A) = {{2}, {5}, {2; 5}, ∅}

Seja A um conjunto finito que possui **n** elementos. Pode-se demonstrar (com os recursos da Análise Combinatória) que o número de elementos de P(A) é igual a:

$$2^n$$

Assim, no exemplo acima, o conjunto A tem 2 elementos (n = 2) e portanto P(A) tem 2^2 elementos, isto é, 4 elementos.
Se tomarmos o conjunto B = {4; 7; 9}, que possui 3 elementos (n = 3), podemos afirmar que P(B) tem 2^3 elementos, isto é, 8 elementos.

Exercícios Resolvidos

2.34) Dado o conjunto: A = {{2; 6}, {3; 4; 9}, {8}}, dê o valor V ou F:

a) $\{2; 6\} \in A$
b) $\{2; 6\} \subset A$
c) $\{8\} \in A$
d) $\{8\} \subset A$
e) $2 \in A$
f) $8 \in A$
g) $\varnothing \subset A$
h) $\varnothing \in A$
i) $\{\{2; 6\}, \{3; 4; 9\}\} \subset A$
j) $\{\{2; 6\}\} \subset A$

Solução

a) V
O conjunto {2; 6} é elemento de A: portanto podemos escrever: $\{2; 6\} \in A$;
b) F
Para que $\{2; 6\} \subset A$ fosse verdadeira, todos os elementos de {2; 6} deveriam ser também elementos de A. Mas acontece que 2 é elemento de {2; 6}, mas não é elemento de A, o mesmo acontecendo com o número 6.
c) V
d) F , ele pertence a A.
e) F
f) F
g) V , o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
h) F, ele está contido, ele nao pertence.
i) V
j) V

2.35) Sendo B = {{3; 4}, {1; 2; 5}, Ø} dê o valor V ou F:

a) $\varnothing \subset B$
b) $\varnothing \in B$
c) $\{3; 4\} \in B$
d) $\{\{3; 4\}, \{1; 2; 5\}\} \subset B$
e) $\{\{3; 4\}, \varnothing\} \subset B$

Solução

a) V
b) V
c) V
d) V
e) V

2.36) Considere o conjunto $A = \{\varnothing\}$. Dê o valor V ou F:

a) $\varnothing \in A$
b) $\varnothing \subset A$
c) $\varnothing = \{\varnothing\}$
d) A possui um elemento

Solução

a) V
b) V
c) F
d) V

2.37) Seja $A = \{2; 3; 5\}$

a) Determine P(A).
b) Quantos elementos tem P(A)?

Solução

a) $P(A) = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \{2; 3\}, \{2; 5\}, \{3; 5\}, \{2; 3; 5\}, \varnothing\}$
b) A possui 3 elementos e portanto P(A) possui 2^3 elementos, isto é, 8 elementos, o que pode ser verificado acima.

Exercícios Propostos

2.38) Sendo $A = \{4; 6\}, \{1; 3; 5\}, \{9\}\}$ e $B = \{\{8\}, \{3; 6\}, \varnothing\}$ dê o valor V ou F:

a) $\{4; 6\} \in A$
b) $\{4; 6\} \subset A$
c) $4 \in A$
d) $9 \in A$
e) $\{9\} \subset A$
f) $\{9\} \in A$
g) $\varnothing \subset A$
h) $\varnothing \subset B$
i) $\varnothing \in A$
j) $\varnothing \in B$
k) $\{\{4; 6\}, \{1; 3; 5\}\} \subset A$
l) $\{4; 6\}\} \subset A$
m) $\{\varnothing\} \subset A$
n) $\{\varnothing\} \subset B$

2.39) Sendo $A = \{1; 2; 3; 5\}$, determine:

a) o número de subconjuntos de A.
b) o número de subconjuntos próprios de A.

2.17 – NÚMEROS REAIS

Além dos números naturais e dos números inteiros, devemos nos "lembrar" agora dos números **racionais** e dos **reais**.

O conjunto dos números racionais é simbolizado por $\mathbb{Q}$ e é definido como sendo o conjunto de todos os números que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$ onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{a}{b} \wedge a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^*\}$$

Assim, por exemplo, são números racionais:

$$\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{-5}{9}, \frac{3}{1}$$

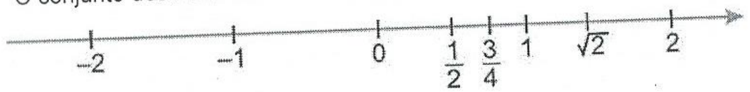
É fácil concluir que todo número inteiro é também racional. Por exemplo, o número inteiro 8 pode ser escrito como $\frac{8}{1}$ e portanto é racional. Podemos então escrever:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Quanto aos números reais a definição é bem mais complicada e está além do nível do nosso curso. Para nós bastará lembrar que existe uma correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta:

A cada número real corresponde um único ponto da reta e a cada ponto da reta corresponde um único número real.

O conjunto dos reais é simbolizado por $\mathbb{R}$:



Todo número racional é também real, isto é, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Porém há números reais que não são racionais: são os números **irracionais**. Como exemplos de números irracionais podemos citar:

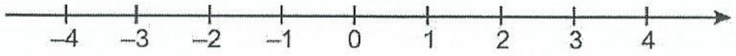
$$\sqrt{2}; \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\sqrt{2}; \pi; \frac{\pi}{4}$$

O conjunto dos irracionais não tem símbolo especial. Podemos representá-lo por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou então por $C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}}$. Quando estiver convencionado que o universo é $\mathbb{R}$, poderemos representar os irracionais por $\mathbb{Q}'$ ou $\overline{\mathbb{Q}}$.

Nos exercícios, há alguns números irracionais que aparecem com bastante freqüência. Assim sendo, é interessante decorar seus valores *aproximados*. Esses casos estão relacionados no quadro abaixo.

$\sqrt{2} \cong 1,414$
$\sqrt{3} \cong 1,732$
$\sqrt{5} \cong 2,236$
$\pi \cong 3,14$

É importante também lembrar que dados dois números reais distintos, ao representá-los na reta, o maior fica à direita do menor. Assim, por exemplo, temos: $3 > 1$, $-3 < -1$, $0 > -4$, $1 > -4$.



Para os racionais e para os reais, temos notações análogas às adotadas para os naturais e os inteiros:

$\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0\}$ $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$\mathbb{Q}^*_+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$ $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\}$ $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

$\mathbb{Q}^*_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$ $\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Outro fato importante a ressaltar é quanto ao uso das palavras **positivo** e **negativo**. Há duas maneiras diferentes de usar tais palavras.

1) Para alguns autores, os números *positivos* são aqueles que são *maiores que zero* e os *negativos* são os *menores que zero*. O número zero, para esses autores, não é positivo nem negativo. Assim, dentro desta convenção temos:

   $\mathbb{R}^*_+$ = conjunto dos números reais positivos

   $\mathbb{R}^*_-$ = conjunto dos números reais negativos

2) Para outros autores, a convenção é a seguinte:

   $\mathbb{R}_+$ = conjunto dos números reais *positivos*

   $\mathbb{R}^*_+$ = conjunto dos números reais *estritamente positivos*

   $\mathbb{R}_-$ = conjunto dos números reais *negativos*

   $\mathbb{R}^*_-$ = conjunto dos números reais *estritamente negativos*

   Portanto, para estes autores, o número zero é ao mesmo tempo *positivo* e *negativo*, porém não é *estritamente positivo* nem *estritamente negativo*.

Nós adotaremos a primeira convenção, isto é, ao longo deste livro vale:

$\mathbb{R}^*_+$ = conjunto dos números reais positivos

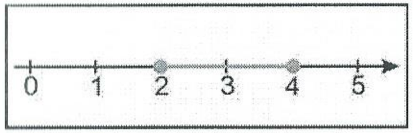
$\mathbb{R}^*_-$ = conjunto dos números reais negativos

2.18 – INTERVALOS

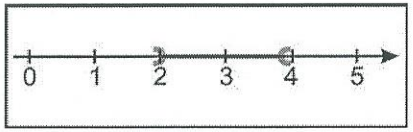
Há alguns subconjuntos dos números reais que recebem o nome de intervalo.

Intervalos Finitos

Consideremos o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$. Esse conjunto pode ser representado como no diagrama abaixo. Diremos que o conjunto A é um *intervalo fechado* de *extremidades* 2 e 4 e podemos representá-lo por A = [2; 4].

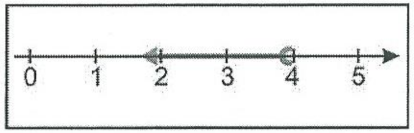


Consideremos agora o conjunto $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$. Podemos representar esse conjunto na reta, como no diagrama abaixo. As meias-luas servem para indicar que os números 2 e 4 não fazem parte do conjunto. Diremos que o conjunto B é um *intervalo aberto* de *extremidades* 2 e 4 e podemos representá-lo por B =]2; 4[.

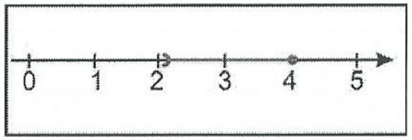


Vemos então que um intervalo fechado inclui as extremidades, enquanto que um intervalo aberto não inclui as extremidades.

Tomemos o conjunto $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 4\}$. Neste caso, temos $2 \in C$ e $4 \notin C$. Podemos representar na reta o conjunto C pelo diagrama abaixo. A meia-lua indica que o número 4 não está incluído. Diremos que o conjunto C é um intervalo *fechado à esquerda* e *aberto à direita* de extremidades 2 e 4. Podemos dizer também que o conjunto C é um intervalo *fechado-aberto* de extremidades 2 e 4. O conjunto C pode ser representado por C = [2; 4[.



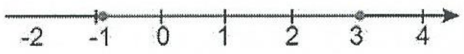
Seja o conjunto $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 4\}$. Temos agora um intervalo *aberto à esquerda* e *fechado à direita* de extremidades 2 e 4. Podemos também dizer que D é um intervalo *aberto-fechado* de extremidades 2 e 4. A representação de D é D =]2; 4].



Exemplos

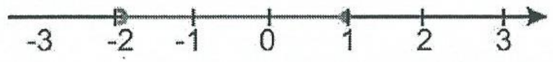
a) O conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 3\}$ é um intervalo fechado de extremos –1 e 3.

   A = [–1; 3]



b) O conjunto B = {x ∈ ℝ | −2 < x ≤ 1} é um intervalo aberto-fechado de extremos −2 e 1. Podemos dizer também que é um intervalo aberto à esquerda e fechado à direita de extremos −2 e 1.

B =]−2; 1]



Os intervalos aberto-fechado e fechado-aberto costumam ser chamados também de semi-abertos (ou semi-fechados).

Intervalos Infinitos

Seja **a** número real qualquer.
Intervalos infinitos são conjuntos dos tipos:

A = {x ∈ ℝ | x ≤ a} C = {x ∈ ℝ | x ≥ a}

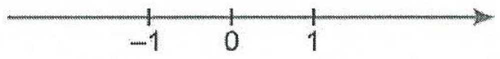
B = {x ∈ ℝ | x < a} D = {x ∈ ℝ | x > a}

Estes conjuntos podem ser representados dos seguintes modos:

A =]−∞; a] B =]−∞; a[C = [a; +∞[D =]a; +∞[

Em particular, podemos dizer que o conjunto dos reais é um intervalo infinito:

ℝ =]−∞; +∞[

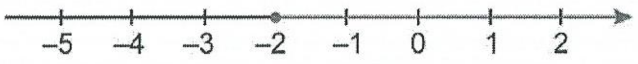


O símbolo +∞ lê-se "mais infinito" e o símbolo −∞ lê-se "menos infinito".

Exemplo

O conjunto M = {x ∈ ℝ | x ≥ −2} é um intervalo infinito que pode ser representado por:

M = [−2; +∞[



Sejam a e b números reais tais que a < b. Temos então:

Subconjunto de ℝ	Representação na reta real	Nomenclatura	Notação de intervalo
{x ∈ ℝ | a ≤ x ≤ b}	a b	Intervalo fechado de extremos a e b	[a; b]
{x ∈ ℝ | a < x < b}	a b	Intervalo aberto de extremos a e b	]a; b[
{x ∈ ℝ | a ≤ x < b}	a b	Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita; seus extremos são a e b	[a; b[
{x ∈ ℝ | a < x ≤ b}	a b	Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita; seus extremos são a e b	]a; b]
{x ∈ ℝ | x ≥ a}	a	Intervalo infinito	[a; +∞[
{x ∈ ℝ | x > a}	a	Intervalo infinito	]a; +∞[
{x ∈ ℝ | x ≤ a}	a	Intervalo infinito	]−∞; a]
{x ∈ ℝ | x < a}	a	Intervalo infinito	]−∞; a[

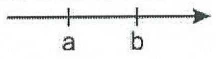
Observações:

1) Alguns autores, para representar os intervalos [a; b[,]a; b],]a; b[, usam, respectivamente, as notações:

[a; b), (a; b], (a; b)

Porém preferimos não usar essas notações, pois – no caso (a; b) – pode haver confusão com **par ordenado**.

2) Embora tenham pouco interesse, há alguns casos que devem ser mencionados. Se a < b, então temos:



[b; a] = {x ∈ ℝ | b ≤ x ≤ a} = ∅

]b; a[= {x ∈ ℝ | b < x < a} = ∅

]a; a[= {x ∈ ℝ | a < x < a} = ∅

[a; a] = {x ∈ ℝ | a ≤ x ≤ a} = {a}

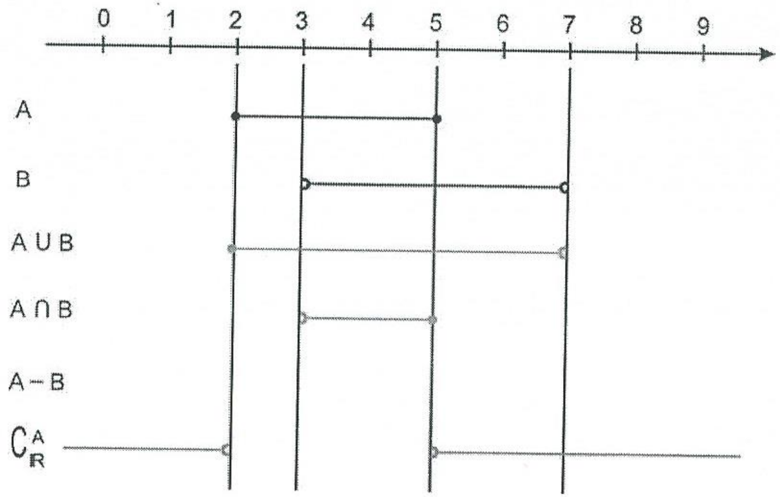
Exercícios Resolvidos

2.40) Sendo A = [2; 5] e B =]3; 7[determine:

a) $A \cup B$ c) $A - B$

b) $A \cap B$ d) $C_{\mathbb{R}}^{A}$

Solução



a) $A \cup B = [2; 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x < 7\}$

b) $A \cap B =]3; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \le 5\}$

c) $A - B = [2; 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 3\}$

d) $C_{\mathbb{R}}^{A} =]-\infty; 2[\cup]5; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 5\}$

Exercícios Propostos

2.41) Dê o valor V ou F:

a) $5 \in \mathbb{N}$

b) $7 \in \mathbb{N}$

c) $7 \in \mathbb{Z}$

d) $7 \in \mathbb{Q}$

e) $7 \in \mathbb{R}$

f) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

g) $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{R}$

h) $\sqrt{5} \in \mathbb{N}$

i) $\pi \in \mathbb{Z}$

j) $\pi \in \mathbb{R}$

k) $0 \in \mathbb{R}$

l) $\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$

m) $-3 \in \mathbb{R}_-$

n) $0 \in \mathbb{R}_-$

o) $0 \in \mathbb{R}^*_-$

p) $\frac{-\sqrt{3}}{5} \in \mathbb{R}_+$

2.42) Determine:

a) $[4; 7] \cup [6; 9]$

b) $[4; 7] \cap [6; 9]$

c) $[3; 6[\cup [4; 10[$

d) $[-3; \infty[\cap [-8; 2]$

e) $[7; 11[- [-4; 9]$

2.43) Sejam:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x < 1\}$ $B = [-1; 2[$ $C =]-2; \frac{5}{4}[$

Determine:

a) $A \cap B \cap C$

b) $(A - B) \cup C$

c) $(A \cap B) - C$

d) $B \cap C$

2.44) Dados: $A = \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$, $B = \left[-2; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $C = \left]-1; \frac{3}{4}\right]$, determine:

a) $A \cap B \cap C$

b) $(A \cap B) - C$

Exercícios Suplementares

I.1) Sendo U = {(0; −1); (−1; −4); (2; 3); (−2; 4)}, dê o conjunto-verdade da sentença aberta:
$3x - y = 1$

I.2) Construa a tabela-verdade da sentença:
$\sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim r)$

I.3) Sendo $A = \left[\frac{-49}{10}; 1\right[$, $B = \left]\frac{-\sqrt{2}}{3}; \pi\right[$ e $C = [2; +\infty[$, determine:

a) $A - B$ b) $B - A$ c) $A \cap B \cap C$

I.4) Sejam A, B e C subconjuntos de U, tais que:

$n_U = 52$

$n_{A \cap C} = 8$

$n_A = 20$

$n_{A \cap B \cap C} = 3$

$n_{B \cap C} = 9$

$n_{A \cup B \cup C} = 45$

$n_{A \cap B} = 7$

$n_{B - A} = 15$

Determine:

a) n_B

b) n_C

c) $n_{A \cup B}$

d) $n_{U - (A \cup B \cup C)}$

PARTE II

Capítulo 3 – **Equações**
Capítulo 4 – **Inequações**

Capítulo

3 Equações

3.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo principal deste capítulo é o estudo das equações do 1º grau e 2º grau com **uma** variável e as equações que se reduzem a elas. Porém trataremos também, de modo rápido, dos sistemas de equações com mais de uma variável.

No caso de equações, é costume chamar as variáveis de **incógnitas** e os valores que satisfazem as equações, de **raízes**.

Resolver uma equação significa determinar o seu **conjunto-verdade**, isto é, o conjunto de suas raízes.

Como vimos no capítulo 1, o conjunto-verdade depende do universo, quando nada for mencionado, adotaremos $U = \mathbb{R}$.

3.2 – ALGUMAS PROPRIEDADES DA IGUALDADE

$$P_1 \quad \boxed{a = b \Leftrightarrow a + m = b + m} \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{R}$$

Esta propriedade nos diz que podemos somar (ou subtrair) um mesmo número aos dois membros de uma igualdade, obtendo uma sentença equivalente.

É com base nesta propriedade que podemos "passar" um termo de "um lado para outro" de uma igualdade, desde que troquemos seu sinal.

Exemplo

Consideremos a sentença aberta: $x + 5 = 7$. Vamos somar aos dois membros o número -5:

$$x + 5 - 5 = 7 - 5$$

obtendo então:

$$x = 7 - 5$$

Temos, portanto:

$$x + 5 = 7 \Leftrightarrow x = 7 - 5$$

$$P_2 \quad \boxed{\begin{array}{l} a = b \Leftrightarrow am = bm \\ a = b \Leftrightarrow \dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{m} \end{array}} \qquad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall b \in \mathbb{R},\ \forall m \in \mathbb{R}^*$$

De acordo com esta propriedade, podemos multiplicar (ou dividir) ambos os membros de uma igualdade por um número diferente de zero, obtendo uma sentença equivalente.

Exemplo

Consideremos a sentença: 3x = 12. Vamos dividir os dois membros por 3 obtendo: $\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$, isto é, $x = \frac{12}{3}$.

Portanto:

$$3x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{3}$$

Exemplo

Observe que a implicação: $a = b \Rightarrow a \cdot (0) = b \cdot (0)$ é verdadeira. Porém a implicação $a \cdot (0) = b \cdot (0) \Rightarrow a = b$ **não** é verdadeira, pois poderíamos ter, por exemplo:

$$\underbrace{7 \cdot (0) = 5 \cdot (0)}_{\text{verdadeira}} \Rightarrow \underbrace{7 = 5}_{\text{falsa}}$$

que é obviamente falsa.

Por este exemplo percebemos a necessidade de se impor $m \neq 0$ (isto é, $m \in \mathbb{R}^*$) no enunciado da propriedade P_2.

3.3 – EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU COM UMA INCÓGNITA

"Equação do primeiro grau com uma incógnita" é uma equação que pode ser reduzida à forma:

$$ax + b = 0 \quad (a \neq 0)$$

onde: **x** é a incógnita
a e **b** são constantes denominadas coeficientes
b é o termo independente

A determinação do conjunto-verdade de uma equação do primeiro grau é feita através da aplicação direta das propriedades P_1 e P_2 vistas acima.

Exercícios Resolvidos

3.1) Resolva a equação: 4x + 20 = 0

Solução

$$4x + 20 = 0 \xleftrightarrow{P_1} 4x = -20 \xleftrightarrow{P_2} x = -\frac{20}{4} = -5$$

Portanto, o conjunto-verdade é:

$$V = \{-5\}$$

3.2) Resolva a equação: 5x – 9 = 8x + 16

Solução

$$5x - 9 = 8x + 16 \xleftrightarrow{P_1} 5x - 8x = 16 + 9 \Leftrightarrow -3x = 25 \xleftrightarrow{P_2} x = \frac{25}{-3}$$

Portanto:

$$V = \left\{-\frac{25}{3}\right\}$$

3.3) Resolva a equação: 3x – 2 = 4x + 9

Solução

$$3x - 2 = 4x + 9 \xleftrightarrow{P_1} 3x - 4x = 9 + 2 \Leftrightarrow -x = 11 \xleftrightarrow{P_2} x = -11$$

Assim:

$$V = \{-11\}$$

3.4) Resolva a equação: $\frac{3x}{2} - 4 = 5x + \frac{2}{3}$

Solução

O mínimo múltiplo comum (mmc) dos denominadores é 6. Vamos então multiplicar os dois membros da igualdade por 6:

$$6\left(\frac{3x}{2} - 4\right) = 6\left(5x + \frac{2}{3}\right)$$

$$9x - 24 = 30x + 4$$

Portanto:

$$\frac{3x}{2} - 4 = 5x + \frac{2}{3} \xleftrightarrow{P_2} 9x - 24 = 30x + 4 \xleftrightarrow{P_1} 9x - 30x = 24 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -21x = 28 \xleftrightarrow{P_2} x = \frac{28}{-21} = -\frac{4}{3}$$

Portanto, o conjunto-verdade e: $V = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

3.5) Considere a equação 3x – m = 13, onde x é a incógnita. Determine o valor de m sabendo que a raiz da equação é –4.

Solução

Se –4 é a raiz da equação, ao substituirmos x por –4 deveremos obter uma sentença verdadeira:

$$3(-4) - m = 13$$
$$-12 - m = 13$$
$$m = -25$$

3.6) Resolva as equações:
a) 4x + 1 = 2(2x –3) + 7
b) 12x – 7 = 3(5x + 2) – 3x + 9

Solução

a) $4x + 1 = 2(2x - 3) + 7 \Leftrightarrow 4x + 1 = 4x - 6 + 7 \Leftrightarrow 4x - 4x = -6 + 7 - 1 \Leftrightarrow 0 = 0$

Assim: $4x + 1 = 2(2x - 3) + 7 \Leftrightarrow 0 = 0$
Como a sentença "0 = 0" é verdadeira para qualquer valor de x (isto é, é independente de x), a equação fornecida será satisfeita para qualquer valor de x. Portanto, o conjunto-verdade é igual ao universo:

$$V = \mathbb{R}$$

e a sentença aberta: $4x + 1 = 2(2x - 3) + 7$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

b) $12x - 7 = 3(5x + 2) - 3x + 9 \Leftrightarrow 12x - 7 = 15x + 6 - 3x + 9 \Leftrightarrow$
$12x - 15x + 3x = 6 + 9 + 7 \Leftrightarrow 0 = 22$
Como a sentença "0 = 22" é falsa (é falsa para qualquer valor de x), então a equação fornecida não será satisfeita para nenhum valor de x. Podemos dizer que a equação não tem solução:

$$V = \varnothing$$

Exercícios Propostos

3.7) Resolva as equações:
a) $4x - 3 = -2x + 15$
b) $4(x - 5) + 3x + 1 = 2(x - 2) + 15(x - 3)$
c) $\dfrac{x-7}{5} + 2 = \dfrac{x+8}{10}$
d) $\dfrac{x}{3} + 2 = \dfrac{4x-1}{6} + \dfrac{x}{2}$

3.8) Resolva as equações:
a) $\dfrac{3x-1}{3} = \dfrac{2x+5}{2}$ b) $\dfrac{3(2x+1)}{2} = 3x + \dfrac{3}{2}$

3.9) Considere a equação: $2x = m - 1$, onde x é a incógnita. Sabendo que seu conjunto-solução é $S = \{-7\}$, determine o valor de m.

3.4 – CONJUNTO-VERDADE DE SENTENÇAS ABERTAS MOLECULARES

Seja s_1 uma sentença aberta cujo conjunto-verdade é V_1 e seja s_2 uma outra sentença aberta de conjunto-verdade V_2. Temos então:

a) O conjunto-verdade da sentença aberta:
$$s_1 \wedge s_2$$
é: $V = V_1 \cap V_2$

b) O conjunto-verdade da sentença aberta:
$$s_1 \vee s_2$$
é: $V = V_1 \cup V_2$

Exemplo

Sendo $U = \mathbb{N}$, considere as sentenças abertas:
s_1: $x > 5$
s_2: $x < 9$

O conjunto-verdade de s_1 é: $V_1 = \{6; 7; 8; 9; 10; ...\}$ e o conjunto-verdade de s_2 é: $V_2 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.
Consideremos agora a sentença aberta $s_1 \wedge s_2$, isto é,

$$x > 5 \wedge x < 9$$

Seu conjunto-verdade é: $V = V_1 \cap V_2 = \{6; 7; 8\}$

Se tomarmos a sentença aberta: $s_1 \vee s_2$, isto é,

$$x > 5 \vee x < 9$$

seu conjunto-verdade será: $V = V_1 \cup V_2 = \{0; 1; 2; ...\} = \mathbb{N}$

O que dissemos acima para duas sentenças abertas pode ser generalizado para três ou mais sentenças abertas. Por exemplo, consideremos as sentenças abertas s_1, s_2 e s_3 cujos conjuntos-verdade são respectivamente V_1, V_2 e V_3. O conjunto-verdade da sentença aberta:

$$s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$$

é $V = V_1 \cap V_2 \cap V_3$

O conjunto-verdade da sentença aberta:

$$s_1 \vee s_2 \vee s_3$$

é $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$

Exercícios Resolvidos

3.10) Sendo $U = \mathbb{N}$ dê os conjuntos-verdade das sentenças abertas:
a) $2x - 8 = 0 \vee 5x - 15 = 0$ b) $x < 7 \wedge 3x - 27 = 0$

Solução

a) $2x - 8 = 0 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ $V_1 = \{4\}$
$5x - 15 = 0 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$ $V_2 = \{3\}$
O conjunto-verdade da sentença aberta:

$$2x - 8 = 0 \vee 5x - 15 = 0$$

é: $V = V_1 \cup V_2 = \{3; 4\}$

b) O conjunto-verdade de: $x < 7$ é: $V_1 = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ e o conjunto-verdade de: $3x - 27 = 0$ é: $V_2 = \{9\}$. Assim o conjunto-verdade de $x < 7 \wedge 3x - 27 = 0$ é:

$$V = V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

3.11) Sendo $U = \mathbb{R}$, dê o conjunto-verdade da sentença aberta:

$$4x + 1 = 5x - 2 \wedge x - 3 \neq 0$$

Solução

$4x + 1 = 5x - 2 \Leftrightarrow x = 3$ $\Rightarrow$ $V_1 = \{3\}$

$x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ $\Rightarrow$ $V_2 = \mathbb{R} - \{3\}$

O conjunto-verdade de "$4x + 1 = 5x - 2 \wedge x - 3 \neq 0$" é:

$$V = V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

3.12) Resolva a equação $\dfrac{4}{x^2-1} = \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{4}{3(x-1)}$

Solução

Neste caso (há incógnita no denominador) devemos garantir que nenhum dos denominadores se anule. Portanto, devemos ter:

$$x_2 - 1 \neq 0 \text{ e } x + 1 \neq 0 \text{ e } 3(x - 1) \neq 0$$

Porém:

$$\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1 \text{ e } x \neq -1 \\ x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \\ 3(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

Supondo então que os denominadores não se anulem, vamos simplificar a equação proposta. Lembrando do produto notável:

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

podemos escrever:

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x + 1)\,(x - 1)$$

e assim constatamos que $x^2 - 1$ é divisível por $(x + 1)$ e por $(x - 1)$. Portanto, o mmc dos denominadores é $3(x^2 - 1)$. Agora dividimos o mmc por cada denominador e multiplicamos o resultado obtido pelo numerador obtendo:

$$12 = 9(x - 1) - 4(x + 1)$$

Assim:

$$\frac{4}{x^2-1} = \frac{3}{x+1} - \frac{4}{3(x-1)} \Leftrightarrow 12 = 9(x-1) - 4(x+1) \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

Mas: $12 = 9(x - 1) - 4(x + 1) \Leftrightarrow x = 5$

O valor 5 satisfaz todas as condições e, portanto:

$$V = \{5\}$$

3.13) Resolva a equação $\dfrac{7}{x-2} = \dfrac{3}{-6x+12}$

Solução

Neste caso devemos ter: $x - 2 \neq 0$ e $-6x + 12 \neq 0$

$$\begin{cases} x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ -6x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \end{cases}$$

Assim:

$$\frac{7}{x-2} = \frac{3}{-6x+12} \Leftrightarrow 7(-6x+12) = 3(x-2) \wedge x \neq 2$$

$$\begin{cases} x \neq 2 & V_1 = \mathbb{R} - \{2\} \\ 7(-6x+12) = 3(x-2) \Leftrightarrow x = 2 & V_2 = \{2\} \end{cases}$$

O conjunto-verdade da equação proposta é:

$$V = V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

Exercícios Propostos

3.14) Sendo $U = \mathbb{R}$ dê os conjuntos-verdade das sentenças abertas:

a) $3x + 8 = 0 \vee 5x - 9 = 0$
b) $2x - 3 = 0 \vee 4x - 20 = 0 \vee 7x - 1 = 20$
c) $3x + 7 = 6x - 8 \wedge x - 5 \neq 0$
d) $4x + 1 = 6x - 19 \wedge x - 3 \neq 0$

3.15) Dê o conjunto-verdade da sentença aberta:

$$(x - 4 = 0 \vee 3x - 15 = 0 \vee 4x - 28 = 0) \wedge (x \neq 5)$$

3.16) Resolva as equações:

a) $\dfrac{5}{x} = 4 - \dfrac{3x-5}{x}$

b) $\dfrac{6}{5x} = \dfrac{2}{x+4}$

c) $3 + \dfrac{7}{x-5} = \dfrac{2x+1}{x-5}$

d) $13 - \dfrac{2}{x+2} = \dfrac{4x+6}{x+2}$

e) $\dfrac{3}{x-6} = \dfrac{1}{2x-4}$

3.5 – PROPRIEDADES

Sabemos que:

$$P_3 \quad \begin{array}{|l|} \hline a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0 \\ \dfrac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b \neq 0 \\ \hline \end{array}$$

Baseados nisso, podemos resolver equações dos tipos que aparecem a seguir.

Exercícios Resolvidos

3.17) Resolva a equação: $(2x - 3)(7 - 8x) = 0$

Solução

$(2x - 3)(7 - 8x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ ou $7 - 8x = 0$

$$\begin{cases} 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \\ 7 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{8} \end{cases}$$

Portanto: $V = \left\{\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{8}\right\}$

3.18) Resolva a equação: $2x^3 - 18x + 3x^2 - 27 = 0$

Solução

Em primeiro lugar fatoremos a expressão $2x^3 - 18x + 3x^2 - 27$:

$\underbrace{2x^3 - 18x} + \underbrace{3x^2 - 27} = 2x(x^2 - 9) + 3(x^2 - 9) = (x^2 - 9)(2x + 3) =$

$$= (x^2 - 3^2)(2x + 3) = (x + 3)(x - 3)(2x + 3)$$

Portanto:

$2x^3 - 18x + 3x^2 - 27 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 3)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \vee x - 3 = 0 \vee 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3 \vee x = -\dfrac{3}{2}$

$$V = \left\{3; -3; -\frac{3}{2}\right\}$$

3.19) Resolva a equação: $x^3 - x = 0$

Solução

$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$

$x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x + 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x + 1 = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

$$V = \{0; -1; 1\}$$

3.20) Resolva a equação: $\dfrac{5x + 20}{x^2 - 16} = 0$

Solução

$\dfrac{5x + 20}{x^2 - 16} = 0 \Leftrightarrow 5x + 20 = 0 \wedge x^2 - 16 \neq 0$

A raiz de $5x + 20 = 0$ é -4. Porém esse valor não satisfaz a condição $x^2 - 16 \neq 0$ e portanto o conjunto-verdade da equação dada é:

$$V = \varnothing$$

Exercícios Propostos

3.21) Resolva as equações:

a) $x(x + 1) = 0$

b) $2(-2x + 3)(4 - x)(x + 9) = 0$

c) $\dfrac{7x - 4}{4x - 20} = 0$

d) $\dfrac{4x + 12}{x^2 - 9} = 0$

e) $x^3 - 16x = 0$

f) $4x^3 + 5x^2 - 4x - 5 = 0$

3.22) Resolva a equação $(2x + 1)(4 - 2x)(x - \pi) = 0$ em cada um dos universos:

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Z}$

3.6 – EQUAÇÕES DO TIPO $a^k = b^k$

Consideremos a igualdade: $a^k = b^k$ onde a e b são reais e $k \in \mathbb{Z}^*_+$

> Se k é par, temos:
> $a^k = b^k \Leftrightarrow a = b$ ou $a = -b$
> Se k é ímpar, temos:
> $a^k = b^k \Leftrightarrow a = b$

Exemplos

a) Consideremos a equação: $x^2 = 4^2$. Temos:
$x^2 = 4^2 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x - 4$
Portanto: $V = \{4; -4\}$

b) Seja a equação: $x^3 = 4^3$. Neste caso, temos:
$x^3 = 4^3 \Leftrightarrow x = 4$
e portanto: $V = \{4\}$

As propriedades mencionadas acima valem também para $k \in \mathbb{Z}^*_-$, desde que imponhamos $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pois devemos nos lembrar que:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplo

Seja a equação: $(4x - 12)^{-5} = (3 - x)^{-5}$

$(4x - 12)^{-5} = (3 - x)^{-5} \Leftrightarrow 4x - 12 = 3 - x \wedge 4x - 12 \neq 0 \wedge 3 - x \neq 0 \Leftrightarrow$

$x = 3 \wedge x \neq 3$

Portanto: $V = \varnothing$

Se $k = 0$, então o conjunto-verdade da equação $a^k = b^k$ coincide com o conjunto-universo, pois qualquer número real elevado a zero é igual a 1.

Exemplo

Consideremos a equação: $(3x - 2)^0 = (4 - 3x)^0$

Se U = $\mathbb{R}$, teremos:

$$V = \mathbb{R}$$

Exercício Resolvido

3.23) Resolva as equações:

a) $(4x - 7)^{12} = (8 - x)^{12}$ b) $(2x + 12)^{15} = (6x - 9)^{15}$

Solução

a) $(4x - 7)^{12} = (8 - x)^{12} \Leftrightarrow 4x - 7 = 8 - x \vee 4x - 7 = -(8 - x) \Leftrightarrow$

$x = 3 \vee x = \frac{-1}{3}$

$$V = \left\{3; \frac{-1}{3}\right\}$$

b) $(2x + 12)^{15} = (6x - 9)^{15} \Leftrightarrow 2x + 12 = 6x - 9 \Leftrightarrow x = \frac{21}{4}$

$$V = \left\{\frac{21}{4}\right\}$$

Exercício Proposto

3.24) Resolva as equações:

a) $(3x - 1)^{18} = (4 - 5x)^{18}$ c) $(3x + 2)^{-4} = (x - 1)^{-4}$

b) $(2x + 9)^7 = (7x - 1)^7$ d) $(6x - 9)^2 = 16$

3.7 – EQUAÇÕES LITERAIS

Às vezes ocorrem equações com várias letras, onde nem todas são consideradas como variáveis: algumas são consideradas como números (constantes) e nesse caso costumam ser chamadas de **parâmetros**.

Ao ser dada uma equação literal, se nada for esclarecido, admite-se que as últimas letras do alfabeto são as variáveis e as primeiras são as constantes (parâmetros).

Exercícios Resolvidos

3.25) Resolva a equação: $2x - a = 3b$

Solução

Aqui, como nada é esclarecido, vamos admitir que x é a variável, a e b são constantes. Portanto, temos:

$2x - a = 3b \Leftrightarrow 2x = 3b + a \Leftrightarrow x = \frac{3b + a}{2}$

Assim: $V = \left\{\frac{3b+a}{2}\right\}$

3.26) Resolva a equação: $ax - x = 3a + 2$

Solução

Observando que: $ax - x = (a - 1)x$, temos:

$ax - x = 3a + 2 \Leftrightarrow (a - 1)x = 3a + 2$

Neste ponto consideraremos duas possibilidades: primeiro $a - 1 \neq 0$ e depois $a - 1 = 0$

1º) para $a - 1 \neq 0$, temos:

$(a-1)x = 3a + 2 \Leftrightarrow x = \frac{3a+2}{a-1}$

e $V = \left\{\frac{3a+2}{a-1}\right\}$

2º) para $a - 1 = 0$, teremos $a = 1$ e portanto a equação dada transforma-se em:

$$0x = 3(1) + 2$$
$$0 \cdot x = 5$$

que obviamente não tem solução.

Portanto, a resposta do exercício deve ser:

$$\begin{cases} \text{para } a - 1 \neq 0, \text{ temos: } V = \left\{\frac{3a+2}{a-1}\right\} \\ \text{para } a - 1 = 0, \text{ temos: } V = \varnothing \end{cases}$$

3.27) Resolva a equação $ax - x = a^2 - 1$

Solução

$ax - x = a^2 - 1 \Leftrightarrow (a - 1)x = a^2 - 1$

Consideremos duas possibilidades:

1º) para $a - 1 \neq 0$, vem:

$(a-1)x = a^2 - 1 \Leftrightarrow x = \frac{a^2-1}{a-1} \Leftrightarrow x = \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \Leftrightarrow x = a + 1$

2º) para $a - 1 = 0$, vem $a = 1$ e a equação $(a-1)x = a^2 - 1$ transforma-se em: $0 \cdot x = 0$ que obviamente é verdadeira para todo x.

Assim, a resposta é:

$$\begin{cases} \text{para } a - 1 \neq 0, \ V = \{a+1\} \\ \text{para } a - 1 = 0, \ V = \mathbb{R} \end{cases}$$

3.28) Resolva a equação $ax - x = b - 3$

Solução

$ax - x = b - 3 \Leftrightarrow (a - 1)x = b - 3$

$$\begin{cases} 1^o)\ \text{para } a-1\neq 0,\ \text{isto é, para: } a\neq 1,\ \text{temos:} \\ \qquad (a-1)x=b-3 \Leftrightarrow x=\dfrac{b-3}{a-1} \\ 2^o)\ \text{para } a-1=0 \text{ e } b-3=0,\ \text{isto é, para } a=1 \text{ e } b=3 \text{ a equação:} \\ \qquad (a-1)x=b-3 \\ \quad \text{transforma-se em:} \\ \qquad 0x\ =\ 0 \\ \quad \text{e portanto } V=\mathbb{R} \\ 3^o)\ \text{para } a-1=0 \text{ e } b-3\neq 0,\ \text{isto é, para } a=1 \text{ e } b\neq 3,\ \text{a equação:} \\ \qquad (a-1)x=b-3 \\ \quad \text{transforma-se em:} \\ \qquad 0x=b-3\ (\text{com } b-3\neq 0) \\ \quad \text{que, obviamente, é uma equação impossível.} \end{cases}$$

Portanto, a nossa resposta é:

$$\begin{cases} \text{para } a\neq 1,\ V=\left\{\dfrac{b-3}{a-1}\right\} \\ \text{para } a=1,\ \text{e } b\neq 3,\ V=\varnothing \\ \text{para } a=1,\ \text{e } b=3,\ V=\mathbb{R} \end{cases}$$

Exercícios Propostos

3.29) Resolva as equações:

a) $4x - a = -x + b$

b) $ax - 5 = 2x + 10$

c) $ax - x = 4a + 1$

d) $3x - 8 = 2b + ax$

3.8 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Um **sistema de equações** é uma sentença aberta **molecular**, onde os átomos são ligados pelos conectivos $\wedge$ ou $\vee$.

Exemplos

a) A sentença aberta molecular "$4x - 2y = 7 \vee x + 2y = 1$" é um sistema de equações, que costuma ser escrito também do seguinte modo:

$$\begin{cases} 4x-2y=7 \\ \quad\vee \\ x+2y=1 \end{cases}$$

b) A sentença aberta molecular "$x^2 - 3y = 9 \wedge 4x + y = 10$" é um sistema de equações que pode também ser escrito assim:

$$\begin{cases} x^2-3y=9 \\ \quad\wedge \\ 4x+y=10 \end{cases}$$

Quando é omitido o conectivo, admite-se que é o conectivo $\wedge$. Assim, por exemplo, se encontrarmos o sistema:

$$\begin{cases} 4x^2-3y=9 \\ 5x+9y=1 \end{cases}$$

admitiremos que se trata de "$4x^2 - 3y = 9 \wedge 5x + 9y = 1$"

No caso em que o conectivo é $\wedge$ costuma-se dizer que se trata de um "sistema de equações simultâneas", que é o caso que nos interessa neste livro.

O estudo dos sistemas de equações em que o conectivo é $\vee$ é um tanto mais complicado e é feito com auxílio dos gráficos no nosso volume de Geometria Analítica, desta mesma coleção.

3.9 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES SIMULTÂNEAS

Uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

chama-se **equação linear**. Aqui, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e b são números reais e $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis.

Note que, numa equação linear, cada termo contém uma incógnita elevada ao expoente **um**.

Exemplo

As equações "$4x - 3y = 1$" e "$3x - 9y + 10z = 8$" são equações lineares.

Contra-exemplo

A equação "$3x^2 - 9y = 2$" não é linear, pois temos a incógnita x elevada a expoente **dois**. A equação "$\frac{5}{x} - 9y = 7$" também não é linear, pois $\frac{5}{x} = 5 \cdot x^{-1}$ e vemos então que o expoente de x é -1.

Vamos estudar, neste item, sistemas de equações simultâneas em que as equações são lineares, ou possam ser reduzidas a equações lineares.

De início vamos considerar casos em que as equações têm apenas duas incógnitas.

Há vários métodos para resolver tais sistemas, porém, no momento, veremos apenas o "método de substituição" e o "método de adição".

Método de Substituição

Em primeiro lugar escolhemos uma equação e na equação escolhida "isolamos" uma das incógnitas para em seguida substituir na outra equação.

Capítulo

4 Inequações

4.1 – PROPRIEDADES

P_1 | Quaisquer que sejam os reais a, b e x, temos: $a > b \Leftrightarrow a + x > b + x$

Isto significa que podemos somar (ou subtrair) um mesmo número aos dois membros da desigualdade a > b sem alterar seu "valor de verdade".

Assim, por exemplo, a sentença verdadeira 7 > 2 continua verdadeira se somarmos o número 5 aos dois membros: 7 + 5 > 2 + 5.

Esta propriedade permite "passar" um número de um lado para outro da desigualdade desde que troquemos o sinal do número.

Exemplos

a) Consideremos a desigualdade $x - 4 > 5$. Somemos o número 4 aos dois membros.

$$x - 4 + 4 > 5 + 4$$
$$x > 5 + 4$$

Em resumo: $x - 4 > 5 \Leftrightarrow x > 5 + 4$

b) Seja a desigualdade $x + 2 < 7$. Vamos subtrair dos dois membros o número 2:

$$x + 2 - 2 < 7 - 2$$
$$x < 7 - 2$$

isto é: $x + 2 < 7 \Leftrightarrow x < 7 - 2 \Leftrightarrow x < 5$

P_2 | $a > b \Rightarrow ax > bx$
 $a > b \Leftrightarrow \frac{a}{x} > \frac{b}{x}$ | $\forall a \in \mathbb{R}$
 $\forall b \in \mathbb{R}$
 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Esta propriedade nos diz que podemos multiplicar (ou dividir) os dois membros de uma desigualdade por um número **positivo**, sem alterar seu valor de verdade.

Exemplos

a) A desigualdade 5 > 2 é verdadeira. Se multiplicarmos os dois membros por 7 (por exemplo) obteremos a sentença 35 > 14, que ainda é verdadeira.

b) A desigualdade 7 > 12 é falsa. Se multiplicarmos os dois membros pelo número 2 obteremos a sentença 14 > 24, que ainda é falsa.

c) $3x < 12 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} < \frac{12}{3} \Leftrightarrow x < 4$

d) $-4x < 20 \Leftrightarrow 5(-4x) < 5(20)\ -20x < 100$

e) $4x \geq 20 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} \geq \frac{20}{4} \Leftrightarrow x \geq 5$

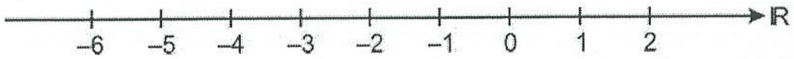
P_3

$a > b \Leftrightarrow ax < bx$ $a > b \Leftrightarrow \frac{a}{x} < \frac{b}{x}$	$\forall a \in \mathbb{R}$ $\forall b \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*_-$

Esta propriedade nos diz que, se multiplicarmos ou dividirmos os dois membros da desigualdade a > b por um número **negativo**, devemos inverter seu sentido para manter seu "valor de verdade".

Exemplos

a) Consideremos a sentença 2 > 1, que é verdadeira.



Se multiplicarmos os dois membros pelo número negativo –3, devemos inverter o sentido da desigualdade:

$$(-3)(2) < (-3)\ (1)$$
$$-6 < -3$$

b) $3 > -1 \Leftrightarrow (-2)(3) < (-2)(-1) \Leftrightarrow -6 < 2$

c) $2 < 5 \Leftrightarrow (-1)(2) > (-1)(5) \Leftrightarrow -2 > -5$

d) $20 \geq -4 \Leftrightarrow \frac{20}{-2} \leq \frac{-4}{-2} \Leftrightarrow -10 \leq 2$

e) $-4x \geq 20 \Leftrightarrow \frac{-4x}{-2} \leq \frac{20}{-4} \Leftrightarrow x \leq -5$

f) $-x < 20 \Leftrightarrow (-1)(-x) > (-1)(20) \Leftrightarrow x > -20$

4.2 – INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Uma **inequação do primeiro grau** é aquela que pode ser reduzida à forma:

$$ax + b > 0 \text{ (onde } a \neq 0)$$

Uma das maneiras de resolver uma inequação desse tipo é fazer uso das propriedades da desigualdade e proceder de modo semelhante ao desenvolvido na resolução de uma equação do primeiro grau.

Exemplo

Vamos resolver a inequação 4x – 3 > 0.

Em primeiro lugar, passamos –3 para o lado direito, baseados na propriedade P_1:

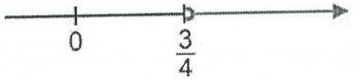
$$4x - 3 > 0 \Leftrightarrow 4x > 3$$

Em seguida dividimos os dois membros por 4:

$$4x > 3 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} > \frac{3}{4} \Leftrightarrow x > \frac{3}{4}$$

Portanto, o conjunto-verdade é:

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{4}\right\}$$



ou, usando a notação de intervalo,

$$V = \left]\frac{3}{4}; \infty\right[$$

Exercícios Resolvidos

4.1) Resolver as inequações:

a) 3x – 12 > 0 b) –2x + 14 < 0

Solução

a) $3x - 12 > 0 \xleftrightarrow{P_1} 3x > 12 \xleftrightarrow{P_2} x > \frac{12}{3} \Leftrightarrow x > 4$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} =]4; +\infty[$

b) $-2x + 14 < 0 \Leftrightarrow -2x < -14 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} > \frac{-14}{-2} \Leftrightarrow x > 7$

$V =]7; +\infty[$

4.2) Resolva as inequações:

a) $-5x + 1 \leq 3x + 2$ b) $3x - \frac{x-2}{4} < \frac{1-2x}{6}$

Solução

a) $-5x + 1 \leq 3x + 2 \Leftrightarrow -5x - 3x \leq 2 - 1 \Leftrightarrow -8x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-8x}{-8} \geq \frac{1}{-8} \Leftrightarrow x \geq \frac{-1}{8}$

$V = \left[-\frac{1}{8}; +\infty\right[$

b) Neste caso o mmc dos denominadores é 12. Multiplicando todos os termos por 12, temos:

$$12(3x) - 3(x - 2) < 2(1 - 2x)$$
$$36x - 3x + 6 < 2 - 4x$$
$$37x < -4$$
$$x < -\frac{4}{37}$$
$$V = \left]-\infty; \frac{-4}{37}\right[$$

4.3) Resolva as inequações:

a) $(x-3)^4 > 0$
b) $(x-3)^4 \geq 0$
c) $(x-3)^4 < 0$
d) $(x-3)^4 \leq 0$
e) $(x-3)^7 > 0$
f) $(x-3)^7 \geq 0$
g) $(x-3)^7 < 0$
h) $(x-3)^7 \leq 0$

Solução

a) Neste caso temos uma potência de expoente par e portanto o resultado nunca será negativo. Portanto, para que $(x-3)^4$ seja maior que zero, basta que $x-3$ seja diferente de zero:

$$(x-3)^4 > 0 \Leftrightarrow x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$$

$$\therefore V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} = \mathbb{R} - \{3\}$$

b) Levando em conta a discussão no item a concluímos que a sentença $(x-3)^4 \geq 0$ é verdadeira para qualquer valor real de x:

$$V = \mathbb{R}$$

c) O resultado de $(x-3)^4$ nunca poderá ser negativo e portanto, neste caso, temos:

$$V = \varnothing$$

d) Como $(x-3)^4$ não pode ser negativo, temos:

$$(x-3)^4 \leq 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

$$V = \{3\}$$

e) A potência $(x-3)^7$ tem expoente ímpar e portanto o sinal de $(x-3)^7$ é o mesmo sinal da base $x-3$.
Assim:

$$(x-3)^7 > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$$

$$V =]3; +\infty[$$

f) $(x-3)^7 \geq 0 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

$$V = [3; +\infty[$$

g) $(x-3)^7 < 0 \Leftrightarrow x-3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$

$$V =]-\infty; 3[$$

h) $(x-3)^7 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$

$$V =]-\infty; 3]$$

4.4) Dê o conjunto-solução de cada sistema de inequações:

a) $2x-6 > 0 \wedge 3x-27 < 0$
b) $2x-6 > 0 \vee 3x-27 < 0$

Solução

a) Seja S_1 o conjunto-solução de $2x-6 > 0$

$2x-6 > 0 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$ $\quad S_1 =]3; +\infty[$

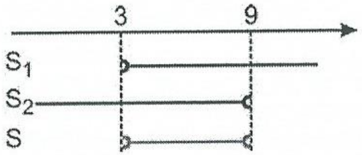
Seja S_2 o conjunto-solução de $3x-27 < 0$

$3x-27 < 0 \Leftrightarrow 3x < 27 \Leftrightarrow x < 9$ $\quad S_2 =]-\infty; 9[$

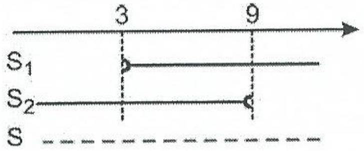
Sendo S o conjunto-solução do sistema, temos:

$S = S_1 \cap S_2$

$S =]3; 9[$ ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$



b) Neste caso o conjunto-solução S é dado por $S = S_1 \cup S_2$. Pelo diagrama, percebemos facilmente que $S = \mathbb{R}$.



4.5) Resolva o sistema de inequações:

$$\begin{cases} -4x+12 > 0 \\ 2x+8 > 0 \end{cases}$$

Solução

Quando não é mencionado o conectivo, vale a mesma convenção que fizemos no caso de sistemas de equações: admitimos que se trata do conectivo $\wedge$. Quando o conectivo é $\wedge$ dizemos também que se trata de um sistema de inequações simultâneas.

Seja S_1 o conjunto-solução de $-4x + 12 > 0$

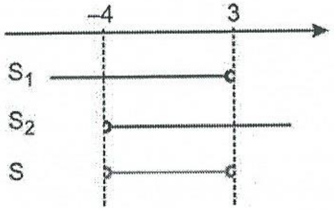
$-4x + 12 > 0 \Leftrightarrow -4x > -12 \Leftrightarrow x < 3 \therefore S_1 =]-\infty; 3[$

Seja S_2 o conjunto-solução de $2x + 8 > 0$

$2x + 8 > 0 \Leftrightarrow 2x > -8 \Leftrightarrow x > -4 \therefore S_2 =]-4; \infty[$

Sendo S o conjunto-solução do sistema, temos: $S = S_1 \cap S_2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 3\}$ ou $S =]-4; 3[$



4.6) Dê o conjunto-solução da sentença aberta $-3 < 5 - 2x < 9$.

Solução

1º modo - Sabemos que $-3 < 5 - 2x < 9$ é equivalente a:

$$-3 < 5 - 2x \wedge 5 - 2x < 9$$

$$\begin{cases} -3 < 5-2x \Leftrightarrow 2x < 5+3 \Leftrightarrow x < 4 & S_1 =]-\infty; 4[\\ 5-2x < 9 \Leftrightarrow -2x < 9-5 \Leftrightarrow x > -2 & S_2 =]-2; \infty[\end{cases}$$

$$S = S_1 \cap S_2 =]-2; 4[= \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$$

2º modo - Podemos trabalhar diretamente com a sentença

$$-3 < 5 - 2x < 9$$

$$-3 < 5 - 2x < 9 \Leftrightarrow -3 - 5 < 5 - 5 - 2x < 9 - 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8 < -2x < 4 \Leftrightarrow \frac{-8}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{4}{-2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 > x > -2 \Leftrightarrow -2 < x < 4$$

$$\therefore S =]-2; 4[$$

4.7) Determine os valores de **m** tais que a equação:
$4x^2 - 5x + (2m - 1) = 0$ não **admita** raízes reais,

Solução

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \\ c = 2m - 1 \end{cases}$$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(4)(2m - 1) = 25 - 16(2m - 1) = 25 - 32m + 16 =$ $41 - 32m$

Para que a equação não admita raízes reais devemos ter $\Delta < 0$.

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 41 - 32m < 0 \Leftrightarrow -32m < -41 \Leftrightarrow m > \frac{41}{32}$.

Portanto, a resposta é:

$$m > \frac{41}{32}$$

4.8) Determine os valores **m** tais que a equação $4x^2 - 5x + (2m - 1) = 0$ admita duas raízes reais e distintas.

Solução

$\Delta = 41 - 32m$

Para satisfazer a condição do problema, impomos $\Delta > 0$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow 41 - 32m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{41}{32}$

4.9) Determine **m** de modo que a equação: $4x^2 - 5x + (2m - 1) = 0$ admita duas raízes reais e iguais.

Solução

$\Delta = 41 - 32m$

Para satisfazer a condição pedida, devemos ter $\Delta = 0$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 41 - 32m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{41}{32}$

4.10) Determine **m** de modo que a equação:
$4x^2 - 5x + (2m - 1) = 0$ admita raízes reais:

Solução

Neste caso não foi esclarecido se as raízes são distintas ou iguais. Assim, devemos ter $\Delta \geq 0$

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 41 - 32m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{41}{32}$

Exercícios Propostos

4.11) Resolva as inequações:

a) $x - 5 > 0$
b) $4x - 3 < x$
c) $x \geq 2x + 1$
d) $3x - 2 \leq x + 1$
e) $2x - 3 < 5x + 6$
f) $\frac{x-1}{5} - 2x < \frac{4x-1}{10}$

4.12) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 4x - 12 < 0 \\ 3x + 18 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 30 > 0 \\ \vee \\ 3x - 45 < 0 \end{cases}$

c) $-2 < 6 - 9x < 8$

d) $\begin{cases} 3x - 12 \geq 0 \\ 4x + 2 < 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -3x + 12 < 0 \\ -5x + 28 < 0 \end{cases}$

4.13) Determine os valores de **k** na equação:
$6x^2 - 7x - (3k - 1) = 0$, de modo que:

a) a equação admita duas raízes reais e distintas
b) a equação admita duas raízes reais e iguais
c) a equação admita raízes reais
d) a equação não admita raízes reais

4.3 – SINAIS DE ax + b

Consideremos o binômio $ax + b$, onde x é a variável, $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$. O valor numérico do binômio poderá ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor atribuído a x.

Exemplo

Consideremos o binômio $2x - 12$. Para $x = 7$, o binômio tem valor numérico positivo:

$$2x - 12 = 14 - 12 = 2$$

Para x = 3, temos 2x – 12 = 6 – 12 = –6, isto é, para x = 3, o binômio tem valor numérico negativo.

Para x = 6, temos 2x – 12 = 0, isto é, para: x = 6, o valor numérico do binômio é igual a zero. Diremos que o número 6 é a **raiz** do binômio 2x – 12.

De modo geral, o número que, substituído no lugar de x, dá valor numérico nulo é chamado de **raiz do binômio**.

Exemplos

a) A raiz do binômio: 2x – 14 é 7, pois para x = 7, temos 2x – 14 = 0.
b) A raiz de –3x – 12 é –4, pois para x = –4, temos –3x – 12 = 0.

Determinemos a raiz **x'** do binômio ax + b (onde $a \neq 0$):

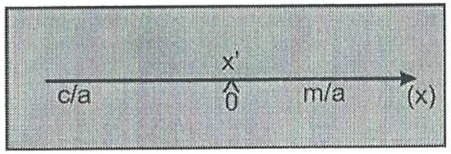
$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

Portanto: $x' = \frac{-b}{a}$

Pode-se verificar que:

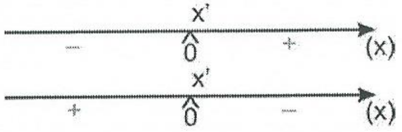
1º) Para valores de x maiores de x', o sinal de ax + b é o **mesmo de a**.
2º) Para valores de x menores que x', o sinal de ax + b é **contrário ao de a**.

Isto pode ser resumido na seguinte tabela:



onde: $\begin{cases} m/a \text{ significa "o mesmo sinal de a"} \\ c/a \text{ significa "sinal contrário ao de a"} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Se } a > 0, \text{ a tabela é:} \\ \text{Se } a < 0, \text{ a tabela é:} \end{cases}$



Exemplo

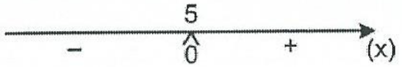
Façamos o estudo do binômio 2x – 10. Para tanto, em primeiro lugar determinamos a raiz do binômio:

$$2x - 10 = 0 \Leftrightarrow 2x = 10 \Leftrightarrow x = 5$$

Temos:

$\begin{cases} a = 2, \text{ isto é, } a > 0 \\ x' = 5 \end{cases}$

Assim a tabela de sinais é:



Esta tabela nos informa que:

a) para x = 5, o valor numérico do binômio é igual a zero

b) para x < 5, o valor numérico do binômio é negativo
c) para x > 5, o valor numérico do binômio é positivo

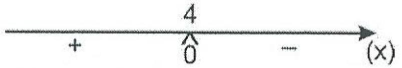
Exemplo

Consideremos o binômio –3x + 12. Determinemos sua raiz:

$$-3x + 12 = 0 \Leftrightarrow -3x = -12 \Leftrightarrow x = 4$$

$\begin{cases} a = -3, \text{ isto é, } a < 0 \\ x' = 4 \end{cases}$

A tabela de sinais é:

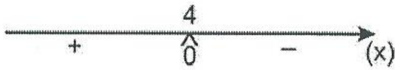


Este quadro nos informa que:

a) para x = 4, temos –3x + 12 = 0
b) para x > 4, o valor numérico de –3x + 12 é negativo
c) para x < 4, o valor numérico de –3x + 12 é positivo

Exemplo

O estudo de sinais nos dá um outro processo para resolver inequações do primeiro grau. Assim, por exemplo, se quisermos resolver a inequação –3x + 12 > 0, fazemos primeiramente o estudo do binômio –3x + 12 (ver exemplo anterior).



Da tabela percebemos que –3x + 12 > 0 para x < 4 e portanto o conjunto-solução de –3x + 12 > 0 é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$. Este processo não é o mais rápido neste caso, mas é essencial para resolver alguns tipos de inequações que virão adiante.

Podemos justificar os fatos mencionados acima através do teorema a seguir.

Teorema

Consideremos o binômio: ax + b, onde $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$. Seja x' a raiz do binômio.

Temos então:

$x > x' \Leftrightarrow$ ax + b tem o mesmo sinal de **a**
$x < x' \Leftrightarrow$ ax + b tem sinal contrário ao de **a**

Demonstração

Vamos dividir a demonstração em duas partes:

1ª) a > 0

Lembrando que $x' = -\frac{b}{a}$ temos:

$$\begin{cases} x > x' \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow ax+b > 0 \text{ (o mesmo sinal de a)} \\ x < x' \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow ax+b < 0 \text{ (sinal contrário de a)} \end{cases}$$

2ª) $a < 0$

$$\begin{cases} x > x' \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a} \Leftrightarrow ax < -b \Leftrightarrow ax+b < 0 \text{ (o mesmo sinal de a)} \\ x < x' \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a} \Leftrightarrow ax > -b \Leftrightarrow ax+b > 0 \text{ (sinal contrário de a)} \end{cases}$$

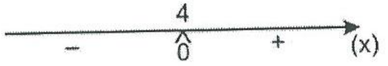
Exercícios Resolvidos

4.14) Resolva a inequação $\frac{2x-8}{-3x-6} < 0$.

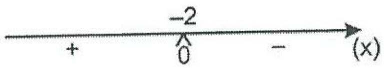
Solução

Em primeiro lugar, devemos impor $-3x - 6 \neq 0$, isto, $x \neq -2$.
Vamos agora fazer separadamente o estudo dos sinais do numerador (N) e do denominador (D):

$N = 2x - 8$
$2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$



$D = -3x - 6$
$-3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$



Em seguida reunimos o estudo feito dos sinais de:
$N = 2x - 8$ e $D = -3x - 6$ em uma única tabela, para obtermos os sinais de $\frac{N}{D} = \frac{2x-8}{-3x-6}$.

x	−∞ …	−2	…	4	… +∞
N	−		−	0	+
D	+	0	−		−
N/D	−	⊗	+	0	−

A tabela nos dá:

a) para $x < -2$, $\frac{N}{D}$ é negativa.

b) para $-2 < x < 4$, $\frac{N}{D}$ é positiva.

c) para $x > 4$, $\frac{N}{D}$ é negativa.

As "bolinhas" servem para indicar as raízes das expressões e estamos usando o símbolo ⊗ para indicar que a expressão não está definida. Assim para $x = -2$, a expressão $\frac{N}{D}$ não está definida, pois -2 anula o denominador.

Como queremos $\frac{2x-8}{-3x-6} < 0$ o conjunto-solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$$

Se o problema pedisse para resolver a inequação $\frac{2x-8}{-3x-6} \leq 0$, deveríamos acrescentar ao conjunto-solução anterior os valores que anulam a expressão. Mas para anular a expressão devemos anular o numerador, isto é, fazer $x = 4$. Assim, o conjunto-solução de $\frac{2x-8}{-3x-6} \leq 0$ é:

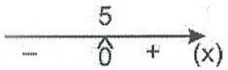
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq 4\}$

4.15) Resolva a inequação $(x - 5)(3x - 9)(-2x + 8) < 0$

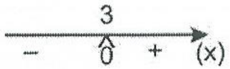
Solução

Vamos primeiramente fazer o estudo dos sinais de cada fator:

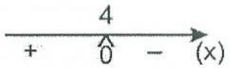
$A = x - 5$
$x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$



$B = 3x - 9$
$3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$



$C = -2x + 8$
$-2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 4$



Em seguida reunimos tudo numa única tabela:

x	−∞ …	3	…	4	…	5	… +∞
A	−		−		−	0	+
B	−	0	+		+		+
C	+		+	0	−		−
ABC	+	0	−	0	+	0	−

Queremos (x – 5) (3x – 9) (–2x + 8) < 0, isto é, ABC < 0
Portanto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4 \text{ ou } x > 5\}$$

4.16) Resolva a inequação $\frac{x}{x-2} > 3$.

Solução

Vamos reduzir os dois termos ao mesmo denominador (o **mmc** é igual a x – 2):

$$\frac{x}{x-2} > \frac{3(x-2)}{x-2}$$

Antes de continuarmos, observe que neste caso não podemos "desprezar" o mmc x – 2. Isto porque desprezar o mínimo é equivalente a multiplicar todos os termos por x – 2 e não sabemos se x – 2 é positivo ou negativo e portanto não saberemos se devemos manter ou inverter o sentido da desigualdade. Quando o mmc é um número positivo não há problema em "desprezá-lo" (como fizemos, por exemplo, no exercício 4.2). Assim, sempre que em uma inequação houver denominador com variável, **devemos manter o mmc**. Continuemos agora com a resolução da inequação. Supondo x – 2 ≠ 0 temos:

$$\frac{x}{x-2} > 3 \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} > \frac{3(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow \frac{x}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3(x-2)}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x-3x+6}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x+6}{x-2} > 0$$

$N = -2x + 6$ $\qquad$ $D = x - 2$

$-2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ $\qquad$ $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	–∞	2		3	+∞
N	+		+	0	–
D	–	0	+		+
N/D	–	⊗	+	0	–

Como queremos $\frac{-2x+6}{x-2} > 0$, o conjunto-solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$$

Resolva a Inequação: $\frac{x(2x-14)}{-3x+15} \leq 0$.

Solução

Em primeiro lugar, devemos ter –3x + 15 ≠ 0, isto é, x ≠ 5.

A = x $\qquad$ B = 2x – 14 $\qquad$ C = –3x + 15

2x – 14 = 0 ⇔ x = 7 $\qquad$ –3x + 15 = 0 ⇔ x = 5

x	–∞	0		5		7	+∞
A	–	0	+		+		+
B	–		–		–	0	+
C	+		+	0	–		–
AB/C	+	0	–	⊗	+	0	–

Para $\frac{x(2x-14)}{-3x+15} < 0$, devemos ter 0 < x < 5 ou x > 7.

Para $\frac{x(2x-14)}{-3x+15} = 0$, devemos ter x = 0 ou x = 7.

Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 5 \text{ ou } x \geq 7\}$$

Exercícios Propostos

4.18) Resolva as inequações:

a) $\frac{4x+16}{-2x+5} < 0$

b) (x + 7) (3x – 1) (4x + 2) ≥ 0

c) $\frac{(x-2)(2x+6)}{x-5} \leq 0$

d) $\frac{5}{x-3} < 6$

4.19) Resolva o sistema

$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-2} < 0 \\ (x-1)(5-x) > 0 \end{cases}$$

4.20) Dê o conjunto-verdade de $0 \leq \frac{x-1}{x-2} < \frac{1}{4}$.

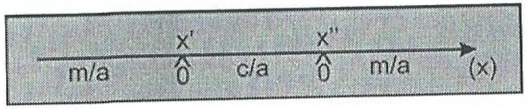
4.4 – SINAIS DE $ax^2 + bx + c$

Consideremos o trinômio do segundo grau $ax^2 + bx + c$, onde **a**, **b** e **c** são reais com $a \neq 0$. O valor numérico desse trinômio poderá ser positivo, negativo ou nulo, dependendo do valor atribuído a x. Os valores que, substituídos no lugar de x, dão valor numérico nulo são as raízes do trinômio, isto é, as raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Queremos fazer o estudo dos sinais de $ax^2 + bx + c$ e para tanto procederemos como no caso do binômio ax + b: primeiro apresentaremos as conclusões e depois faremos as demonstrações dessas conclusões.

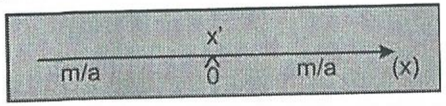
Devemos considerar três casos:

1°) Suponhamos $\Delta > 0$. Neste caso o trinômio admite duas raízes reais e distintas, x' e x'', e a tabela de sinais do trinômio é:



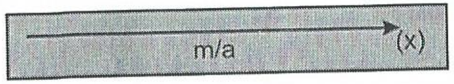
Esta tabela nos diz que:
- para x situado entre as raízes (x' < x < x''), o sinal do trinômio é contrário ao de a.
- para x situado fora do intervalo das raízes (x < x' ou x > x''), o sinal do trinômio é o mesmo de a.

2°) Suponhamos agora $\Delta = 0$. Neste caso o trinômio tem duas raízes reais e iguais (x' = x'') e a tabela de sinais é:



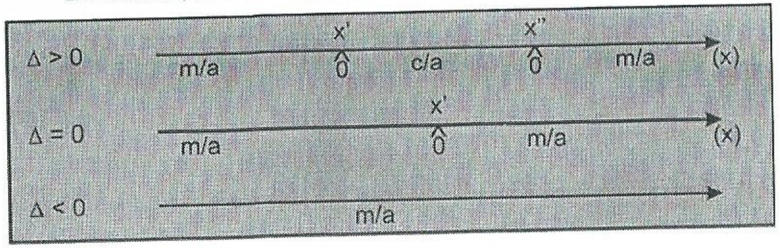
Esta tabela nos informa que, para qualquer valor de x diferente da raiz (x'), o valor numérico do trinômio tem o mesmo sinal de a.

3°) Suponhamos $\Delta < 0$. Neste caso, o trinômio não tem raízes reais e a tabela de sinais é:



isto é, para **qualquer** valor de x, o valor numérico do trinômio terá o mesmo sinal de a.

Em resumo, temos:



Exemplos

a) Consideremos o trinômio $x^2 - 5x + 6$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1$$

Neste caso $\Delta > 0$ e o trinômio tem duas raízes reais e distintas:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \left.\frac{5 \pm 1}{2}\right\} x' = 2 \text{ e } x'' = 3$$

e como a > 0, a tabela de sinais é:

De acordo com esse quadro, temos:
- para $x < 2$, $x^2 - 5x + 6 > 0$
- para $2 < x < 3$, $x^2 - 5x + 6 < 0$
- para $x > 3$, $x^2 - 5x + 6 > 0$

Assim, se nos pedissem para resolvermos a inequação $x^2 - 5x + 6 > 0$, daríamos o seguinte conjunto-verdade:

$$V = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$$

Se nos pedissem para resolvermos a inequação $x^2 - 5x + 6 < 0$, daríamos o seguinte conjunto-verdade:

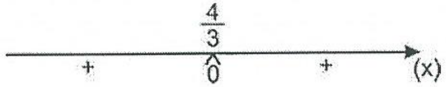
$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$$

b) Consideremos o trinômio $9x^2 - 24x + 16$.

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = -24 \\ c = 16 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4(9)(16) = 0 \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+24}{18} = \frac{4}{3}$$

Temos então: $\begin{cases} x' = x'' = \dfrac{4}{3} \\ a > 0 \end{cases}$

Portanto, a tabela de sinais é:



Vemos então que o valor numérico do trinômio é positivo para *qualquer* valor de x diferente de $\frac{4}{3}$.

Se nos pedissem para resolvermos a inequação $9x^2 - 24x + 16 > 0$, daríamos o conjunto-verdade:

$$V = \mathbb{R} - \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

Se nos pedissem para resolvermos a inequação $9x^2 - 24x + 16 < 0$, o conjunto-verdade seria

$$V = \varnothing$$

pois a tabela de sinais nos informa que o valor numérico do trinômio nunca será negativo.

c) Seja o trinômio $-3x^2 + 2x - 5$.

$$\begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \\ c = -5 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(-3)(-5) = -56$$

Temos aqui $\Delta < 0$ e $a < 0$. Portanto, o quadro de sinais é:

— — — (x)

isto é, o trinômio será negativo para qualquer valor de x. Assim, podemos dizer que:

– o conjunto-solução da inequação $-3x^2 + 2x - 5 < 0$ é $S = \mathbb{R}$.

– o conjunto-solução da inequação $-3x^2 + 2x - 5 > 0$ é $V = \varnothing$.

Nos três teoremas a seguir vamos justificar o que dissemos acima. Para facilitar a notação, representaremos o trinômio $ax^2 + bx + c$ por y.

Teorema

Seja o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, onde **a**, **b** e **c** são reais com $a \neq 0$ e $\Delta > 0$.
Sejam x' e x'' suas raízes, com $x' < x''$.
Então:
$x < x'$ ou $x > x'' \Leftrightarrow$ y tem o mesmo sinal de a
$x' < x < x'' \Leftrightarrow$ y tem sinal contrário ao de a

Demonstração

Lembremos que o trinômio pode ser fatorado do seguinte modo:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

Portanto: $\frac{y}{a} = (x - x')(x - x'')$

– Suponhamos $x < x'$. Neste caso teremos também: $x < x''$ e portanto as duas diferenças $x - x'$ e $x - x''$

x x' x''

serão negativas. Assim, o produto $(x - x')(x - x'')$ será positivo, o que significa que $\frac{y}{a} > 0$. Mas, se $\frac{y}{a} > 0$, podemos garantir que **y** e **a** têm o mesmo sinal.

Suponhamos $x > x'$. Neste caso também teremos $x > x'$ e portanto as diferenças $x - x'$ e $x - x''$

x' x'' x

serão ambas positivas, o que significa que o produto $(x - x')(x - x'')$ será positivo. Assim, temos novamente $\frac{y}{a} > 0$ e portanto **y** e **a** têm o mesmo sinal.

– Suponhamos agora $x' < x < x''$. Neste caso teremos: $x - x' > 0$ e $x - x'' < 0$. Assim o produto: $(x - x')(x - x'')$

x' x x''

será negativo, o mesmo acontecendo com $\frac{y}{a}$. Mas se $\frac{y}{a} < 0$, **y** e **a** têm sinais contrários.

Teorema

Seja o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, com **a**, **b** e **c** reais, $a \neq 0$ e $\Delta = 0$.
Seja x' sua raiz. Então: $x \neq x' \Leftrightarrow$ y tem o mesmo sinal de a.

Demonstração

$$\frac{y}{a} = (x - x')(x - x'')$$

Mas como $x' = x''$, vem: $\frac{y}{a} = (x - x')^2$

Para qualquer valor de x diferente de x', a expressão: $(x - x')^2$ será positiva e portanto $\frac{y}{a} > 0$. Daí concluímos que **y** e **a** têm o mesmo sinal.

Teorema

Seja o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, onde **a**, **b** e **c** são reais, com $a \neq 0$ e $\Delta < 0$. Neste caso y terá sempre o mesmo sinal de a.

Demonstração

Neste caso o trinômio não tem raízes reais e assim sendo **não** usaremos $y = a(x - x')(x - x'')$.

Façamos então o seguinte:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left[\underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Podemos então escrever: $\frac{y}{a} = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$.

Como estamos supondo $\Delta < 0$, temos $\frac{-\Delta}{4a^2} > 0$ e, como consequência, para qualquer valor real de x, teremos: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$. Isto significa que $\frac{y}{a}$ será sempre positivo e portanto **y** e **a** têm o mesmo sinal.

Observação: Conforme vimos, podemos escrever:

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad (\text{com } a \neq 0).$$

A expressão $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ é chamada de **forma canônica** do trinômio do segundo grau e será usada novamente no capítulo 6 desde livro.

4.5 – INEQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Inequações do segundo grau são inequações que podem ser reduzidas a uma das seguintes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

onde: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \textbf{x} \text{ é a variável} \\ \textbf{a}, \textbf{b} \text{ e } \textbf{c} \text{ são constante} \end{cases}$

Para resolvermos inequações do segundo grau, fazemos uso do estudo que fizemos do trinômio do segundo grau.

Exercícios Resolvidos

4.21) Resolva as inequações:

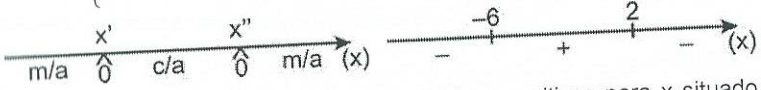
a) $-x^2 - 4x + 12 > 0$
b) $-x^2 - 4x + 12 < 0$
e) $-x^2 - 4x + 12 \leq 0$
d) $4x^2 - 20x + 25 > 0$
e) $4x^2 - 20x + 25 \geq 0$
f) $4x^2 - 20x + 25 < 0$
g) $4x^2 - 20x + 25 \leq 0$
h) $-x^2 + 3x - 7 < 0$
i) $-x^2 + 3x - 7 > 0$
j) $x^2 > 4$

Solução

a) Vamos, em primeiro lugar, determinar as raízes do trinômio $y = -x^2 - 4x + 12$ e em seguida fazer o estudo de seu sinal:

$$-x^2 - 4x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -6 \text{ ou } x = 2$$

Temos: $\begin{cases} a = -1, \text{ isto é, } a < 0 \\ x' = -6 \\ x'' = 2 \end{cases}$



Portanto o trinômio assume valores numéricos positivos para x situado entre −6 e 2:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 2\} =]-6; 2[$

b) Aproveitando o estudo do item a temos:

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -6 \vee x > 2\}$$

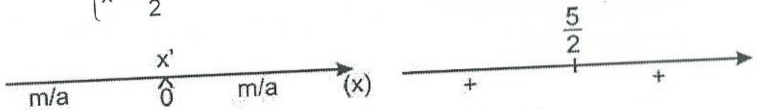
c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6 \vee x \geq 2\}$

d) $y = 4x^2 - 20x + 25$

$\begin{cases} a = 4 \\ b = -20 \\ c = 25 \end{cases}$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(4)(25) = 0$

$x' = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{20}{2(4)} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$

Temos: $\begin{cases} a = 4, \text{ isto é, } a > 0 \\ \Delta = 0 \\ x' = \frac{5}{2} \end{cases}$



Portanto, o conjunto-verdade de $4x^2 - 20x + 25 > 0$ é

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5}{2}\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

e) Aproveitando o estudo do item d temos:

$$V = \mathbb{R}.$$

f) Trata-se do mesmo trinômio do item d. Agora queremos $y < 0$, o que a tabela de sinais diz ser impossível. Assim: $V = \varnothing$.

g) É o mesmo trinômio do exercício d, o qual nunca será negativo, mas poderá ser nulo. Assim, o conjunto-verdade de $y \leq 0$ é:

$$V = \left\{\frac{5}{2}\right\}.$$

h) $y = -x^2 + 3x - 7$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -7 \end{cases} \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-1)(-7) = 9 - 28 = -19$$

Temos então, $\Delta < 0$ e $a < 0$.

m/a (x) — — — (x)

Portanto: $V = \mathbb{R}$

i) É o mesmo trinômio do exercício h, o qual será sempre negativo. Portanto, o conjunto-verdade de $-x^2 + 3x - 7 > 0$ é:

$$V = \varnothing$$

j) $x^2 > 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$

$y = x^2 - 4$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Delta = b^2 - 4ac = 16 \\ x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \end{matrix} \qquad \begin{cases} a > 0 \\ x' = -2 \\ x'' = +2 \end{cases}$$

x' x'' — m/a c/a m/a (x) — −2 2 — + − + (x)

Portanto: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$

4.22) Resolva a inequação $\dfrac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 4)}{(-x^2 + 6x - 8)(x - 5)} \geq 0$.

Solução

Em primeiro lugar estudaremos o sinal de cada termo.

$A = x^2 - 4x + 3$ $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 3$ 1 3 + − +	$B = x^2 - 4$ $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$ −2 2 + − +
$C = -x^2 + 6x - 8$ $-x^2 + 6x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = 4$ 2 4 − + −	$D = x - 5$ $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$ 5 − + Repare que este termo é do 1º grau

Resumindo numa única tabela:

x	−∞	−2		1		2		3		4		5	+∞
A	+		+	o	−		−	o	+		+		+
B	+	o	−		−	o	+		+		+		+
C	−		−		−	o	+		+	o	−		−
D	−		−		−		−		−		−	o	+
$\frac{AB}{CD}$	+	o	−	o	+	⊗	+	o	−	⊗	+	⊗	−

Temos então:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 1 \leq x < 2 \text{ ou } 2 < x \leq 3 \text{ ou } 4 < x < 5\}$

Ou também:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leq -2 \vee 1 \leq x \leq 3 \vee 4 < x < 5) \wedge x \neq 2\}$

4.23) Resolva $\dfrac{(x^2 + 10x + 25)(-10x + 11)}{(-2x + \sqrt{5})(x^2 - 9)} \leq 0$

Solução

$A = x^2 + 10x + 25$ $x^2 + 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ −5 + +	$B = -10x + 11$ $-10x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{11}{10}$ $\frac{11}{10}$ + −
$C = -2x + \sqrt{5}$ $-2x + \sqrt{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ + −	$D = x^2 - 9$ $x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$ −3 3 + − +

Antes de reunirmos numa única tabela, observemos que:

$\frac{\sqrt{5}}{2} \cong \frac{2{,}236}{2} \cong 1{,}118$ e $\frac{11}{10} = 1{,}1$

Portanto: $\frac{\sqrt{5}}{2} > \frac{11}{10}$

x	$-\infty$	-5		-3		$\frac{11}{10}$		$\frac{\sqrt{5}}{2}$		3	$+\infty$
A	+	o	+		+		+		+		+
B	+		+		+	o	−		−		−
C	+		+		+		+	o	−		−
D	+		+	o	−		−		−	o	+
$\frac{AB}{CD}$	+	o	+	⊗	−	o	+	⊗	−	⊗	+

Portanto:

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \le \frac{11}{10} \vee \frac{\sqrt{5}}{2} < x < 3 \vee x = -5\}$

4.24) Determine o valor de **k** de modo que a equação $4x^2 - kx + 9 = 0$ admita duas raízes reais e distintas.

Solução

Devemos ter $\Delta > 0$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = -k \\ c = 9 \end{cases} \qquad \Delta = (-k)^2 - 4(4)(9) = k^2 - 144$$

Portanto, devemos ter $k^2 - 144 > 0$

Para resolvermos esta inequação achamos em primeiro lugar as raízes de $k^2 - 144$.

$k^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 144 \Leftrightarrow k = \pm 12$

Como queremos $k^2 - 144 > 0$, devemos ter:
$k < -12$ ou $k > 12$

4.25) Resolva a inequação $x^4 - 13x^2 + 36 < 0$

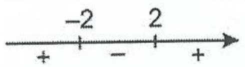
Solução

Em primeiro lugar fatoramos a expressão $x^4 - 13x^2 + 36$, como vimos no capítulo 3.

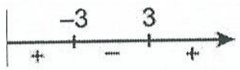
$$x^4 - 13x^2 + 36 = (x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

Assim, $x^4 - 13x^2 + 36 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 9) < 0$

$A = x^2 - 4$
$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$



$B = x^2 - 9$
$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$



x	$-\infty$	-3		-2		2		3	$+\infty$
A	+		+	o	−	o	+		+
B	+	o	−		−		−	o	+
AB	+	o	−	o	+	o	−	o	+

Assim: $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \vee 2 < x < 3\}$

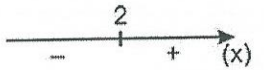
4.26) Resolva a inequação $-x^3 + 2x^2 + 9x - 18 < 0$

Solução

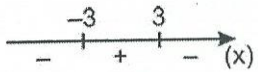
$-x^3 + 2x^2 + 9x - 18 = -x^2(x - 2) + 9(x - 2) = (x - 2)(-x^2 + 9)$

Assim, devemos resolver a inequação $(x - 2)(-x^2 + 9) < 0$

$A = x - 2$
$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$



$B = -x^2 + 9$
$-x^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3$



x	$-\infty$	-3		2		3	$+\infty$
A	−		−	o	+		+
B	−	o	+		+	o	+
AB	+	o	−	o	+	o	−

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

4.27) Determine o valor de **k** de modo que a sentença aberta $x^2 - kx + (k + 15) > 0$ seja verdadeira para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$.

Solução

Queremos que o trinômio $x^2 - kx + (k + 15)$ seja sempre positivo, isto é, queremos que tenha sempre o mesmo sinal de a (observe que a = 1). Portanto, devemos impor $\Delta < 0$.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -k \qquad \Delta = b^2 - 4ac = (-k)^2 - 4(1)(k+15) = k^2 - 4k - 60 \\ c = k + 15 \end{cases}$$

Devemos então resolver a inequação $k^2 - 4k - 60 < 0$. As raízes de $k^2 - 4k - 60$ são -6 e 10.
Assim, devemos ter $-6 < k < 10$

4.28) Determine os valores de **k** de modo que a inequação: $(k + 3)x^2 + kx + 1 > 0$ seja satisfeita para qualquer valor real de x (supor $k \neq -3$)

Solução

$$\begin{cases} a = k + 3 \\ b = k \qquad \Delta = b^2 - 4ac = k^2 - 4(k+3) = k^2 - 4k - 12 \\ c = 1 \end{cases}$$

Para que o trinômio $(k + 3)x^2 + kx + 1$ seja sempre positivo, devemos ter $a > 0$ e $\Delta < 0$.

$$\begin{cases} a > 0 \Leftrightarrow k + 3 > 0 \\ \Delta < 0 \Leftrightarrow k^2 - 4k - 12 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{O conjunto-verdade de } k + 3 > 0 \text{ é } V_1 = \{k \in \mathbb{R} \mid k > -3\} \\ \text{O conjunto-verdade de } k^2 - 4k - 12 < 0 \text{ é } V_2 = \{k \in \mathbb{R} \mid -2 < k < 6\} \end{cases}$$

Sendo V o conjunto dos valores de **k** que nos servem, teremos: $V = V_1 \cap V_2$.
Fazendo a operação obtemos:

$$V = \{k \in \mathbb{R} \mid -2 < k < 6\}$$

4.29) Seja: $y = \dfrac{(x^3 - 4)\sqrt{-x}}{x^2 - 9}$. Determine o conjunto de todos os números reais x para os quais y é real.

Solução

Para que y seja real, devemos ter $-x \geq 0$ e $x^2 - 9 \neq 0$. Neste caso, o valor numérico da expressão $x^3 - 4$ não importa. Sendo V_1 o conjunto-verdade de $-x \geq 0$, temos:

$$V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

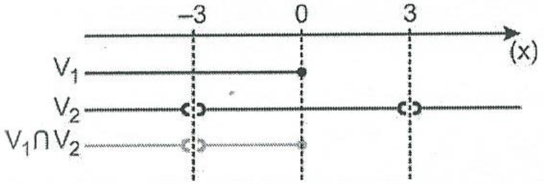
Seja V_2 o conjunto-verdade de: $x^2 - 9 \neq 0$.

$$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3 \text{ e } x \neq -3$$

Sendo A o conjunto dos valores de x que nos servem, temos:

$$A = V_1 \cap V_2$$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -3 < x \leq 0\}$



Exercícios Propostos

4.30) Resolva as inequações:

a) $x^2 - 7x - 8 < 0$
b) $x^2 - 7x - 8 \leq 0$
c) $x^2 - 7x - 8 > 0$
d) $x^2 - 7x - 8 \geq 0$
e) $x^2 - 6x + 9 > 0$
f) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$
g) $x^2 - 6x + 9 < 0$
h) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$
i) $x^2 - 4x + 6 < 0$
j) $x^2 - 4x + 6 \geq 0$
k) $x^2 - 4x + 6 < 0$
l) $x^2 - 4x + 6 \leq 0$
m) $-x^2 + 5x - 6 < 0$
n) $-x^2 + 5x - 6 > 0$
o) $x^2 - 1 \leq 0$
p) $-x^2 \geq -4x$
q) $4x^2 - 7x < 1 + 5x$

4.31) Resolva as inequações:

a) $3(2x - 3)^2 > 4x(2x - 9) + 43$
b) $\dfrac{x^2 - 3}{2} + \dfrac{x^2 - 5}{3} \leq \dfrac{1}{6}$

4.32) Resolva as inequações:

a) $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 7x + 12} \geq 0$
b) $\dfrac{(x - 2)(x^2 - x - 12)}{-3x + 6} \geq 0$
c) $\dfrac{x(x^2 + 4x)}{x - 1} < 0$
d) $\dfrac{(x - 3)^5(x + 2)^{11}(x^2 - 3)}{(x^2 - 4x - 12)^7} \leq 0$

4.33) Resolva os sistemas:

a) $\dfrac{x - 3}{x + 4} - \dfrac{x - 4}{2} > 0$
b) $\dfrac{x - 5}{x + 3} \leq \dfrac{x - 8}{x - 3}$
c) $\dfrac{x - 5}{x + 3} + \dfrac{x - 8}{x - 3} \geq \dfrac{1}{2}$
d) $\dfrac{x - 2}{x - 1} - \dfrac{x - 3}{x + 3} \geq 0$

4.34) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 < 0 \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} \dfrac{-x + 2}{2x - 7} > 0 \\ (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 2x - 3) \leq 0 \end{cases}$

4.35) Determine o valor de **p** de modo que a equação $2x^2 - 2(p-1)x + 5p = 0$ não admita raízes reais.

4.36) Determine o conjunto formado por todos os valores de **k** de modo que a expressão $(k-8)x^2 + (k-1)x - 1$ seja negativa para qualquer valor de x (suponha $k \neq 8$).

4.37) Determine o conjunto de todos os valores reais de x para os quais a expressão $\dfrac{(x^2-4)\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ resulta um número real.

4.6 – PROPRIEDADES

Neste item lembraremos mais algumas propriedades dos números reais que serão úteis na análise de outros tipos de equações e inequações.

$$P_4 \quad \boxed{a > b \wedge b > c \Leftrightarrow a > c} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Esta é a propriedade transitiva da relação a > b.

$$P_5 \quad \boxed{\left.\begin{matrix} a > b \\ \wedge \\ c > d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a + c > b + d} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Esta propriedade nos diz que podemos somar membro a membro desigualdades de *mesmo sentido*.

Exemplo

$$\left.\begin{matrix} 5 > 2 \\ \text{e} \\ 7 > 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5 + 7 > 2 + 4$$

$$P_6 \quad \boxed{\left.\begin{matrix} a > b \\ \wedge \\ c > d \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bd} \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$$

Esta propriedade nos diz que podemos multiplicar membro a membro desigualdades de *mesmo sentido* desde que todos os membros sejam positivos (ou alguns nulos).

Exemplo

$$\left.\begin{matrix} 4 > 3 \\ \text{e} \\ 5 > 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4(5) > 3(2)$$

$$P_7 \quad \boxed{a = b \Rightarrow a^2 = b^2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+$$

De modo geral, a implicação $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ é verdadeira para *quaisquer* **a** e b (mesmo negativos). No entanto, a implicação "$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$" só é válida para a e b positivos ou nulos (o que é ressaltado no exemplo a seguir). Por isso a equivalência $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ é válida desde que **a** e **b** pertençam a $\mathbb{R}_+$.

Exemplo

A sentença $(-3)^2 = (3)^2$ é verdadeira, no entanto a sentença $-3 = 3$ é falsa. Portanto a sentença $(-3)^2 = 3^2 \Rightarrow -3 = 3$ é falsa.

$$P_8 \quad \boxed{a = b \Leftrightarrow a^3 = b^3} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Neste caso não é necessário que **a** e **b** sejam positivos (ou nulos).

De modo geral, a sentença "$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n$" é verdadeira para *quaisquer* a e b desde que **n** seja *ímpar*. Quando **n** é *par* e diferente de zero a sentença só é válida para **a** e **b** pertencentes a $\mathbb{R}_+$. Assim temos as propriedades P_9 e P_{10}:

P_9 — Para **n** natural e ímpar temos: $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$

P_{10} — Para $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$ e **n** par temos: $a = b \Leftrightarrow a^n = b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}_+$

Para a desigualdade, há propriedades análogas a P_7, P_8, P_9 e P_{10}, que são as propriedades P_{11} e P_{12}:

P_{11} — Para **n** natural e ímpar temos: $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}$

P_{12} — Para $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$ e **n** par temos: $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n, \forall a, b \in \mathbb{R}_+$

Exemplos

a) $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2, \forall a, b \in \mathbb{R}_+$

b) $a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3, \forall a, b \in \mathbb{R}$

c) A sentença $3 > 2$ é verdadeira e no entanto a sentença $3^0 > 2^0$ é falsa. Daí a necessidade de se impor $n \neq 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$) na propriedade P_{12}.

Exercícios Resolvidos

4.38) Sendo a e b números reais positivos quaisquer, demonstre que:

a) $a > b \Rightarrow a^n > b^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

b) $a^n > b^n \Rightarrow a > b \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

c) $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Solução

a) Temos que: $\left.\begin{matrix} a > b \\ a > b \\ \cdots\cdots \\ a > b \end{matrix}\right\}$ n desigualdades.

Pela propriedade P_6 podemos multiplicar membro a membro essas desigualdades obtendo:

$\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ fatores}} > \underbrace{b \cdot b \ldots b}_{n \text{ fatores}}$

isto é, $a^n > b^n$.

b) Temos, por hipótese, $a^n > b^n$. Suponhamos, provisoriamente, que $a \leq b$. Então:

$\left.\begin{matrix} a \leq b \\ a \leq b \\ \cdots\cdots \\ a \leq b \end{matrix}\right\}$ n desigualdades

$a^n \leq b^n$

Portanto $a \leq b \Rightarrow a^n \leq b^n$, o que vai contra a hipótese ($a^n > b^n$). Portanto, supor $a \leq b$ nos leva a um absurdo e assim $a \leq b$ deve ser falsa. Como consequência, $a > b$ deve ser verdadeira.

c) Depois de demonstradas as propriedades dos itens a e b temos imediatamente:

$$a > b \Leftrightarrow a^n > b^n.$$

4.39) Mostre que $\sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Solução

Os dois membros da desigualdade são positivos. Portanto:

$\sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6} \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 < (\sqrt{3} + \sqrt{6})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 < (\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{14} + 7 < 3 + 2\sqrt{18} + 6 \Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{14} < 9 + 2\sqrt{18} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{14} < \sqrt{18} \Leftrightarrow 14 < 18$

Como esta última sentença é obviamente verdadeira, também o é a primeira sentença.

Exercícios Propostos

4.40) Sendo **a**, **b** e **c** números reais quaisquer, dê o valor "verdadeiro" ou "falso":

a) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$

b) $a > b \Leftrightarrow ac^2 > bc^2$ (com $c \neq 0$)

c) $a > b \Rightarrow a^6 > b^6$

d) $a^6 > b^6 \Rightarrow a > b$

e) $a > b \Leftrightarrow a^6 > b^6$

f) $a > b \Rightarrow a^8 > b^8$

g) $a^8 > b^8 \Rightarrow a > b$ ($a > 0, b > 0$)

h) $a > b \Leftrightarrow a^8 > b^8$ ($a > 0, b > 0$)

i) $a > b \Rightarrow a^7 > b^7$

j) $a^7 > b^7 \Rightarrow a > b$

k) $a > b \Leftrightarrow a^7 > b^7$

4.41) Considere os números reais **a**, **b**, **x**, **y**, **z**, tais que:

$a > b$, $x > y$ e $b + y > z$.

Demonstre que $a > z - x$

4.42) Demonstre que $\sqrt{2} + \sqrt{8} < \sqrt{3} + \sqrt{7}$

4.43) Sendo **a** e **b** números reais quaisquer, demonstre que:

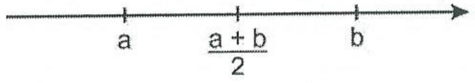
a) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

4.44) Dados dois números reais **a** e **b**, sua *média aritmética* é definida por $\frac{a+b}{2}$.

Supondo que $a < b$, prove que:

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

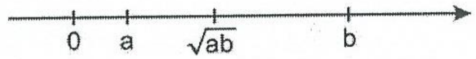
Observe que demonstrar isso é equivalente a mostrar que a média aritmética de dois números distintos está entre eles na reta, isto é, está no "meio".



4.45) Consideremos dois números reais **a** e **b** não-negativos. A *média geométrica* de **a** e **b** é o número **m** tal que $m^2 = ab$. Portanto observamos que $m = \pm\sqrt{ab}$. Para o caso particular em que $0 < a < b$, prove que

$$a < \sqrt{ab} < b$$

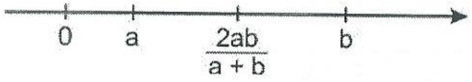
Note que demonstrar esse fato é equivalente a demonstrar que a *média geométrica positiva* de dois números reais distintos e não-negativos está "entre eles" na reta, isto é, está "no meio".



Obs.: Alguns autores definem a média geométrica apenas por $m = \sqrt{ab}$.

4.46) Consideremos dois números reais **a** e **b** não-nulos. Sua *média harmônica* é igual a $\frac{2ab}{a+b}$. Para o caso cm que: $0 < a < b$, demonstre que:

$$a < \frac{2ab}{a+b} < b$$



4.47) Consideremos dois números reais positivos e distintos **a** e **b**. Sejam:

m_a = média aritmética de a e b
m_g = média geométrica positiva de a e b
m_h = média harmônica de a e b

Prove que: $m_h < m_g < m_a$

4.7 – MÓDULO

Definição

Consideremos um número real x. O **módulo de x** é um número representado por |x| e obtido do seguinte modo:

1º) Se **x** é positivo ou nulo, o seu módulo é **ele mesmo**.

Exemplos

a) O módulo de +5 é igual a +5, isto é, |+5| = +5
b) O módulo de 7, é igual a 7, isto é, |7| = 7
c) O módulo de 0 é igual a 0, isto é, |0| = 0

2º) Se x é negativo, o seu módulo é obtido **trocando o seu sinal**.

Exemplos

a) O módulo de –5 é +5, isto é, |–5| = +5
b) O módulo de –7 é +7, isto é, |–7| = +7
c) |–8| = +8
d) |+8| = |–8| = +8

Exemplos

a) Para x > 0 temos |x| = x
b) Seja x = –3. Temos:
|x| = |–3| = +3 = –(–3) = –(x)
isto é, |x| = –x
c) De modo geral temos: para x < 0, |x| = –x
d) Se x = 0 tanto faz dizer que |x| = x como

$$|x| = -x, \text{ pois } +0 = -0$$

Da definição decorre que |x| nunca é negativo, isto é,

$$\forall x,\ |x| \geq 0$$

A definição de módulo pode ser dada de modo mais formal:

Sendo $x \in \mathbb{R}$, temos:
$x \geq 0 \Leftrightarrow |x| = x$
$x \leq 0 \Leftrightarrow |x| = -x$

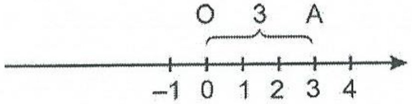
O "módulo de x" pode ser chamado também de "valor absoluto de x".

Interpretação Geométrica

Sabemos que o número real x está associado a um ponto da reta. Podemos interpretar o *módulo de x* como sendo a **distância** do ponto que representa x ao ponto que representa o número 0.

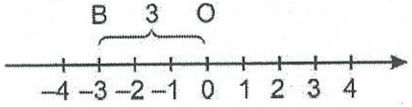
Exemplos

a) No esquema abaixo o número real 3 está associado ao ponto A. O módulo de 3 é igual à distância entre A e 0.



| 3 | = 3

b) No esquema abaixo, o número real –3 está associado ao ponto B. O módulo de –3 é igual à distância entre B e 0.



Algumas Propriedades

Sendo **x** e **y** números reais quaisquer, temos:

M_1 $\lvert x\rvert = \lvert -x\rvert$	M_4 $\lvert x\rvert^2 = x^2$
M_2 $\lvert xy\rvert = \lvert x\rvert \cdot \lvert y\rvert$	M_5 $\lvert x\rvert = 0 \Leftrightarrow x = 0$
M_3 $\left\lvert \frac{x}{y} \right\rvert = \frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert} (y \neq 0)$	M_6 $\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$

As propriedades acima são todas imediatas; no entanto, a propriedade M_6 merece um comentário. Suponhamos por exemplo x = 5. Temos:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5 = |5| = |x|$$

Suponhamos agora x = –5:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5| = |x|$$

Exercícios Resolvidos

4.48) Calcule:
a) |5 – 2|
f) |–2| + |5|

b) $|2-5|$
c) $|-2-5|$
d) $|-2+5|$
e) $|2+5|$
g) $|3-5|+|2-11|$
h) $4+3\,|2-9|-|-5|$
j) $|4+|5-3|\,|$

Solução

a) $|5-2|=|3|=3$
b) $|2-5|=|-3|=3$
c) $|-2-5|=|-7|=7$
d) $|-2+5|=|3|=3$
e) $|2+5|=|7|=7$
f) $|-2|+|5|=2+5=7$
g) $|3-5|+|2-11|=|-2|+|-9|=2+9=11$
h) $4+3\,|2-9|-|-5|=4+3\,|-7|-(5)=4+3(7)-5=4+21-5=20$
i) $|4+|5-3|\,|=|4+|2|\,|=|4+2|=6$

4.49) Dê o valor verdadeiro ou falso:
a) $|4-7|=|7-4|$
b) $|4+5|=|4|+|5|$
c) $|(-3)+(-8)|=|-3|+|-8|$
d) $|(-3)+(8)|=|-3|+|8|$
e) $\left|\frac{4}{5}\right|=\frac{|4|}{|5|}$
f) $|(4)\,(5)|=|4|\cdot|5|$
g) $x-3<0 \Rightarrow |x-3|=-x+3$
h) $2x+4\geq 0 \Rightarrow |2x+4|=2x+4$
i) $\left|\sqrt{3}-\sqrt{7}\right|=\sqrt{7}-\sqrt{3}$

Solução

a) V
b) V
c) V
d) F
e) V
f) V
g) V
h) V
i) V

4.50) Resolva as equações:
a) $|x|=4$
b) $|x|=0$
c) $|x|=-5$

Solução

a) Sabemos que $|4|=4$ e $|-4|=4$. Portanto, os valores que satisfazem a equação $|x|=4$ são 4 e –4, isto é,

$$|x|=4 \Leftrightarrow x=4 \text{ ou } x=-4$$
$$V=\{4;\,-4\}$$

b) O único número real que tem módulo igual a zero é o próprio zero. Portanto:

$$|x|=0 \Leftrightarrow x=0$$
$$V=\{0\}$$

c) O módulo de um número real não pode ser negativo e portanto a equação $|x|=-5$ não tem solução.

$$V=\varnothing$$

Exercícios Propostos

4.51) Calcule:
a) $|7-3|$
b) $|3-7|$
c) $|-4+6|$
d) $|(-5)+2-(-8)|$
e) $||3|-|-9||$
f) $|4-7|-|-12|$

4.52) Dê o valor "verdadeiro" ou "falso":
a) $|3|=|-3|$
b) $|x|=|-x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$
c) Se $x=3$ e $y=5$, então $|x+y|=|x|+|y|$
d) Se $x=-3$ e $y=5$, então $|x+y|=|x|+|y|$
e) Se $x=-3$ e $y=-5$, então $|x+y|=|x|+|y|$
f) Se $x=+3$ e $y=-5$, então $|x+y|<|x|+|y|$
g) Se $x=-3$ e $y=5$, então $|x+y|\leq|x|+|y|$
h) $4x-7<0 \Rightarrow |4x-7|=7-4x$
i) $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{9}{10}\right|=\frac{9}{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4.53) Resolva as equações:
a) $|x|=7$
b) $|x|=-7$
c) $|x|=0$

4.8 – EQUAÇÕES ENVOLVENDO MÓDULO

As equações envolvendo módulo são resolvidas usando a definição de módulo e as propriedades a seguir:

Sejam **x** e **y** números reais quaisquer. Sendo **a** um número real tal que $a\geq 0$, temos:

M_7 $|x|=a \Leftrightarrow x=a$ ou $x=-a$
M_8 $|x|=|y| \Leftrightarrow x=y$ ou $x=-y$
M_9 $|x|=a \Leftrightarrow x^2=a^2$
M_{10} $|x|=|y| \Leftrightarrow x^2=y^2$

Para justificar M_9 e M_{10} basta que lembremos da propriedade P_7 do item 4.6 deste capítulo, isto é,

$$a=b \Leftrightarrow a^2=b^2,\ \forall a, \in \mathbb{R}_+$$

No caso da M_9, lembrando que $|x|^2=x^2$ e que $a\geq 0$ temos:

$$|x|=a \Leftrightarrow |x|^2=a^2 \Leftrightarrow x^2=a^2$$

De modo semelhante podemos justificar M_{10}.

4.54) Resolva a equação $|x| = 7$

Solução

1º modo

$|x| = 7 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -7 \therefore V = \{7; -7\}$

2º modo

Aplicando a propriedade M_9, temos:

$|x| = 7 \Leftrightarrow x^2 = 7^2 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7 \therefore V = \{7; -7\}$

4.55) Resolva a equação $|x - 2| = 6$

Solução

1º modo

$|x - 2| = 6 \Leftrightarrow x - 2 = 6$ ou $x - 2 = -6 \Leftrightarrow x = 8$ ou $x = -4 \therefore V = \{8; -4\}$

2º modo

$|x - 2| = 6 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 6^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 36 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 32 = 0.$

Resolvendo esta última equação, obtemos $x' = -4$ e $x'' = 8$.
Assim: $V = \{8; -4\}$
Podemos observar que o 2º modo em geral não será muito vantajoso.

4.56) Resolva a equação $|x - 3| = |4x - 1|$

Solução

1º modo

$$|x - 3| = |4x - 1| \Leftrightarrow x - 3 = 4x - 1 \text{ ou } x - 3 = -(4x - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x - 4x = 3 - 1 \text{ ou } x - 3 = -4x + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = \frac{4}{5}$$
$$V = \left\{\frac{-2}{3}; \frac{4}{5}\right\}$$

2º modo

$|x - 3| = |4x - 1| \Leftrightarrow (x - 3)^2 = (4x - 1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 16x^2 - 8x + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 15x^2 - 2x - 8 = 0$

Resolvendo esta última equação, obtemos $x' = -\frac{2}{3}$ e $x'' = \frac{4}{5}$.

4.57) Resolva a equação $x^2 - 3|x| - 28 = 0$

Solução

Notando que $x^2 = |x|^2$ podemos escrever: $|x|^2 - 3|x| - 28 = 0$. Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, a equação fornecida transforma-se em: $y^2 - 3y - 28 = 0$. Resolvendo esta última equação, obtemos: $y' = 7$ e $y'' = -4$.

Já que $|x| = y$, vem:

$$\begin{cases} \text{para } y = 7, \ |x| = 7 \text{ e portanto } x = \pm 7 \\ \text{para } y = -4, \ |x| = -4 \text{ (impossível)} \end{cases}$$

Portanto: $V = \{7; -7\}$

4.58) Resolva a equação $|3x + 9| = 1 - x$

Solução

Para que a equação tenha solução devemos ter $1 - x \geq 0$, isto é, $x \leq 1$. Supondo esta condição válida temos:

$$|3x + 9| = 1 - x \Leftrightarrow 3x + 9 = 1 - x \text{ ou } 3x + 9 = -1 + x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = -5$$

Tanto -2 como -5 satisfazem a condição $x \leq 1$ e portanto temos:

$$V = \{-2; -5\}$$

4.59) Resolva a equação $|2x - 1| = 5x + 3$

Solução

Devemos ter $5x + 3 \geq 0$, isto é, $x \geq -\frac{3}{5}$. Supondo esta condição válida, temos:

$$|2x - 1| = 5x + 3 \Leftrightarrow 2x - 1 = 5x + 3 \text{ ou } 2x - 1 = -5x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ ou } x = -\frac{2}{7}$$

O valor $x = -\frac{2}{7}$ satisfaz a condição $x \geq -\frac{3}{5}$, porém $x = -\frac{4}{3}$ não satisfaz e portanto não é solução da equação. O conjunto-solução é então:

$$S = \left\{-\frac{2}{7}\right\}$$

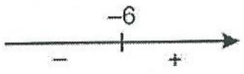
4.60) Resolva a equação $|x - 1| + |x + 6| = 13$

Solução

Façamos em primeiro lugar os estudos dos sinais de $x - 1$ e $x + 6$.

$A = x - 1$
$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$B = x + 6$
$x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$



$$\begin{cases} \text{para } x \leq 1 \text{ temos } x - 1 \leq 0 \text{ e portanto } |x - 1| = -x + 1 \\ \text{para } x \geq 1 \text{ temos } x - 1 \geq 0 \text{ e portanto } |x - 1| = x - 1 \\ \text{para } x \leq -6 \text{ temos } x + 6 \leq 0 \text{ e portanto } |x + 6| = -x - 6 \\ \text{para } x \geq -6 \text{ temos } x + 6 \geq 0 \text{ e portanto } |x + 6| = x + 6 \end{cases}$$

x	−∞ −6	1	+∞
x − 1	−	−	+
|x − 1|	− x + 1	− x + 1	x − 1
x + 6	−	+	+
|x + 6|	− x − 6	x + 6	x + 6

Temos então três casos a considerar:

1º) $x \le -6 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = -x+1 \\ |x+6| = -x-6 \end{cases}$

Portanto a equação |x − 1| + |x + 6| = 13 transforma-se em

$$-x + 1 - x - 6 = 13$$
$$-2x = 18$$
$$x = -9$$

O valor x = −9 satisfaz a condição $x \le -6$, portanto é solução.

2º) $-6 \le x \le 1 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = -x+1 \\ |x+6| = x+6 \end{cases}$

Para este caso a equação transforma-se em:

$$-x + 1 + x + 6 = 13$$
$$7 = 13 \text{ (absurdo)}$$

Portanto, não há solução no intervalo [−6; 1]

3º) $x \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} |x-1| = x-1 \\ |x+6| = x+6 \end{cases}$

Temos então:

$$x - 1 + x + 6 = 13$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

O valor x = 4 satisfaz a condição $x \ge 1$ e portanto é solução.
Assim, obtemos: V = {−9; 4}

4.61) Resolva a equação 4|x| − 3 = 5

Solução

$4|x| - 3 = 5 \Leftrightarrow 4|x| = 5 + 3 \Leftrightarrow 4|x| = 8 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -2$

$$V = \{2; -2\}$$

Propostos

Resolva as equações:

a) $|x - 8| = 9$
b) $|x^2 - 1| = 7$
c) $3|4x - 9| - 1 = 0$
d) $4|x - 3| = 13$
e) $|5 - x| = |4x + 12|$
f) $4|x| - \dfrac{5}{|x|} = \dfrac{11}{2}$
g) $|x^2 - 4x| = |x - 6|$
h) $|3x - 5| \cdot (4x^2 - 1) = 0$
i) $|3 - |4x - 1|| = 6$
j) $|7x - 1| + 3 = 0$

4.63) Resolva as equações:
a) $3x^2 - 10|x| - 8 = 0$
b) $(x - 3)^2 + |x - 3| - 12 = 0$

4.64) Resolva as equações:
a) $|3x - 1| = 6x + 2$
b) $|5x + 6| = 3x - 1$
c) $|x^2 - 6x| = 2x - 12$

4.65) Resolva as equações:
a) $|2x - 6| + |3x + 4| = 11$
b) $|x + 4| + |x + 7| = 3$
c) $|x - 1| - |2x + 6| + 2|x - 4| = 13$

4.66) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} |3x+4| = 2y \\ |2x-1| = y \end{cases}$$

4.9 – INEQUAÇÕES ENVOLVENDO MÓDULO

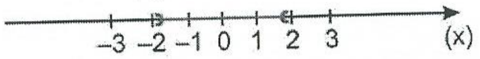
As inequações envolvendo módulo podem ser resolvidas com o auxílio das propriedades a seguir:

M_{11} | Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$ temos: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

Exemplo

Consideremos a inequação |x| < 2.
Os valores que satisfazem essa inequação estão entre −2 e 2:

$$|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$



Assim o conjunto-verdade de |x| < 2 é:

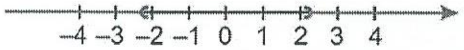
$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\} =]-2; 2[$$

M_{12} | Dado $a \in \mathbb{R}_+^*$ temos: $|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a$

Exemplo

Seja a inequação $|x| > 2$. Temos:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x > 2 \text{ ou } x < -2$$



Portanto o conjunto-verdade desta inequação é:

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \vee x < -2\} =]-\infty; -2[\cup]2; \infty[$$

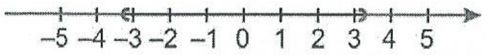
Exercícios Resolvidos

4.67) Resolva as inequações:

a) $|x| > 3$
b) $|x| \geq 3$
c) $|x| < 3$
d) $|x| \leq 3$
e) $|x| > -3$
f) $|x| < -3$
g) $|x| > 0$
h) $|x| < 0$
i) $|x| \geq 0$
j) $|x| \leq 0$
k) $\sqrt{x^2} > 4$

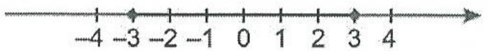
Solução

a) $|x| > 3 \Leftrightarrow x > 3 \text{ ou } x < -3$



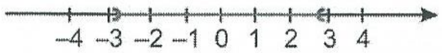
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \vee x < -3\}$

b) $|x| \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ ou } x \leq -3$



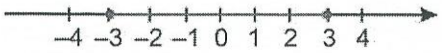
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \text{ ou } x \leq -3\}$

c) $|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\} =]-3; 3[$

d) $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$



$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3; 3]$

e) $|x| > -3$
Como $|x| \geq 0$, $|x| > -3$ será sempre verdadeira.
Portanto: $V = \mathbb{R}$

f) $|x| < -3$
Como $|x| \geq 0$, $|x| < -3$ será sempre verdadeira e assim: $V = \varnothing$.

g) Sabemos que $|x| \geq 0$. Portanto a inequação $|x| > 0$ será satisfeita para qualquer $x \neq 0$.

$$V = \mathbb{R}^*$$

h) $|x| < 0$ não é satisfeita para nenhum número real: $V = \varnothing$.

i) Sabemos que $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Assim, $V = \mathbb{R}$.

j) Como $|x|$ não pode ser negativo, o único número real que satisfaz $|x| \leq 0$ é 0.

$$V = \{0\}$$

k) $\sqrt{x^2} = |x|$ e assim temos:

$\sqrt{x^2} > 4 \Leftrightarrow |x| > 4 \Leftrightarrow x > 4 \text{ ou } x < -4$

$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \vee x < -4\}$

4.68) Resolva as inequações:

a) $|x + 3| \leq 5$
b) $3|x - 3| - 2 > 0$
c) $\sqrt{(x-1)^2} > 6$

Solução

a) $|x + 3| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x + 3 \leq +5 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 2$
$V = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leq x \leq 2\} = [-8; 2]$

b) $3|x - 3| - 2 > 0 \Leftrightarrow 3|x - 3| > 2 \Leftrightarrow |x - 3| > \frac{2}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 3 > \frac{2}{3} \text{ ou } x - 3 < -\frac{2}{3} \Leftrightarrow x > \frac{11}{3} \text{ ou } x < \frac{7}{3}$

$$V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{3} \text{ ou } x < \frac{7}{3}\right\}$$

4.69) Resolva a inequação: $x^2 - 5|x| + 6 > 0$

Solução

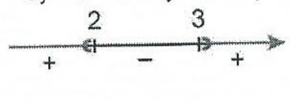
1º modo

Fazendo a mudança de variável $|x| = y$, temos: $x^2 = |x|^2 = y^2$. Lembrando que $|x| \geq 0$, isto é, $y \geq 0$, temos:

$$x^2 - 5|x| + 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 5y + 6 > 0 \\ \text{e} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vamos primeiramente resolver $y^2 - 5y + 6 > 0$

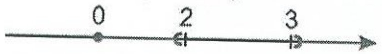
$$y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ou } y = 3.$$



Portanto: $y^2 - 5y + 6 > 0 \Leftrightarrow y < 2$ ou $y > 3$

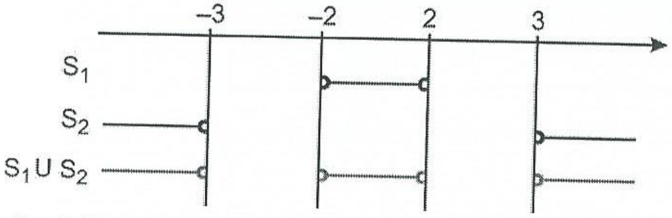
Porém, como devemos ter $y \geq 0$, os valores de y que nos servem são os que satisfazem:

$$0 \leq y < 2 \text{ ou } y > 3$$



Portanto: $x^2 - 5|x| + 6 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq |x| < 2 \\ \text{ou} \\ |x| > 3 \end{cases}$

Mas: $\begin{cases} 0 \leq |x| < 2 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2 & (S_1) \\ |x| > 3 \Leftrightarrow x > 3 \text{ ou } x < -3 & (S_2) \end{cases}$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

2º modo

Consideremos dois casos: $x \geq 0$ ou $x \leq 0$

1º) $x \geq 0$

Neste caso $|x| = x$ e a inequação pode ser escrita:

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ou $x > 3$

Seja: $\begin{cases} V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \\ V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\} \end{cases}$

Assim, um primeiro conjunto de valores que servem é:

$A = V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

2º) $x \leq 0$

Neste caso temos $|x| = -x$ e a inequação pode ser escrita:

$x^2 + 5x + 6 > 0$

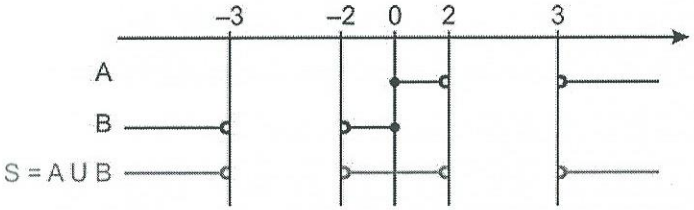
$x^2 + 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < -3$ ou $x > -2$

Sejam: $\begin{cases} V_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \\ V_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > -2\} \end{cases}$

Um outro conjunto de valores que nos servem é:

$B = V_3 \cap V_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x \leq 0\}$

O conjunto-solução da inequação proposta será $S = A \cup B$.



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

170) Resolva a inequação: $|2x - 6| > x - 4$.

Solução

Façamos duas hipóteses:

1ª) $2x - 6 \geq 0$

$2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$

Portanto, para $2x - 6 \geq 0$, isto é, para $x \geq 3$ temos:

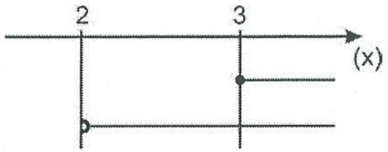
$|2x - 6| = 2x - 6$

e a inequação transforma-se em:

$2x - 6 > x - 4$

$2x - x > 6 - 4$

$x > 2$



Porém, como estamos trabalhando com $x \geq 3$, temos que um primeiro conjunto de valores que satisfazem a inequação proposta é:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

2ª) $2x - 6 < 0$

$2x - 6 < 0 \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3$

Portanto, para $2x - 6 < 0$, isto é, para $x < 3$, teremos:

$|2x - 6| = -2x + 6$

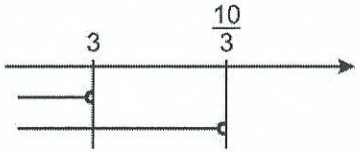
Assim, a inequação proposta transforma-se em:

$-2x + 6 > x - 4$

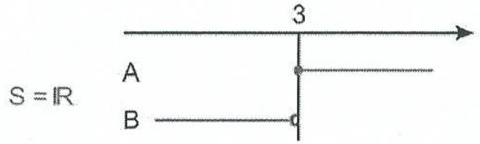
$-2x + 6 > x - 4 \Leftrightarrow -3x > -10 \Leftrightarrow x < \dfrac{10}{3}$

Lembrando que estamos trabalhando com $x < 3$, temos que um outro conjunto de valores que satisfazem a inequação é:

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$



Assim, o conjunto-solução da inequação proposta é: $S = A \cup B = \mathbb{R}$



4.71) Resolva a inequação: $|3x - 12| + |5 - x| < 12$.

Solução

Façamos em primeiro lugar o estudo dos sinais de $|3x - 12|$ e $|5 - x|$.

$3x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$

$5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$

x	$-\infty$ 4	5	$+\infty$
$3x - 12$	$-$	$+$	$+$
$\mid 3x - 12 \mid$	$-3x + 12$	$3x - 12$	$3x - 12$
$5 - x$	$+$	$+$	$-$
$\mid 5 - x \mid$	$5 - x$	$5 - x$	$-5 + x$

Temos então três regiões a considerar:

1ª) $x \leq 4$

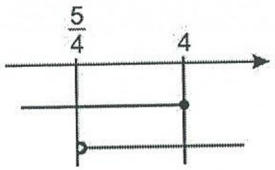
Para estes valores de x temos $|3x - 12| = -3x + 12$ e $|5 - x| = 5 - x$.
Assim a inequação proposta transforma-se em:

$-3x + 12 + 5 - x < 12 \Leftrightarrow -4x < -5 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{4}$

Como estamos trabalhando com $x \leq 4$, um primeiro conjunto de valores que satisfazem é:

$A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{5}{4}\right\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{5}{4} < x \leq 4\}$



2ª) $4 \leq x \leq 5$

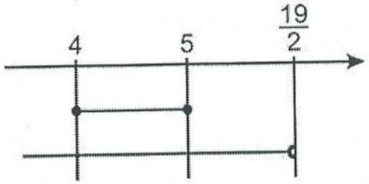
$|3x - 12| = 3x - 12$ e $|5 - x| = 5 - x$

$3x - 12 + 5 - x < 12$

$2x < 19$

$x < \dfrac{19}{2}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leq x \leq 5\}$



3ª) $x \geq 5$

$|3x - 12| = 3x - 12$

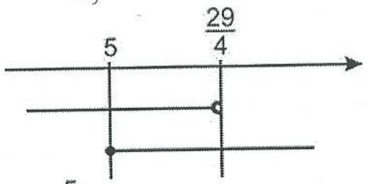
$|5 - x| = -5 + x$

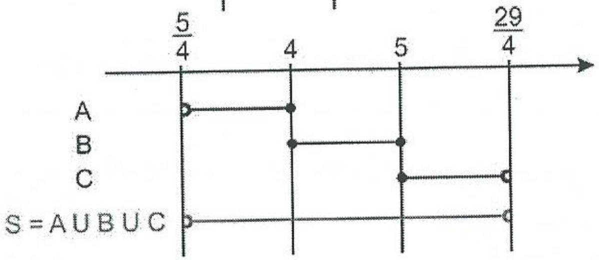
$3x - 12 - 5 + x < 12$

$4x < 29$

$x < \dfrac{29}{4}$

$C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < \dfrac{29}{4}\right\}$





$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{4} < x < \frac{29}{4} \right\}$$

Exercícios Propostos

4.72) Resolva as inequações:

a) $|x| > 6$
b) $|x| \geq |x|$
c) $|x| < 6$
d) $|x| \leq 6$
e) $|x| > -6$
f) $|x| \geq -6$
g) $|x| < -6$
h) $|x| \leq -6$

4.73) Resolva as inequações:

a) $|3x - 5| > 2$
b) $|3x - 5| \geq 2$
c) $|3x - 5| < 2$
d) $|3x - 5| \leq 2$
e) $|3x - 5| > -3$
f) $|3x - 5| \geq -3$
g) $|3x - 5| < -3$
h) $|3x - 5| \leq -3$
i) $|3x - 5| > 0$
j) $|3x - 5| \geq 0$
k) $|3x - 5| < 0$
l) $|3x - 5| \leq 0$

4.74) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{(x-2)^2} > 7$
b) $5\,|3x + 8| - 6 < 1$
c) $|2x - 6| - 3 \leq 0$
d) $|x^2 - 3x| < 10$

4.75) Resolva as inequações:

a) $x^2 - 2\,|x| - 24 < 0$
b) $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$
c) $|2x - 3| + |2x - 5| \geq 6$

4.76) Resolva as inequações:

a) $(x^2 - 16) \cdot |x - 6| > 0$
b) $(x^2 - 16) \cdot |3x - 6| \geq 0$
c) $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{|x^2 - 4|} \leq 0$
d) $\dfrac{x^2 + 3x - 10}{|x - 4|} \leq 0$

4.10 – PROPRIEDADES DO MÓDULO

Além das propriedades já apresentadas, há mais algumas importantes que serão apresentadas a seguir.

M_{13} Sendo x um número real qualquer,
$-|x| \leq x \leq |x|$

Exemplos

a) Seja x = + 3. Teremos $-|3| \leq 3 \leq |3|$, isto é, $-3 \leq 3 \leq 3$ que é obviamente verdadeira.
b) Seja x = –3. Teremos: $-|-3| \leq -3 \leq |-3|$, isto é, $-3 \leq -3 \leq 3$ que é verdadeira.
c) Seja x = 0. Teremos $-|0| \leq 0 \leq |0|$, isto é, $0 \leq 0 \leq 0$, que é também verdadeira.

M_{14} Sendo x e y números reais quaisquer
$|x + y| \leq |x| + |y|$

Esta é a chamada **desigualdade triangular** e a razão do nome é entendida quando se faz o estudo dos *números complexos* (ver volume 7 desta coleção).

Exemplos

a) Se x e y são ambos negativos ou ambos positivos, vale

$$|x + y| = |x| + |y|$$

Assim, por exemplo, temos:

$$|4 + 7| = |4| + |7|$$
$$|(-4) + (-7)| = |-4| + |-7|$$

b) Se x = 0 ou y = 0, teremos também $|x + y| = |x| + |y|$. Assim, por exemplo.

$$|7 + 0| = |7| + |0|$$
$$|(-7) + 0| = |-7| + |0|$$

c) Se x e y são diferentes de zero e de sinais contrários, teremos:

$$|x + y| < |x| + |y|$$

Assim, por exemplo, temos:

$$|(5) + (-2)| < |5| + |-2|$$
$$|(-7) + (3)| < |-7| + |3|$$

M_{15} Sendo x e y números reais quaisquer, temos:
$|x + y| \geq |x| - |y|$
$|x - y| \geq |x| - |y|$

Exercícios Resolvidos

4.77) Demonstre que é verdadeira a desigualdade triangular.

Solução

Há vários processos de fazer essa demonstração. Um deles poderia ser verificar que a desigualdade é verdadeira para cada um dos seguintes casos:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$
$$x \leq 0 \text{ e } y \leq 0$$

$$x \geq 0 \text{ e } y \leq 0$$
$$x \leq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Porém este processo é muito demorado e assim apresentaremos, a seguir, 3 processos mais rápidos.

1º processo

Podemos fazer 2 hipóteses a respeito de x + y:

$$x + y \geq 0 \text{ ou } x + y < 0$$

1º caso:

$x + y \geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 0 \quad \Rightarrow |x+y| = x + y \\ x \leq |x| \text{ e } y \leq |y| \Rightarrow x + y \leq |x| + |y| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$$

2º caso: x + y < 0

$$x + y < 0 \Rightarrow -x - y > 0 \xrightarrow{1^{\circ}\text{ caso}} |-x-y| \leq |-x| + |-y|$$

Como:

$$\begin{cases} |-x-y| = |x+y| \\ |-x| = |x| \\ |-y| = |y| \end{cases}$$

Vem:

$|x + y| \leq |x| + |y|$

2º processo

$$\left.\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\} \text{Somando membro a membro, obtemos:}$$

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

ou $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ (I)

Observando que $|x| + |y| \geq 0$, vemos que a desigualdade (I) é do tipo:

$$-m \leq k \leq m \quad (\text{com } m \geq 0)$$

e de acordo com a propriedade M_{11}, temos:

$$-m \leq k \leq m \Leftrightarrow |k| \leq m$$

Assim, concluímos que a desigualdade (I) é equivalente a:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

3º processo

De acordo com M_{13}, temos

$$xy \leq |xy|$$

Porém $|xy| = |x|\,|y|$ e assim temos $xy \leq |x| \cdot |y|$

$xy \leq |x| \cdot |y| \Leftrightarrow 2xy \leq 2\,|x|\,|y| \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq x^2 + y^2 + 2|x|\,|y| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \leq |x|^2 + |y|^2 + 2\,|x||y| \Leftrightarrow (x + y)^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$

Neste ponto devemos nos lembrar que, de acordo com a propriedade P_{12} do item 4.6, temos:

$$m^2 \leq n^2 \Leftrightarrow m \leq n \quad (\text{para } m \geq 0 \text{ e } n \geq 0).$$

Como $|x + y| \geq 0$ e $|x| + |y| \geq 0$, aplicando P_{12} vem:

$$|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow |x + y| \leq |x| + |y|$$

4.78) Demonstre que, $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$, quaisquer que sejam os números reais x, y e z.

Solução

$$\left.\begin{array}{l} x - y = (x - z) + (z - y) \Rightarrow |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \\ |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x - y| \leq |x - z| + |z - y|$$

Exercícios Propostos

4.79) Sendo x e y números reais quaisquer, demonstre que:

a) $|x - y| \leq |x| + |y|$
b) $|x - y| \geq |x| - |y|$
c) $|x + y| \geq |x| - |y|$

4.80) Sendo x, y e z reais quaisquer, demonstre que
$|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|$.

4.81) Sendo x, y, a, b e k números reais quaisquer, demonstre que:
$|x - a| < k$ e $|y - b| < k \Rightarrow |(x + y) - (a - b)| < 2k$

Exercícios Suplementares

II.1) Determine os valores do parâmetro a, tais que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ x - 4y = a - 13 \end{cases}$$

admita soluções (x; y), de modo que: $x < 0$ e $y > 0$.

II.2) Sejam os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x^2 - 2x - 15 \leq 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 < 0\}$

$M = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq \dfrac{x+1}{2} \leq 4\}$

Determine:

a) C_M^A

b) $(A \cap B) - M$

c) $C_M^{(A \cap B)}$

II.3) Resolva a equação $\sqrt{2x^2 - 9x + 4} - \sqrt{2x^2 - 7x + 1} = 1$.

II.4) Resolva a equação $\sqrt{2x + 3} = \sqrt{5x + 8} - \sqrt{3x + 5}$.

II.5) Resolva a inequação $|2x + 4| > |x - 1|$.

II.6) Resolva o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = 12 \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{3}{z} = -6 \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{z} = -12 \end{cases}$$

II.7) Fatore a expressão $x^8 - 17x^4 + 16$.

II.8) Resolva a inequação $x^8 - 17x^4 + 16 < 0$.

II.9) Resolva a inequação $\dfrac{x^8 - 17x^4 + 16}{1 - 4x^2} \leq 0$.

II.10) Sendo x' e x'' as raízes da equação $3x^2 + 8x - 2 = 0$, calcule o valor de $\dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$.

PARTE III

Capítulo 5 – **Relações**

Capítulo 6 – **Função real de variável real**

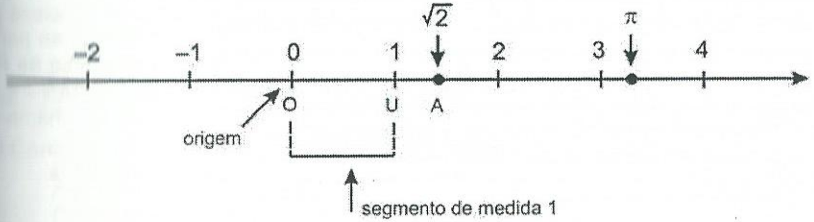
Capítulo 5

Relações

5.1 – COORDENADAS NO PLANO

Eixo

Eixo é uma reta orientada sobre a qual se fixou uma *escala*.



Para se obter um eixo, marcamos sobre uma reta dois pontos, O e U, de tal forma que o segmento **OU** tenha *medida igual a 1*.

A reta recebe, então, uma orientação: convencionamos que o sentido de **O** para **U** é o **sentido positivo**; o outro sentido é o **negativo**.

Com a origem **O** e o segmento unitário **OU** fica estabelecida uma escala sobre a reta.

Sistema de Abscissas

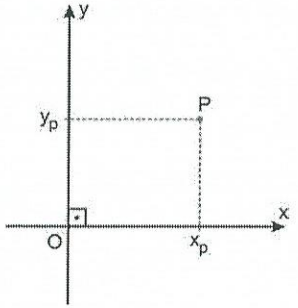
Estabelecemos sobre um eixo um **sistema de abscissas** associando ao ponto **O** o número zero e ao ponto **U** o número 1: então, a cada ponto **P** do eixo corresponde um único número real x_P e, inversamente, a cada número real x_P corresponde um único ponto **P** sobre o eixo.

O número real x_P associado a **P** denomina-se **abscissa de P**; para indicarmos que o ponto P tem abscissa x_P, escrevemos:

$$P(x_P)$$

Na figura acima, temos: $O(0)$, $U(1)$, $A(\sqrt{2})$, $B(-1)$.

Sistema Cartesiano Ortogonal



Consideremos dois eixos perpendiculares Ox e Oy, para os quais a interseção O seja a origem, e que tenham a mesma unidade de medida.

A um ponto qualquer P, do plano dos dois eixos: associamos *dois números reais* pelo processo seguinte:

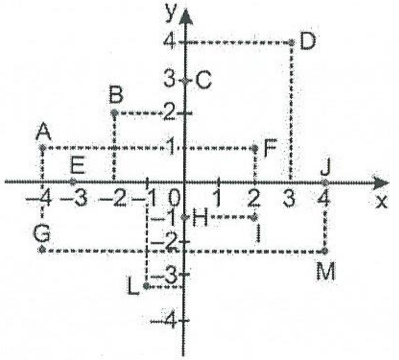
Passamos por **P** retas perpendiculares aos eixos: uma delas encontra o eixo Ox no ponto de abscissa x_P, e a outra encontra o eixo Oy no ponto de abscissa y_P. Obtemos, assim, *um par ordenado de números reais*, (x_P; y_P), associado ao ponto **P**. Os números x_P e y_P denominam-se **coordenadas de P**; x_P é a **abscissa de P** e y_P é a **ordenada de P**.

O sistema de coordenadas estabelecido por esse processo chama-se **sistema cartesiano ortogonal**.

Para indicarmos que o ponto **P** tem coordenadas (x_P; y_P) escrevemos:

P(x_P; y_P)

A figura abaixo mostra alguns pontos do plano cartesiano, cada qual com suas coordenadas indicadas. Observe que os pontos pertencentes ao eixo Ox possuem ordenada y = 0, enquanto que os pontos pertencentes ao eixo Oy possuem abscissa x = 0. Na figura temos:

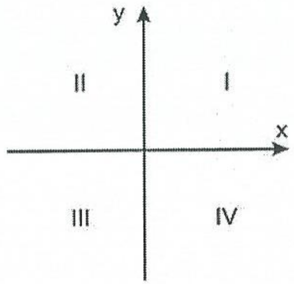


A (–4; 1)
B (–2; 2)
C (0; 3)
D (3; 4)
E (–3; 0)
F (2; 1)

G (–4; –2)
H (0; –1)
I (2; –1)
J (4; 0)
L (–1; –3)
M (4; –2)

Quadrantes

Os dois eixos do sistema cartesiano dividem o plano em quatro regiões, chamadas **quadrantes**, numeradas conforme se vê na figura abaixo. Convenciona-se que os pontos situados sobre os eixos não pertencem a nenhum dos quadrantes. É fácil ver que cada quadrante está relacionado com os sinais das coordenadas dos pontos. Por exemplo, se um ponto está no primeiro quadrante, suas coordenadas são ambas *positivas*; um ponto situado no quarto quadrante apresenta *abscissa positiva* e *ordenada negativa*.



5.2 – PAR ORDENADO

O Conceito de Par Ordenado

Admitiremos a noção de par ordenado como *conceito primitivo*.

Dados os objetos a e b podemos, com eles, formar um novo objeto, indicado por:

(a; b)

que se denomina **par ordenado**.

Diremos que no par ordenado (a; b), **a** é o *primeiro elemento*, ou *primeira coordenada*, ou *primeira projeção*; **b** é o *segundo elemento*, ou *segunda coordenada*, ou *segunda projeção*.

Observe que no conceito de par ordenado a ordem é essencial; assim o par (1; 3) é distinto do par (3; 1). No par (1; 3), 1 é o *primeiro elemento* e 3 é o *segundo elemento*; e, no par (3; 1), 3 é o *primeiro elemento* e 1 é o *segundo elemento*. O elemento é considerado com a sua ordem; modificando-se esta, estaremos modificando o par.

Igualdade de Pares Ordenados

Diremos que os pares ordenados (a; b) e (c; d) são iguais se e somente se são iguais os primeiros elementos dos pares e também são iguais os segundos elementos dos pares, isto é:

$(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow [a = c \text{ e } b = d]$

Exemplos

a) (1; 2) = (1; 2)
b) (x; y) = (–3; 2) ⇔ [x = –3 e y = 2]
c) Se a = b, então (a; b) = (b; a)

d) Se $a \neq b$ então $(a; b) \neq (b; a)$; observe que os **conjuntos** {a; b} e {b; a} *são iguais*, pois nos conjuntos a ordem dos elementos é irrelevante.

e) A um ponto P de um plano, sobre o qual fixamos um sistema cartesiano ortogonal, associamos um par ordenado de números reais $(x_P; y_P)$ cujos elementos são as coordenadas do ponto **P**. Abre-se, então, a possibilidade de representarmos graficamente um par ordenado $(x_P; y_P)$; essa representação é o ponto P do plano cuja abscissa é x_P e cuja ordenada é y_P.

Exercícios Resolvidos

5.1) Determine os números reais x e y, sabendo-se que:

a) $(x + y; 2) = (4; x - y)$

b) $(2x; y - 2x) = (3y; 3)$

Solução

a) Da definição de igualdade entre pares ordenados temos:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Para resolvermos o sistema acima somamos e subtraímos, membro a membro, as duas equações, obtendo-se $x = 3$ e $y = 1$.

b) Da definição de igualdade entre pares ordenados temos:

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ y - 2x = 3 \end{cases}$$

Somando membro a membro as duas equações do sistema obtemos: $y = 3y + 3$ e daí: $y = \frac{-3}{2}$; por substituição obtemos: $x = \frac{-9}{4}$.

5.2) Os números a, b, c e d são inteiros. Para $bd \neq 0$ definem-se as operações de adição + e de multiplicação ·, entre pares ordenados, da seguinte forma:

$$(a; b) + (c; d) = (ad + bc; bd)$$
$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac; bd)$$

a) Determine $(2; 3) + (5; 4)$ e $(2; 3) \cdot (5; 4)$

b) Determine o intervalo x sabendo-se que: $(x + 2; 2) + (3; 2) = (x; 2) \cdot (1; 2)$

Solução

a) $(2; 3) + (5; 4) = (2 \cdot 4 + 3 \cdot 5; 3 \cdot 4) = (23; 12)$
$(2; 3) \cdot (5; 4) = (2 \cdot 5; 3 \cdot 4) = (10; 12)$

b) $(x + 2; 2) + (3; 2) = (x; 2) \cdot (1; 2) \Leftrightarrow (2x + 4 + 6; 4) = (x; 4) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x + 10; 4) = (x; 4) \Leftrightarrow x = 2x + 10 \Leftrightarrow x = -10$

5.3) Podemos definir rigorosamente **par ordenado** como segue:

$$(a;b) = \{\{a\};\{a;b\}\}$$

Use essa definição e prove que: se $(a; b) = (c; d)$ então: $a = c$ e $b = d$.

Solução

Por hipótese: $(a; b) = (c; d)$, isto é: $\{\{a\}; \{a; b\}\} = \{\{c\}; \{c; d\}\}$.
Se $a = b$, o par $(a; b) = \{\{a\}\}$ e então $(c; d) = \{\{c\}; \{c; d\}\} = \{\{a\}\}$; da igualdade dos conjuntos, que então devem ser constituídos pelos mesmos elementos, tem-se: $a = b = c = d$. Se $a \neq b$, $(a; b)$ e $(c; d)$ possuem, respectivamente, como elementos os conjuntos {a} e {c}, que devem ser iguais: {a} = {c}, e então $a = c$. Também $(a; b)$ e $(c; d)$ possuem, respectivamente, como elementos os conjuntos {a; b} e {c; d}, que devem ser iguais: {a; b} = {c; d}; daí $b = d$ (e não $b = c$, pois $a = c$ e viria $b = a$, contra a hipótese). Então, $a = c$ e $b = d$

Exercícios Propostos

5.4) Determine os números reais x e y sabendo-se que:

a) $\left(4x - y; \frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) = (0; 7)$ b) $\left(\frac{3x-1}{4}; 3x\right) = (y + 2; 3 + 5y)$

5.5) Os números a, b, c e d são reais. Para os pares ordenados $\alpha = (a; b)$ e $\beta = (c; d)$ definem-se as operações:

$\alpha + \beta = (a + c; b + d)$

$\alpha \cdot \beta = (ac - bd; ad + bc)$

$x \cdot \alpha = (xa; xb)$, para todo x, $x \in \mathbb{R}$

a) Determine $(3; 1) + (-3; -1)$ e $(a; b) \cdot (1; 0)$

b) Determine o *par ordenado* α sabendo-se que $3 \cdot \alpha + (-1; 2) = \alpha \cdot (1; 0)$

5.6) Utilizando a definição do exercício 5.3 verifique que se $(a; b) = (b; a)$ então $a = b$.

5.3 – PRODUTO CARTESIANO

Consideremos os conjuntos: A = {1; 2; 3} e B = {3; 5}.

Todos os pares ordenados (x; y) onde o *primeiro elemento*, x, é obtido no conjunto A e o *segundo elemento*, y, é obtido no conjunto B, são:

(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (3; 3) e (3; 5)

Podemos, então, formar um novo conjunto, cujos elementos são todos os pares ordenados (x; y) obtidos acima; esse conjunto denomina-se **produto cartesiano de A por B** e será indicado com $A \times B$; assim:

$A \times B = \{(1; 3), (1; 5), (2; 3), (2; 5), (3; 3), (3; 5)\}$

O símbolo $A \times B$ deve ser lido: "A cartesiano B".

Definição

Chama-se produto cartesiano de um conjunto não-vazio A por um conjunto não-vazio B, ao conjunto de todos os pares ordenados (x; y) com primeiro elemento x em A e segundo elemento y em B; portanto:

$$A \times B = \{(x; y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Se A = ∅ ou B = ∅ completa-se a definição com $A \times B = \varnothing$.

Exemplos

a) Se A = {2; 4} e B = {3; 5; 7} os elementos do produto cartesiano de A por B, $A \times B$, podem ser obtidos de uma forma sistemática, conforme o esquema abaixo, denominado "diagrama de árvore":

Então:

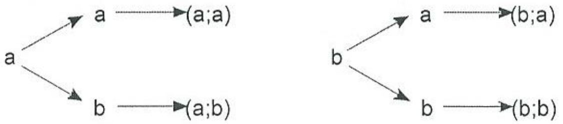
$A \times B$ {(2; 3), (2; 5), (2; 7), (4; 3), (4; 5), (4; 7)}

No esquema acima, observe que cada elemento de A gerou três pares ordenados; como A possui 2 elementos, o número de pares ordenados construídos é $2 \cdot 3 = 6$.

De um modo geral, se o conjunto A possui **m** elementos e o conjunto B possui **n** elementos, o conjunto $A \times B$ possui $m \cdot n$ elementos; isto é:

$$n_{A \times B} = n_A \cdot n_B$$

b) Seja A = {a; b} e formemos $A \times A$:



Então, $A \times A$ = {(a; a), (a; b), (b; a), (b; b)}

Indica-se: $A \times A = A^2$

O subconjunto de $A \times A$, constituído pelos pares ordenados que têm as duas coordenadas iguais, denomina-se **diagonal** de $A \times A$; indica-se com Δ_A. No exemplo acima: Δ_A = {(a; a); (b; b)}.

c) Consideremos A = {1; 2; 3} e B = {0; 1}.
Então:

$A \times B$ = {(1; 0), (1; 1), (2; 0), (2; 1), (3; 0), (3; 1)}
$B \times A$ = {(0; 1), (0; 2), (0; 3), (1; 1), (1; 2), (1; 3)}

Este exemplo mostra que, em geral, $A \times B \neq B \times A$.

d) {1;3} □ × ∅ = ∅ × {1; 3} = ∅ × ∅ = ∅

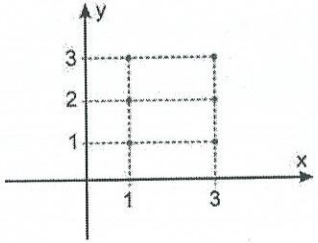
Representação Gráfica do Produto Cartesiano

Se no plano fixarmos um sistema cartesiano ortogonal, sabemos que a todo par (x; y) de números reais corresponde o ponto P(x; y).

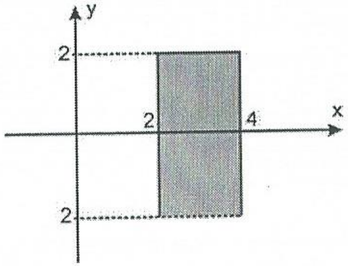
Sejam, então, A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Os elementos de $A \times B$ são pares ordenados de números reais e, a cada um deles, no plano, associa-se, então, um ponto. O conjunto de **todos** esses pontos representa graficamente $A \times B$; esse conjunto de pontos é o **gráfico** de $A \times B$.

Exemplos

a) Se A = {1; 3} e B = {1; 2; 3} o *gráfico* de $A \times B$ é a totalidade dos pontos (x; y), com abscissa **x** em **A** e ordenada **y** em **B**:



b) Sejam os intervalos A = [2; 4] e B =]–2; 2].
O gráfico do conjunto $A \times B$ é o retângulo da figura excluídos os pontos do lado inferior. Note que o produto cartesiano de A por B é constituído por infinitos pares; o lado do retângulo que não está incluído no gráfico é indicado com uma linha interrompida:

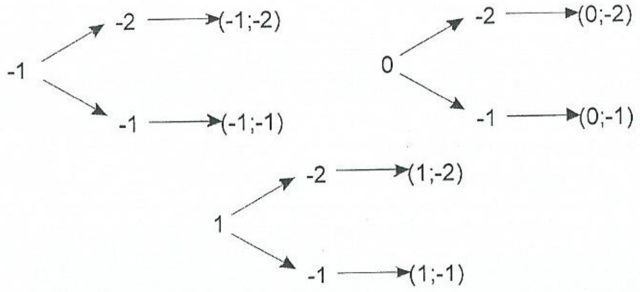


Exercícios Resolvidos

5.7) Se A = {–1; 0; 1} e B = {–2; –1}, determine:
a) $A \times B$
b) $B \times A$
c) $(A \times B) \cap (B \times A)$
d) A^2
e) Δ_A

Solução

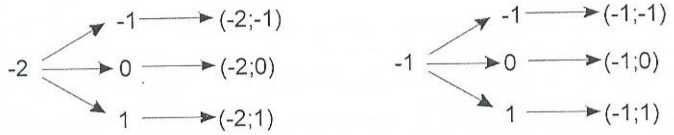
a) Para a construção de $A \times B$ utilizamo-nos do "diagrama de árvore":



Então:

$A \times B = \{(-1; -2), (-1; -1), (0; -2), (0; -1), (1; -2), (1; -1)\}$

b) Analogamente, utilizamo-nos do "diagrama de árvore":

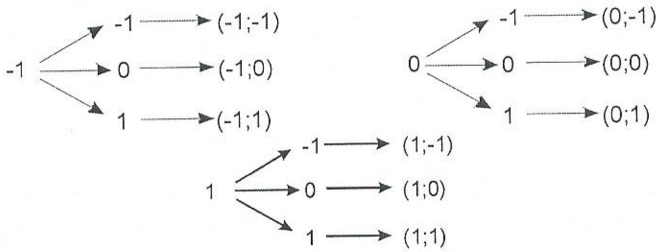


Então $B \times A = \{(-2; -1), (-2; 0), (-2; 1), (-1; -1), (-1; 0), (-1; 1)\}$

c) Os pares ordenados comuns aos produtos $A \times B$, $B \times A$ são os elementos do conjunto $(A \times B) \cap (B \times A)$; então:

$$(A \times B) \cap (B \times A) = \{(-1; -1)\}$$

d) O conjunto $A^2 = A \times A$ obtém-se com o "diagrama de árvore":



Então: $A^2 = \{(-1; -1), (-1; 0), (-1; 1), (0; -1), (0; 0), (0; 1), (1; -1), (1; 0), (1; 1)\}$

e) Com a notação Δ_A indicamos a diagonal de $A \times A$; Δ_A é o subconjunto de A^2 cujos elementos são pares ordenados, onde as duas coordenadas são iguais; então:

$$\Delta_A = \{(-1; -1), (0; 0), (1; 1)\}$$

5.8) Se um conjunto A possui 3 elementos e um conjunto B possui 6 elementos, dê o número de elementos de cada um dos conjuntos:

a) B^2
b) A^2
c) $A \times B$
d) $B \times A$
e) Δ_B
f) $B^2 - \Delta_B$

Solução

a) $n_B^2 = n_B \cdot n_B = 6 \cdot 6 = 36$
b) $n_A^2 = n_A \cdot n_A = 3 \cdot 3 = 9$
c) $n_{A \times B} = n_A \cdot n_B = 3 \cdot 6 = 18$
d) $n_{B \times A} = n_B \cdot n_A = 6 \cdot 3 = 18$
e) Δ_B é a diagonal de B^2; se em B há 6 elementos, é possível construirmos 6 pares nos quais as duas coordenadas são iguais; então: $n\Delta_B = 6$
f) B^2 possui 36 elementos e Δ_B possui 6 elementos; o conjunto $B^2 - \Delta_B$ é constituído pelos pares ordenados de B^2 que não pertencem à diagonal Δ_B. Então: $n_B^2 - \Delta_B = 36 - 6 = 30$.

5.9) O conjunto A^2 possui 9 elementos. Se: $(p; q) \in A^2$, $(r; q) \in A^2$ e p, q e r são distintos dois a dois, determine:

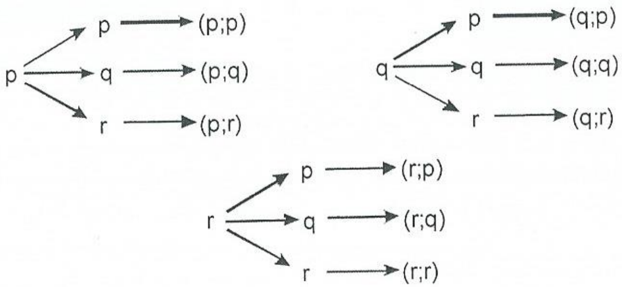
a) n_A
b) A
c) A^2

Solução

a) $n_A^2 = n_A \cdot n_A = n_A^2$; então $n_A^2 = 9$ e $n_A = 3$

b) Se $(p; q) \in A \times A$ então $p \in A$ e $q \in A$
Se $(r; q) \in A \times A$ então $r \in A$
Daí, como A possui 3 elementos: $A = \{p; q; r\}$

c) Para a obtenção de A^2 utilizamos o "diagrama de árvore":



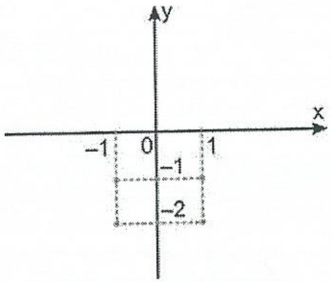
Então: $A = \{(p; p), (p; q), (p; r), (q; p), (q; q), (q; r), (r; p), (r; q), (r; r)\}$

5.10) Dê o gráfico dos seguintes produtos:

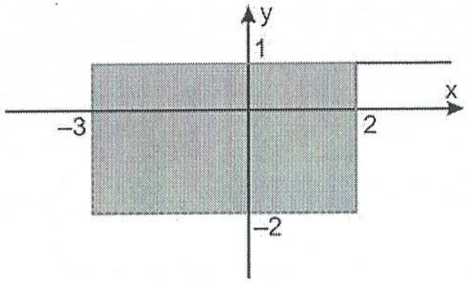
a) $\{-1; 0; 1\} \times \{-2; -1\}$
b) $]-3; 2] \times]-2; 1]$
c) $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$

Solução

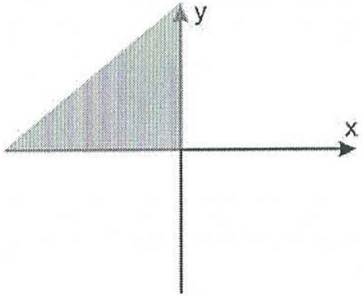
a) Sobre o eixo das abscissas representamos o conjunto $\{-1; 0; 1\}$, marcando os pontos de abscissas –1; 0 e 1; por esses pontos traçamos retas paralelas ao eixo das ordenadas. Sobre o eixo das ordenadas, representamos o conjunto $\{-2; -1\}$, marcando sobre ele os pontos de abscissas –2 e –1; por esses pontos traçamos retas paralelas ao eixo das abscissas. Estas duas paralelas encontram aquelas três anteriores em 6 pontos, que constituem o gráfico do produto $\{-1; 0; 1\} \times \{-2; -1\}$.



b) Sobre o eixo das abscissas marcamos os pontos de abscissas –3 e 2 e por eles traçamos retas paralelas ao eixo das ordenadas. Sobre o eixo das ordenadas marcamos os pontos –2 e 1 e por eles traçamos retas paralelas ao eixo das abscissas. O subconjunto do plano limitado pelas quatro retas é o gráfico do produto]–3; 2] ×] –2; 1], sendo que há dois lados do retângulo cujos pontos não estão incluídos no gráfico.



c) O gráfico do produto cartesiano $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ é constituído por todos os pontos de coordenadas (x; y) para os quais $x \leq 0$ e $y \geq 0$; o conjunto desses pontos é a união do II quadrante com os semi-eixos, como parcialmente mostra a figura.



Exercícios Propostos

5.11) Se U = {1; 2; 3; 4; 5}, A = {3; 4; 5} e B = {1; 2; 3} determine os seguintes conjuntos:

a) A × A
b) A × B
c) B × B
d) B × A
e) $A^2 \cap B^2$
f) (A × B) ∩ (B × A)
g) (U × A) ∩ (U × B)

5.12) Para os conjuntos A = {a; b}, B = {2; 3} e C = {3; 4}, verifique se:

a) A × (B ∪ C) = (A × B) ∪ (A × C)
b) A × (B ∩ C) = (A × B) ∩ (A × C)

5.13) Se A é um conjunto com **n** elementos e B é um conjunto com **m** elementos, dê o número de elementos de cada um dos conjuntos abaixo:

a) A × A b) B^2 c) A × B d) Δ_A e) $B^2 - \Delta_B$

5.14) Para os conjuntos A e B tem-se $n_A = 3$ e $n_B = 2$. Sabe-se que A ∩ B = {2}, (3; 4) ∈ A × B e A ∪ B = {1; 2; 3; 4}. Determine A e B.

5.15) Se A × B = B × A, o que se pode concluir para os conjuntos A e B?

5.16) Desenhe o gráfico de cada um dos produtos abaixo:

a)]–3; 1] ×]–1; 1[
b)]3; +∞[×]–∞ ; –1[
c) $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$
d) {1} × [0; 6]

5.4 – RELAÇÕES

Uma Escolha

Sentenças do tipo:

"João *é marido de* Maria."

"9 *é maior que* 7."

"Marcela *é irmã de* Luciana."

são comuns em nossa conversação do dia-a-dia.

Cada uma dessas sentenças (ou frases) envolve o que intuitivamente se conhece como uma **relação**: como Marcela e Luciana *se relacionam*? São irmãs!

E expressões do tipo:

"é marido de"

"é maior que"

"é irmã de"

"é divisível por"

"é membro de"

são classificadas como *conectivos que geram relações*; nós as chamaremos de *expressões conectivas*.

Observe que a palavra "relação" envolve uma **correspondência** ou uma **associação** entre dois objetos (pessoas, números, idéias, etc. . .); essa associação se faz a partir de uma certa propriedade possuída pelos objetos relacionados. No exemplo acima, Marcela está relacionada, associada, em correspondência com Luciana, a partir de uma propriedade que possuem: são irmãs.

Consideremos, agora, a sentença aberta:

x *é irmã de* y

O par ordenado (Marcela; Luciana) satisfaz à sentença aberta, isto é, faz com que ela seja verdadeira, quando x é substituído por Marcela, e y, por Luciana. Entretanto, o par ordenado (João; Maria) não satisfaz à sentença aberta quando se faz a substituição de x por João e y por Maria. Analogamente, os pares ordenados (3; 2), (4; 1), (0; –1) satisfazem à sentença aberta:

x *é maior que* y

enquanto os pares (3; 4), (–2; 1), (2; 6) não a satisfazem.

De um modo geral, consideremos sentenças abertas de duas variáveis:

x ________ y

onde o "espaço em branco" é representado por um traço, para ser preenchido por alguma *expressão conectiva*.

Podemos, então, eleger um universo de pares ordenados para testar se a sentença é verdadeira ou falsa; assim, dois conjuntos são formados: o conjunto daqueles pares que satisfazem à sentença e o conjunto daqueles pares que não a satisfazem.

Podemos, agora, colocar uma questão de escolha: **relação** é a *expressão conectiva*, ou o conjunto de pares ordenados que satisfazem à sentença aberta originada por essa expressão?

Acreditamos que o conceito de relação é mais preciso se for definido como um conjunto de pares ordenados.

Então,

Definição

Sejam os conjuntos A e B. Uma **relação $\mathfrak{R}$, de A em B**, é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$.

Exemplos

Sejam A = {1; 2; 3} e B = {1; 2}; os subconjuntos de $A \times B$:

$\mathfrak{R}_1 = \{(1; 1), (1; 2), (3; 2)\}$
$\mathfrak{R}_2 = \{(2; 2), (3; 2)\}$
$\mathfrak{R}_3 = \{(2; 1)\}$
$\mathfrak{R}_4 = \varnothing$
$\mathfrak{R}_5 = A \times B$

são *relações de A em B*.

Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de A em B. Para indicarmos que o elemento **a** *está relacionado* com o elemento **b** através de $\mathfrak{R}$, isto é, para indicarmos que $(a; b) \in \mathfrak{R}$, usaremos a notação:

$$a \, \mathfrak{R} \, b$$

que se lê: "a R b" ou "**a** está na relação $\mathfrak{R}$ com **b**".

Exemplo

Sejam os conjuntos A = {a; b; c}, B = {1; 2; 3} e a relação de A em B:

$$\mathfrak{R} = \{(a; 1), (b; 1), (b; 3)\}$$

Então:

$(a; 1) \in \mathfrak{R}$ e daí $a \, \mathfrak{R} \, 1$
$(b; 1) \in \mathfrak{R}$ e daí $b \, \mathfrak{R} \, 2$
$(b; 3) \in \mathfrak{R}$ e daí $b \, \mathfrak{R} \, 3$

Domínio e Conjunto-imagem de uma Relação

Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de A em B.

O conjunto $D(\mathfrak{R})$ constituído por todos elementos x de A para os quais existe y em B tal que $(x; y) \in \mathfrak{R}$ é denominado **domínio de $\mathfrak{R}$**.

O conjunto $I(\mathfrak{R})$ constituído por todos elementos y de B para os quais existe x em A tal que $(x; y) \in \mathfrak{R}$ é denominado **conjunto-imagem de $\mathfrak{R}$**.

Exemplo

Na relação $\mathfrak{R}$ do exemplo anterior:

$$D(\mathfrak{R}) = \{a; b\}$$
$$I(\mathfrak{R}) = \{1; 3\}$$

Exercícios Resolvidos

5.17) Sejam os conjuntos A = {−1; 0; 2}, B = {x; y; z} e a relação $\mathfrak{R}$ de A em B:

$$\mathfrak{R} = \{(-1; x), (0; y), (2; z)\}$$

Dê o valor *verdadeiro* (V) ou *falso* (F):

a) $(-1; x) \in \mathfrak{R}$ ( )
b) $(-1; y) \in \mathfrak{R}$ ( )
c) $0 \, \mathfrak{R} \, y$ ( )
d) $0 \, \mathfrak{R} \, z$ ( )

Solução

a) V, pois (−1; x) é um elemento de $\mathfrak{R}$
b) F, pois (−1; y) não é elemento de $\mathfrak{R}$
c) V, pois $(0; y) \in \mathfrak{R}$
d) F, pois $(0; z) \notin \mathfrak{R}$

5.18) Sejam os conjuntos A = {1; 2; 4}, B = {−1; 0; 3} e a relação $\mathfrak{R}$, de A em B:

$$\mathfrak{R} = \{(1; -1), (1; 0), (4; 0)\}$$

Determine: $D(\mathfrak{R})$ e $I(\mathfrak{R})$

Solução

O domínio de $\mathfrak{R}$, $D(\mathfrak{R})$, é constituído pelas *primeiras coordenadas* de todos os pares que pertencem a $\mathfrak{R}$:

$$D(\mathfrak{R}) = \{1; 4\}$$

O conjunto-imagem de $\mathfrak{R}$, $I(\mathfrak{R})$, é constituído pelas *segundas coordenadas* de todos os pares que pertencem a $\mathfrak{R}$:

$$I(\mathfrak{R}) = \{-1; 0\}$$

5.19) Um conjunto A possui 2 elementos e um conjunto B possui 3 elementos. Quantas são as relações de A em B?

Solução

Se $n_A = 2$ e $n_B = 3$, então $n_{A \times B} = n_A \cdot n_B = 2 \cdot 3 = 6$
Qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ é uma relação de A em B.
Se o conjunto $A \times B$ possui 6 elementos, o número de seus subconjuntos é $2^6 = 64$.
Então, há 64 relações de A em B.

Exercícios Propostos

5.20) Sejam os conjuntos A = {1; 2; 3}, B = {–1; 2} e a relação $\Re$ de A em B:

$$\Re = \{(1; -1), (1; 2)\}$$

Dê o valor *verdadeiro* (V) ou *falso* (F):

a) $(1; -1) \notin \Re$ ( )

b) $(1; 2) \in \Re$ ( )

c) $1 \Re 2$ ( )

d) $2 \Re 2$ ( )

5.21) Sejam os conjuntos A = {x; a; b}, B = {4; 7; 10} e a relação $\Re$ de A em B.

$$\Re = \{(x; 4), (x; 7), (x; 10)\}$$

Determine: $D(\Re)$ e $I(\Re)$

5.22) Um conjunto A possui **m** elementos e um conjunto B possui **n** elementos. Quantas são as relações de A em B?

5.5 – PROCESSOS PARA SE REPRESENTAR UMA RELAÇÃO

1º) Podemos representar uma relação enumerando os pares ordenados que a constituem.

Já utilizamos essa forma de representação em alguns exemplos vistos até aqui.

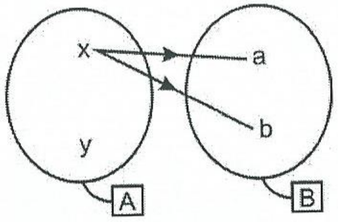
Exemplo

Considere os conjuntos A = {x; y} e B = {a; b}. A relação de A em B:

$$\Re = \{(x; a), (x; b)\}$$

está representada por enumeração de seus elementos, os pares ordenados: (x; a) e (x; b)

2º) Podemos representar uma relação através de um *diagrama de flechas*. Assim, a relação $\Re$ do exemplo anterior pode ser representada com:



3º) Podemos representar uma relação descrevendo o conjunto dos pares ordenados que a constituem com auxílio da *expressão conectiva* que "liga" os elementos desses pares.

Exemplos

a) Seja o conjunto A = {1; 2; 3} e a relação $\Re$, de A em A, constituída pelos pares (3; 1), (3; 2) e (2; 1). Note que esses pares satisfazem à sentença aberta:

x *é maior que* y

com $(x; y) \in A \times A$.

Então, podemos representar $\Re$ com:

$\Re = \{(x; y) \in A \times A$ I x *é maior que* y}

Os pares que pertencem a $\Re$ são **todos** aqueles para os quais a sentença aberta x *é maior que* y é verdadeira para $x \in A$ e $y \in A$.

No exemplo, a expressão conectiva *é maior que* pode ser substituída pelo símbolo >. Então, a equivalência entre as sentenças: $(x; y) \in \Re$, $x \Re y$ e $x > y$ é evidente. Assim:

$\Re = \{x; y) \in A \times A$ | x *é maior que* y}

$\Re = \{x; y) \in A \times A \mid x > y\}$

b) A partir da expressão conectiva *é divisor de* e do conjunto A = {1; 2; 4}, podemos construir a relação $\Re$, de A em A:

$\Re = \{x; y) \in A \times A$ | x *é divisor de* y}

Observe que:

1 *é divisor de* 1
1 *é divisor de* 2
1 *é divisor de* 4
2 *é divisor de* 4

Todos os pares (x; y) que satisfazem à sentença x *é divisor de* y, com x em A e y em A, são (1; 1), (1; 2), (1; 4) e (2; 4). Note que, por exemplo, $(2; 1) \notin \Re$, pois a sentença 2 *é divisor de* 1 é falsa. Então, se quisermos $\Re$, enumerando os seus elementos teremos:

$$\Re = \{(1; 1), (1; 2), (1; 4), (2; 4)\}$$

4º) Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Uma relação $\Re$, de A em B, pode ser representada graficamente, como já fizemos com o produto cartesiano de dois conjuntos.

No plano, construímos um sistema xOy de eixos ortogonais e, a cada par (x; y) de $\Re$, associamos o ponto de abscissa x e de ordenada y; o conjunto de todos os pontos assim obtidos é o **gráfico de $\Re$**.

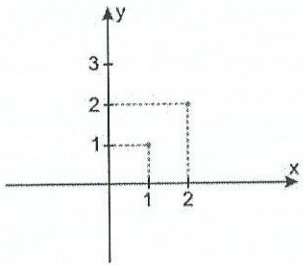
Exemplo

Sejam os conjuntos A = {1; 2}, B = {1; 2; 3} e a relação $\Re$, de A em B:

$$\Re = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y\}$$

Os pares (1; 1) e (2; 2) satisfazem à sentença aberta x = y e, portanto, são os elementos de $\Re$.

O gráfico de $\Re$ é constituído por dois pontos, cujas coordenadas são (1; 1) e (2; 2):

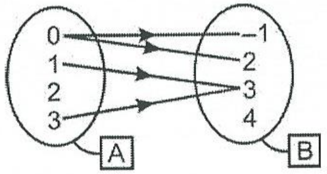


Resumindo, note que uma **relação de A em B** é um conjunto de pares ordenados (x; y), com x em A e y em B.

A descrição desse conjunto de pares pode ser feita através de procedimentos diferentes: uma tabela, um gráfico, um "diagrama de flechas", uma descrição com sentenças abertas construídas a partir de expressões conectivas que "ligam" os elementos dos pares.

Exercícios Resolvidos

5.23) Considere a relação $\Re$, de A em B, definida pelo "diagrama de flechas" abaixo:



a) Represente $\Re$ enumerando os pares ordenados que a constituem.
b) Determine D($\Re$) e I($\Re$).
c) Construa o gráfico de $\Re$.

Solução

a) Temos 0 $\Re$ (–1), 0 $\Re$ 2, 1 $\Re$ 3 e 3 $\Re$ 3; e, portanto:

$$\Re = \{(0; -1), (0; 2), (1; 3), (3; 3)\}$$

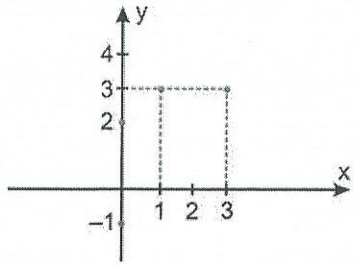
b) O domínio de $\Re$, D($\Re$), é constituído pelas *primeiras coordenadas* de todos os pares que pertencem a $\Re$:

$$D(\Re) = \{0; 1; 3\}$$

O conjunto-imagem de $\Re$, I($\Re$), é constituído pelas *segundas coordenadas* de todos os pares que pertencem a $\Re$:

$$I(\Re) = \{-1; 2; 3\}$$

c) O gráfico de $\Re$ é o conjunto constituído pelos pontos de coordenadas (0; –1), (0; 2), (1; 3) e (3; 3):



5.24) Sejam os conjuntos: A = {1; 2; 3; 4; 5}, B = {1; 2; 3; 4} e a relação $\Re$, de A em B, definida por:

$$\Re = \{(x; y) \in A \times B \mid x \text{ é o dobro de } y\}$$

a) Dê $\Re$, enumerando os seus elementos.
b) Determine D($\Re$) e I($\Re$).
c) Dê $\Re$, através de um "diagrama de flechas".
d) Construa o gráfico de $\Re$.

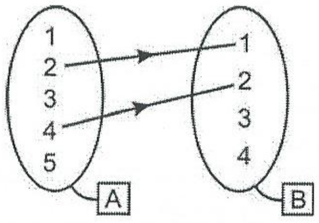
Solução

a) Todos os pares (x; y), com x em A e y em B, para os quais a sentença aberta: x *é o dobro de* y, x = 2y é verdadeira são: (2; 1) e (4; 2); então:

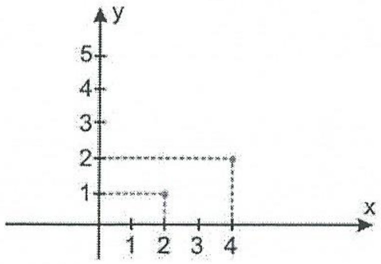
$$\Re = \{(2; 1), (4; 2)\}$$

b) D($\Re$) = {2; 4} e I($\Re$) = {1; 2}

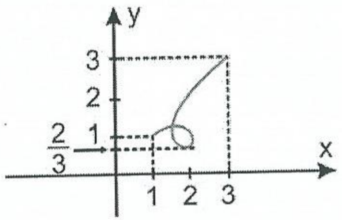
c)



d) O gráfico de $\Re$ é constituído por dois pontos:



5.25) Seja a relação $\mathfrak{R}$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pelo gráfico:



Determine D($\mathfrak{R}$) e I($\mathfrak{R}$).

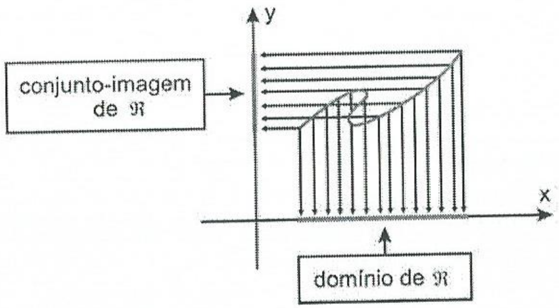
Solução

Observe que os pontos (x; y) do gráfico de $\mathfrak{R}$ são tais que: $1 \leq x \leq 3$ e $\frac{2}{3} \leq y \leq 3$. Em consequência:

$$D(\mathfrak{R}) = [1;\ 3]$$

$$I(\mathfrak{R}) = \left[\frac{2}{3};\ 3\right]$$

Uma maneira prática para se obter D($\mathfrak{R}$) e I($\mathfrak{R}$) a partir do gráfico G, de $\mathfrak{R}$, é a seguinte: projeta-se G sobre Ox, na direção Oy: obtém-se D($\mathfrak{R}$); projeta-se G sobre Oy, na direção Ox: obtém-se I($\mathfrak{R}$). Veja a figura abaixo:



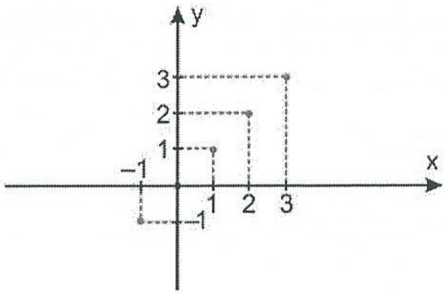
Exercícios Propostos

5.26) Sejam o conjunto E = {1; 2; 3; 4; 5; 6} e a relação $\mathfrak{R}$, de E em E, definida por:

$$\mathfrak{R} = \left\{(x;\ y) \in E^2 \mid x = \frac{y}{2}\right\}$$

a) Dê a relação $\mathfrak{R}$, enumerando os seus elementos.
b) Dê a relação $\mathfrak{R}$, através de um "diagrama de flechas".
c) Gráfico de $\mathfrak{R}$.

5.27) Considere a relação $\mathfrak{R}$, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida pelo gráfico:



a) Dê $\mathfrak{R}$, enumerando os seus elementos.
b) Determine D($\mathfrak{R}$) e I($\mathfrak{R}$).
e) Dê $\mathfrak{R}$, através de uma sentença aberta construída a partir de uma *expressão conectiva* que "liga" os elementos que constituem seus pares.

5.28) Desenhe o gráfico da relação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\}$$

5.29) Seja a relação $\mathfrak{R}$, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 25\}$$

a) Dê a relação $\mathfrak{R}$ por enumeração de seus elementos.
b) Determine D($\mathfrak{R}$) e I($\mathfrak{R}$).
e) Gráfico de $\mathfrak{R}$.

5.30) Considere o conjunto A = {{1; 2; 3}, {1; 2}, 1, 2, 3} e as relações de A em A definidas por:

$$\mathfrak{R}_1 = \{(x;\ y) \in A^2 \mid x \in y\}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \{(x;\ y) \in A^2 \mid x \subset y\}$$

Determine $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_2$ por enumeração de seus elementos.

5.6 – ALGUNS TIPOS DE RELAÇÕES

Propriedades das Relações

Se $\mathfrak{R}$ é uma relação de A em A, diz-se simplesmente que $\mathfrak{R}$ é uma **relação sobre A**.

Há algumas propriedades bastante significativas para uma relação $\mathfrak{R}$ **sobre** A:

1ª) $\mathfrak{R}$ diz-se **reflexiva** se e somente se **para todo x em A** tem-se:

$$(x;\ x) \in \mathfrak{R}$$

Observe que todo elemento x de A está relacionado consigo mesmo: x $\mathfrak{R}$ x, para todo x em A.

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A não é reflexiva se existir um elemento x em A tal que $(x; x) \notin \Re$.

Exemplos

a) Se A = {1; 2; 3; 4}, a relação de *igualdade* sobre A, definida por:

$$\Re = \{(x; y) \in A^2 \mid x = y\}$$

é *reflexiva*.
Note que $\Re = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4)\}$

b) Uma relação $\Re$, sobre A, *reflexiva*, pode possuir como elementos outros pares além daqueles da forma (x; x).
Seja A = {1; 2; 3; 4}; a relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (1; 3), (2; 3)\}$$

é *reflexiva*.
Observe que os seus elementos são **todos** os pares da forma (x; x), $x \in A$, e outros dois pares: (1; 3) e (2; 3)

c) Se A = {1; 2; 3; 4}, a relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 1), (2; 2), (4; 4), (1; 3)\}$$

não é *reflexiva* pois (3; 3) $\Re$.
Note que se $\Re$ é uma relação sobre A, *reflexiva*, então:

$$\Delta_A \subset \Re$$

onde Δ_A é a *diagonal* de $A \times A$

2ª) $\Re$ diz-se **simétrica** se e somente se, quando $(a; b) \in \Re$ então $(b; a) \in \Re$.
Observe que então numa relação **simétrica**, se **a** está relacionado com **b** isto é, $a \Re b$, então **b** está relacionado com **a**, isto é, $b \Re a$:

$$a \Re b \Rightarrow b \Re a$$

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A não é simétrica se existirem **a** e **b** em A, $a \neq b$, tais que $(a; b) \in \Re$ e $(b; a) \notin \Re$.

Exemplos

a) Seja A = {1; 2; 3}. A relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 2), (2; 1), (1; 3), (3; 1)\}$$

é *simétrica*, pois sempre que ocorre $a \Re b$ também ocorre $b \Re a$.

b) Seja A = {1; 2; 3; 4}. A relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 3), (4; 2), (2; 4), (2; 3), (3; 1)\}$$

não é *simétrica*, pois $(2; 3) \in \Re$ e $(3; 2) \notin \Re$.

3ª) $\Re$ diz-se **transitiva** se e somente se, quando $(a; b) \in \Re$ e $(b; c) \in \Re$, então $(a; c) \in \Re$.
Observe que então, se **a** está relacionado com **b**, isto é, $a \Re b$, e **b** está relacionado com **c**, isto é, $b \Re c$, então **a** está relacionado com **c**, isto é, $a \Re c$:

$$(a \Re b \text{ e } b \Re c) \Rightarrow a \Re c$$

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A não é transitiva se existirem **a**, **b** e **c** em A tais que: $(a; b) \in \Re$ e $(b; c) \in \Re$, mas $(a; c) \notin \Re$.

Exemplos

a) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A relação sobre $\mathbb{R}$:

$$\Re = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$$

é *transitiva*, pois se $a < b$ e $b < c$ então $a < c$.

b) Seja A = {a; b; c}. A relação sobre A:

$$\Re = \{(a; b), (c; b), (b; a), (a; c)\}$$

não é *transitiva*, pois $(c; b) \in \Re$ e $(b; a) \in \Re$, mas $(c; a) \notin \Re$.

4ª) $\Re$ diz-se **anti-simétrica** se e somente se, quando $(a; b) \in \Re$ e $(b; a) \in \Re$ então a = b.
Observe que então, se **a** está relacionado com **b**, isto é $a \Re b$, e **b** está relacionado com **a**, isto é, $b \Re a$, então **a** é igual a **b**:

$$(a \Re b \text{ e } b \Re a) \Rightarrow a = b$$

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A não é anti-simétrica se existirem **a** e **b** em A, $a \neq b$, tais que $(a; b) \in \Re$ e também $(b; a) \in \Re$.

Exemplos

a) Seja A um conjunto cujos elementos são conjuntos. A relação sobre A:

$$\Re = \{(x, y) \in A^2 \mid x \subset y\}$$

é *anti-simétrica*, pois $(x \subset y \text{ e } y \subset x) \Rightarrow x = y$

b) Seja A = {1; 2; 3; 4}. A relação sobre A:

$$\Re = \{(1; 3), (4; 2), (4; 4), (2; 4)\}$$

não é *anti-simétrica*, pois $(4; 2) \in \Re$ e também $(2; 4) \in \Re$.

Relação de Equivalência

Uma relação $\Re$ sobre um conjunto A chama-se **relação de equivalência** se e somente se:
1ª) $\Re$ é reflexiva
2ª) $\Re$ é simétrica
3ª) $\Re$ é transitiva

Exemplos

a) Seja A o conjunto de todos os triângulos do plano. A relação sobre A:

$$\Re = \{(x; y) \in A^2 \mid x \text{ é semelhante a } y\}$$

é uma relação de equivalência, pois satisfaz às três condições da definição.

b) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A *relação de igualdade* sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

é uma relação de equivalência, pois:

1ª) para todo a em $\mathbb{R}$: a = a, isto é, a $\mathfrak{R}$ a (reflexiva)

2ª) se a = b então b = a, isto é, a $\mathfrak{R}$ b $\Rightarrow$ b $\mathfrak{R}$ a (simétrica)

3ª) se a = b e b = c então a = c, isto é, (a $\mathfrak{R}$ b e b $\mathfrak{R}$ c) $\Rightarrow$ a $\mathfrak{R}$ c (transitiva)

Relação de Ordem

Uma relação $\mathfrak{R}$ sobre um conjunto A chama-se **relação de ordem** se e somente se:

1ª) $\mathfrak{R}$ é reflexiva
2ª) $\mathfrak{R}$ é anti-simétrica
3ª) $\mathfrak{R}$ é transitiva

Exemplos

a) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A relação *menor ou igual* sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$$

é uma relação de ordem, pois:

1ª) para todo x em $\mathbb{R}$: x $\leq$ x, isto é, x $\mathfrak{R}$ x (reflexiva)

2ª) se x $\leq$ y e y $\leq$ x então x = y, isto é (x $\mathfrak{R}$ y e y $\mathfrak{R}$ x) $\Rightarrow$ x = y (anti-simétrica)

3ª) se x $\leq$ y e y $\leq$ z então x $\leq$ z, isto é (x $\mathfrak{R}$ y e y $\mathfrak{R}$ z) $\Rightarrow$ x $\mathfrak{R}$ z (transitiva)

b) Seja A um conjunto cujos elementos são conjuntos. A relação sobre A:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in A^2 \mid x \subset y\}$$

é uma relação de ordem, pois:

1ª) para todo x em A: x $\subset$ x, isto é, x $\mathfrak{R}$ x (reflexiva)

2ª) se x $\subset$ y e y $\subset$ x então x = y, isto é (x $\mathfrak{R}$ y e y $\mathfrak{R}$ x) $\Rightarrow$ x = y (anti-simétrica)

3ª) se x $\subset$ y e y $\subset$ z então x $\subset$ z, isto é (x $\mathfrak{R}$ y e y $\mathfrak{R}$ z) $\Rightarrow$ x $\mathfrak{R}$ z (transitiva)

Relação Inversa

Considere os conjuntos A = {1; 2; 3}, B = {1; 2; 4} e a relação de A em B:

$$\mathfrak{R} = \{(1; 2), (1; 4), (2; 4), (3; 4)\}$$

Observe que D($\mathfrak{R}$) = {1; 2; 3} e I($\mathfrak{R}$) = {2; 4}.

Se as coordenadas de todos os pares ordenados de $\mathfrak{R}$ são trocadas, uma pela outra, obtém-se o conjunto:

$$\{(2; 1), (4; 1), (4; 2), (4; 3)\}$$

Esse conjunto é representado por $\mathfrak{R}^{-1}$ e denomina-se **relação inversa de $\mathfrak{R}$**.

Observe que D($\mathfrak{R}^{-1}$) = I($\mathfrak{R}$) = {2; 4} e I($\mathfrak{R}^{-1}$) = D($\mathfrak{R}$) = {1; 2; 3}.

Note também que se $\mathfrak{R}$ é uma relação de A em B então $\mathfrak{R}^{-1}$ uma relação de B em A e que se (a; b) $\in \mathfrak{R}$, então (b; a) $\in \mathfrak{R}^{-1}$.

No exemplo abaixo podemos escrever:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in A \times B \mid x < y\}$$

e também:

$$\mathfrak{R}^{-1} = \{(x; y) \in B \times A \mid y < x\}$$

Então, a sentença y < x que define $\mathfrak{R}^{-1}$ obtém-se da sentença x < y que define $\mathfrak{R}$, trocando-se nesta as *variáveis* x e y, uma pela outra.

Resumindo, para toda relação $\mathfrak{R}$, de A em B, existe uma relação $\mathfrak{R}^{-1}$, **inversa** de $\mathfrak{R}$, de B em A, definida por:

$$\mathfrak{R}^{-1} = \{(a; b) \mid (b; a) \in \mathfrak{R}\}$$

Exercícios Resolvidos

5.31) Sobre o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais a relação:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$$

é uma relação de equivalência?

Solução

1ª) para todo x real tem-se $x^2 = x^2$, isto é, x $\mathfrak{R}$ x: $\mathfrak{R}$ é reflexiva
2ª) se $x^2 = y^2$ então $y^2 = x^2$, isto é, x $\mathfrak{R}$ y $\Rightarrow$ y $\mathfrak{R}$ x: $\mathfrak{R}$ é simétrica
3ª) se $x^2 = y^2$ e $y^2 = z^2$ então $x^2 = z^2$, isto é, (x $\mathfrak{R}$ y e y $\mathfrak{R}$ z) $\Rightarrow$ x $\mathfrak{R}$ z: $\mathfrak{R}$ é transitiva.

Logo, $\mathfrak{R}$ é relação de equivalência.

5.32) Seja $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais. A relação sobre $\mathbb{N}$:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \textit{ é divisor de } y\}$$

é uma relação de ordem?

Solução

1ª) para todo x natural: x *é divisor de* x, isto é x $\mathfrak{R}$ x: $\mathfrak{R}$ é reflexiva
2ª) se x *é divisor de* y e se y *é divisor de* x, então x = y, isto é, (x $\mathfrak{R}$ y e y $\mathfrak{R}$ x) $\Rightarrow$ x = y: $\mathfrak{R}$ é anti-simétrica
3ª) se x *é divisor de* y e y *é divisor de* z então x *é divisor de* z, isto é, (x $\mathfrak{R}$ y e y $\mathfrak{R}$ z) $\Rightarrow$ x $\mathfrak{R}$ z: $\mathfrak{R}$ é transitiva.

Logo, $\mathfrak{R}$ é relação de ordem.

5.33) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre $\mathbb{N}$ definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2x + y = 10\}$$

Determine:

a) D($\mathfrak{R}$) b) I($\mathfrak{R}$) c) $\mathfrak{R}^{-1}$

Solução

Note que os únicos pares, com coordenadas em $\mathbb{N}$, que satisfazem à sentença $2x + y = 10$ são: (1; 8), (2; 6), (3; 4) e (4; 2). Então:

$$\mathfrak{R} = \{(1; 8), (2; 6), (3; 4), (4; 2)\}$$

a) $D(\mathfrak{R}) = \{1; 2; 3; 4\}$
b) $I(\mathfrak{R}) = \{8; 6; 4; 2\}$
c) $\mathfrak{R}^{-1} = \{(8; 1), (6; 2), (4; 3), (2; 4)\}$ ou utilizando-nos do raciocínio do exemplo dado ao definirmos relação inversa:

$$\mathfrak{R}^{-1} = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 \mid 2y + x = 10\}$$

Note que nessa representação a sentença que define $\mathfrak{R}^{-1}$ foi obtida da sentença que define $\mathfrak{R}$, trocando-se nesta as *variáveis* x e y, uma pela outra.

5.34) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre A. Se $\mathfrak{R}$ é transitiva, prove que $\mathfrak{R}^{-1}$ é transitiva.

Solução

Sejam os pares (a; b) e (b; c) de $\mathfrak{R}^{-1}$; mostremos que $(a; c) \in \mathfrak{R}^{-1}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Se } (a; b) \in \mathfrak{R}^{-1} \text{ então } (b; a) \in \mathfrak{R} \\ \text{Se } (b; c) \in \mathfrak{R}^{-1} \text{ então } (c; b) \in \mathfrak{R}\end{array}\right\} \mathfrak{R} \text{ é transitiva : então } (c; a) \in \mathfrak{R}$$

Se $(c; a) \in \mathfrak{R}$ então $(a; c) \in \mathfrak{R}^{-1}$

5.35) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de U em U. A relação $\mathfrak{R}'$, de U em U, definida por:

$$\mathfrak{R}' = C_{U \times U}^{\mathfrak{R}}$$

denomina-se **relação complementar de $\mathfrak{R}$**.

Sejam U = {1; 2; 3} e a relação de U em U:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in U^2 \mid x = y\}$$

Determine $\mathfrak{R}'$.

Solução

$U \times U = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)\}$
$\mathfrak{R} = \{(1; 1), (2; 2), (3; 3)\}$
Observe que os pares ordenados que pertencem a $\mathfrak{R}'$ são aqueles de $U \times U$ que não pertencem a $\mathfrak{R}$; então:

$$\mathfrak{R}' = \{(1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 3), (3; 1), (3; 2)\}$$

Exercícios Propostos

5.36) Seja E = {1; 2; 3}. Considere as seguintes relações sobre E:
$\mathfrak{R}_1 = \{(1; 2), (3; 2), (2; 2), (2; 3)\}$
$\mathfrak{R}_2 = \{(1; 2), (2; 3), (1; 3)\}$
$\mathfrak{R}_3 = \{(1; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 2), (3; 3)\}$
$\mathfrak{R}_4 = \{(1; 2)\}$
$\mathfrak{R}_5 = E \times E$
Diga quais das relações acima são *reflexivas*.

5.37) Seja E = {1; 2; 3}. Considere as seguintes relações sobre E:
$\mathfrak{R}_1 = \{(1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 2), (2; 3)\}$
$\mathfrak{R}_2 = \{(1; 1)\}$
$\mathfrak{R}_3 = \{(1; 2)\}$
$\mathfrak{R}_4 = \{(1; 1), (3; 2), (2; 3)\}$
$\mathfrak{R}_5 = E \times E$
Diga quais das relações acima são *simétricas*.

5.38) Seja E = {1; 2; 3}. Considere as seguintes relações sobre E:
$\mathfrak{R}_1 = \{(1; 2), (2; 2)\}$
$\mathfrak{R}_2 = \{(1; 2), (2; 3), (1; 3), (2; 1), (1; 1)\}$
$\mathfrak{R}_3 = \{(1; 2)\}$
$\mathfrak{R}_4 = \{(1; 1)\}$
$\mathfrak{R}_5 = E \times E$
Diga quais das relações acima são *transitivas*.

5.39) Seja E = {1; 2; 3}. Considere as seguintes relações sobre E:
$\mathfrak{R}_1 = \{(1; 1), (2; 1), (2; 2), (3; 2), (2; 3)\}$
$\mathfrak{R}_2 = \{(1; 1)\}$
$\mathfrak{R}_3 = \{(1; 2)\}$
$\mathfrak{R}_4 = \{(1; 1), (2; 3), (3; 2)\}$
$\mathfrak{R}_5 = E \times E$
Diga quais das relações são *anti-simétricas*.

5.40) Seja E o conjunto de todas as retas do plano. A relação sobre E definida pela sentença "x *é paralela a y*" é uma relação de equivalência?

5.41) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A relação sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$$

é uma relação de ordem?

5.42) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação sobre $\mathbb{N}$ definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y \textit{ é divisível por } 3\}$$

$\mathfrak{R}$ é uma relação de equivalência?

5.43) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ definida pela sentença "x *é múltiplo de* y". $\mathfrak{R}$ uma relação de ordem?

5.44) Seja A = {–2; –1; 0; 1; 2; 3}. Para cada uma das relações $\mathfrak{R}$, sobre A, definidas abaixo determine:

1º) $\mathfrak{R}$ por enumeração de seus pares ordenados
2º) $D(\mathfrak{R})$ e $I(\mathfrak{R})$
3º) $\mathfrak{R}^{-1}$ por enumeração de seus pares
$\mathfrak{R}^{-1}$ através de uma sentença que "liga" as coordenadas de seus pares

a) $\mathfrak{R} = \{(x; y) \in A^2 \mid y = 2x\}$
b) $\mathfrak{R} = \{(x; y) \in A^2 \mid x - y = 1\}$
c) $\mathfrak{R} = \{(x; y) \in A^2 \mid xy = 2\}$

5.45) $\Re$ é uma relação de A em A;

a) Se $\Re = A \times A$, determine $\mathbb{R}^{-1}$ e $\mathbb{R}'$.

b) Se $\Re = \varnothing$, determine $\mathbb{R}^{-1}$ e $\mathbb{R}'$.

c) $(\Re^{-1})^{-1}$ é igual a.......

5.46) Seja U = {1; 2; 3}. Considere as relações sobre U:

$\Re_1 = \{(x; y) \in U^2 \mid x \neq y\}$
$\Re_2 = \{(x; y) \in U^2 \mid x + y \neq 3\}$
$\Re_3 = \{(x; y) \in U^2 \mid x + y \geq 3\}$

Mostre que:

a) $\Re_1 \cup (\Re_2 \cap \Re_3) = (\Re_1 \cup \Re_2) \cap (\Re_1 \cup \Re_3)$

b) $\Re_1^{-1} \cap (\Re_2^{-1} \cup \Re_3^{-1}) = (\Re_1^{-1} \cap \Re_2^{-1}) \cup (\Re_1^{-1} \cap \Re_3^{-1})$

e) $(\Re'_2)' = \Re_2$

5.47) Seja $\Re$ uma relação sobre U, onde U = {1; 2; 3; 4}. Suponhamos que $(1; 2) \in \Re$; então $(2; 1) \in \Re^{-1}$. Sejam A o ponto do plano cartesiano que corresponde ao par (1; 2) e B o ponto correspondente ao par (2; 1).

a) O segmento $\overline{AB}$ e a bissetriz dos quadrantes ímpares são perpendiculares?

b) Se o segmento $\overline{AB}$ corta a bissetriz em C, o que se pode dizer dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$?

c) Generalize: a partir do gráfico de $\Re$, como se obtém o gráfico de $\Re^{-1}$?

5.48) $\Re_1$ e $\Re_2$ são relações sobre A. Se $\Re_1$ e $\Re_2$ são simétricas, mostre que $\Re_1 \cup \Re_2$ é *simétrica*.

5.7 – FUNÇÃO

O Conceito de Função

Por seu caráter unificador, o conceito de **função** é fundamental; praticamente, toda matemática constrói-se em torno dele.

Então, dada a sua importância, a sequência do nosso trabalho será voltada quase integralmente para o estudo das funções elementares.

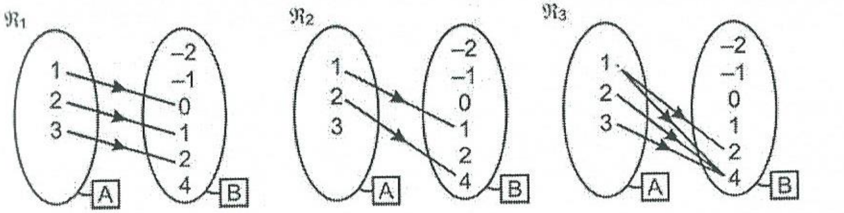
Intuitivamente, função descreve uma *correspondência* entre os elementos de dois conjuntos: de uma forma mais precisa, *função é um tipo especial de relação*.

Vejamos alguns exemplos.

Sejam os conjuntos: A = {1; 2; 3} e B = {–2; –1; 0; 1; 2; 4} e as relações de A em B:

$\Re_1 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$
$\Re_2 = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x^2\}$
$\Re_3 = \{(x; y) \in A \times B \mid y > x\}$

Os "diagramas de flechas" que representam essas relações são:



A relação $\Re_1$ apresenta uma particularidade: a **todo** elemento x de A "corresponde" **um e um só** elemento y de B; a relação $\Re_1$ denomina-se **função de A em B**.

A relação $\Re_2$ não é função de A em B: ao elemento 3 de A não se associa elemento algum em B.

A relação $\Re_3$ não é função de A em B: ao elemento 1 de A associam-se dois elementos em B.

Note que, para que uma relação de A em B seja uma função de A em B, a **todo** elemento x de A se deve "associar" **um e um só** elemento em B.

Definição

Sejam os conjuntos A e B diferentes do conjunto vazio, e seja f uma relação de A em B. Diz-se que f é uma função de A em B se, e somente se, para todo x em A existir em correspondência um e um só y em B tal que: $(x; y) \in f$.

Note que uma relação f de A em B é uma função de A em B quando e somente quando cada x de A *aparece como primeira coordenada em um e somente em um par ordenado de f*.

Nomenclatura

Seja f uma função de A em B.

Se **x** é um elemento qualquer de A, então o único y de B associado a x denomina-se **imagem de x pela função f** e será indicado com a notação f(x), (lê-se: "f de x"):

$$y = f(x)$$

O conjunto A denomina-se **domínio de f**, e pode ser indicado com a notação D(f), como já fizemos com as relações.

O conjunto B denomina-se **contradomínio de f**, e pode ser indicado com a notação CD(f).

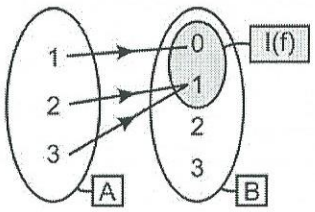
O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A denomina-se **conjunto-imagem de f** e pode ser indicado com a notação I(f), como já fizemos com as relações:

$$I(f) = \{y \in B \mid \exists x, x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

Observe que $I(f) \subset CD(f)$.

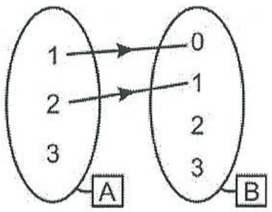
Exemplos

a) Sejam os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {0; 1; 2; 3}. A relação f, de A em B, definida pelo diagrama de flechas abaixo, é uma função de A em B.

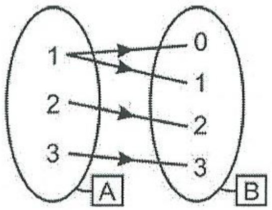


D(f) = {1; 2; 3}
CD(f) = {0; 1; 2; 3}
I(f) = {0; 1}

Observe que, para que uma relação f de A em B seja uma função de A em B, de todo elemento de A deve "partir" uma flecha e uma só:



A relação definida pelo diagrama acima não é função de A em B: do elemento 3 de A não "parte" flecha alguma.



A relação definida pelo diagrama acima não é função de A em B: do elemento 1 de A "parte" mais do que uma flecha.

b) Sejam os conjuntos A = {a; b; c} e B = {x; y; z}. A relação f, de A em B:

f = {(a; x), (b; x), (c; z)}

é uma função de A em B.
Note que cada elemento de A aparece em um e somente em um par ordenado de f.
Nesse exemplo: D(f) = {a; b; c}, CD(f) = {x; y; z} e I(f) = {x; z}.
Por outro lado, a relação de A em B:

f = {(a; x), (a; y), (b; x), (c; z)}

não é função de A em B. O elemento **a** de A aparece como primeira coordenada em dois pares de f.

E a relação de A em B:

f = {(b; y), (c; z)}

também não é função de A em B. O elemento **a** de A não aparece como primeira coordenada em nenhum par de f.

Exercícios Resolvidos

5.49) Seja A = {1; 2; 3; 4} e considere as relações sobre A:

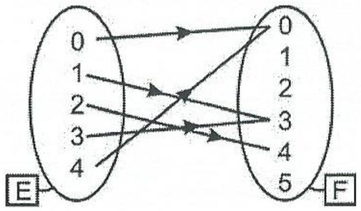
$\Re_1$ = {(1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 1)}
$\Re_2$ = {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4)}
$\Re_3$ = {(1; 2), (2; 2), (3; 2), (4; 2)}
$\Re_4$ = {(2; 2), (3; 3), (4; 4)}

Diga qual delas é função de A em A.

Solução

Note que uma relação $\Re$, de A em A, é uma função de A em A se, e somente se, cada **a** de A aparecer como primeira coordenada em um, e somente em um, par de $\Re$.
$\Re_1$ é função.
$\Re_2$ não é função, pois o elemento 1 aparece como primeira coordenada em mais do que um par.
$\Re_3$ é função.
$\Re_4$ não é função, pois o elemento 1 não aparece como primeira coordenada em par algum da relação.

5.50) Para a função f, de E em F, definida pelo diagrama de flechas:



Determine:

a) D(f)
b) I(f)
c) f(2)
d) x, se f(x) = 3
e) x, se f(x) = 4

Solução

a) D(f) = E = {0; 1; 2; 3; 4}
Note que se uma relação $\Re$, de E em F, é uma função f de E em F, então D(f) = E.
b) O conjunto-imagem de f é constituído por todos os y de F que são imagem de algum x de E: I(f) = {0; 3; 4}.

c) f(2) = 4; aí uma simples leitura: a "flecha que parte do número 2 dirige-se para o número 4".
d) O elemento x de E tem imagem 3; então x = 1 ou x = 3.
e) Analogamente, x = 2.

5.51) Seja o conjunto A = {0; 1}.

a) Quantas são as relações de A em A?
b) De todas as relações de A em A, quais são funções de A em A?
c) Encontre para as funções de A em A determinadas, as respectivas relações inversas; dessas, quais são funções de A em A?

Solução

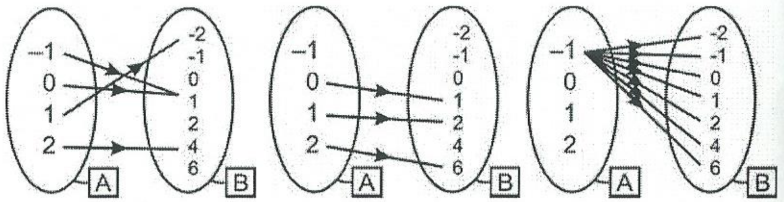
a) Lembre que qualquer relação de A em A é um subconjunto do produto cartesiano A × A. O número de elementos de A × A é $n_{A \times A} = 4$, e o número de seus subconjuntos é $2^4 = 16$. Então, o número de relações de A em A é 16.
b) Das 16 relações de A em A, são funções de A em A:

$$f_1 = \{(0; 0), (1; 1)\}$$
$$f_2 = \{(0; 1), (1; 0)\}$$
$$f_3 = \{(0; 0), (1; 0)\}$$
$$f_4 = \{(0; 1), (1; 1)\}$$

e) $f_1^{-1} = \{(0; 0), (1; 1)\}$
$f_2^{-1} = \{(1; 0), (0; 1)\}$
$f_3^{-1} = \{(0; 0), (0; 1)\}$
$f_4^{-1} = \{(1; 0), (1; 1)\}$
São funções de A em A: f_1^{-1} e f_2^{-1}.

Exercícios Propostos

5.52) Sejam os conjuntos A = {–1; 0; 1; 2} e B = {–2; –1; 0; 1; 2; 4; 6}
Das relações de A em B, abaixo, quais são funções de A em B?
a) b) c)



5.53) Sejam os conjuntos A = {–2; –1; 0; 1; 2} e B = {0; 1; 4; 6}. Considere a função g, de A em B:

$$g = \{(-2; 4), (-1; 1), (0; 0), (1; 1), (2; 4)\}$$

Determine:

a) D(g)	d) g(1)
b) I(g)	e) x, se g(x) = 4
c) g(2)	f) x, se g(x) = x

5.54) Sejam os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {a; b}. Dar, através de diagramas de flechas, todas as funções de A em B.

5.55) A função f é de A em B. Sabe-se que a ∈ A e b ∈ B. Dizer qual afirmação abaixo é verdadeira e qual é falsa.

a) f(a) = b	d) f(a) ∈ I(f)
b) b ∈ I(f)	e) f(a) ∈ B
c) I(f) ⊂ B	

5.56) $\mathfrak{R}$ é uma relação *reflexiva*, de A em A. $\mathfrak{R}$ é uma função de A em A?

Mais sobre notação

Para se indicar que f é uma função de A em B usam-se as notações:

$$f : A \to B \text{ ou } A \xrightarrow{f} B$$

Há, no entanto, outras maneiras de se representar uma função.

Sejam, por exemplo, os conjuntos A = {0; 1; 2}, B = {–1; 0; 1; 2} e a função f de A em B:

$$f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$$

A função f representada anteriormente está conhecida de uma forma correta e plena; sobre ela temos todas as informações necessárias para sua definição: domínio, contradomínio e a sentença que associa a cada elemento do domínio um único elemento no contradomínio.

Na prática, entretanto, as notações utilizadas são simplificadas, cometendo-se mesmo certo abuso de linguagem. Assim, a mesma função f definida acima pode receber as notações:

$f: x \to f(x) = x - 1, x \in A$
$x \to x - 1, x \in A$
$x \to y = x - 1, x \in A$
$f(x) = x - 1, x \in A$
$y = x - 1$

Observe que nas notações acima o contradomínio de f foi omitido e, na última, não figura sequer o domínio. Simplificações como estas são admissíveis se não houver possibilidade de dúvida.

Funções Iguais

As funções: $f: A \to B$
$g: C \to D$

são iguais se, e somente se, A = C, B = D e f(x) = g(x) para todo x em A.

Exemplo

Sejam os conjuntos A = {–1; 0; 1}, B = {0; 1; 2; 3; 4} e as funções de A em B definidas pelas sentenças:

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

As funções f e g são iguais, pois f(–1) = g(–1) = 1, f(0) = g(0) = 2 e f(1) = g(1) = 3

Exercícios Resolvidos

5.57) Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 3\}$. Considere a função f, de A em $\mathbb{Z}$, definida pela sentença: f(x) = x + 1.

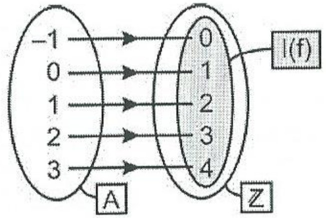
a) Determine f(–1), f(0) e f(5).
b) Dê a função f por enumeração de seus elementos.
e) Dê a função f através de um diagrama de flechas.
d) Determine I(f).
e) Determine x, $x \in A$, tal que f(x) = 3.
f) Desenhe o gráfico de f.

Solução

a) Na sentença f(x) = x + 1, para se obter f(–1) substituímos x por –1:
f(–1) = –1 + 1 = 0; analogamente, substituindo x por zero: f(0) = 0 + 1 = 1.
Não existe f(5), pois $5 \notin A$.

b) f(–1) = 0, então $(-1; 0) \in f$
f(0) = 1, então $(0; 1) \in f$
f(1) = 2, então $(1; 2) \in f$
f(2) = 3, então $(2; 3) \in f$
f(3) = 4, então $(3; 4) \in f$
Daí, f = {(–1; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 3), (3; 4)}

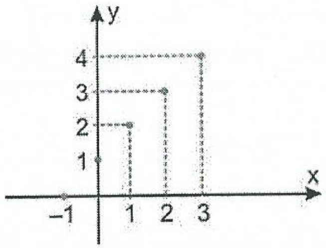
c)



d) I(f) = {0; 1; 2; 3; 4}

e) A equação proposta pergunta para qual valor de x, $x \in A$, cuja imagem é igual a 3; uma simples leitura nos dá x = 2.

f)



5.58) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela sentença:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{2}, \text{ se } x \in C_{\mathbb{R}}^{\mathbb{Q}} \end{cases}$$

Determine:
a) f(2)
b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$
c) $f(\sqrt{2})$
d) $f(\pi)$
e) f(0,333...)

Solução

A sentença que define f afirma que todo *número racional* x tem para imagem o próprio x, f(x) = x, e que todo *número irracional* x tem para imagem $\sqrt{2}$, $f(x) = \sqrt{2}$.

Então:

a) $2 \in \mathbb{Q}$, então f (2) = 2
b) $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, então $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
e) $\sqrt{2}$ é irracional, então $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
d) π é irracional, então $f(\pi) = \sqrt{2}$
e) $0,333... = \frac{1}{3}$ é racional, então f(0,33...) = 0,33...

5.59) Seja a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela sentença: $f(x) = \frac{5x - 4}{2}$. Qual é o elemento do domínio de f que tem o número 8 como imagem?

Solução

Procuramos x, $x \in \mathbb{R}$, tal que sua imagem seja 8, isto é:

$$f(x) = 8.$$

Devemos então resolver a equação:

$$\frac{5x - 4}{2} = 8$$

e daí x = 4.

5.60) As funções:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x + 2$$

$$g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

são iguais?

Solução

Não, pois D(f) $\neq$ D(g).

Exercícios Propostos

5.61) Sejam o conjunto E = {x $\in \mathbb{Z}$ | $-1 \leq x \leq 2$} e a função f, de E em $\in \mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } -1 \leq x \leq 0 \\ x, \text{ se } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

a) Determine f enumerando os seus elementos.
b) Determine o conjunto-imagem de f.
c) Resolva a equação f(x) = x.
d) Faça o gráfico de f.

5.62) Seja a função f, de A = {0; 1; 2} em $\mathbb{R}$, definida pela sentença f(x) = x(x – 1) (x – 2). Determine I(f).

5.63) Seja a função f, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \text{ é par} \\ 0, \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

a) f(0)
b) f(1)
c) f(–1)
d) f(2)

5.64) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^2 + x + 2.$$

Qual é o elemento do domínio de f que tem imagem igual a 2?

5.65) Sejam os conjuntos A = {1; 2; 3) e B = {0; 1; 2; 3}. As funções f e g, de A em B, definidas por:

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \frac{x^2}{x}$$

são iguais?

5.66) As funções f e g definidas por:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x$$

$$g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^2}{x}$$

são iguais?

Capítulo

6 Função real de variável real

6.1 – FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL - GENERALIDADES

O Conceito

Uma função f diz-se **função real de variável real** se $D(f) \subset \mathbb{R}$ e $CD(f) \subset \mathbb{R}$.

Exemplo

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela sentença aberta:

$$f(x) = x^2$$

é a *função real de variável real.*

Observe que a imagem de qualquer elemento x do domínio $\mathbb{R}$ é obtida elevando-se ao quadrado o número x. Por exemplo, se quisermos a imagem do número 2:

$$f(2) = 2^2 = 4$$

De uma outra forma, para obtermos a imagem do número 2, f(2), na sentença (fórmula): $f(x) = x^2$, substituímos a letra x pelo número 2 e efetuamos as operações indicadas.

Domínio e Contradomínio

Vimos que, para se definir uma função f, necessitamos de dois conjuntos: o seu **domínio**, o seu **contradomínio** e, ainda, da **sentença aberta** (uma "fórmula", uma "lei") que descreve como se "associa" a cada elemento do domínio de f um único elemento no contradomínio de f.

Na prática, entretanto, tratando-se de função real de variável real, é comum omitir-se o domínio e o contradomínio, dando-se somente a sentença aberta ("fórmula") que estabelece a correspondência entre x e f(x).

Quando isto acontecer, está convencionado o seguinte:

1°) O **contradomínio** da função f é $CD(f) = \mathbb{R}$.

2°) O **domínio** da função f, D(f), é o subconjunto de $\mathbb{R}$, constituído por todos os valores de x para os quais as operações indicadas na "fórmula" são *possíveis, gerando como resultado das operações um número real.*

Exemplos

a) A função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

tem para domínio o subconjunto de $\mathbb{R}$ constituído por todos os valores de x para os quais $x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq 1$. Então:

$$D(f)\ [1; +\infty[\text{ e, } CD(f) = \mathbb{R}$$

b) Para a função definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

o domínio é constituído pelos números reais x tais que $x - 1 \neq 0$, isto é:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{1\} \text{ e, } CD(f) = \mathbb{R}$$

Exercícios Resolvidos

6.1) Determine o domínio de cada uma das funções definidas pelas sentenças abertas:

a) $f(x) = x^2 - 1$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Solução

a) Para *todo* x real as operações indicadas na "fórmula" são possíveis e geram como resultado um número real; daí:

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

b) Para que as operações indicadas na "fórmula" sejam possíveis deve-se ter: $x^2 - 1 \neq 0$, isto é, $x \neq 1$ e $x \neq -1$:

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

c) Para que as operações indicadas na "fórmula" sejam possíveis e para que o resultado seja um número real deve-se ter:

$$x^2 - 1 \geq 0$$

e daí $x \leq -1$ ou $x \geq 1$; então:

$$D(f) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

d) Deve-se ter: $x^2 - 1 > 0$ e daí:

$$D(f) =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$$

6.2) Para a função f, definida por:

$$f(x) = \frac{\sqrt{-(x^2-4)^2}}{x-2}$$

determine:

a) D(f)

b) I(f)

c) CD(f)

Solução

a) Devemos ter:

(I) $-(x^2-4)^2 \geq 0$ e daí $(x^2-4)^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x = 2$ ou $x = -2)$

(II) $x - 2 \neq 0$ e daí $x \neq 2$

Para que as operações indicadas na "fórmula" sejam possíveis, o real x deve satisfazer à condição (I) e também à condição (II), isto é, x deve pertencer a $(I) \cap (II)$; então:

$$D(f) = \{-2\}$$

b) O único elemento de D(f) é –2; para se obter sua imagem, em f(x), substituímos x por –2; daí $f(-2) = 0$:

$$I(f) = \{0\}$$

c) Por convenção:

$$CD(f) = \mathbb{R}$$

6.3) Dê o domínio da função definida por:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$$

Solução

Devemos ter:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(I) } x-2 \geq 0 \text{ e daí } x \geq 2\\ \text{(II) } 4-x \geq 0 \text{ e daí } x \leq 4\end{array}\right\} \xrightarrow{x \in (I) \cap (II)} 2 \leq x \leq 4$$

$$D(f) = [2; 4]$$

Exercícios Propostos

6.4) Determine o domínio de cada uma das funções definidas abaixo:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

6.5) Determine o domínio de cada uma das funções definidas pelas sentenças abertas:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

b) $f(x) = \sqrt{(x+2)(x-2)}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

d) $f(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2}$

6.6) Determine os domínios das funções definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$

c) $f(x) = (x^2+x+1)^{\frac{-1}{2}}$

6.7) Determine os domínios das funções definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ d) $f(x) = \sqrt{-x^2}$

6.8) Determine o domínio de cada uma das funções definidas pelas sentenças abertas:

a) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| + x}}$

6.9) Para a função f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \sqrt{-(x^2 - 1)^2}$$

determine:

a) D(f) b) I(f) c) CD(f)

6.10) Determine o domínio da função f definida por:

$$f(x) = \sqrt{-ax}\ ,\ a \in \mathbb{R}.$$

6.11) O domínio da função real de variável real definida por:

$$f(x) = \sqrt{-x+m}$$

é $D(f) =]-\infty\ ;\ 3]$.

Determine m.

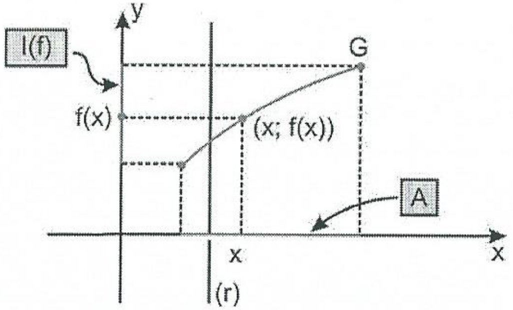
Gráfico de uma Função Real de Variável Real

Para se representar graficamente uma função real de variável real:

$$f: A \to B$$

procede-se de forma análoga à representação gráfica de uma relação de A em B.

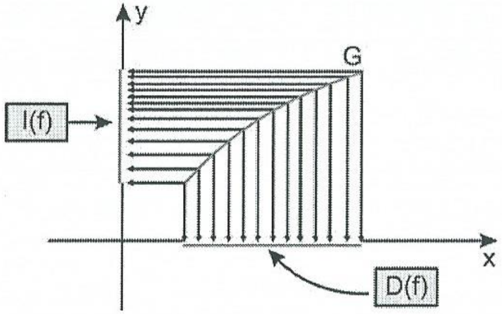
Então, fixa-se no plano um sistema de coordenadas ortogonais xOy; o conjunto G de todos os pontos (x; f(x)), com x em A, é o **gráfico** de f.



Observe o seguinte:

1º) Toda reta (r), vertical, que passa por um ponto de A = D(f) corta o gráfico G em um só ponto.
Temos aí um critério para verificarmos através do gráfico se uma *relação* de A em B é uma *função* de A em B; basta verificarmos "se uma reta vertical (r), conduzida pelos pontos de A, encontra o gráfico de f e o encontra em um único ponto".

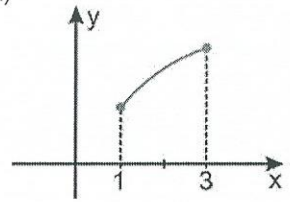
2º) Quando se conhece o gráfico G de uma função f, o seu domínio pode ser obtido projetando-se G sobre Ox, na direção Oy; o conjunto-imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre Oy, na direção Ox:



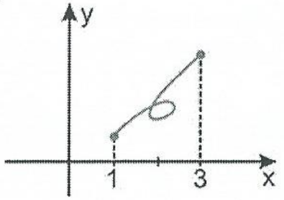
Exercícios Resolvidos

6.12) Entre as relações f, de A = [1; 3] em $\mathbb{R}$, representadas pelos gráficos abaixo, qual é função de A em $\mathbb{R}$?

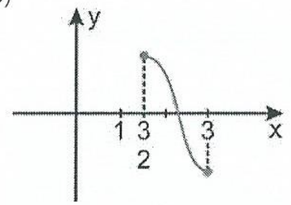
a)



c)



b)



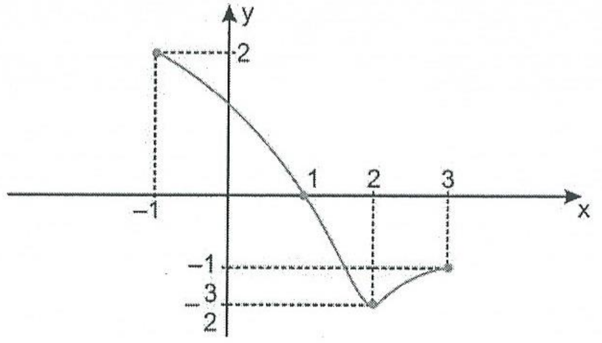
Solução

a) É, pois toda reta vertical conduzida pelos pontos de A encontra sempre o gráfico de f em um único ponto.

b) Não é, pois as retas verticais conduzidas por pontos de A, com $1 \le x \le \frac{3}{2}$ não encontram o gráfico de f.

c) Não é, pois há retas verticais conduzidas por pontos de A que encontram o gráfico de f em mais do que um ponto.

6.13) Seja a função f definida pelo gráfico abaixo:



Determine:

a) D(f)
b) I(f)
c) x tal que f(x) = 0
d) x tal que f(x) > 0

Solução

a) Para determinarmos o domínio de f projetamos o gráfico de f sobre Ox, na direção Oy. Então:

$$D(f) = [-1; 3]$$

b) Para determinarmos o conjunto-imagem de f projetamos o gráfico de f sobre Oy, na direção Ox. Então:

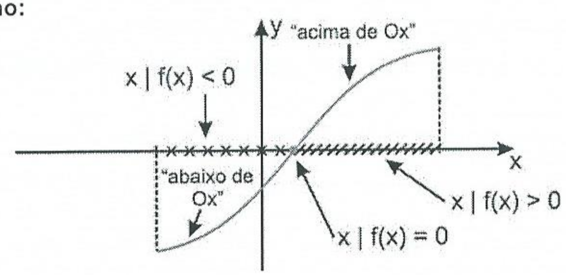
$$I(f) = \left[-\frac{3}{2}; 1\right]$$

c) Queremos determinar x, $x \in D(f)$, tal que sua imagem seja *zero*; devemos procurar os pontos onde o gráfico "encontra" o eixo Ox: a abscissa x desse ponto é tal que a imagem de x é zero, isto é, f(x) = 0. Em nosso exemplo, encontramos x = 1.

d) Queremos determinar x, $x \in D(f)$, tal que sua imagem seja *positiva*; devemos procurar os pontos para os quais o gráfico "está acima" do eixo Ox: as abscissas x desses pontos são tais que f(x) > 0.

Em nosso exemplo, $-1 \le x < 1$ responde à questão proposta.

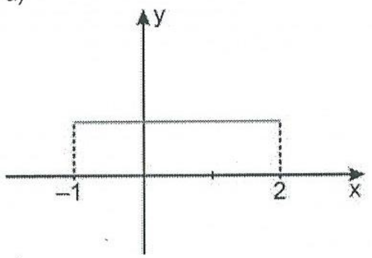
Resumo:



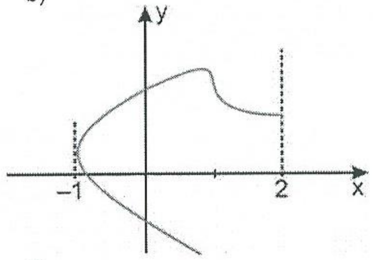
Exercícios Propostos

6.14) Seja A = [−1; 2]. Quais das relações de A em $\mathbb{R}$, representadas abaixo, são funções de A em $\mathbb{R}$?

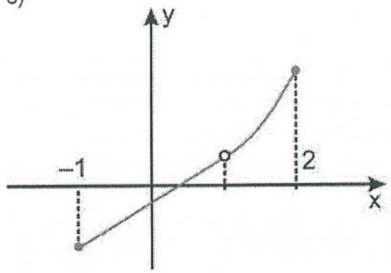
a)



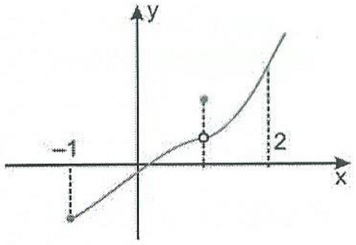
b)



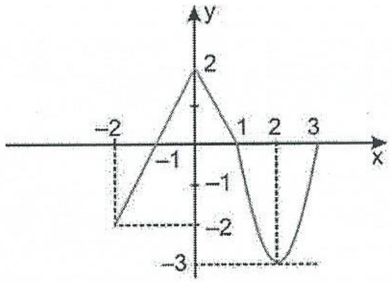
c)



d)



6.15) Seja a função f definida pelo gráfico abaixo:



Determine:

a) D(f) e I(f)
b) f(–2), f(0), f(1), f(2) e f(3)
e) x tal que f(x) = 0
d) x tal que f(x) > 0

6.2 – ALGUMAS FUNÇÕES USUAIS

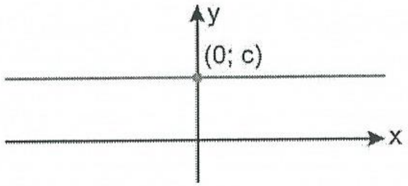
Função Constante

É a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a *todo* x real *sempre um mesmo número* c, c $\in$ $\mathbb{R}$; então, a sentença aberta que a define é:

$$f(x) = c$$

Seu conjunto-imagem é I(f) = {c}.

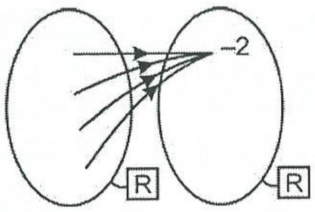
O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0, c):

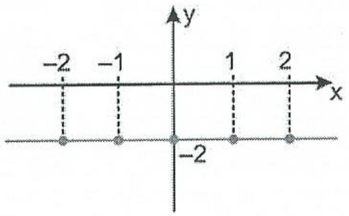


Exemplo

Seja a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por f(x) = –2.

Seu conjunto-imagem é I(f) = {–2}.





x	y
–2	–2
–1	–2
0	–2
1	–2
2	–2
⋮	⋮

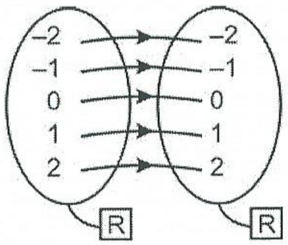
Função Identidade

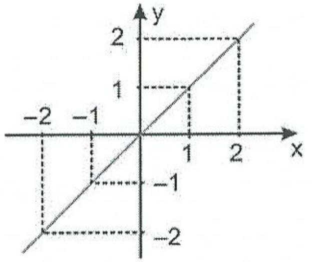
É a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a *cada* x real o *próprio* x: então, a sentença aberta que a define é:

$$f(x) = x$$

Seu conjunto-imagem é I(f) = $\mathbb{R}$.

O gráfico da função identidade é a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.





x	y
–2	–2
–1	–1
0	0
1	1
2	2
⋮	⋮

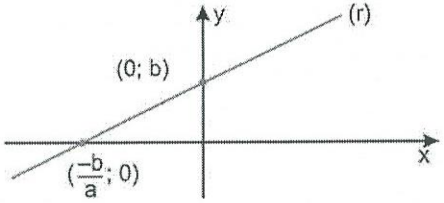
Função Polinômio do 1º Grau

É a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada x real o número real ax + b, com a $\neq$ 0: então, a sentença aberta que a define é:

$$f(x) = ax + b,\ a \neq 0$$

Se b = 0, isto é, f(x) = ax, a função diz-se **linear**.

O gráfico da função polinômio do 1º grau é uma *reta* (r) (a demonstração encontra-se no curso de Geometria Analítica desta coleção):



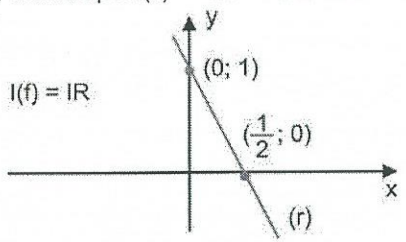
x	y
0	b
$-\frac{b}{a}$	0

O conjunto-imagem da função polinômio do 1º grau é I(f) = $\mathbb{R}$ (projeção da reta (r) sobre o eixo Oy).

A sentença aberta f(x) = ax + b, que define a função, denomina-se **equação da reta (r)**; nela, o coeficiente a denomina-se **coeficiente angular** de (r), e b, **coeficiente linear** de (r). Note que o coeficiente linear de (r) é a ordenada do ponto onde (r) encontra o eixo Oy.

Exemplos

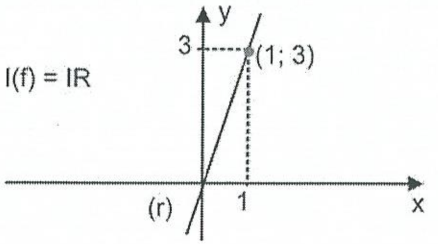
a) Na função f, definida por f(x) = –2x + 1 tem-se a = –2 e b = 1.



O *coeficiente angular* de (r) é a = –2; seu *coeficiente linear* é b = 1.

b) Seja a função f, *linear*, definida por f(x) = 3x; o *coeficiente angular* da reta (r) é a = 3 e o seu *coeficiente linear* é b = 0:

I(f) = IR



Exercícios Resolvidos

6.16) Chama-se **função sinal de x** função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

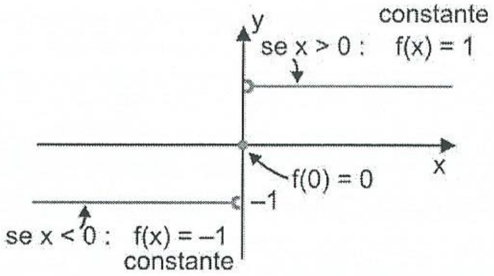
$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

a) Determine f(–2), f(0) e f(2)
b) Gráfico de f
c) Qual é o conjunto-imagem de f?

Solução

Observe que todo real negativo tem imagem –1, que zero tem imagem zero e que todo real positivo tem imagem 1; então:

a) f(–2) = –1, f(0) = 0 e f(2) = 1
b)



c) É imediato que $I(f) = \{-1; 0; 1\}$.

6.17) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2, \text{ se } x \geq 0 \\ -x + 2, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Deduza I(f)

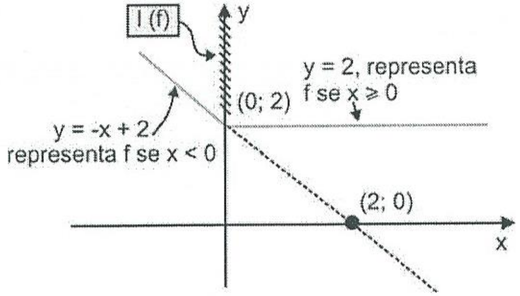
Solução

a) O gráfico de f é constituído por duas semi-retas:

1ª) se $x \geq 0$ f é representada pela reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0; 2)

2ª) se x < 0 f é representada pela reta y = –x + 2.

x	y
0	2
2	0



b) A projeção do gráfico sobre Oy nos dá: $I(f) = [2; +\infty[$.

6.18) O gráfico da função polinômio do 1º grau, definida pela sentença aberta y = f(x) = ax + b é a reta que passa pelos pontos (1; 2) e (–1; 3). Determine a e b.

Solução

O ponto (1; 2) pertence à reta e, então, fazendo x = 1 e y = 2 a sentença y = ax + b fica satisfeita:

$$2 = a + b \text{ (I)}$$

Analogamente, como (–1; 3) pertence à reta:

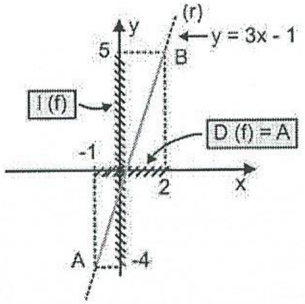
$$3 = -a + b \text{ (II)}$$

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (I) e (II), obtemos:

$$a = \frac{5}{2} \text{ e } b = -\frac{1}{2}$$

6.19) Uma função f tem domínio A = [–1; 2] e é definida pela sentença aberta y = f(x) = 3x – 1. Faça o gráfico de f e deduza I(f).

Solução



x	y
-1	-4
2	5

O segmento $\overline{AB}$ é o gráfico de f.
O gráfico de f projetado sobre Oy nos dá: I(f) = [–4; 5].

6.20) Seja f : A → B uma função real de variável real. Chama-se **zero de f** todo x, $x \in A$, tal que f(x) = 0. Determine o *zero* da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por f(x) = ax + b, a ≠ 0.

Solução

Note que para uma função f, se x é um zero, a sua imagem é zero, isto é, f(x) = 0. Para determinarmos o *zero* da função definida por f(x) = ax + b, a ≠ 0, resolvemos a equação f(x) = 0:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \xrightarrow{a \neq 0} x = \frac{-b}{a}.$$

Então, o zero da função polinômio do 1° grau definida por f(x) = ax + b é $x = \frac{-b}{a}$, isto é, $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Exercícios Propostos

6.21) Para cada uma das funções definidas pelas sentenças abertas abaixo, determine o domínio, o conjunto-imagem e esboce o gráfico:
a) f(x) = –3
b) f(x) = 0
c) f(x) = –x
d) f(x) = 3x + 2

6.22) Determine o ponto comum dos gráficos das funções f e g definidas respectivamente por f(x) = 3x –1 e g(x) = 4x + 1.

6.23) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < -1 \\ 1, \text{ se } -1 \le x < 0 \\ 2, \text{ se } x \ge 0 \end{cases}$$

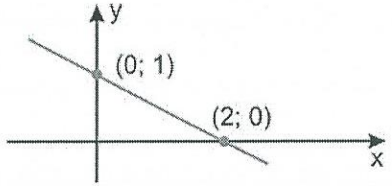
a) Determine f(–2), f(–1), f(0) e f(2).
b) Desenhe o gráfico de f.
c) Dê I(f)

6.24) Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x < -1 \\ 2, \text{ se } -1 \le x \le 1 \\ x + 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Deduza I(f)

6.25) O gráfico de uma função polinômio do 1° grau, definida pela sentença aberta y = f(x) = ax + b é a reta da figura. Determine a e b.



6.26) Seja f : A → B uma função real de variável real. Chama-se **ponto fixo de f** a todo x, x ∈ A, tal que f(x) = x. Discutir, segundo os valores de m, a existência de *ponto fixo* para a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por f(x) = mx + 1.

6.27) Uma função f tem domínio A = [–2; 1] e é definida pela sentença aberta y = f(x) = –x + 1. Faça o gráfico de f e deduza I(f).

6.28) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

f(x) = 4x + 2
g(x) = 2x – 1

a) Resolva a equação f(x) – 2·g(x) = 0
b) Resolva a inequação f(x) > g(x)

6.3 – FUNÇÃO CRESCENTE E FUNÇÃO DECRESCENTE

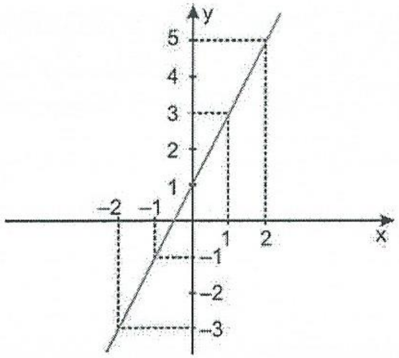
Função Crescente

Consideremos a função polinômio do 1° grau definida pela sentença aberta:

f(x) = 2x + 1

Observe na tabela ou no gráfico que "aumentando-se x", "aumentam" os correspondentes valores de y:

x	y = f(x)
–2	–3
–1	–1
0	1
1	3
2	5
⋮	⋮



Uma função com tal comportamento diz-se **crescente em** $\mathbb{R}$. Observe que, no exemplo, se atribuirmos a x dois valores reais distintos x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$, obtém-se: $f(x_1) < f(x_2)$.

> Uma função f, real de variável real, diz-se **crescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se:
>
> $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x)_1 < f(x_2)$$

Uma forma equivalente para se colocar a definição acima é:

> Uma função f, real de variável real, diz-se **crescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, tem-se:
>
> $$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

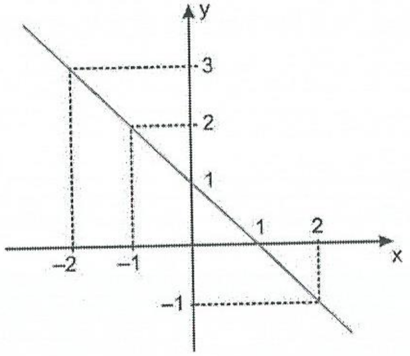
Função Decrescente

Analogamente, consideremos a função polinômio do 1º grau definida pela sentença aberta:

$$f(x) = -x + 1$$

Observe agora, na tabela ou no gráfico, que, "aumentando-se" x, "diminuem" os correspondentes valores de y:

x	y = f(x)
–2	3
–1	2
0	1
1	0
2	–1
⋮	⋮



Uma função com tal comportamento se diz **decrescente em** $\mathbb{R}$: Observe no exemplo que, se atribuirmos a x dois valores reais distintos x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_2$, obtém-se: $f(x_1) > f(x_2)$.

> Uma função f, real de variável real, diz-se **decrescente em I**, $I \subset D(f)$, se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, tem-se:
>
> $$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x)_1 > f(x_2)$$

Uma forma equivalente para se colocar a definição acima é:

> Uma função f, real de variável real, diz-se **decrescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$, tem-se:
>
> $$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

Exercícios Resolvidos

6.29) Verifique que a função definida por $f(x) = 3x + 1$ é *crescente* em $\mathbb{R}$.

Solução

Devemos calcular $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = (3x_1 + 1) - (3x_2 + 1) = 3(x_1 - x_2)$$

E, daí, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, pode-se concluir que:

$$f(x_1) - f(x_2) = 3\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\substack{\text{negativo}\\ \text{pois}\\ x_1 < x_2}} < 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Então, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, e a função é *crescente* em $\mathbb{R}$.

6.30) Seja a *função polinômio do 1º grau*, f, definida por:

$$f(x) = ax + b, \ a \neq 0$$

Verifique que se $a > 0$, f é *crescente* em $\mathbb{R}$.

Solução

Calculemos $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a\,(x_1 - x_2)$$

E, daí, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, pode-se concluir que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{a}_{\text{positivo}} \ \underbrace{(x_1 - x_2)}_{\substack{\text{negativo,}\\ \text{pois}\\ x_1 < x_2}} < 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Então, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, e a função é *crescente* em $\mathbb{R}$ quando $a > 0$.

6.31) Seja a função f, definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

a) Dê o domínio de f.

b) Verifique que f é *decrescente* em $\mathbb{R}_+^*$.

Solução

a) O domínio de f é constituído por todos os valores reais de x tais que $x \neq 0$:

$D(f) = \mathbb{R}^*$

b) Calculemos $f(x_1) - f(x_2)$:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$$

E, daí, para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $x_1 < x_2$, pode-se concluir que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\overbrace{x_2 - x_1}^{\text{positivo, pois } x_1 < x_2}}{\underbrace{x_1\ x_2}_{\text{positivos, pois } x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}_+^*}} > 0$$

$f(x_1) - f(x_2) > 0$

$f(x_1) > f(x_2)$

Então, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, e a função f é *decrescente* em $\mathbb{R}_+^*$.

Exercícios Propostos

6.32) Verifique que a função definida por $f(x) = -2x + 6$ é *decrescente* em $\mathbb{R}$.

6.33) Seja a *função polinômio do 1º grau*, f, definida por:

$$f(x) = ax + b,\ a \neq 0$$

Verifique que se $a < 0$, f é *decrescente* em $\mathbb{R}$.

6.34) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Verifique que f é *crescente* em $\mathbb{R}_-^*$.

6.35) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = x^2.$$

Verifique que f é *crescente* em $\mathbb{R}_+$.

6.36) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = (m^2 - 1)x + 3,\ m \in \mathbb{R}.$$

a) Determine m para que f seja *crescente* em $\mathbb{R}$.

b) Determine m para que f seja *decrescente* em $\mathbb{R}$.

6.4 – FUNÇÃO MÓDULO

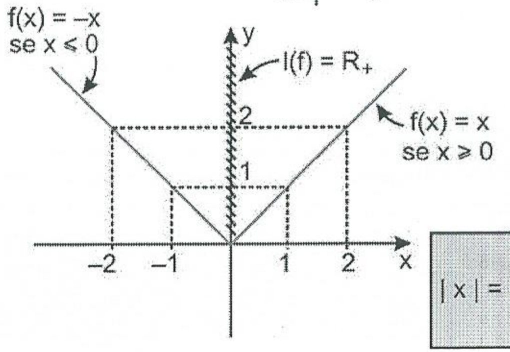
Definição e Propriedades

É a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada número real x o número $|x|$; então, a sentença aberta que a define é:

$$f(x) = |x|$$

O gráfico da função módulo é constituído pela união de duas semi-retas, como mostra a figura:

x	y = f(x)
–2	2
–1	1
0	0
1	1
2	2



$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Seu conjunto-imagem é $I(f) = \mathbb{R}_+$.

Exercícios Resolvidos

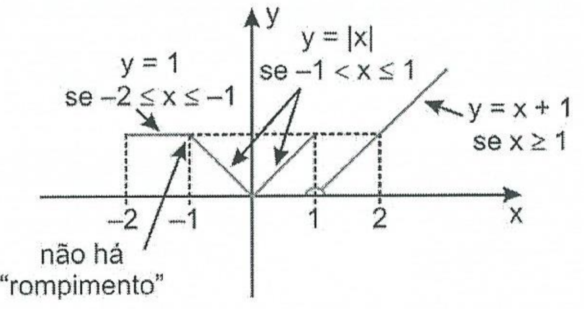
6.37) Considere a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -2 \leq x \leq -1 \\ |x| & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ x+1, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f.
b) Determine D(f) e I(f).
c) Resolva a equação f(x) = 1.

Solução

a) Observe que
1º) se $-2 \leq x \leq -1$, a reta y = 1, paralela ao eixo Ox, representa a função f;
2º) se $-1 < x \leq 1$, f é representada pelo gráfico de $y = |x|$;
3º) se $x > 1$, f é representada pela reta de equação: $y = x + 1$.
Então, o gráfico:



y = x + 1

x	y
0	1
−1	0
2	1

b) A projeção do gráfico de f sobre os eixos Ox e Oy nos dá:

$$D(f) = [-2; +\infty[$$
$$I(f) = \mathbb{R}_+$$

c) Resolver a equação f(x) = 1 é determinar todo x, $x \in D(f)$, tal que a imagem seja igual a 1; do gráfico:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -1 \vee x = 1 \vee x = 2\}$$

6.38) Construa o gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = |2x|$$

Solução

A definição de *módulo* de um número real nos dá:

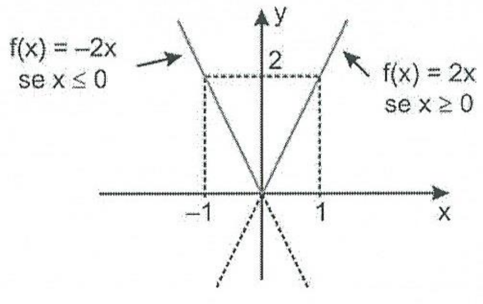
Se $2x \geq 0$, isto é, $x \geq 0$: $|2x| = 2x$ e $f(x) = 2x$

Se $2x \leq 0$, isto é, $x \leq 0$: $|2x| = -2x$ e $f(x) = -2x$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \geq 0 \\ -2x, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

O gráfico de f e a união de duas semi-retas, como mostra a figura:



$I(f) = \mathbb{R}_+$

6.39) Construa o gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = |x + 1|$$

Solução

A definição de *módulo* de um número real nos dá:

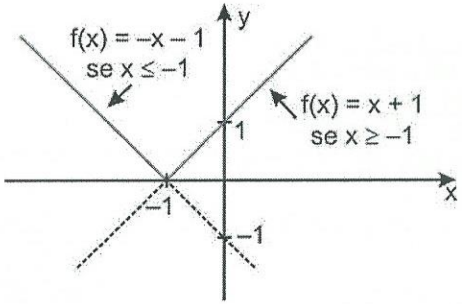
Se $x + 1 \geq 0$, isto é, se $x \geq -1$: $|x + 1| = x + 1$ e $f(x) = x + 1$

Se $x + 1 \leq 0$, isto é, se $x \leq -1$: $|x + 1| = -(x + 1)$ e $f(x) = -x - 1$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geq -1 \\ -x - 1, \text{ se } x \leq -1 \end{cases}$$

O gráfico de f é a união de duas semi-retas como mostra a figura:



$I(f) = \mathbb{R}_+$

6.40) Construa o gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = |x| + 1$$

Solução

A definição de *módulo* de um número real nos dá:

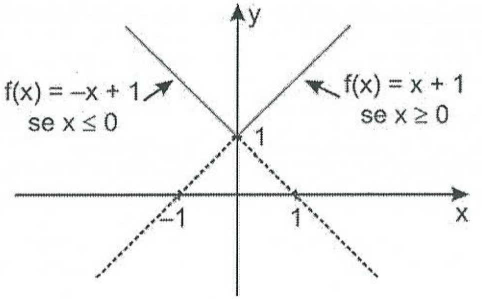
Se $x \geq 0$; $|x| = x$ e $f(x) = x + 1$

Se $x \leq 0$; $|x| = -x$ e $f(x) = -x + 1$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \geq 0 \\ -x+1, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

O gráfico de f é a união de duas semi-retas como mostra a figura:



I(f) = [1; + ∞[

6.41) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

a) Determine f(–2) e f(2).
b) Determine D(f).
c) Construa o gráfico de f.

Solução

a) $f(-2) = \frac{|-2|}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

$f(2) = \frac{|2|}{2} = \frac{2}{2} = 1$

b) Devemos ter x ≠ 0, isto é, D(f) = $\mathbb{R}_+^*$.

c) A definição de *módulo* de um número real nos dá:

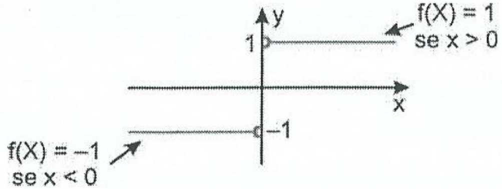
Se x > 0: | x | = x e $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

Se x < 0: | x | = –x e $f(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ -1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

O gráfico de f é a união de duas semi-retas paralelas ao eixo Ox, como mostra a figura:



I(f) = [–1; 1[

6.42) Construa o gráfico da função f, definida por:

$$f(x) = |x + 1| + |x - 1|$$

Solução

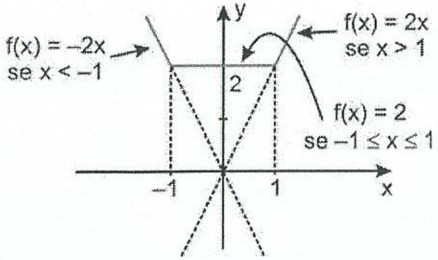
Inicialmente, determinamos os valores –1 e 1 onde os números x + 1 e x – 1 "mudam" de sinal; então a tabela:

x	–∞	–1		1	+∞
|x + 1|	–x – 1	0	x + 1	2	x + 1
|x – 1|	–x + 1	2	–x + 1	0	x – 1
f(x)	– 2x	2	2	2	2x

Na tabela, observe por exemplo que, se x < –1, então x + 1 < 0 e daí |x + 1| = –x – 1; analogamente, se x > 1 então x – 1 > 0 e daí |x – 1| = x – 1; se x = –1 tem-se |x + 1| = 0 e |x – 1| = 2.
Também, note que f(x) é a *soma* de |x + 1| com |x – 1|.
Então,

$$f(x) = \begin{cases} -2x, \text{ se } x < -1 \\ 2, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

O gráfico de f é a união de duas semi-retas mais um segmento de reta, como mostra a figura:



I(f) = [2; + ∞[

Exercícios Propostos

6.43) Verifique que a função definida por f(x) = |x| é *crescente* em $\mathbb{R}_+$ e *decrescente* em $\mathbb{R}_-$.

6.44) A função definida por f(x) = |x| possui algum *ponto fixo*? Qual é o seu *zero*?

6.45) Considere a função real de variável real definida por:

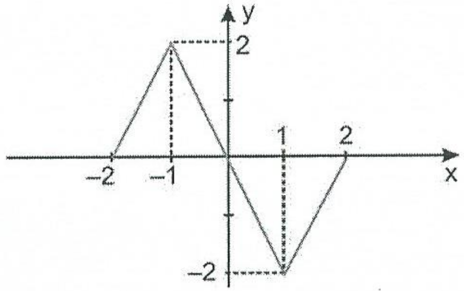
$$f(x)=\begin{cases} |x|, \text{ se } x \le 2 \text{ ou } x > 3 \\ 2, \text{ se } 2 < x < 3 \end{cases}$$

a) Determine f(–2), f(2), $f\left(\frac{5}{2}\right)$ e f(π).
b) Esboce o gráfico de f.
c) Determine D(f) e I(f).
d) Determine x tal que f(x) = 2.

6.46) Construa o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo:
a) f(x) = 2 |x|
b) f(x) = |3x|
e) f(x) = |x – 2|
d) f(x) = |x| – 2
Diga, em cada caso, qual é o conjunto-imagem da função.

6.47) Construa o gráfico de cada uma das funções definidas abaixo:
a) $f(x)=\frac{|x|+x}{2}$
c) $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}\cdot x$
b) $f(x)=\frac{|x|}{x}+1$
Dê, em cada caso, o domínio e o conjunto-imagem da função.

6.48) Uma função f, de domínio A = [–2; 2], é definida pelo gráfico abaixo:



a) Determine I(f)
b) Desenhe o gráfico de uma função g, de domínio A, definida por:

$$g(x)=\frac{|f(x)|+f(x)}{2}$$

c) Determine I(g).
d) Resolva a equação f(x) = g(x).

6.49) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = |x-1| + |x-4|$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Determine I(f).

6.50) Seja a função f, real de variável real, definida por:

$$f(x) = -1 + |x+1| - 2\,|x| + |x-1|$$

a) Construa o gráfico de f.
b) Dê I(f).

6.51) Para os números reais a e b, a ≤ b, definem-se:
máx (a; b) = b
mín (a; b) = a
Assim, por exemplo, máx (2; 3) = 3, máx (2; 2) = mín (2; 2) = 2, mín (2; 3) = 2.
Desenhe o gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \text{máx. } (2; |x|)$$

Qual é o conjunto-imagem de f?

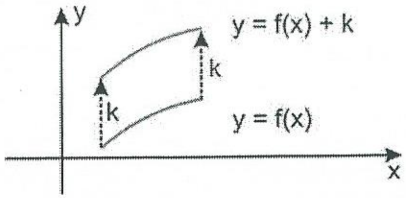
6.5 – TRANSFORMAÇÕES NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Certas *transformações* (translações, reflexões,...) podem ser feitas sobre o gráfico de uma função, possibilitando a sua construção com alguma facilidade.

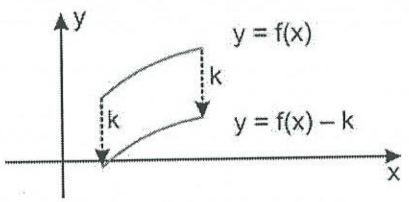
Vamos examinar as transformações mais importantes.

Seja, então, a função definida pela sentença aberta y = f(x) e seja o número real k, *positivo*.

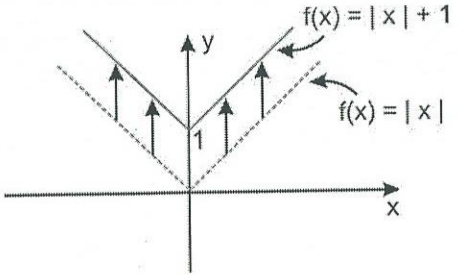
I. O gráfico da função definida por y = f(x) + k pode ser obtido do gráfico da função definida por y = f(x), fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Oy, "para cima".



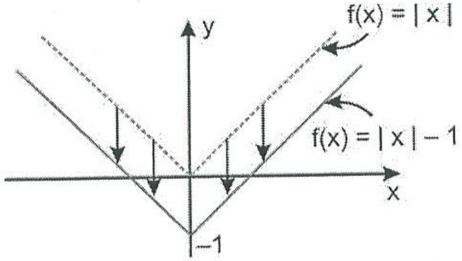
O gráfico da função definida por y = f(x) – k pode ser obtido do gráfico da função definida por y = f(x), fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Oy, "para baixo".



Exemplos

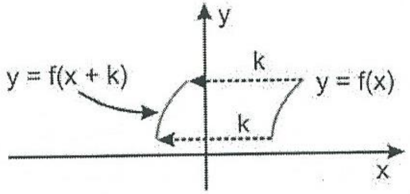


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma translação "para cima", obtendo-se o gráfico da função f(x) = |x| + 1.

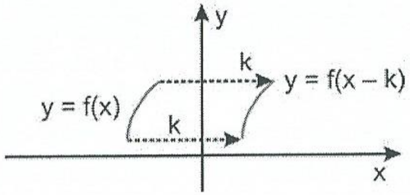


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma translação "para baixo", obtendo-se o gráfico da função f(x) = |x| – 1.

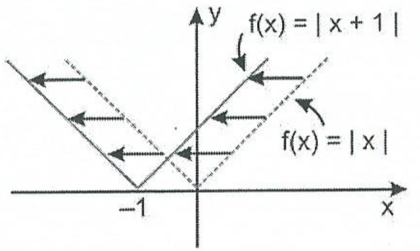
II. O gráfico da função definida por y = f(x + k) pode ser obtido do gráfico da função definida por y = f(x), fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Ox, "para a esquerda".



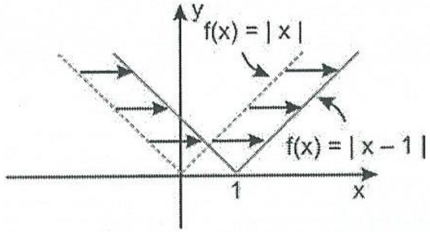
O gráfico da função definida por y = f(x – k) pode ser obtido do gráfico da função definida por y = f(x), fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Ox, "para a direita".



Exemplos

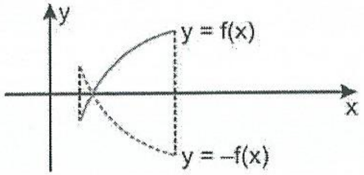


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma translação "para a esquerda", obtendo-se o gráfico da função f(x) = |x + 1|.

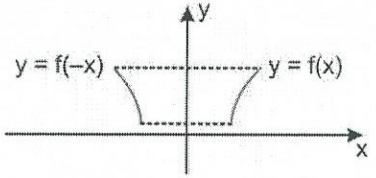


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma translação "para a direita", obtendo-se o gráfico da função f(x) = |x – 1|.

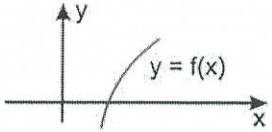
III. O gráfico da função definida por y = –f(x) pode ser obtido do gráfico da função definida por y = f(x), fazendo este sofrer uma *reflexão* em relação ao eixo Ox.

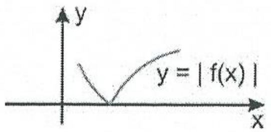


O gráfico da função definida por y = f(–x) pode ser obtido do gráfico da função y = f(x), fazendo este sofrer uma *reflexão* em relação ao eixo Oy.

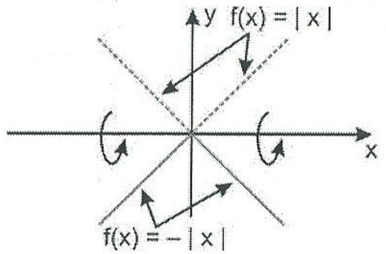


Se conhecemos o gráfico da função definida por y = f(x) e quisermos o gráfico da função definida por y = |f(x)| faz-se a "parte" que está "abaixo" do eixo Ox do gráfico de y = f(x) sofrer uma *reflexão* em torno do eixo Ox.

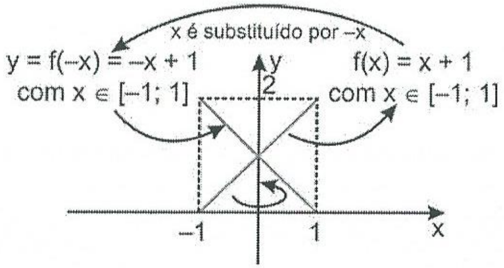




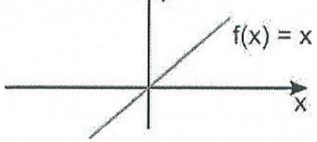
Exemplos

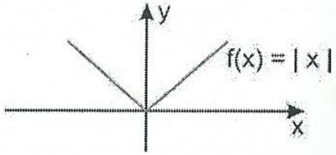


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma "reflexão" em torno do eixo Ox, obtendo-se o gráfico da função f(x) = – |x|.



Para x ∈ [–1; 1], o gráfico da função f(x) = x + 1 sofreu uma "reflexão" em torno do eixo Oy, obtendo-se o gráfico da função f(x) = –x + 1 (esta se obtém da primeira, substituindo-se x por –x).



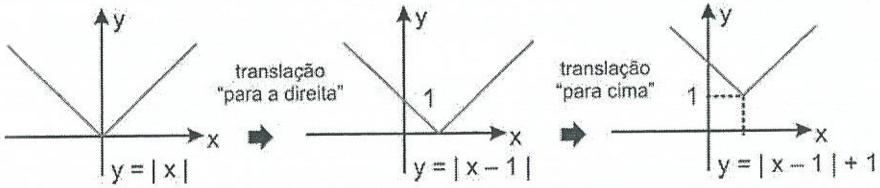


A parte "abaixo" do eixo Ox "reflete" em torno do eixo Ox. y = f(x) ⇒ y = |f(x)|

Exercícios Resolvidos

6.52) Construa o gráfico da função definida por f(x) = |x – 1| + 1.

Solução



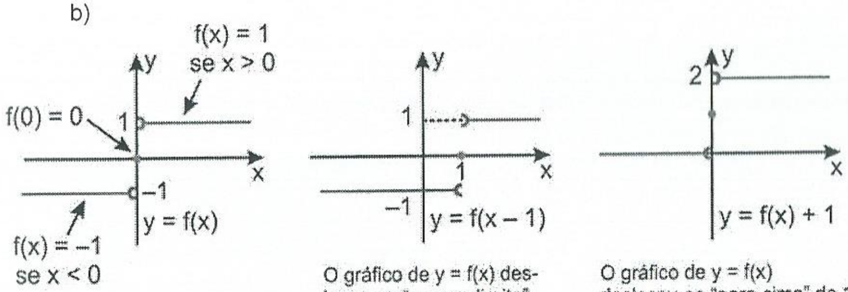
6.53) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } x < 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

a) Determine o conjunto-imagem de f.
b) Desenhe o gráfico de f e deduza os gráficos das funções definidas por y = f(x – 1) e y = f(x) + 1.

Solução

a) Observe que todo real negativo tem imagem –1, zero tem imagem zero e que todo real positivo tem imagem 1; daí I(f) = {–1; 0; 1}. (Veja o exercício 6.16)
b)



O gráfico de y = f(x) deslocou-se "para a direita" de 1.

O gráfico de y = f(x) deslocou-se "para cima" de 1.

Exercícios Propostos

6.54) Desenhe os gráficos das funções definidas abaixo:
a) f(x) = |x| + 2
b) f(x) = |x + 2|
c) f(x) = |x| – 2
d) f(x) = |x – 2|

6.55) Desenhe os gráficos das funções definidas pelas sentenças abertas:
a) y = ||x – 2| – 1|

b) $y = 1 - |x - 1|$
c) $y = |-x - 1| + 1|$

6.56) Seja a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } -1 \le x \le 0 \\ x+1, \text{ se } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

a) Desenhe o gráfico de f
b) Deduza: D(f) e I(f)
c) Desenhe os gráficos das funções definidas por:

$y = f(x) + 1;\quad y = f(x - 1);\quad y = f(-x);\quad y = 1 - f(x)$

6.57) Considere a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -1, \text{ se } -1 \le x < 0 \\ x, \text{ se } 0 \le x < 1 \end{cases}$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Determine: D(f) e I(f).
c) Desenhe o gráfico da função definida por: $y = -f(x)$.
d) Resolva a equação: $f(x) = x$.
e) Resolva a inequação: $f(x) < 1$.
f) Desenhe o gráfico da função definida por: $y = |f(x)|$.
g) Resolva a equação: $|f(x)| = 1$.

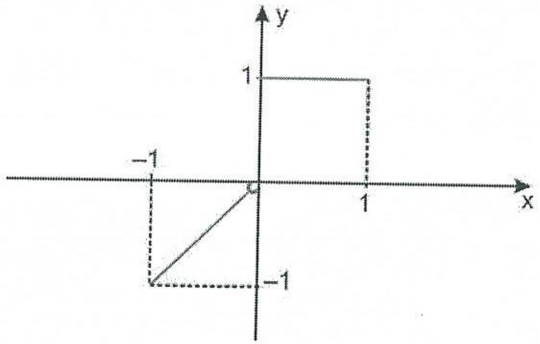
6.58) Dada a função g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > 0 \\ 0, \text{ se } x = 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Desenhe o gráfico da função f, definida por

$$f(x) = (x + 1) \cdot g(x - 1)$$

6.59) Uma função f, de domínio E = [–1; 1] é definida pelo gráfico abaixo:



Desenhe o gráfico da função definida por $y = |f(-x)|$.

6.6 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

Definição

É a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada número real x o número real: $ax^2 + bx + c$, $a \ne 0$; então, a sentença aberta que define é:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \ne 0$$

Exemplos

São *quadráticas* as funções definidas pelas sentenças abertas:
a) $f(x) = 2x^2 - x + 2$, onde: a = 2, b = –1 e c = 2
b) $f(x) = -x^2 + 4$, onde: a = –1, b = 0 e c = 4
e) $f(x) = x^2 - 4x$, onde: a = 1, b = –4 e c = 0

Gráfico na Função Quadrática

Num sistema cartesiano ortogonal xOy, o gráfico da função quadrática é uma **parábola** (a demonstração encontra-se no curso de Geometria Analítica desta coleção).

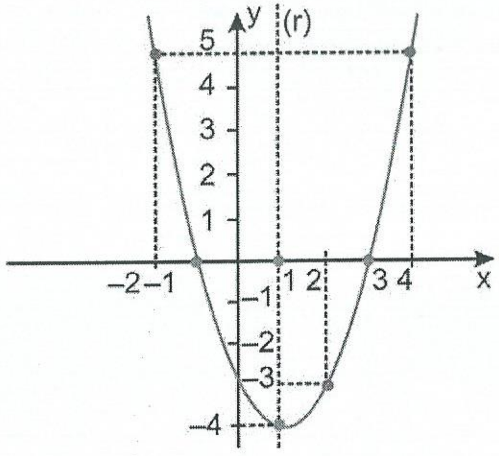
A sentença aberta que define a função quadrática: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ chama-se, então, **equação da parábola** (que é o gráfico da função).

Exemplos

Vamos esboçar, com auxilio de uma tabela, os gráficos das *funções quadráticas* definidas pelas sentenças abertas abaixo:

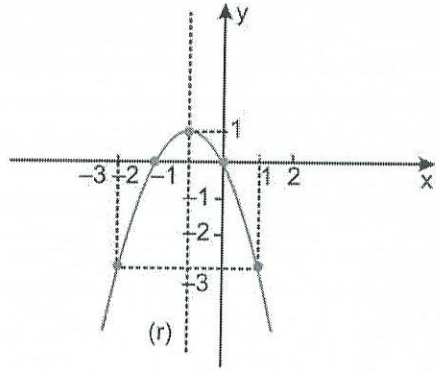
a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x	y
–2	5
–1	0
0	–3
1	–4
2	–3
3	0
4	5



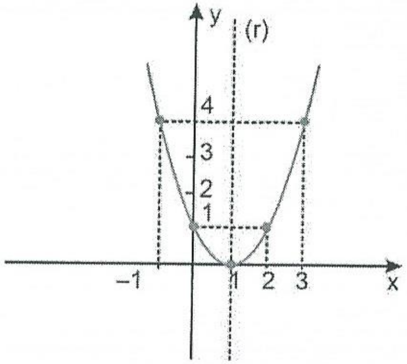
b) $f(x) = -x^2 - 2x$

x	y
–3	–3
–2	0
–1	1
0	0
1	–3



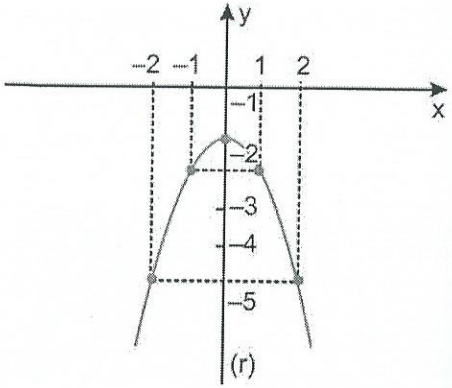
c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

x	y
–1	4
0	1
1	0
2	1
3	4



d) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

x	y
–2	–5
–1	–2
0	–1
1	–2
2	–5



Exercícios Resolvidos

6.60) A função definida por $f(x) = 2[(x + 1)^2 + 4]$ é da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, isto é, é *quadrática*. Determine a, b e c.

Solução

Efetuando as operações indicadas, obtemos sucessivamente:

$f(x) = 2(x^2 + 2x + 1 + 4)$

$f(x) = 2x^2 + 4x + 10,$

e daí: $a = 2$, $b = 4$ e $c = 10$.

6.61) Da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ sabe-se que $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ e $f(2) = 2$. Determine a, b e c.

Solução

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \\ f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \\ f(2) = 2 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -1$$

Então: $a = 1$, $b = -1$ e $c = 0$.

Exercícios Propostos

6.62) As funções abaixo são definidas por uma sentença aberta do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, isto é, são *quadráticas*. Para cada uma delas, determine a, b e c:

a) $f(x) = -x^2 - 1$
b) $f(x) = (x - 1)^2 + 1$
c) $f(x) = -2x(x + 3)$
d) $f(x) = x^2$

6.63) O gráfico da função quadrática definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos (0; 1), (1; –1) e (2; –5). Determine a, b e c.

6.64) Com auxílio de uma tabela, esboce os gráficos das funções definidas abaixo:

a) $f(x) = 2x^2$
b) $f(x) = -x^2 + x$
e) $f(x) = -2(x - 3)^2$
d) $f(x) = 2x^2 + 1$

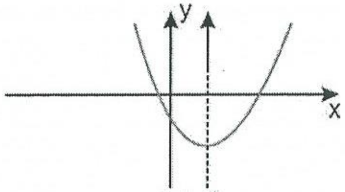
Concavidade da Parábola

Um tratamento rigoroso de *concavidade* de uma curva foge dos objetivos deste trabalho. Na parábola, a concavidade pode ser "voltada para cima", como nos exemplos **a** e **c**, e "voltada para baixo", como nos exemplos **b** e **d**. *O que determina o "sentido" dessa concavidade é o sinal do coeficiente de* x^2.

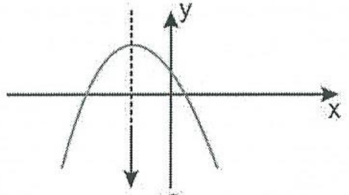
Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Se a > 0: a concavidade da parábola está “voltada para cima”.
Se a < 0: a concavidade da parábola está “voltada para baixo”.



a > 0



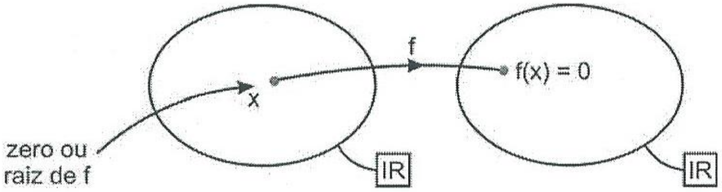
a < 0

Zeros da Função Quadrática

Sabemos que **zero** da função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é todo valor de x para o qual f(x) = 0, isto é, todo x que tem imagem igual a zero.

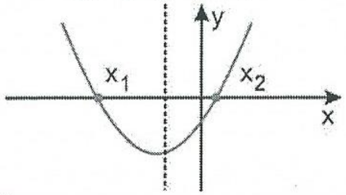


No exemplo **a** a função quadrática possui dois *zeros*: –1 e 3.
No exemplo **c** a função quadrática possui um único *zero*: 1.
No exemplo **d** a função quadrática não possui *zeros*.
Os *zeros* da função quadrática definida por: $f(x) = ax^2 + bx + c$ são determinados resolvendo-se a equação do 2º grau: $ax^2 + bx + c = 0$.
Então, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$:

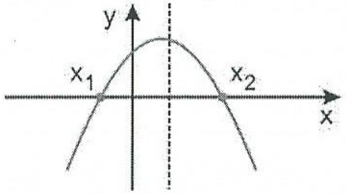
$\Delta > 0$: a função quadrática possui **dois zeros** (distintos)
$\Delta = 0$: a função quadrática possui **um único zero**
$\Delta < 0$: a função quadrática **não possui zeros** (distintos)

Observe nos exemplos **a** e **b** que, se a função quadrática possui dois zeros distintos, x_1 e x_2, o seu gráfico encontra o eixo Ox em dois pontos, cujas abscissas são, respectivamente, x_1 e x_2:

$\Delta > 0$ e $a > 0$

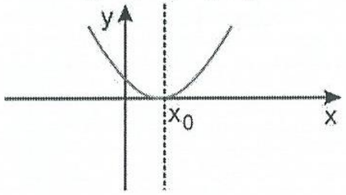


$\Delta > 0$ e $a < 0$

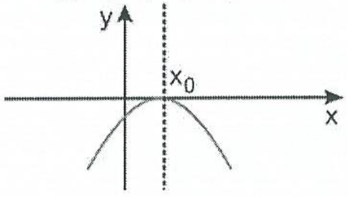


Observe no exemplo **c** que a função quadrática possui um único **zero**: x_0. A parábola tem em comum com o eixo Ox um único ponto cuja abscissa é x_0. Diz-se, nesse caso, que a parábola *tangencia* o eixo Ox.

$\Delta = 0$ e $a > 0$

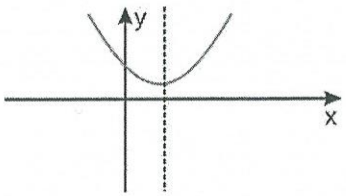


$\Delta = 0$ e $a < 0$

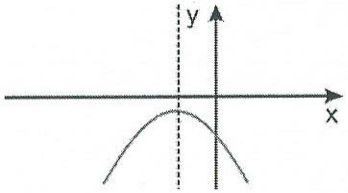


Observe no exemplo **d** que a função quadrática não possui **zeros**. A parábola não tem ponto comum com o eixo Ox:

$\Delta < 0$ e $a > 0$



$\Delta < 0$ e $a < 0$



Exercícios Resolvidos

6.65) Determine m, $m \in \mathbb{R}$, para que o gráfico da função quadrática definida por:

$$f(x) = (m^2 - 4)x^2 + x + m$$

tenha a concavidade “voltada para cima”.

Solução

Para que a concavidade da parábola esteja “voltada para cima” deve-se ter:

$$m^2 - 4 > 0$$

e daí: $m < -2$ ou $m > 2$

6.66) Determine m, $m \in \mathbb{R}$, para que a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$x \to 3x^2 - 6x - m$$

possua dois zeros distintos.

Solução

Para que a função f possua dois zeros distintos deve-se ter $\Delta > 0$:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-m)$$
$$36 + 12\,m > 0,$$

e daí a resposta: $m > -3$

6.67) Demonstre que se a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, possui dois *zeros* distintos, então a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c + m(2ax + b)$ também possui dois *zeros* distintos, qualquer que seja **m**.

Solução

Se a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, por hipótese, possui dois zeros distintos, então:

$$b^2 - 4ac > 0 \quad (I)$$

A sentença $f(x) = ax^2 + bx + c + m(2ax + b)$ escreve-se:

$$f(x) = ax^2 + (b + 2am)x + c + mb$$

Então,

$\Delta = (b + 2am)^2 - 4a(c + mb)$

$\Delta = b^2 + 4abm + 4a^2m^2 - 4ac - 4abm$

$\Delta = \underbrace{b^2 - 4ac}_{\substack{\text{positivo} \\ \text{por hipótese} \\ (I)}} + \underbrace{4a^2m^2}_{\substack{\text{não-negativo} \\ \text{é um} \\ \text{quadrado}}}$

Daí, $\Delta > 0$ e a tese está demonstrada.

6.68) Verifique que se $a \neq 1$, a função:

$$f(x) = (a - 1)x^2 + (a + 5)x - a$$

possui dois *zeros* distintos.

Solução

Se $a \neq 1$, a função é quadrática; devemos verificar que $\Delta > 0$.

$\Delta = (a + 5)^2 - 4(a - 1) - a$

$\Delta = a^2 + 10a + 25 - 4a + 4 - a$

$\Delta = a^2 + 5a + 29$

Ora, Δ é um *trinômio do 2º grau*, cujo *discriminante* é:

$$\Delta_1 = 5^2 - 4 \cdot 29 = -91$$

Como $\Delta_1 < 0$, o trinômio $\Delta = a^2 + 5a + 29$ tem, para todo a, o sinal do coeficiente de a^2, isto é, $\Delta > 0$ para todo a. Então, para todo a, $a \neq 1$, a função possui dois zeros distintos.

6.69) Dada a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = kx^2 + x + 1$$

determine k para que f possua um único *zero*.

Solução

Se $k = 0$, f é função polinômio do 1º grau e possui um único zero: -1.

Se $k \neq 0$, f é função quadrática; então para que f possua um único zero deve-se ter: $\Delta = 0$

$$\Delta = 1 - 4k = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

Daí, para que f possua um único zero deve-se ter: $k = 0$ ou $k = \frac{1}{4}$.

Exercícios Propostos

6.70) Determine m para que o gráfico da função quadrática definida por:

$$f(x) = (16 - m^2)x^2 + 2x - 1$$

tenha a concavidade "voltada para baixo".

6.71) Determine, se existirem, os *zeros* das funções definidas por:

a) $f(x) = 2x^2 - 1$
b) $f(x) = 4x^2 + x$
c) $f(x) = x^2 + 1$
d) $f(x) = -3x^2$
e) $f(x) = x^2 - 4x + 3$
f) $f(x) = x^2 - 6x + 9$
g) $f(x) = -x^2 - x - 1$

6.72) Determine, se existirem, os *pontos fixos* das funções definidas por:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 5$
b) $f(x) = x^2 - x + 1$
c) $f(x) = x^2 + x + 1$

6.73) Determine k para que a função quadrática definida por:

$$f(x) = x^2 + kx + 1$$

admita pelo menos um *zero*.

6.74) Determine k para que a função quadrática:

$$f(x) = kx^2 + 2x + 1$$

admita um único *zero*.

6.75) Determine k para que a função quadrática:

$$f(x) = x^2 + 3kx + 9$$

não admita *zeros*.

6.76) Discutir, segundo os valores de m, o número de pontos fixos da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = mx^2 + 1$$

6.77) Verifique que a função quadrática definida por:

$$f(x) = \frac{2}{a}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{b}$$

possui pelo menos um *zero* se **a** e **b** são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo em que **h** é a medida da altura relativa à hipotenusa.

6.78) Sejam $A = [1; 6]$ e as funções de A em $\mathbb{R}$, f e g, definidas por:

$$f(x) = x^2 - 4x - 5$$

$$g(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}$$

Resolva a equação: $f(x) = g(x)$.

6.79) Seja a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{a(x^2 - 1) + bx}{a(x^2 - 1) - bx}, \quad a \neq 0$$

a) Verifique que, quaisquer que sejam a e b, existem dois valores x, com sinais contrários, para os quais não existe f(x).
b) Resolva a equação: f(x) = 1.

Máximo e Mínimo

Seja f uma função real de variável real.

O número y_M, $y_M \in I(f)$, diz-se **valor máximo de f** se e somente se:

$$y_M \geq f(x)$$

para todo $x \in D(f)$.

O número y_m, $y_m \in I(f)$, diz-se **valor mínimo de f** se e somente se:

$$y_m \leq f(x)$$

para todo $x \in D(f)$.

Teorema

> Seja f uma função quadrática definida por:
>
> $$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$$
>
> Quando a > 0, f admite um **valor mínimo** $y_m = \frac{-\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-b}{2a}$
>
> Quando a < 0, f admite um **valor máximo** $y_M = \frac{-\Delta}{4a}$ em $x = \frac{-b}{2a}$

Demonstração

A sentença que define a função quadrática, escrita na *forma canônica* é:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \quad \text{(I) (veja item 4.4)}$$

Observe que, para todo x real:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0,$$

isto é, a expressão $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, um quadrado perfeito, é *sempre maior ou igual a zero*; o seu menor valor é zero que se dá em $x = \frac{-b}{2a}$.

Observe também que o número $\frac{-\Delta}{4a^2}$ não depende de x: é constante.

Então:

1º) Se **a > 0**: f(x) assumirá **valor mínimo** quando a diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ assumir o seu menor valor, isto é, quando $x = \frac{-b}{2a}$. E, substituindo x por $\frac{-b}{2a}$ em (I), obtém-se: $y_m = \frac{-\Delta}{4a}$.

2º) Se **a < 0**: f(x) assumirá **valor máximo** quando a diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ assumir o seu menor valor, isto, quando $x = \frac{-b}{2a}$. E, substituindo x por $\frac{-b}{2a}$ em (I), obtém-se: $y_M = \frac{-\Delta}{4a}$.

Nossa demonstração está completada.

O valor máximo de f e o valor mínimo de f denominam-se **valores extremos** ou **extremos** de f.

Então, a função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

assume um **valor extremo** em $x = \frac{-b}{2a}$.

Esse valor é mínimo se a > 0 e é máximo se a < 0. Se y_M ocorre, y_m não ocorre e inversamente.

O valor extremo é dado por $y_{ext} = \frac{-\Delta}{4a}$.

Exemplos

a) A função quadrática definida por:

$$f(x) = 5x^2 - 50x + 39$$

admite um *valor mínimo* em $x = \frac{-b}{2a} = \frac{50}{2 \cdot 5} = 5$ e $y_m = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1720}{4 \cdot 5} = -86$

b) A função quadrática definida por:

$$f(x) = -4x^2 + 40x - 73$$

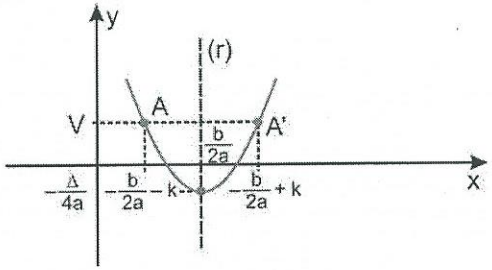
admite um valor máximo em $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-40}{2 \cdot (-4)} = 5$ e $y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-432}{4(-4)} = 27$

Vértice – Eixo de Simetria

Seja a função quadrática f, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

O gráfico da função f é uma parábola; o ponto $V\left(\frac{-b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ denomina-se **vértice** da parábola.



A reta (r), vertical, que passa por V, é um eixo de simetria da parábola; isto significa que se o ponto $A\left(-\frac{b}{2a}-k;\ y\right)$ pertence à parábola, o ponto $A'\left(-\frac{b}{2a}+k;\ y\right)$ também pertence à parábola.

Observações sobre a Gráfico da Função Quadrática

Seja a função quadrática, f, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Sempre que quisermos esboçar o gráfico de f devemos buscar as seguintes informações:

1º) **Concavidade:** se $a > 0$ a concavidade está "voltada para cima" e se $a < 0$ a concavidade está "voltada para baixo".

2º) **Eixo de simetria:** é a reta (r) vertical, que passa pelo ponto $\left(-\frac{b}{2a};0\right)$; o gráfico é simétrico em relação a (r).

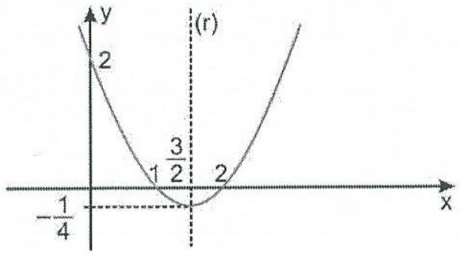
3º) **Zeros:** resolvemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.
Se $\Delta > 0$: a parábola encontra o eixo Ox em dois pontos, $(x_1;\ 0)$ e $(x_2;\ 0)$, onde x_1 e x_2 são as raízes da equação.
Se $\Delta = 0$: a parábola "tangencia" o eixo Ox no ponto $\left(-\frac{b}{2a};0\right)$; note que $-\frac{b}{2a}$ é a única raiz da equação.
Se $\Delta < 0$: a parábola não tem ponto comum com o eixo Ox.

4º) **Vértice:** é o ponto $\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$ que é "máximo" se $a < 0$ e é "mínimo" se $a > 0$.

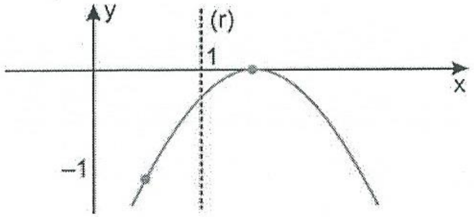
5º) O ponto (0; c) é o ponto de encontro da parábola com o eixo 0y.

Exemplos

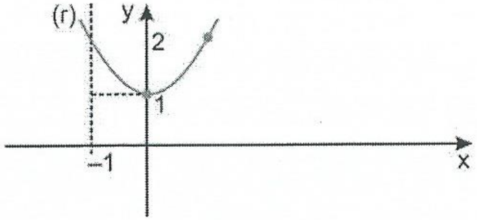
a) Esboçar o gráfico da função quadrática definida por: $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
Concavidade: $a = 1 > 0$; a concavidade está "voltada para cima".
Eixo de simetria: é a reta vertical que passa por: $\left(\frac{-b}{2a};0\right) = \left(\frac{3}{2};0\right)$.
Zeros: resolvendo $x^2 - 3x + 2 = 0$, encontramos $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$; a parábola encontra o eixo Ox nos pontos (1; 0) e (2; 0).
Vértice: $\frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$ e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{4}\right)$
A parábola encontra o eixo Oy no ponto (0; 2).



b) Esboçar o gráfico da função quadrática definida por: $f(x) = -x^2 + 2x - 1$
Concavidade: $a = -1 < 0$; a concavidade está "voltada para baixo".
Eixo de simetria: é a reta vertical que passa por: $\left(\frac{-b}{2a};0\right) = (1;0)$.
Zeros: resolvendo $-x^2 + 2x - 1 = 0$, encontramos $x = 1$; a parábola "tangencia" o eixo Ox no ponto (1; 0).
Vértice: $\frac{-b}{2a} = 1$ e $\frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow V(1;\ 0)$
A parábola encontra o eixo Oy no ponto (0; −1).



c) Esboçar o gráfico da função quadrática definida por: $f(x) = x^2 + 2x + 2$
Concavidade: $a = 1 > 0$; a concavidade está "voltada para cima".
Eixo de simetria: é a reta vertical que passa por $\left(\frac{-b}{2a};0\right) = (-1;0)$.
Zeros: a equação $x^2 + 2x + 2 = 0$ possui $\Delta < 0$; função não apresenta zeros e a parábola não encontra o eixo Ox.
Vértice: $\frac{-b}{2a} = -1$ e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-4)}{4} = 1 \Rightarrow V(-1;1)$
A parábola encontra o eixo Oy no ponto (0; 2).



Conjunto-Imagem

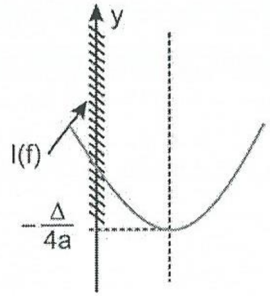
Seja f a função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Para determinarmos I(f) há duas situações que devem ser consideradas:

1) **a > 0**: a concavidade da parábola está "voltada para cima"; a projeção do gráfico sobre o eixo Oy nos dá:

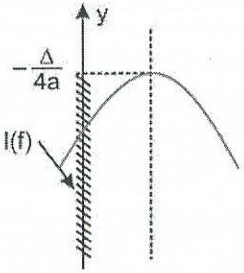
$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$



Note que a posição do eixo Ox é irrelevante.

2) **a < 0**: a concavidade da parábola está "voltada para baixo"; a projeção do gráfico sobre o eixo Oy nos dá:

$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$



Exemplos

a) Seja a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. A concavidade da parábola está "voltada para cima" e $\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-1}{8}$.

Então:

$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{1}{8} \right\} = \left[-\frac{1}{8}; +\infty \right[$$

b) Seja a função quadrática definida por: $f(x) = x^2 - 1$. A concavidade da parábola está "voltada para baixo" e $\frac{-\Delta}{4a} = -1$.

Então:

$$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1\} =]-\infty; -1]$$

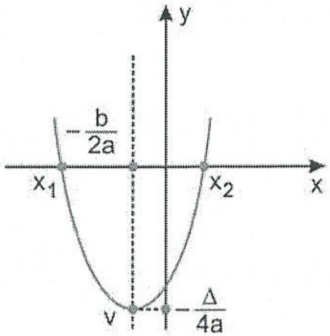
Um Resumo Gráfico

Para a função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

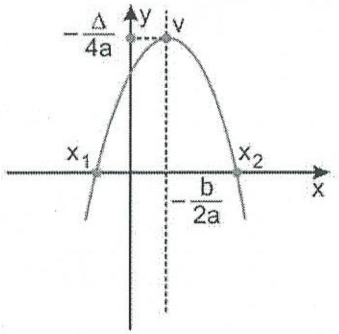
podemos obter as situações seguintes para o gráfico e seu conjunto-imagem:

$\Delta > 0;\ a > 0$



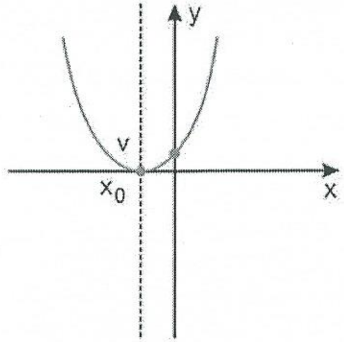
$I(f) = \{y \in IR \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$

$\Delta > 0;\ a < 0$



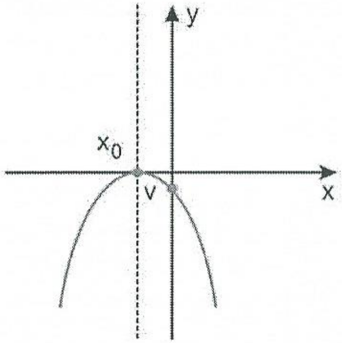
$I(f) = \{y \in IR \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}$

$\Delta = 0;\ a > 0$



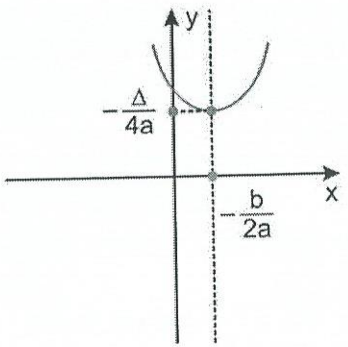
$I(f) = \{y \in IR \mid y \geq 0\}$

$\Delta = 0;\ a < 0$



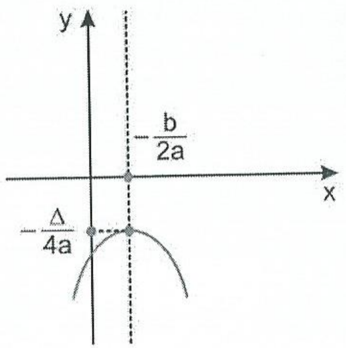
$I(f) = \{y \in IR \mid y \leq 0\}$

$\Delta < 0;\ a > 0$



$I(f) = \{y \in IR \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\}$

$\Delta < 0;\ a < 0$



$I(f) = \{y \in IR \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\}$

Exercícios Resolvidos

6.80) Seja a função quadrática, f, definida por:

$$f(x) = -x^2 + mx + 1$$

Determine **m** para que f apresente um valor máximo igual a 5.

Solução

Como $a = -1 < 0$, efetivamente f admite um valor máximo, y_M:

$$y_M = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(m^2+4)}{-4} = 5 \Rightarrow m^2 + 4 = 20 \Rightarrow m^2 = 16$$

E, então, m = 4 ou m = –4

6.81) Uma função quadrática é definida por:

$$f(x) = mx^2 + 2x + 1,\ m \neq 0$$

Determine **m** para que ela admita um mínimo em x = –1.
Qual é esse valor mínimo?

Solução

Para que a função admita um valor mínimo deve-se ter $m > 0$ (a concavidade da parábola deve estar "voltada para cima").

Esse valor mínimo dá-se em: $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2m} = -1$.

Daí, –2m = –2 e então m = 1 (aceitável, pois m > 0).

6.82) A soma de dois números reais positivos é 12. Qual é o maior valor que o produto desses dois números pode assumir?

Solução

Sejam x e 12 – x os números; se y é o produto deles:

$$y = x\,(12 - x)$$
$$y = -x^2 + 12x$$

A sentença acima define uma função quadrática na qual a = –1 < 0; então, ela apresenta um máximo:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{-4} = 36$$

O máximo valor do produto y é $y_M = 36$; ele se dá em:

$$x = \frac{-b}{2a} = 6.$$

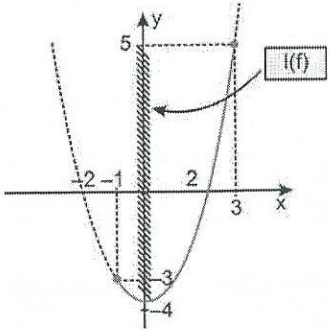
6.83) Seja o intervalo A = [–1; 3] e a função de A em $\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x^2 - 4$$

Determine I(f)

Solução

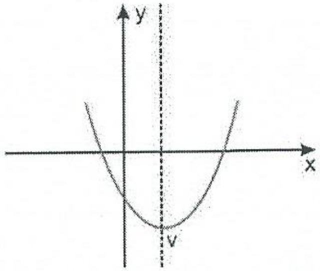
A sentença $f(x) = x^2 - 4$ é a equação da parábola da figura abaixo; apenas um "arco" dessa parábola é o gráfico da função dada: aquele para o qual $x \in [-1; 3]$.
Observe que f(–1) = –3 e f(3) = 5.



A projeção do gráfico da função sobre o eixo Oy nos dá I(f) = [–4; 5]

6.84) O gráfico da função quadrática definida pela fórmula:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



é a parábola da figura acima. Determine os sinais de a, b, c e $\Delta = b^2 - 4ac$.

Solução

A parábola tem a concavidade "voltada para cima"; então $a > 0$.
O vértice da parábola é um ponto de IV quadrante; sua abscissa é positiva:

$$\frac{-b}{2a} > 0 \xrightarrow{a>0} -b > 0 \Rightarrow b < 0$$

O ponto (0; c) de encontro da parábola com o eixo Oy está "abaixo" da origem; então $c < 0$.
A parábola encontra o eixo Ox em dois pontos, isto é, a função possui dois *zeros*: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

6.85) A parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelo ponto (1; 6) e o seu vértice é o ponto (–1; 2). Determine a, b e c.

Solução

O ponto (1; 6) pertence à parábola; então, sua equação fica satisfeita se fizermos a substituição x = 1 e y = 6.

$$a + b + c = 6 \text{ (I)}$$

$$V(-1;2) \Rightarrow \frac{-b}{2a} = -1 \text{ e } \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 2, \text{ e daí:}$$

$b = 2a$ (II)

$-b^2 + 4ac = 8a$ (III)

Substituindo (II) em (I), obtém-se:

$$3a + c = 6$$

e daí: $c = 6 - 3a$ (IV)

Substituindo (II) e (IV) em (III), obtemos:

$$-4a^2 + 4a(6 - 3a) = 8a$$

$$-16a^2 + 16a = 0$$

$$\text{e daí: } -16a\,(a - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 & \text{(rejeitada pois } a \neq 0) \\ \boxed{a = 1} \end{cases}$$

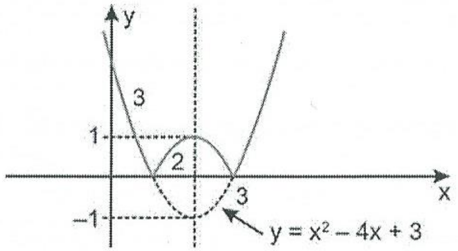
Para a = 1, obtém-se em (II) e (IV): b = 2 e c = 3.

6.86) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

Solução

Inicialmente desenhamos a parábola de equação: $y = x^2 - 4x + 3$ e em seguida, para obtermos o gráfico de f, fazemos a "parte" que está "abaixo" do eixo Ox sofrer uma *reflexão* em torno do eixo Ox:



6.87) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = (|x| - 1) \cdot (x + 2)$$

Solução

A definição de *módulo* de um número real nos dá:

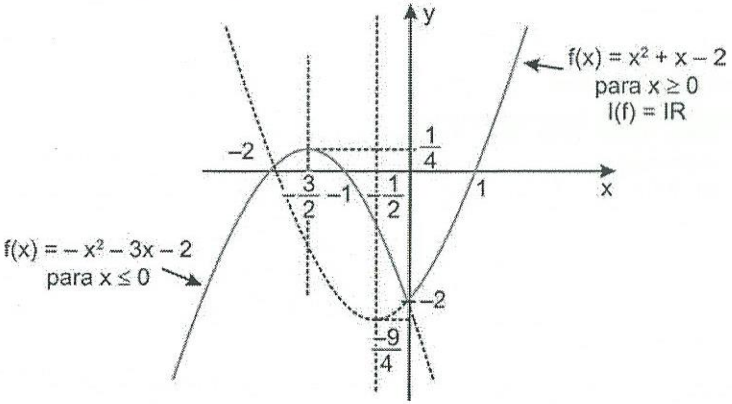
Se $x \geq 0$: $|x| = x$ e $f(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$

Se $x \leq 0$: $|x| = -x$ e $f(x) = (-x - 1)(x + 2) = -x^2 - 3x - 2$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, \text{ se } x \geq 0 \\ -x^2 - 3x - 2, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

Para obtermos o gráfico de f, desenhamos as parábolas de equações $y = x^2 + x - 2$ e $y = -x^2 - 3x - 2$; da primeira tomamos o "arco" constituído pelos pontos para os quais $x \geq 0$, e da segunda, o "arco" constituído pelos pontos para os quais $x \leq 0$:



6.88) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{|x^2 - 1|}$$

Solução

Observe que o domínio da função f é $D(f) = \mathbb{R} - \{1; -1\}$

A definição de módulo de um número real nos dá:
Se $x^2 - 1 > 0$, isto é, $x < -1$ ou $x > 1$, $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ e

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = x^2 + 1$$

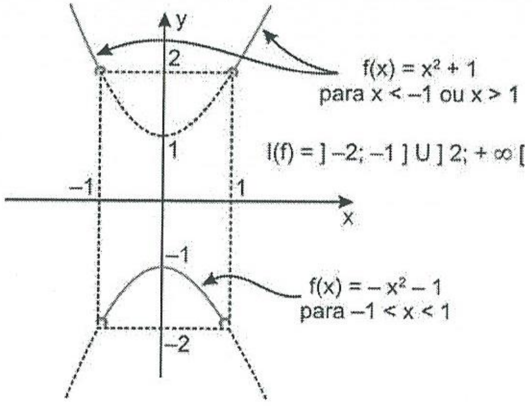
Se $x^2 - 1 < 0$, isto é, $-1 < x < 1$, $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1)$ e

$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{-(x^2 - 1)} = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{-(x^2-1)} = -(x^2+1) = -x^2 - 1$$

Então,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, \text{ se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ -x^2 - 1, \text{ se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

O gráfico da função f está na figura abaixo:



Exercícios Propostos

6.89) Para cada uma das funções definidas abaixo, determine os *valores extremos*:

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 8$

b) $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$

c) $f(x) = 2x^2 + 20x + 17$

d) $f(x) = 2x^2 + 1$

e) $f(x) = -x^2$

6.90) Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = x^2 + 2x + m$$

Determine **m** para que a função admita um valor mínimo igual a 3.

6.91) Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = mx^2 + 2x + 1, \; m \neq 0$$

Determine **m** para que a função admita um valor máximo em x = 1.

6.92) Seja a função f, quadrática, definida pela sentença:

$$f(x) = (m - 1)x^2 + (m^3 - 1)x + 2$$

Determine **m** para que f admita um valor máximo igual a f(–2).

6.93) A parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos (2; 3) e (–1; 6). O seu vértice tem abscissa x = 1. Determine **a**, **b** e **c**.

6.94) O gráfico de $y = x^2 + bx + c$ tem um "mínimo" no ponto (1; 2). Determine **b** e **c**.

6.95) Ache a interseção das parábolas de equações:

$$y = x^2 + x - 2$$
$$y = -x^2 + 3x + 2$$

6.96) A soma de dois números reais positivos é A. Qual é o maior valor que o produto desses dois números pode assumir?

6.97) A soma de dois números reais é B. Determine-os sabendo-se que a soma de seus cubos é mínima.

6.98) De todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é aquele que possui maior área. Demonstre!

6.99) Uma fábrica de televisores determina que se devem produzir x unidades em uma semana. O custo dessa produção (em reais) é dado por:

$$C(x) = 6x^2 + 1100x + 1000$$

O dinheiro **recebido** na venda das x unidades (em reais) é dado por:

$$M(x) = 3x^2 + 1700x$$

Quantos televisores devem ser fabricados, em uma semana, para que o lucro seja máximo?

6.100) Seja a equação do 2º grau:

$$x^2 - mx + m - 2 = 0$$

Determine **m** para que a soma dos quadrados de suas raízes seja mínima.

6.101) Esboçar os gráficos das funções quadráticas definidas por:

a) $f(x) = -x^2 - 1$

b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

c) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

d) $f(x) = 3x^2 + x + 1$

6.102) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = x^2 - |x| - 2$$

6.103) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = x^2 - |x - 2| + 3$$

6.104) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = |4x^2 - 1| - 3x$$

6.105) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = |x^2 - 1| + x$$

Deduza o número de soluções da equação $|x^2 - 1| + x + k = 0$, segundo os valores de k.

6.106) Desenhe o gráfico da função:

$$f(x) = x + x\sqrt{(x-1)^2}$$

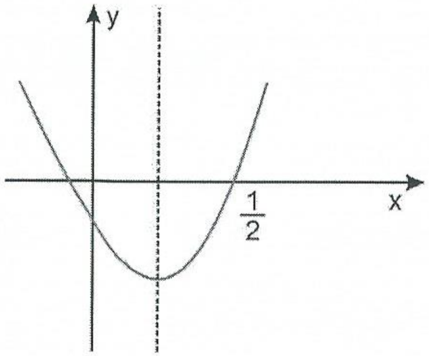
6.107) Desenhe o gráfico da função:

$$f(x) = \frac{1}{2}\{x^2 - 1 - |x^2 - 1|\}$$

6.108) O gráfico da função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 - bx + c$$

é a parábola da figura ao lado. Dar os sinais de: a, b, c, $b^2 - 4ac$, $a - b + c$, $a + b + c$, $a - 2b + 4c$.



6.109) Seja A = [–1; 1] e considere a função de A em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 4$. Esboce o gráfico da função e determine o seu conjunto-imagem.

6.110) Dê o conjunto-imagem de cada uma das funções definidas abaixo:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 2$

b) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $f(x) = -3x^2 + x + 2$

d) $f(x) = x^2 + x$

e) $f(x) = 2x^2 + 8$

f) $f(x) = -x^2$

6.111) Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = -x^2 + x + 4m$$

Determine **m** para que $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 2\}$.

6.112) Ao lado estão os gráficos das funções definidas pelas sentenças abertas:

(1) $y = ax^2 + 2bx + c$

(2) $y = \ell x^2 + 2mx + m$

Dar os sinais de:

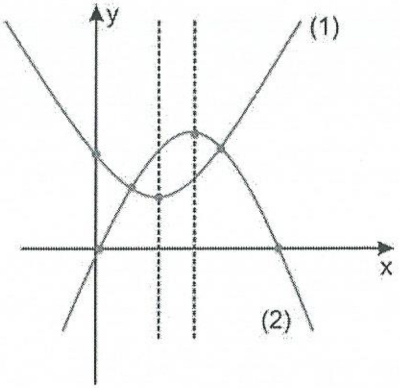
a) a

b) ℓ

c) $b^2 - ac$

d) $m^2 - \ell n$

e) $\ell b^2 - 2mab + na^2$



6.113) Determine m para que o domínio da função definida por:

$$f(x) = (x^2 + mx + 1)^{\frac{-1}{2}}$$

seja $\mathbb{R}$.

6.7 – POSIÇÃO DE UM NÚMERO EM RELAÇÃO ÀS RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2° GRAU

Seja a função quadrática f, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0,$$

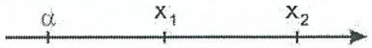
e consideremos a equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, associada à função f.

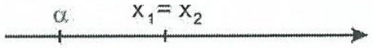
Sejam x_1 e x_2, $x_1 \leq x_2$, as *raízes* dessa equação; note que x_1 e x_2 são os *zeros* de f.

Problema

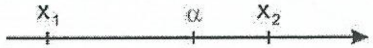
Dado um número real α queremos verificar se:

1°) $\alpha < x_1 \leq x_2$, isto é, se α está "à esquerda" de x_1:





ou 2°) $x_1 < \alpha < x_2$, isto é, se α está "entre" as raízes:



ou 3º) $x_1 \leq x_2 < \alpha$, isto é, se α está "à direita" de x_2:

A solução do problema baseia-se nos dois teoremas que seguem:

Teorema

Se $a \cdot f(\alpha) \geq 0$, então f admite dois zeros distintos, $x_1 < x_2$, e $x_1 < \alpha < x_2$.

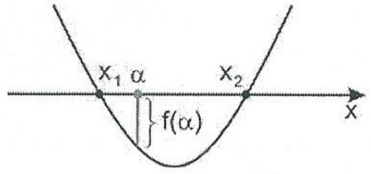
Demonstração

Se fosse $\Delta \leq 0$ teríamos $f(\alpha) = 0$ ou $f(\alpha)$ com mesmo sinal de a, isto é, $af(\alpha) < 0$, o que contraria a hipótese $af(\alpha) < 0$; então $\Delta > 0$ e f admite dois zeros x_1 e x_2, distintos. Admitamos $x_1 < x_2$.

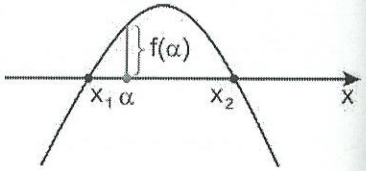
Se α estivesse "à esquerda" de x_1 ou "à direita" de x_2, $f(\alpha)$ teria o mesmo sinal de a, isto é, $af(\alpha) > 0$; e também, se α fosse um zero de f teríamos $af(\alpha) = 0$. Ora, as situações acima contrariam a hipótese feita e devem ser rejeitadas. Então, por exclusão, temos:

$$x_1 < \alpha < x_2$$

Veja as ilustrações:



$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ f(\alpha) < 0 \end{array}\right\} af(\alpha) < 0$



$\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ f(\alpha) > 0 \end{array}\right\} af(\alpha) < 0$

Teorema

Se $af(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$, então f admite os zeros x_1 e x_2, $x_1 \leq x_2$, $\alpha < x_1 \leq x_2$ ou $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Demonstração

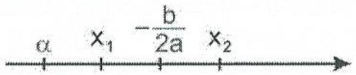
Supondo $\Delta > 0$, não podemos ter $x_1 \leq \alpha \leq x_2$, pois viria $af(\alpha) \leq 0$, o que contradiz a hipótese $af(\alpha) > 0$.

Supondo $\Delta = 0$, não podemos ter $\alpha = x_1 = x_2$, pois viria $af(\alpha) = 0$, o que contradiz a hipótese $af(\alpha) > 0$.

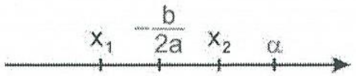
Então, por exclusão, temos $\alpha < x_1 \leq x_2$ ou $x_1 \leq x_2 < \alpha$.

Observe que se $\Delta > 0$ e $af(\alpha) > 0$, α está "à esquerda" de x_1 ou "à direita" de x_2. Para decidirmos qual das duas situações se verifica, devemos comparar α com um número que esteja entre os *zeros* de f. Geralmente, o número utilizado é $\frac{-b}{2a}$ (abscissa do vértice da parábola, ou ainda, a semi-soma dos *zeros* de f):

Se $\alpha < \frac{-b}{2a}$: α está "à esquerda" de x_1

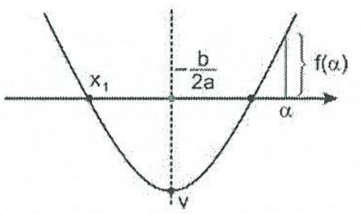


Se $\alpha > \frac{-b}{2a}$: α está "à direita" de x_2



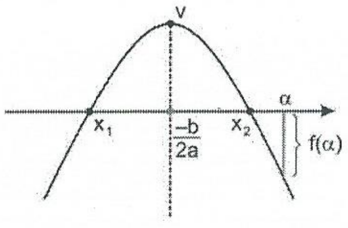
Observe também que se $\Delta = 0$ e $af(\alpha) > 0$, para sabermos se α está "à esquerda" de $x_1 = x_2$ ou "à direita" de $x_2 = x_1$, compara-se α diretamente com $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

Veja as ilustrações:



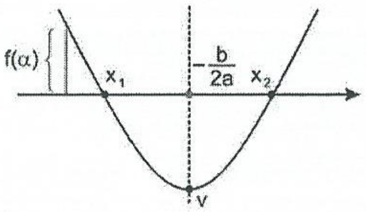
$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ f(\alpha) > 0 \end{array}\right\} a\,f(\alpha) > 0$

$-\frac{b}{2a} < \alpha$



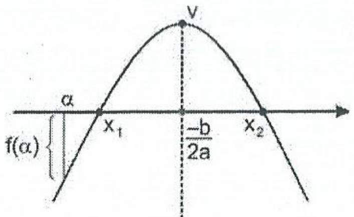
$\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ f(\alpha) < 0 \end{array}\right\} a\,f(\alpha) > 0$

$\frac{-b}{2a} < \alpha$



$\left.\begin{array}{l} a > 0 \\ f(\alpha) > 0 \end{array}\right\} a\,f(\alpha) > 0$

$\alpha < \frac{-b}{2a}$



$\left.\begin{array}{l} a < 0 \\ f(\alpha) < 0 \end{array}\right\} a\,f(\alpha) > 0$

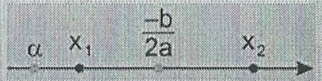
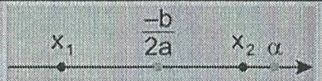
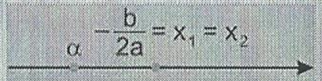
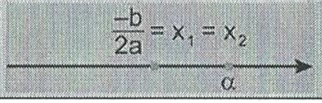
$\alpha < \frac{-b}{2a}$

Resumo

Seja a função quadrática f, definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

Seja α um número real que deve ser comparado aos *zeros* de f ou às *raízes* da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$; sejam x_1 e x_2, $x_1 < x_2$ essas raízes. Então:

Condições	*Posição do número a*
$af(\alpha) = 0$	α é um *zero* de f
$af(\alpha) < 0$	
$af(\alpha) > 0$ e $\Delta > 0$ e $\alpha < \frac{-b}{2a}$	
$af(\alpha) > 0$ e $\Delta > 0$ e $\frac{-b}{2a} < \alpha$	
$af(\alpha) > 0$ e $\Delta = 0$ e $\alpha < \frac{-b}{2a}$	
$af(\alpha) > 0$ e $\Delta = 0$ e $\frac{-b}{2a} < \alpha$	

Exemplos

a) Comparar o número $\alpha = 1$ com as raízes da equação:

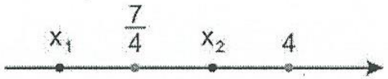
$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

Tem-se a = 1 e $f(\alpha) = f(1) = -1$ e daí $af(\alpha) < 0$; então, a equação possui duas raízes distintas e $\alpha = 1$ está "entre" essas raízes; também se diz que "$\alpha = 1$ é *interno* ao intervalo das raízes":

b) Comparar o número $\alpha = 4$ com os zeros da função quadrática definida por:

$$f(x)\ 2x^2 - 7x + 1$$

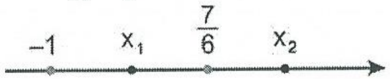
Tem-se a = 2 e $f(\alpha) = f(4) = 5$ e daí $af(\alpha) > 0$; $\Delta = 41$; então a função admite dois zeros distintos e "$\alpha = 4$ é *externo* ao intervalo dos zeros"; como $\frac{-b}{2a} = \frac{7}{4} < \alpha = 4$, $\alpha = 4$ está "à direita do intervalo":



c) Comparar o número $\alpha = -1$ com as raízes da equação:

$$3x^2 - 7x - 1 = 0.$$

Tem-se a = 3 e $f(\alpha) = f(-1) = 9$ e daí $af(\alpha) > 0$; $\Delta = 61 > 0$; então a equação admite duas raízes distintas e "$\alpha = -1$ é *externo* ao intervalo das raízes"; como $\frac{-b}{2a} = \frac{7}{6} > \alpha = -1$, $\alpha = -1$ está "à esquerda do intervalo":



Exercícios Resolvidos

6.114) Determine o parâmetro m para que a equação:

$$(2m - 1)x^2 - (3m + 2)x + m + 3 = 0$$

admita duas raízes x_1 e x_2, tais que $x_1 < 2 < x_2$.

Solução

A condição (única) é: $af(\alpha) < 0$.
Temos:

$$a = 2m - 1$$

$$f(\alpha) = f(2) = (2m - 1)2^2 - (3m + 2)2 + m + 3 = 3m - 5$$

Então:

$$(2m - 1)(3m - 5) < 0$$

e daí a resposta $\frac{1}{2} < m < \frac{5}{3}$.

6.115) Seja a função f definida por:

$$f(x) = (2m + 1)x^2 - 4x - 2m + 4$$

Determine o número real **m** para que f admita os zeros x_1 e x_2 tais que $x_1 \le x_2 < 1$.

Solução

As condições que se devem impor são traduzidas pelo sistema de inequações simultâneas:

$$\begin{cases} \Delta \ge 0 & \text{(I)} \\ af(\alpha) > 0 & \text{(II)} \\ \frac{-b}{2a} < 1 & \text{(III)} \end{cases}$$

O sistema acima escreve-se: $\begin{cases} m(2m - 3) > 0 & \text{(I)} \\ 2m + 1 > 0 & \text{(II)} \\ \frac{1 - 2m}{2m + 1} < 0 & \text{(III)} \end{cases}$

Então, a resposta é $\frac{-1}{2} < m < 0$.

6.116) Mostre, sem formar o *discriminante*, que a equação:

$$(x - p)(x - q) - r^2 = 0,\ r \neq 0$$

admite duas raízes distintas.
Compare os números **p** e **q** com as raízes da equação.

Solução

$a = 1$ e $f(p) = -r^2 < 0$ → $af(p) < 0$ e daí $\begin{cases} \Delta > 0: \text{a equação admite duas raízes distintas} \\ \textbf{p} \text{ está "entre" as raízes da equação} \end{cases}$

$f(q) = -r^2 < 0$ → $af(q) < 0$ e, então, q está "entre" as raízes da equação.

Exercícios Propostos

6.117) Comparar o número α com as raízes das equações seguintes:

a) $x^2 - 7x - 4 = 0$ e $\alpha = 1$
b) $2x^2 - 3x - 25 = 0$ e $\alpha = -3$
c) $x^2 - 6x + 4 = 0$ e $\alpha = 6$
d) $3x^2 - 26x + 54 = 0$ e $\alpha = 3$

6.118) Determine o número real **m** para que o número 2 esteja "entre" as raízes da equação $mx^2 - 2(m + 1)x + m = 0,\ m \neq 0$.

6.119) Seja a equação:

$$x^2 - 6mx + (2 - 2m + 9m^2) = 0$$

Determine **m** para que suas raízes x_1 e x_2 satisfaçam à condição: $3 < x_1 \leq x_2$.

6.120) Seja a equação:

$$x^2 - mx + 2 = 0$$

Determine m para que suas raízes x_1 e x_2 satisfaçam à condição: $0 < x_1 \leq x_2 < 3$.

6.121) Determine o parâmetro **a** para que as raízes da equação:

$$x^2 + x + a = 0$$

Sejam maiores do que **a**.

6.122) Compare os números –1, 1, 2 e 3 com as raízes da equação:

$$(x - 1)(x - 3) - m(x + 1)(x - 2) = 0,\ m \neq 1$$

6.123) Considere a função quadrática definida por:

$$f(x) = (x - p)(x - q) + (x - q)(x - r) + (x - r)(x - p)$$

com $p < q < r$.
Deduza, sem formar o *discriminante*, que a equação $f(x) = 0$ admite duas raízes distintas. Compare os números p, q e r com as raízes da equação.

6.124) Sejam a função quadrática f definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$$

e os números reais α e β tais que $\alpha < \beta$.
Verifique que se $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, então f admite dois zeros distintos e um e somente um dos números α e β pertence ao intervalo das raízes.

6.125) Considere a função quadrática definida por:

$$f(x) = (3a - 2)x^2 + 2ax + 3a.$$

Determine a para que a equação $f(x) = 0$ admita uma raiz e uma só "entre" –1 e 0.
(Sugestão: exercício anterior.)

6.8 – OUTRAS FUNÇÕES ELEMENTARES

1. Função Definida pela Sentença Aberta $f(x) = x^3$

Consideremos a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada número real x o número x^3:

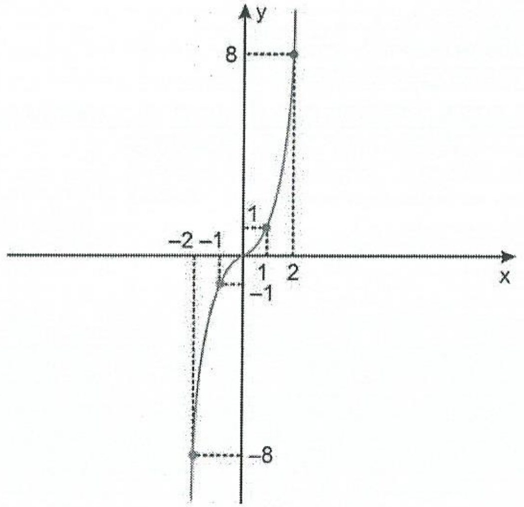
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3$$

A função f é *crescente* em $\mathbb{R}$, pois para todo real x_1, e todo real x_2, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

O gráfico de f é mostrado na figura:

x	y
–2	–8
–1	–1
0	0
1	1
2	8



A projeção do gráfico de f sobre o eixo Oy nos dá: $I(f) = \mathbb{R}$.

2. Função Definida pela Sentença Aberta $f(x) = \dfrac{1}{x}$

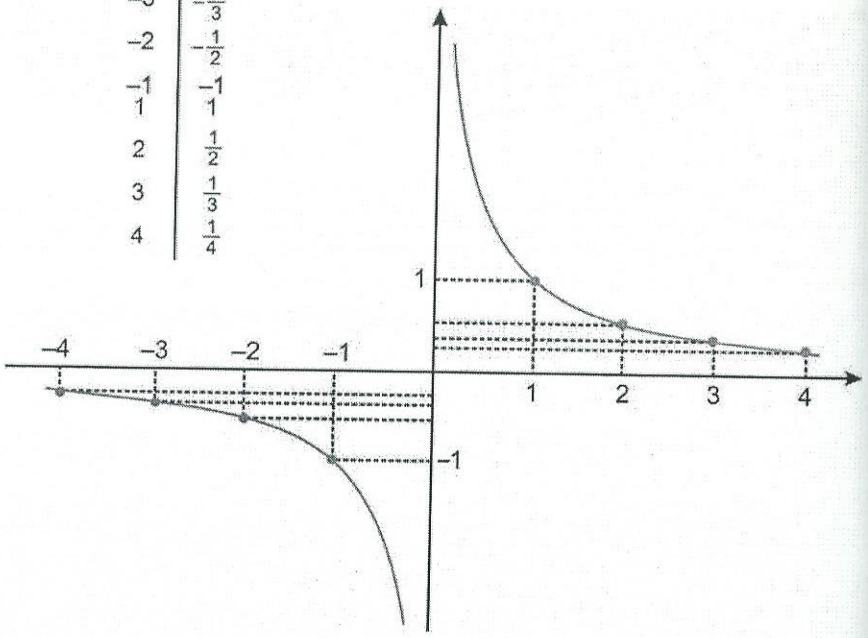
Consideremos a função d, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada número real x, $x \neq 0$, o número $\dfrac{1}{x}$:

$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

A função é *decrescente* em $\mathbb{R}_-^*$, e também é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$.

O gráfico de f é uma *hipérbole equilátera* (ver o curso de Geometria Analítica desta coleção):

x	y
–4	$-\frac{1}{4}$
–3	$-\frac{1}{3}$
–2	$-\frac{1}{2}$
–1	–1
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$



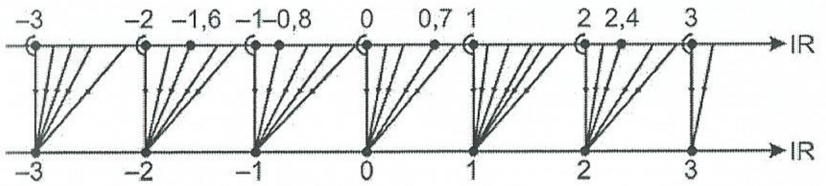
A projeção do gráfico de f sobre Oy nos dá: $I(f) = \mathbb{R}^*$.

3. Função Maior Inteiro

É a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a cada número real x o número [x] que é o *maior inteiro que não supera* x:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = [x]$$

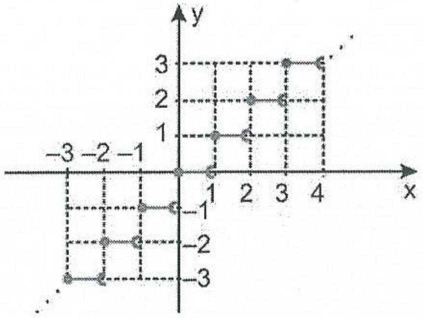
A figura abaixo ilustra qual é a correspondência definida pela função f.



Note por exemplo que:

$f(2, 4) = [2, 4] = 2$
$f(0, 7) = [0, 7] = 0$
$f(2) = [2] = 2$
$f(-0, 8) = [-0, 8] = -1$
$f(-1, 6) = [-1, 6] = -2$

O gráfico da função f é o conjunto de segmentos como mostra a figura:



$-3 \leq x < -2$: $f(x) = -3$
$-2 \leq x < -1$: $f(x) = -2$
$-1 \leq x < 0$: $f(x) = -1$
$0 \leq x < 1$: $f(x) = 0$
$1 \leq x < 2$: $f(x) = 1$
$2 \leq x < 3$: $f(x) = 2$
$3 \leq x < 4$: $f(x) = 3$
⋮ ⋮

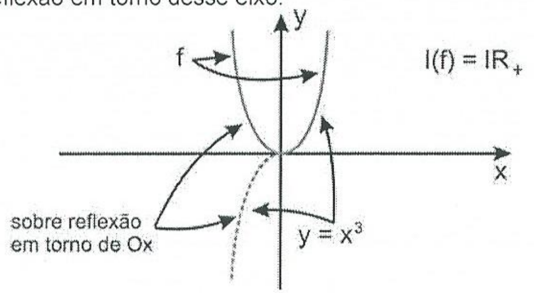
Observe que $I(f) = \mathbb{Z}$.

Exercícios Resolvidos

6.126) Desenhe o gráfico da função f definida por $f(x) = |x^3|$.

Solução

Para obtermos o gráfico da função f, desenhamos o gráfico da função definida por $y = x^3$ e aquela parte que se situa "abaixo" do eixo Ox sofre uma reflexão em torno desse eixo:



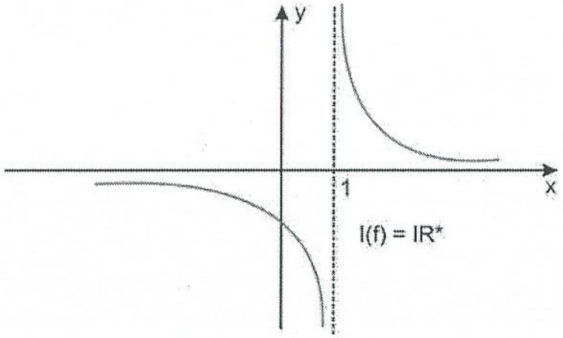
6.127) Seja a função f definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

a) Determine D(f).
b) Desenhe o gráfico de f e deduza I(f).

Solução

a) Devemos ter $x - 1 \neq 0$, isto é, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.
b) Para se obter o gráfico de f, desenhamos o gráfico da função g definida por $g(x) = \frac{1}{x}$; e, como $f(x) = g(x - 1)$, "deslocamos" o gráfico de g para a direita de 1 unidade:



6.128) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

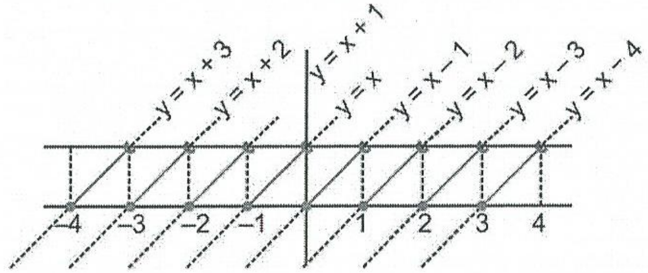
$$f(x) = x - [x]$$

Tal função denomina-se **função mantissa**.
Desenhe o gráfico de f e deduza o seu conjunto-imagem.

Solução

$0 \leq x < 1$: $[x] = 0$ e $f(x) = x$
$1 \leq x < 2$: $[x] = 1$ e $f(x) = x - 1$
$2 \leq x < 3$: $[x] = 2$ e $f(x) = x - 2$
⋮ ⋮ ⋮
$-1 \leq x < 0$: $[x] = -1$ e $f(x) = x + 1$
$-2 \leq x < -1$: $[x] = -2$ e $f(x) = x + 2$
$-3 \leq x < -2$: $[x] = -3$ e $f(x) = x + 3$
⋮ ⋮ ⋮

A projeção do gráfico de f sobre Oy nos dá: $I(f) = [0; 1[$



Exercícios Propostos

6.129) Seja a função f definida por:

$$f(x) = ax^3,\ a \neq 0$$

Determine **a** para que f seja:
a) crescente em $\mathbb{R}$
b) decrescente em $\mathbb{R}$

6.130) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = |(x + 2)^3| + 1$$

Determine I(f).

6.131) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = -x^2 \cdot |x|$$

6.132) Seja a função f, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$, definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

a) Demonstre que f é decrescente em $\mathbb{R}_-^*$

b) Demonstre que f é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$

c) Determine os *pontos fixos* de f

6.133) Com auxílio de uma tabela, esboce o gráfico da função definida por:

$$f(x) = \frac{-2}{x}$$

6.134) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = \frac{1-x}{x}$$

Nos exercícios de 6.135 a 6.139 desenhe os gráficos das funções definidas pelas sentenças abertas:

6.135) $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$

6.136) $f(x) = |[x]|$

6.137) $f(x) = [x]^2$

6.138) $f(x) = x + [x]$

6.139) $f(x) = (-1)^{[x]} \cdot x$

6.140) Resolva as equações:
a) $[x] = 3$
b) $4\,[x]^2 - 36\,[x] + 45 = 0$

6.141) Resolva a equação: $|x| = [x]$

6.142) Determine os pontos fixos da **função maior inteiro**.

Exercícios Suplementares

III.1) Seja $S = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge 1 \le x \le n,\ n \in \mathbb{Z}_+^*\}$. Forma-se S^2. Qual é a soma dos produtos obtidos multiplicando-se as coordenadas de cada par de S^2?

III.2) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de equivalência definida sobre A. Seja **a** um elemento qualquer de A. O subconjunto de A:

$$C_a = \{x \mid x \in A \wedge x\,\mathfrak{R}\,a\}$$

chama-se *classe de equivalência de* **a** *com relação à equivalência* $\mathfrak{R}$.
Seja a relação $\mathfrak{R}$, sobre $\mathbb{Z}$, definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x - y \text{ é divisível por } 3\}.$$

Verifique que $\mathfrak{R}$ é uma relação de equivalência.
Qual é a classe de equivalência de zero com relação à equivalência $\mathfrak{R}$?

III.3) Seja $\mathfrak{R}$ uma relação de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ definida por:

$$\mathfrak{R} = \{(x;\ y) \in \mathbb{N}^2 \mid x + 3y = 12\}$$

a) Determine $\mathfrak{R}$ por enumeração dos pares ordenados que a constituem.
b) Dê $D(\mathfrak{R})$ e $I(\mathfrak{R})$
c) Determine $\mathfrak{R}^{-1}$

III.4) Determine o domínio de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x+1)(x+2)}}{\sqrt{|x|-x}}$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{|x-1|-1}$

III.5) Desenhe o gráfico da função real de variável real definida por:

$$f(x) = x - 2 + \frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$$

III.6) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = x^2 - |2x - 1|$$

III.7) Seja a função quadrática definida por:

$$f(x) = \left(2x + \frac{1}{2}\right)(3x-2) + a$$

Sabe-se que $f(x) > 0$, se $x > \frac{1}{2}$ e que $f(x) < 0$, se $x_0 < x < \frac{1}{2}$.

Determine **a** e x_0.

III.8) As raízes da equação:

$$6(m+3)x^2 - 3(m-1)x + 4m = 0$$

são x_1 e x_2. Determinem para que $x_1 < 3 < x_2$.

III.9) Considere a função quadrática definida por:

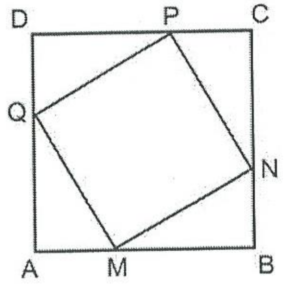
$$f(x) = m(x-1)(x-2) + 2x - 3,\ m \neq 0$$

Determine f(1) e f(2). Concluir que a equação f(x) = 0 admite raízes distintas qualquer que seja o parâmetro **m**. Compare os números 1 e 2 com as raízes da equação f(x) = 0.

III.10) Desenhe o gráfico da função definida por:

$$f(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)\cdot|x|}$$

III.11) Dá-se o quadrado ABCD de lado Q (veja a figura). Dos vértices traçam-se os segmentos iguais $\overline{AM}, \overline{BN}, \overline{CP}$ e $\overline{DQ}$ e os pontos M, N, P e Q unem-se formando um quadrado. Determinar med($\overline{AM}$) para que seja mínima a área do quadrado MNPQ.



III.12) Condição para que o domínio da função definida por:

$$f(x) = [px^2 + 2\sqrt{(a+2)\cdot p}\cdot x + 2]^{\frac{1}{2}}$$

seja $\mathbb{R}$.

III.13) Considere a função definida por:

$$f(x) = x \cdot [x]$$

Desenhe o seu gráfico para $-1 \leq x < 2$

III.14) Seja a função f definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

Calcule f(1) + f(2) + ... + f(100)

III.15) Desenhe o gráfico da função f definida por:

$$f(x) = \frac{|x+1| - |x-1|}{x}$$

Determine I(f).

PARTE IV

Capítulo 7 – **Equações e inequações irracionais**

Capítulo

7 Equações e inequações irracionais

7.1 – EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Equações irracionais são aquelas que apresentam variável sob radical.

Exemplos

a) A equação $\sqrt{x} - 3 = 2x$ é irracional.

b) A equação $\sqrt[3]{2x+1} + 1 = x$ é irracional.

c) A equação $(x - 2)^{1/2} - 2x + 1 = 0$ é irracional, pois $(x-2)^{1/2} = \sqrt{x-2}$

Antes de passar à resolução das equações irracionais, devemos lembrar alguns fatos importantes:

1º) Quando escrevemos $\sqrt[2]{9}$ estamos nos referindo ao número 3, isto é, $\sqrt[2]{9} = 3$ e *não* podemos escrever $\sqrt[2]{9} = -3$. De modo geral é o que ocorre com *radicais de índice par.*

Exemplos

a) $\sqrt[4]{16} = 2$

b) É falso que $\sqrt[4]{16} = -2$

Quando trabalhamos com radicais de índice ímpar, esse problema não aparece.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$

2º) No conjunto dos números reais, *não* existe raiz de **índice par** de número **negativo**.

Exemplos

a) No conjunto dos números reais não existe $\sqrt{-4}$

b) No conjunto dos números reais não existe $\sqrt[4]{-81}$

c) $\sqrt[4]{81} = 3$

d) $\sqrt{0} = 0$

e) $\sqrt[4]{0} = 0$

3º) Quando a raiz é de índice ímpar, o radicando pode ser positivo, negativo ou nulo; em qualquer caso a **raiz existirá e será um número real**.

Exemplos

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$

b) $\sqrt[5]{-243} = -3$

c) $\sqrt[3]{125} = 5$

d) $\sqrt[3]{0} = 0$

Vamos então ressaltar que:

> Sendo **x** um número real qualquer e **k** um número par positivo temos:
>
> a) $\sqrt[k]{x}$ é real $\Leftrightarrow x \geq 0$
>
> b) $\sqrt[k]{x} \geq 0$, para todo real $x \geq 0$

7.2 – RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO IRRACIONAL

De modo geral, o processo usado para resolver equações irracionais é elevar os dois membros da equação a uma potência conveniente (várias vezes, se necessário), até eliminar os radicais. Porém, quando elevamos os dois membros da equação a um expoente **par**, a nova equação não é obrigatoriamente equivalente à equação original e portanto a nova equação pode apresentar raízes que não verificam a equação original. Este fato será melhor entendido através dos exemplos a seguir:

Exemplo

Sabemos que $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ porém a implicação $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$ não é verdadeira para quaisquer **a** e **b**. Assim a equivalência

$$a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$$

não é válida para **a** e **b** quaisquer.

Conforme vimos na propriedade P_7 do capítulo 4, a equivalência $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ é válida quando **a** e **b** pertencem a $\mathbb{R}_+$.

Exemplo

Consideremos a equação $\sqrt{2x+5} = x+1$.

Vamos elevar os dois membros ao quadrado:

$2x + 5 = (x + 1)^2$

$2x + 5 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 - 4 = 0$

$x = \pm 2$

Porém, antes de *aceitarmos* estas raízes, vamos fazer a verificação na equação original:

$$\text{Para } x = 2 \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+5} = \sqrt{2(2)+5} = 3 \\ x+1 = 2+1 = 3 \end{array} \right.$$

Portanto, para x = 2 a sentença aberta $\sqrt{2x+5} = x+1$ torna-se verdadeira.

$$\text{Para } x = -2 \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+5} = \sqrt{2(-2)+5} = 1 \\ x+1 = -2+1 = -1 \end{array} \right.$$

Portanto, x = –1 não satisfaz a equação $\sqrt[3]{2x+5} = x+1$.

Assim o conjunto-solução da equação proposta é S = {2}.

Não é necessário fazer a verificação quando elevarmos os dois membros da equação **apenas** a expoentes ímpares, pois, de acordo com a propriedade P_9 do capítulo 4, temos que para **n** natural e ímpar:

$$a = b \Leftrightarrow a^n = b^n, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Consideremos a equação $\sqrt[3]{x^2+11x+1} = x+1$

Vamos elevar os dois membros ao cubo:

$$x^2 + 11x + 1 = (x + 1)^3 \quad \text{(I)}$$

$$\text{Lembrando que } \left\{ \begin{array}{l} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \end{array} \right. \text{ temos:}$$

$(x + 1)^3 = x^3 + 3(x)^2 (1) + 3x (1)^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

E, assim, a equação (I) transforma-se em:

$$x^2 + 11x - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$x^3 + 2x^2 - 8x = 0$$

Porém:

$x^3 + 2x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2x - 8) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -4$

Podemos então, em resumo, escrever:

$\sqrt[3]{x^2+11x+1} = x+1 \Leftrightarrow x^2+11x+1 = (x+1)^3 \Leftrightarrow x^3+2x^2-8x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$ ou $x = -4$

Neste caso, como elevamos os dois membros a expoente ímpar, podemos "confiar" nas raízes 0, 2 e – 4 e dizer que o conjunto-solução é:

$$S = \{0; 2; -4\}$$

Em alguns casos de equações envolvendo radicais de índice par, podemos resolver a equação sem fazer a verificação. Esses casos serão analisados a seguir.

7.3 – EQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt[k]{a} = b$

Consideremos uma equação irracional do tipo $\sqrt[k]{a} = b$, onde $k \in \mathbb{N}^*$ e é **par**. Para que a equação tenha solução, antes de tudo devemos ter $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

Supondo satisfeitas estas condições, podemos elevar os dois membros à potência k obtendo $a = b^k$. Porém, impor $a = b^k$, automaticamente garante $a \geq 0$ (pois k é par). Assim, em resumo, podemos estabelecer:

Para **k** $\in \mathbb{N}^*$ e **par**:

$\sqrt[k]{a} = b \Leftrightarrow a = b^k \wedge b \geq 0$

Exemplo

Consideremos novamente a equação vista no **penúltimo exemplo:**

$$\sqrt{2x+5} = x+1$$

Temos então:

$$\sqrt{2x+5} = x+1 \Leftrightarrow 2x+5 = (x+1)^2 \wedge x+1 \geq 0$$

Resolvendo a equação $2x + 5 = (x + 1)^2$ obtemos as raízes: x' = –2 e x" = 2. No entanto, apenas a raíz x" = 2 satisfaz à condição $x + 1 \geq 0$. Portanto, o conjunto-solução é:

$$S = \{2\}$$

7.4 – EQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b}$

Consideremos uma equação do tipo $\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b}$ onde **k** $\in \mathbb{N}^*$ e é **par**. Para a equação ter solução, devemos ter $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Supondo estas condições válidas devemos ter ainda a = b. Assim temos:

$\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b} \Leftrightarrow a = b \wedge a \geq 0$ $\quad k \in \mathbb{N}^* \quad$ k é par

ou então

$\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{b} \Leftrightarrow a = b \wedge b \geq 0$ $\quad k \in \mathbb{N}^* \quad$ k é par

Exemplo

Consideremos a equação: $\sqrt[6]{x^2+4x+3} = \sqrt[6]{x+1}$.

Temos: $\sqrt[6]{x^2+4x+3} = \sqrt[6]{x+1} \Leftrightarrow x^2+4x+3 = x+1 \wedge x+1 \geq 0$

Resolvendo a equação $x^2 + 4x + 3 = x + 1$ obtemos as raízes x' = –2 e x" = –1. Dessas duas raízes apenas x" = –1 satisfaz à condição $x + 1 \geq 0$. Portanto:

$$S = \{-1\}$$

Exercícios Resolvidos

7.1) Resolva as equações:

a) $\sqrt{x^2-16} = 0$ $\qquad$ b) $(x^2-3x-4)\cdot\sqrt{x^2-9} = 0$

Solução

a) $\sqrt{x^2-16} = 0 \Leftrightarrow x^2-16 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4$

V = {4, – 4}

b) $(x^2-3x-4)\cdot\sqrt{x^2-9} = 0 \Leftrightarrow (x^2-3x-4 = 0 \vee x^2-9 = 0) \wedge x^2-9 \geq 0$

$\left[\begin{array}{l}\text{A equação } x^2-3x-4 = 0 \text{ tem raízes } -1 \text{ e } 4\\ \text{A equação } x^2-9 = 0 \text{ tem raízes } 3 \text{ e } -3\end{array}\right.$

Antes de aceitar estas raízes devemos ver se satisfazem a condição $x^2 - 9 \geq 0$. Fazendo a verificação observamos que a única que não satisfaz é –1.

Assim:

$$V = \{4; 3; -3\}$$

7.2) Resolva as equações:

a) $\sqrt[3]{3x+4} = 4$ $\qquad$ b) $\sqrt{x+6} + 2x = 9$

Solução

a) $\sqrt[3]{3x+4} = 4 \Leftrightarrow 3x+4 = 4^3 \Leftrightarrow 3x = 60 \Leftrightarrow x = 20$

V = {20}

b) **1º modo**

$\sqrt{x+6} + 2x = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = 9-2x$

Elevando ao quadrado os dois membros desta última equação obtemos:

$$x + 6 = (9 - 2x)^2$$

que resolvida nos dá as raízes 3 e $\frac{25}{4}$

Façamos a verificação:

$x = 3 \left\{\begin{array}{l}\sqrt{x+6} = 9-2x\\ \sqrt{3+6} = 9-2(3) \text{ (verdade)}\end{array}\right.$

$x = \frac{25}{4} \left\{\begin{array}{l}\sqrt{x+6} = 9-2x\\ \sqrt{\frac{25}{4}+6} = 9-2\left(\frac{25}{4}\right) \text{ (falso)}\end{array}\right.$

Portanto, $\frac{25}{4}$ não convém e assim: V = {3}

2º modo

$\sqrt{x+6} = 9-2x \Leftrightarrow (x+6) = (9-2x)^2 \wedge 9-2x \geq 0$

Resolvendo a equação $x + 6 = (9 - 2x)^2$ obtemos as raízes 3 e $\frac{25}{4}$.

Destas, apenas o número 3 satisfaz à condição $9 - 2x \geq 0$. Assim:

$$V = \{3\}$$

7.3) Resolva as equações:

a) $\sqrt{x+23} - \sqrt{x+16} = 1$ $\qquad$ b) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+9}$

Solução

a) Para que as raízes sejam reais, temos as seguintes condições:

$$(I)\ \begin{cases} x+23 \ge 0 \\ x+16 \ge 0 \end{cases}$$

Supondo estas condições válidas, antes de elevar ao quadrado é preferível deixar um radical de cada lado (quando possível):

$\sqrt{x+23} - \sqrt{x+16} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+23} = 1 + \sqrt{x+16}$

Elevando ao quadrado os dois membros:

$(\sqrt{x+23})^2 = (1+\sqrt{x+16})^2$

$x+23 = 1 + 2\sqrt{x+16} + x + 16$

$\sqrt{x+16} = 3 \Leftrightarrow x+16 = 3^2 \Leftrightarrow x = -7$

O número −7 satisfaz às condições (I) e fazendo a verificação na equação original, verificamos que −7 é raiz.

$$V = \{-7\}$$

b) Devemos ter:

$$(I)\ \begin{cases} 2x+3 \ge 0 \\ 3x+4 \ge 0 \\ 5x+9 \ge 0 \end{cases}$$

Supondo válidas estas condições, temos:

$(\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4})^2 = (\sqrt{5x+9})^2$

$2x+3+2\sqrt{2x+3}\ \sqrt{3x+4} + 3x+4 = 5x+9$

$\sqrt{(2x+3)(3x+4)} = 1$

$(2x+3)(3x+4) = 1$

$6x^2 + 17x + 11 = 0$

Esta última equação tem raízes: −1 e $-\frac{11}{6}$.

Destes dois números, apenas −1 satisfaz às condições (I)
Fazendo a substituição, observamos que −1 satisfaz à equação original:

$$V = \{-1\}$$

7.4) Resolva a equação: $\frac{6}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}} = 3$

Solução

Antes de tudo, vamos impor:

$$(I)\ \begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-4 \ge 0 \end{cases}$$

Supondo estas condições válidas, e lembrando que: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, vamos tomar para denominador comum o produto:

$(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4})(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}) = (x-1)-(x-4) = 3$

Multiplicando todos os termos pelo denominador comum, temos:

$6(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}) + 1(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}) = 3(3)$

$6\sqrt{x-1} - 6\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x-4} = 9$

$7\sqrt{x-1} - 5\sqrt{x-4} = 9$

$7\sqrt{x-1} = 9 + 5\sqrt{x-4}$

Elevando ao quadrado:

$49(x-1) = 81 + 25(x-4) + 2(9)(5\sqrt{x-4})$

$49x - 49 = 81 + 25x - 100 + 90\sqrt{x-4}$

$24x - 30 = 90\sqrt{x-4}$

$4x - 5 = 15\sqrt{x-4}$

Elevando novamente ao quadrado:

$16x^2 - 40x + 25 = 225(x-4)$

$16x^2 - 40x + 25 = 225x - 900$

$16x^2 - 265x + 925 = 0$

$\Delta = 265^2 - 4(16)(925) = 11025$

$(\sqrt{\Delta} = 105)$

$$x = \frac{265 \pm 105}{32} \begin{cases} x' = \frac{185}{16} \\ x'' = 5 \end{cases}$$

As duas raízes satisfazem às condições (I).

Portanto: $V = \left\{\frac{185}{16};\ 5\right\}$

Exercícios Propostos

7.5) Resolva as equações:

a) $\sqrt{x^2+x-20} = 0$

b) $\sqrt[3]{x^2+7x} = 0$

c) $\sqrt{3x-12x} + \sqrt{x^2-16} = 0$

7.6) Resolva as equações:

a) $\sqrt{7x+14} = x+2$

b) $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x+1}$

c) $\sqrt{2x-7} - \sqrt{x-4} = 1$

d) $\sqrt{5x+21} - 2 = \sqrt{x+13}$

7.7) Resolva a equação: $\sqrt{\frac{2x}{1-3x}} + \sqrt{\frac{1-3x}{2x}} = \frac{13}{6}$.

(Sugestão: faça $\sqrt{\dfrac{2x}{1-3x}} = y$ e $\sqrt{\dfrac{1-3x}{2x}} = \dfrac{1}{y}$)

7.8) Resolva as equações:

a) $\dfrac{1}{1+\sqrt{6-x}} + \dfrac{1}{1-\sqrt{6-x}} = -1$ b) $\sqrt{x+1+\sqrt{2x+2}} = 2$

7.9) Resolva as equações:

a) $\sqrt[4]{252+\sqrt[3]{x^2+39}} = 4$ b) $\sqrt[3]{x^2-1} = x-1$

7.5 – INEQUAÇÕES IRRACIONAIS

Inequações irracionais são inequações em que a variável aparece sob radical. De modo geral, para resolver uma inequação irracional, a idéia é elevar os dois membros a uma potência conveniente para "eliminar" os radicais. No entanto, neste momento, devemos nos lembrar das propriedades P_{11} e P_{12} vistas no item 4.6 do capítulo 4:

P_{11}: Para $n \in \mathbb{N}$ e **ímpar**, $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ quaisquer que sejam os reais a e b.

P_{12}: Para $n \in \mathbb{N}^*$ e **par**, $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ quaisquer que sejam a e b pertencentes a $\mathbb{R}_+$.

Em outras palavras, quando elevamos os dois membros de uma desigualdade do tipo $a > b$ a um expoente ímpar, a nova desigualdade é equivalente à original; no entanto, se elevarmos a expoente par (não-nulo), a desigualdade só é válida se a e b pertencerem a $\mathbb{R}_+$.

Assim, quando o radical for de índice ímpar, podemos elevar os dois membros ao expoente ímpar em questão e com certeza a nova desigualdade será equivalente à anterior. A dificuldade aparece, portanto, nas inequações envolvendo radicais de índice par. São estes casos que necessitarão uma análise mais detalhada. Porém, antes de analisá-los, veremos alguns casos que não exigem nenhum método especial.

Exercícios Resolvidos

7.10) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x^2-5x+4} > 0$ e) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} > 0$

b) $\sqrt{x^2-5x+4} \geq 0$ f) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} \geq 0$

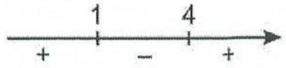
c) $\sqrt{x^2-5x+4} < 0$ g) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} < 0$

d) $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 0$ h) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} \leq 0$

Solução

a) Para a existência da raiz devemos ter: $x^2 - 5x + 4 \geq 0$. Lembrando que para todo $a \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{a} \geq 0$, temos:

$\sqrt{x^2-5x+4} > 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4 > 0$



O trinômio apresenta raízes 1 e 4.
Assim, temos $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$

b) $\sqrt{x^2-5x+4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$$

c) A expressão $\sqrt{x^2-5x+4}$ nunca poderá ser negativa. Assim, $V = \varnothing$.

d) Como a expressão $\sqrt{x^2-5x+4}$ não pode ser negativa, a sentença $\sqrt{x^2-5x+4} \leq 0$ só é verdadeira se $x^2 - 5x + 4 = 0$. Assim:

$$V = \{1; 4\}$$

e) Como neste caso o índice da raiz é Ímpar, temos:

$\sqrt[3]{x^2-5x+4} > 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4 > 0$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 4\}$$

f) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4 \geq 0$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4\}$$

g) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} < 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 4$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$$

h) $\sqrt[3]{x^2-5x+4} \leq 0 \Leftrightarrow x^2-5x+4 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$$

7.11) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{(x-1)^2} > 3$

b) $\sqrt{x^2-6x+9} < 2$

Solução

a) Lembrando que, para todo $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$, temos: $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$
Assim:

$\sqrt{(x-1)^2} > 3 \Leftrightarrow |x-1| > 3 \Leftrightarrow x-1 > 3 \text{ ou } x-1 < 3 \Leftrightarrow x > 4 \text{ou } x < -2$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ ou } x < -2\}$$

b) $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
Portanto $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$ Então :

$$\sqrt{x^2-6x+9} < 2 \Leftrightarrow |x-3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

$$V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$$

7.12) Resolva a inequação: $\dfrac{x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-3x-10}} \geq 0$

Solução

A expressão $\sqrt{x^2-3x-10}$ resulta um número real desde que $x^2 - 3x - 10 \geq 0$.

Por outro lado, satisfeita esta condição, teremos $\sqrt{x^2-3x-10} \geq 0$.

Mas como o radical aparece no denominador, devemos ter $\sqrt{x^2-3x-10} > 0$.

Temos então:

$$\frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x^2-3x-10}} \geq 0 \Leftrightarrow x^2+3x-4 \geq 0 \text{ e } x^2+3x-10 > 0.$$

Seja S_1 o conjunto-solução de $x^2+3x-4 \geq 0$.

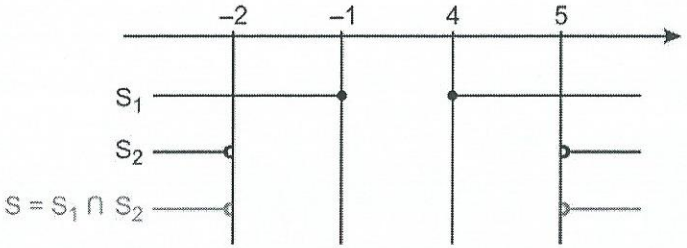
$x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ ou $x=-1$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 4\}$

Seja S_2 o conjunto-solução de $x^2-3x-10 > 0$.

$x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x=5$ ou $x=-2$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$



O conjunto-solução da inequação proposta é $S = S_1 \cap S_2$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$$

7.13) Resolva a inequação: $x^2+\sqrt{x-3} \leq 3x+10+\sqrt{x-3}$

Solução

Para que a expressão $\sqrt{x-3}$ exista (dentro dos reais) devemos impor $x - 3 \geq 0$; desde que exista, a inequação proposta será equivalente a $x^2 \leq 3x + 10$:

$$x^2+\sqrt{x-3} \leq 3x+10+\sqrt{x-3} \Leftrightarrow x^2 \leq 3x+10 \wedge x-3 \geq 0$$

Seja S_1 o conjunto-solução de $x^2 \leq 3x+10$

$x^2 \leq 3x+10 \Leftrightarrow x^2-3x-10 \leq 0$

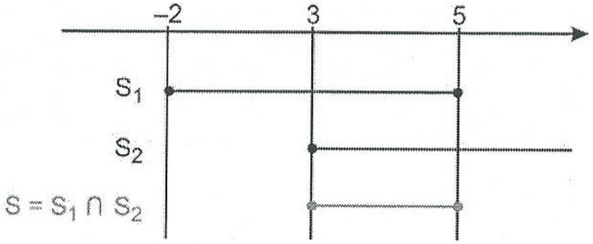
$x^2-3x-10=0 \Leftrightarrow x=-2$ ou $x=5$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$

Seja S_2 o conjunto-solução de $x-3 \geq 0$.

$x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$



Assim, o conjunto-solução da inequação será $S = S_1 \cap S_2$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x \leq 5\}$$

7.14) Resolva a inequação: $x-2 < \sqrt[3]{x^3-2x}$.

Solução

Como neste caso o índice do radical é ímpar, temos:

$$x-2 < \sqrt[3]{x^3-2x} \Leftrightarrow (x-2)^3 < x^3-2x \Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8 < x^3-2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -6x^2+14x-8 < 0 \Leftrightarrow -3x^2+7x-4 < 0$$

$$-3x^2+7x-4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } x=\frac{4}{3}$$

Como queremos $-3x^2 + 7x - 4 < 0$, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > \frac{4}{3}\right\}$$

Exercícios Propostos

7.15) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x-4} > 0$

b) $\sqrt{x-4} \geq 0$

c) $\sqrt{x-4} < 0$

d) $\sqrt{x-4} \leq 0$

e) $\sqrt[5]{x-4} > 0$

f) $\sqrt[5]{x-4} \geq 0$

g) $\sqrt[5]{x-4} < 0$

h) $\sqrt[5]{x-4} \leq 0$

7.16) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{(x-5)^2} \geq 6$

b) $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} < 8$

7.17) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{25 - x^2} + x^2 \geq 5x - 6 + \sqrt{25 - x^2}$

b) $\sqrt{36 - x^2} \cdot (x^2 - 4x - 21) \leq 0$

c) $\dfrac{x^2 - 4x - 21}{\sqrt{36 - x^2}} \leq 0$

7.18) Resolva as inequações:

a) $\sqrt[5]{x-8} > 2$

b) $\sqrt[5]{7x-9} < 5$

c) $2x + 1 > \sqrt[3]{8x^3 + 4x + 11}$

7.6 – INEQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt{a} < b$

Consideremos uma inequação do tipo $\sqrt{a} < b$. Para a existência da raiz devemos impor: $a \geq 0$. Por outro lado sabemos que $\sqrt{a} \geq 0$ (desde que $a \geq 0$) e portanto b deve ser positivo. Temos então:

$$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow \begin{cases} a < b^2 \\ \text{e} \\ a \geq 0 \\ \text{e} \\ b > 0 \end{cases}$$

Temos também:

$$\sqrt{a} \leq b \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq b^2 \\ \text{e} \\ a \geq 0 \\ \text{e} \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

7.19) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x^2 + 3x} < 2$

b) $\sqrt{2x^2 - x - 11} < x - 1$

c) $\sqrt{2x^2 - x - 11} \leq x - 1$

Solução

a) Aqui temos 2 > 0 e portanto:

$$\sqrt{x^2 + 3x} < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x < 2^2 \\ x^2 + 3x \geq 0 \end{cases}$$

Seja S_1 o conjunto-solução de $x^2 + 3x < 2^2$

$x^2 + 3x < 2^2 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 < 0$

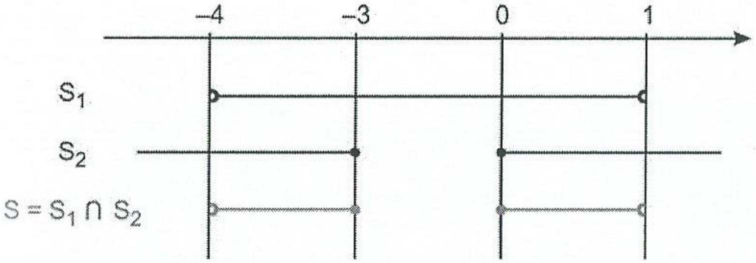
$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ ou $x = 1$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1\}$

Seja S_2 o conjunto-solução de $x^2 + 3x \geq 0$

$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -3$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 0\}$



O conjunto-solução da inequação proposta é $S = S_1 \cap S_2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq -3 \text{ ou } 0 \leq x < 1\}$

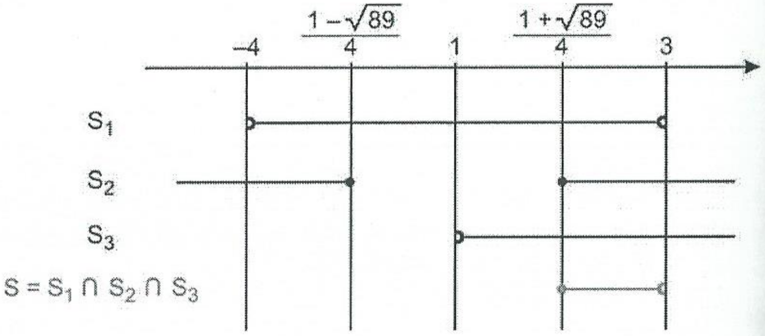
b)

$$\sqrt{2x^2 - x - 11} < x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 11 < (x-1)^2 \\ \wedge \\ 2x^2 - x - 11 \geq 0 \\ \wedge \\ x - 1 > 0 \end{cases}$$

Seja S_1 o conjunto-solução de $2x^2 - x - 11 < (x-1)^2$
Resolvendo esta inequação obtemos:
$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 3\}$

Seja S_2 o conjunto-solução de $2x^2 - x - 11 \geq 0$.
Resolvendo esta inequação, obtemos:
$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1-\sqrt{89}}{4} \text{ ou } x \geq \frac{1+\sqrt{89}}{4}\right\}$

Seja S_3 o conjunto-solução de $x - 1 > 0$
$x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+\sqrt{89}}{4} \leq x < 3\right\}$$

c)

$$\sqrt{2x^2 - x - 11} \leq x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 11 \leq (x-1)^2 \; (S_1) \\ \wedge \\ 2x^2 - x - 11 \geq 0 \quad (S_2) \\ \wedge \\ x - 1 \geq 0 \quad (S_3) \end{cases}$$

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 3\}$

$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1-\sqrt{89}}{4} \text{ ou } x \geq \frac{1+\sqrt{89}}{4}\right\}$

$S_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

$S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+\sqrt{89}}{4} \leq x \leq 3\right\}$

Exercícios Propostos

7.20) Resolva as inequações:
a) $\sqrt{x^2 - 7x} < 2\sqrt{2}$ b) $\sqrt{6} > \sqrt{x^2 - x}$

7.21) Resolva as inequações:
a) $\sqrt{2x^2 - 2x - 20} < x - 2$ b) $2x - 3 > \sqrt{x - 1}$

7.7 – INEQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt{a} > \sqrt{b}$

Aqui devemos ter $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $a > b$. Assim:

$$\sqrt{a} > \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a > b \\ \wedge \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Do mesmo modo temos:

$$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b \\ \wedge \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

7.22) Resolva as inequações:
a) $\sqrt{3x - 1} > \sqrt{x + 10}$ b) $\sqrt{4x + 1} > \sqrt{-x + 5}$

Solução

a) $$\sqrt{3x - 1} > \sqrt{x + 10} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 > x + 10 \quad (S_1) \\ \wedge \\ x + 10 \geq 0 \quad (S_2) \end{cases}$$

$3x - 1 > x + 10 \Leftrightarrow x > \frac{11}{2}$ $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{2}\right\}$

$x + 10 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -10$ $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -10\}$

O conjunto-solução S da inequação proposta é dado por: $S = S_1 \cap S_2$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{11}{2}\right\}$$

b) $$\sqrt{4x-1} > \sqrt{-x+5} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+1 > -x+5 & (S_1) \\ \wedge \\ -x+5 \geq 0 & (S_2) \end{cases}$$

$4x+1 > -x+5 \Leftrightarrow x > \frac{4}{5}$ $\qquad S_1 = \left]\frac{4}{5}; +\infty\right[$

$-x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$ $\qquad S_2 =]-\infty; 5]$

$S = S_1 \cap S_2 = \left]\frac{4}{5}; 5\right]$

Exercício Proposto

7.23) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{3+8} \geq \sqrt{5x-1}$ $\qquad$ c) $\sqrt{x^2+3x} > \sqrt{8+10x}$

b) $\sqrt{x-7} > \sqrt{-x+3}$ $\qquad$ d) $\sqrt{x-8} < \sqrt{4x-1}$

7.8 – INEQUAÇÕES DO TIPO $\sqrt{a} > b$

Neste caso, em primeiro lugar, devemos ter $a \geq 0$. Satisfeita esta condição, $\sqrt{a} \geq 0$. Assim, se por exemplo b for negativo, a inequação estará automaticamente satisfeita. Se $b \geq 0$, teremos $a > b^2$. Em resumo:

$$\sqrt{a} > b \Leftrightarrow \begin{cases} a > b^2 \text{ e } b \geq 0 \\ \text{ou} \\ a \geq 0 \text{ e } b < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq b^2 \text{ e } b \geq 0 \\ \text{ou} \\ a \geq 0 \text{ e } b \leq 0 \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

7.24) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x-3} > -5$ $\qquad$ b) $\sqrt{x-3} > 0$ $\qquad$ c) $\sqrt{x-3} > 4$

Solução

a) Desde que $\sqrt{x-3}$ seja real, teremos $\sqrt{x-3} \geq 0$ e portanto, desde que $\sqrt{x-3}$ seja real, a sentença aberta $\sqrt{x-3} > -5$ será verdadeira. Portanto:

$\sqrt{x-3} > -5 \Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ $\qquad V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

b) $\sqrt{x-3} > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ $\qquad V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $\sqrt{x-3} > 4 \Leftrightarrow x-3 > 4^2 \Leftrightarrow x > 19$ $\qquad V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 19\}$

7.25) Resolva a inequação $\sqrt{2x^2-8x-17} > x-2$.

Solução

$$\sqrt{2x^2-8x-17} > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-8x-17 > (x-2)^2 \text{ e } x-2 \geq 0 & (S_1) \\ \text{ou} \\ 2x^2-8x-17 \geq 0 \text{ e } x-2 < 0 & (S_2) \end{cases}$$

Seja V_1 o conjunto-verdade de $2x^2-8x-17 > (x-2)^2$

Fazendo os cálculos, obtemos: $V_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 7\}$

Seja V_2 o conjunto-verdade de $x-2 \geq 0$. Temos: $V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

Seja V_3 o conjunto-verdade de $2x^2-8x-17 > 0$. Obtemos:

$$V_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4-5\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x \geq \frac{4+5\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Sendo V_4 o conjunto-verdade de $x-2 < 0$ temos: $V_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

$S_1 = V_1 \cap V_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

$$S_2 = V_3 \cap V_4 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4-5\sqrt{2}}{2}\right\}$$

O conjunto-solução S é dado por:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{4-5\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x > 7\right\}$$

Exercícios Propostos

7.26) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{x^2-4x} > -3$

b) $\sqrt{x^2-4x} > 0$

c) $\sqrt{x^2-4x} > 2\sqrt{3}$

7.27) Resolva as inequações:

a) $\sqrt{2x^2+9x-1} > x+3$

b) $\sqrt{6x+19} > x+2$

7.9 – EXPRESSÕES DO TIPO $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$

Sendo a e b dois números **racionais** tais que b > 0, consideremos a expressão:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}$$

onde $a+\sqrt{b} > 0$.

Em certos casos pode-se fazer a transformação:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{r}+\sqrt{s}$$

onde r e s são números **racionais** positivos.

Analogamente, dada a expressão $\sqrt{a-\sqrt{b}}$, com $a-\sqrt{b} > 0$, em certos casos pode-se fazer a transformação $\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{r}-\sqrt{s}$ com r e s racionais positivos.

Antes de estudar o caso geral, vejamos alguns exemplos.

Exemplos

Consideremos a expressão $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ e suponhamos que existam dois números racionais positivos r e s, tais que:

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{r}+\sqrt{s}$$

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{r}+\sqrt{s} \Leftrightarrow 5+\sqrt{21} = (\sqrt{r}+\sqrt{s})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5+\sqrt{21} = r+2\sqrt{r}\sqrt{s}+s \Leftrightarrow 5+\sqrt{21} = r+s+2\sqrt{rs} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5+\sqrt{21} = r+s+\sqrt{4rs}$$

Para que esta última igualdade seja válida, devemos ter:

$$\begin{cases} r+s=5 \\ 4rs=21 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} r+s=5 \\ rs=\frac{21}{4} \end{cases}$$

Lembrando das relações de Girard para uma equação do segundo grau (ver capítulo 3, item 3.11) concluímos que r e s devem ser raízes da seguinte equação:

$$x^2-5x+\frac{21}{4}=0$$

Esta última equação tem raízes: $\frac{7}{2}$ e $\frac{3}{2}$

Portanto, temos:

$$r=\frac{7}{2} \text{ e } s=\frac{3}{2}$$

ou então $r=\frac{3}{2}$ e $s=\frac{7}{2}$, o que dá no mesmo.

Assim:

$$\sqrt{5+\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{2}}+\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Consideremos agora a possibilidade da transformação, no caso geral.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{r}+\sqrt{s}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{r}+\sqrt{s} \Leftrightarrow a+\sqrt{b} = r+2\sqrt{r}\sqrt{s}+s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+\sqrt{b} = r+s+\sqrt{4rs} \Leftrightarrow a=r+s \text{ e } 4rs=b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r+s=a \text{ e } rs=\frac{b}{4}$$

Então, os valores de r e s devem ser as raízes da equação do segundo grau:

$$x^2-ax+\frac{b}{4}=0$$

O discriminante desta equação é:

$$\Delta = a^2-4\left(\frac{b}{4}\right) = a^2-b$$

e as raízes serão das por:

$$x=\frac{a\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-b}}{2}$$

Portanto, para que as raízes da equação $x^2-ax+\frac{b}{4}=0$ sejam **racionais**, é necessário que $\sqrt{a^2-b}$ seja racional. Suponhamos então que $c=\sqrt{a^2-b}$ seja racional. Temos:

$$x=\frac{a\pm c}{2}$$

Assim: $r=\frac{a+c}{2}$ e $s=\frac{a-c}{2}$

e portanto:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

Em resumo:

Sejam **a** e **b** racionais, tais que

$b>0$ e $a+\sqrt{b}>0$,

Desde que $c=\sqrt{a^2-b}$ seja **racional**, temos:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

De modo análogo, concluímos que:

> Sejam **a** e **b** racionais, com
> $$b > 0 \text{ e } a - \sqrt{b} > 0,$$
> Desde que $c = \sqrt{a^2 - b}$ seja **racional**, temos:
> $$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

É importante então observar que a transformação não é possível se $\sqrt{a^2 - b}$ **não for racional**.

Exercícios Resolvidos

7.28) Transforme $\sqrt{6+\sqrt{11}}$ na soma $\sqrt{r}+\sqrt{s}$ onde r e s são racionais.

Solução

Poderíamos fazer essa transformação como no primeiro exemplo deste item. No entanto vamos fazer uso da fórmula deduzida.

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \text{ onde } c = \sqrt{a^2 - b}$$

temos: $\begin{cases} a = 6 \\ b = 11 \end{cases}$ e $c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{36 - 11} = 5$

Como 5 é racional, a transformação é possível:

$$\sqrt{6+\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{6+5}{2}} + \sqrt{\frac{6-5}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

7.29) Determine os números racionais x e y tais que:

$$\sqrt{8+\sqrt{61}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Solução

temos: $\begin{cases} a = 8 \\ b = 61 \end{cases}$ e $c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{64 - 61} = \sqrt{3}$

Como $\sqrt{3}$ não é racional, a transformação não é possível.

7.30) Determine os números racionais x e y tais que:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$$

Solução

Temos $2\sqrt{10} = \sqrt{4(10)} = \sqrt{40}$ e assim: $\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{7-\sqrt{40}}$

temos: $\begin{cases} a = 7 \\ b = 40 \end{cases}$ e $c = \sqrt{a^2 - b} = \sqrt{49 - 40} = \sqrt{9} = 3$

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{7-\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} - \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

7.31) Determine os números racionais x e y tais que:

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = x + \sqrt{y}$$

Solução

Neste caso temos radical de índice 3 e portanto não vale a fórmula. Supondo então y > 0, temos:

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = x + \sqrt{y} \Leftrightarrow 7+5\sqrt{2} = (x+\sqrt{y})^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7+5\sqrt{2} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3x\sqrt{y^2} + \sqrt{y^3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7+5\sqrt{2} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7+5\sqrt{2} = (x^3+3xy) + (3x^2+y)\sqrt{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3xy = 7 \\ 3x^2 + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos y = 2 e x = 1

Assim:

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$$

Exercícios Propostos

7.32) Determine os números racionais x e y tais que as igualdades abaixo sejam verdadeiras.

a) $\sqrt{9+\sqrt{17}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

b) $\sqrt{9+\sqrt{80}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

c) $\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

d) $\sqrt{8-\sqrt{15}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

e) $\sqrt{\frac{21}{4} - \sqrt{3}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

f) $\sqrt{6-\sqrt{2}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

7.33) Efetue, se possível, a transformação:

$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = a + \sqrt{b}$

onde a e b são racionais.

Exercícios Suplementares

IV.1) Resolva a equação: $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1}-\sqrt{x}=4$

IV.2) Resolva a equação: $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$

IV.3) Resolva e discuta a equação: $\sqrt{x^2-mx}=x+m$

IV.4) Resolva a inequação: $\sqrt{(2x-3)(x+1)}<x-1$

IV.5) Resolva a inequação: $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}$

IV.6) Resolva a inequação: $x+2<\sqrt[3]{x^3+8}$

IV.7) Discuta, segundo os valores de a e de b, o número de raízes da equação.

$$x+\sqrt{a^2-x^2}=b;\ a>0 \text{ e } b>0$$

IV.8) Resolva a inequação: $\frac{x+1}{x-4}\cdot\sqrt{\frac{x+3}{1-x}}<0$

IV.9) Resolva a inequação: $\sqrt{x}-9\sqrt[4]{x}+18\geq 0$

IV.10) Resolva a inequação: $(1+x)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$

IV.11) Resolva a inequação: $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}$

IV.12) Considerem-se os números:

$$x_1=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$
$$x_2=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Calcule $x_1^2+x_2^2$ e $x_1\cdot x_2$. Deduza o valor de x_1+x_2.

IV.13) Verifique que $\sqrt{30-12\sqrt{6}}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

IV.14) Sendo a e b números racionais positivos, não quadrados perfeitos, com $a\neq b$, mostre que os números $s=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e $d=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ são irracionais.

Aplicação: Sendo A e B números racionais positivos, B não quadrado perfeito, que relação deve existir entre A e B para que se possa ter dois números racionais x e y tais que:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ ?$$

Calcule então x e y.

Simplifique: $\sqrt{31+12\sqrt{3}}$

PARTE V

Capítulo 8 – **A álgebra das funções**
Capítulo 9 – **Tipologia das funções**
– **Função inversa**

Capítulo

8

A álgebra das funções

8.1 – AS OPERAÇÕES DA ARITMÉTICA

Sejam as funções f e g *reais e de variável real.*

A tabela abaixo define quatro novas funções, obtidas a partir das funções f e g:

Nome da função	Notação	Domínio	Contradomínio	Sentença aberta que a define
soma	$f+g$	$D(f) \cap D(g)$	$\mathbb{R}$	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
diferença	$f-g$	$D(f) \cap D(g)$	$\mathbb{R}$	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
produto	$f \cdot g$	$D(f) \cap D(g)$	$\mathbb{R}$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
quociente	$\frac{f}{g}$	$D(f) \cap D(g)$ com $g(x) \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemplos

a) Sejam as funções f e g definidas por enumeração dos pares que as constituem:

$$f = \{(1; -1), (2; 2), (3; 2), (6; 7)\}$$

$$g = \{(1; 2), (2; 0), (3; 4), (9; 12), (20; 3)\}$$

Observe que $D(f) = \{1; 2; 3; 6\}$ e $D(g) = \{1; 2; 3; 9; 20\}$ e que $D(f) \cap D(g) = \{1; 2; 3\}$.

A *função soma* f + g tem domínio $D(f) \cap D(g) = \{1; 2; 3\}$, contradomínio $\mathbb{R}$ e:

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 2 = 1$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 2 + 0 = 2$$

$$(f+g)(3) = f(3) + g(3) = 2 + 4 = 6$$

Então:

$$f + g = \{(1; 1), (2; 2), (3; 6)\}$$

A *função diferença* f – g e a *função produto* $f \cdot g$ também têm domínio $D(f) \cap D(g) = \{1; 2; 3\}$, tem contradomínio $\mathbb{R}$ e:

$$f - g = \{(1; -3), (2; 2), (3; -2)\}$$

$$f \cdot g = \{(1; -2), (2; 0), (3; 8)\}$$

Observe que, por exemplo:

$$(f - g)(2) = f(2) - g(2) = 2 - 0 = 2$$
$$(f \,.\, g)(2) = f(2) \cdot g(2) = 2 \cdot 0 = 0$$

A *função quociente* $\frac{f}{g}$ tem domínio constituído pelos elementos x que pertencem ao conjunto D(f) ∩ D(g) tais que $g(x) \neq 0$; como $g(2) = 0$, tem-se:

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \{1; 3\} \text{ e } \frac{f}{g} = \left\{\left(1; -\frac{1}{2}\right), \left(3; \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Note que $\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ e $\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) Sejam as funções f e g definidas pelas sentenças abertas:

$$f(x) = x^2$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Então, D(f) = ℝ, D(g) = $\mathbb{R}_+$ e D(f) ∩ D(g) = $\mathbb{R}_+$

Daí, as funções f + g, f − g e f · g têm domínio $\mathbb{R}_+$, e são definidas, respectivamente, por:

$$(f + g)(x) = x^2 + \sqrt{x}$$
$$(f - g)(x) = x^2 - \sqrt{x}$$
$$(f \cdot g)(x) = x^2 \cdot \sqrt{x}$$

A função quociente $\frac{f}{g}$ tem domínio:

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \mid x \in D(f) \cap D(g) \wedge g(x) \neq 0\}$; então, $D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}_+^*$, e:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$$

Exercícios Resolvidos

8.1) Sejam as funções f e g definidas, respectivamente, por:

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$
$$g(x) = \sqrt{5 - x}$$

a) Determine D(f) e D(g).

b) Determine os domínios das funções f + g, f − g, f · g e $\frac{f}{g}$.

c) Dê as sentenças abertas que definem cada uma dessas funções.

Solução

a) D(f) = [2; +∞[e D(g) =]−∞; 5]

b) Como D(f) ∩ D(g) = [2; 5] tem-se:

$$D(f + g) = D(f - g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = [2; 5]$$

Todo elemento x que pertence ao domínio de $\frac{f}{g}$ é tal que:

$$x \in D(f) \cap D(g) \text{ e } g(x) \neq 0$$

Então, $D\left(\frac{f}{g}\right) = [2; 5[$

c) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{5 - x}$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x - 2} - \sqrt{5 - x}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{5 - x}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{5 - x}}$

8.2) Sejam as funções de ℝ em ℝ, f e g, definidas pelas sentenças abertas:

$$f(x) = |x|$$
$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Para as funções f + g, f − g, f · g e $\frac{f}{g}$:

a) determine os domínios.

b) dê as sentenças abertas que a definem.

c) desenhe os gráficos.

Solução

a) Observe que D(f) = D(g) = ℝ e então:

D(f + g) = D(f − g) = D(f · g) = D(f) ∩ D(g) = ℝ

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \mid x \in D(f) \cap D(g) \wedge g(x) \neq 0\}$, como $g(0) = 0$ tem-se:

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R}^*$

b) Como $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ vem:

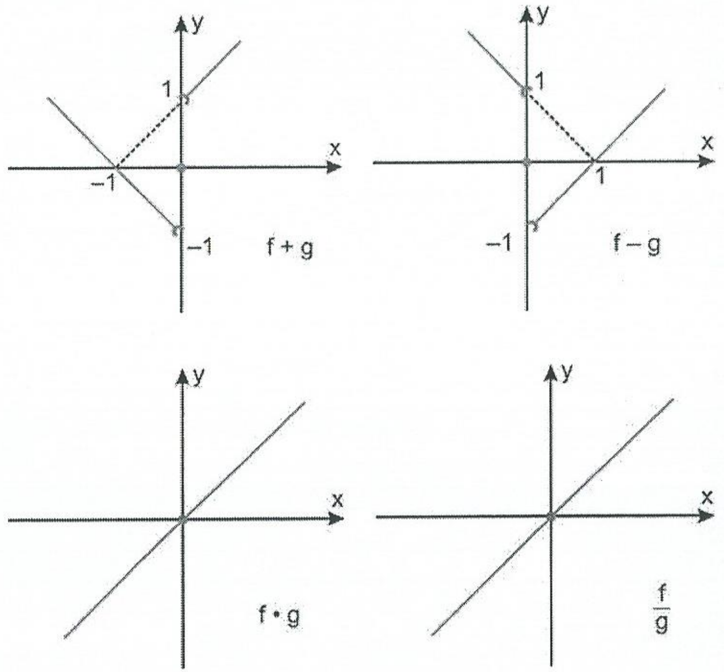
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -x - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\begin{cases}x-1,\ \text{se } x>0\\ 0,\ \text{se } x=0\\ -x+1,\ \text{se } x<0\end{cases}$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=\left.\begin{cases}x\cdot 1=x,\ \text{se } x>0\\ 0\cdot 0=0,\ \text{se } x=0\\ (-x)\cdot(-1)=x,\ \text{se } x<0\end{cases}\right\}=\text{ou seja},(f\cdot g)(x)=x$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\left.\begin{cases}\frac{x}{1}=x,\ \text{se } x>0\\ \frac{-x}{-1}=x,\ \text{se } x<0\end{cases}\right\}=\text{ou seja},\ \left(\frac{f}{g}\right)(x)=x,\ x\neq 0$$

c)



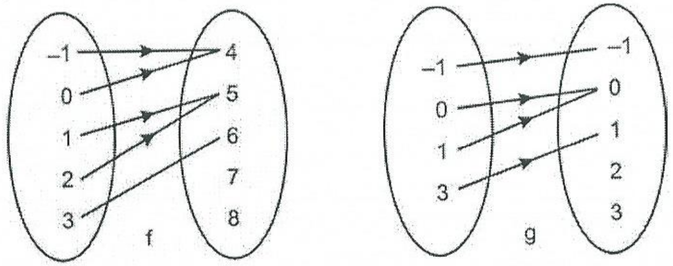
Exercícios Propostos

8.3) Sejam as funções f e g definidas por enumeração dos pares que as constituem:

$$f=\{(0;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 3),\ (3;\ 4),\ (4;\ 5)\}$$
$$g=\{(1;\ 2),\ (2;\ 3),\ (3;\ 0),\ (6;\ -1)\}$$

Determine as funções f + g, f − g, f · g e $\frac{f}{g}$.

8.4) Sejam as funções f e g definidas pelos "diagramas de flechas":



Determine, através de "diagramas de flechas" as funções f + g, f − g, f · g e $\frac{f}{g}$.

8.5) Sejam as funções f e g, reais e de variável real, definidas por:

$$f(x) = x$$
$$g(x) = x^2 - 1$$

Para as funções: f + g, f − g, g − f, g · f, $\frac{g}{f}$ e $\frac{f}{g}$, determine:

a) o domínio de cada uma delas
b) a sentença aberta que define cada uma delas

8.6) Sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = |x| \text{ (função módulo)}$$
$$g(x) = [x] \text{ (função maior inteiro)}$$

a) Obtenha os domínios das funções f + g, f − g, f · g e $\frac{f}{g}$, e as sentenças abertas que definem cada uma delas.
b) Desenhe os gráficos das funções f + g e f · g, para $x \in [-2;\ 2[$.

8.2 – COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Basicamente, a idéia da composição de funções é a de uma "reação em cadeia", em que as funções "atuam" uma após a outra.

Exemplos

a) É comum, em nosso dia-a-dia, vermos raciocínios como o seguinte: "o Imposto de Renda (IR) pago por um cidadão é 'função' do seu salário; o salário é 'função' do número de horas que ele trabalha. Diz-se, então, que o IR pago pelo cidadão é 'função' do número de horas que ele trabalha"
Raciocinemos mais claramente nesse exemplo.
Imagine que o cidadão A receba 50 reais por hora de trabalho.
Podemos considerar a "função":

$$s(t) = 50t \ (1)$$

que determina, em reais, o salário S do cidadão A quando ele trabalha um certo número t de horas.
Imagine que a Receita Federal adote a seguinte "fórmula" para obter o IR a pagar, a partir do salário s:

$$IR(s) = \frac{1}{6}(s - 300) \quad (2)$$

Se o cidadão A trabalha 60 horas, qual é o IR devido?
Inicialmente calculemos o seu salário (fórmula (1)):

$$s(60) = 50 \cdot 60 = 3000 \text{ (em reais)}$$

Em seguida, a partir do salário (3000 reais), calculemos o imposto a pagar (fórmula (2)):

$$IR(3000) = \frac{1}{6}(3000 - 300) = 450 \text{ (em reais)}$$

Observe que o IR a pagar é "função" das horas que o cidadão A trabalhou; para calculá-lo, *inicialmente* "aplicamos" a função s ao número 60; *em seguida*, ao resultado obtido, 3000, "aplicamos" a função IR, obtendo então o imposto devido.
Podemos sintetizar o cálculo, determinando uma única "função" (fórmula) que dá o imposto devido pelo cidadão A conhecendo-se o número de horas que ele trabalhou:

$$IR(s) = \frac{1}{6}(s - 300)$$

$$IR[s(t)] = \frac{1}{6}[s(t) - 300]$$

$$IR[s(t)] = \frac{1}{6}(50t - 300)$$

Então, o IR é "função" das horas de trabalho, dada pela "fórmula":

$$IR(t) = \frac{1}{6}(50t - 300) \quad (3)$$

Então, para as 60 horas que o cidadão A trabalhou, o IR devido pode ser calculado fazendo t = 60 na "fórmula" (3):

$$IR(60) = \frac{1}{6}(50 \cdot 60 - 300) \; 450 \text{ (em reais)}$$

b) Sejam as funções f e g definidas, respectivamente, pelas sentenças abertas:

$$f(x) = 9x$$

$$g(x) = \sqrt{x}$$

Note que $D(f) = \mathbb{R}$ e $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
Se $x \geq 0$, então $f(x) = 9x$ é *não-negativo*, isto é, $f(x) \geq 0$; logo, f(x) pertence ao domínio de g. Temos então:

$$g[f(x)] = \sqrt{f(x)} = \sqrt{9x} = 3\sqrt{x}$$

A sentença aberta:

$$g[f(x)] = 3\sqrt{x}$$

define uma nova função, que se denomina **composta de g com f**, e que se representa com $g \circ f$ (lê-se: "g bola f").
Observe que o domínio de f é $\mathbb{R}$, mas elementos desse domínio são excluídos para se obter o domínio de $g \circ f$: se x é negativo então f(x) é negativo e não existiria $g[f(x)] = \sqrt{f(x)}$.
Resumindo, o domínio de $g \circ f$ é constituído por todo x do domínio de f tal que f(x) está no domínio de g.
No nosso exemplo, $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

Definição

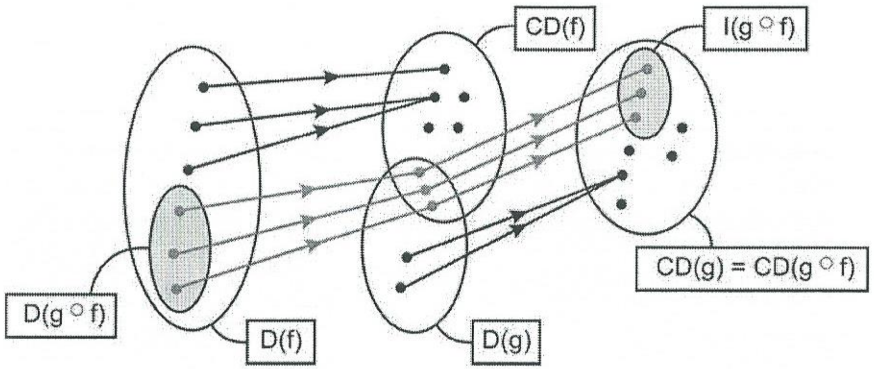
Dadas as funções g e f, $g \circ f$ é uma função que se diz **composta de g com f**, definida por:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

O domínio de $g \circ f$ é:

$$D(g \circ f) = \{x \mid x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)\}$$

Adotaremos $CD(g \circ f) = CD(g)$

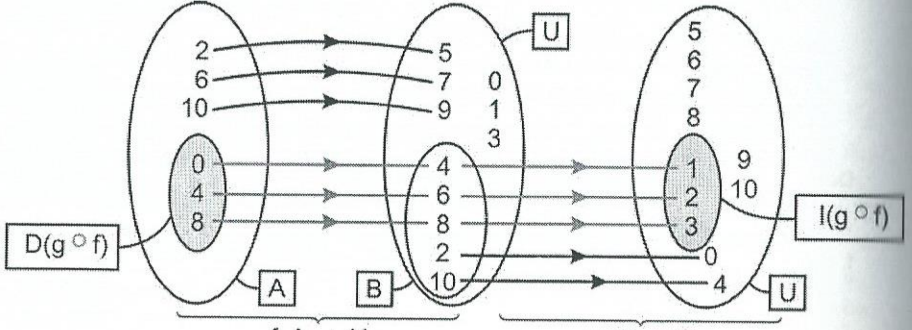


Exemplo

Sejam os conjuntos $U = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x \leq 10\}$,
A = {0; 2; 4; 6; 8; 10} e B = {2; 4; 6; 8; 10}. Consideremos as funções g e f definidas por:

$$\begin{cases} g: B \to U \\ g(x) = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f: A \to U \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$



$f: A \to U$ $\qquad$ $g: B \to U$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$

$g \circ f: \{0; 4; 8\} \to U$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x + 4] - 1 = \frac{1}{4}x + 1$

Para se obter a função g ○ f note que o conjunto: I(f) ∩ D(g) **não pode ser vazio.**

O domínio de g ○ f é um *subconjunto do domínio de f*, constituído pelos elementos cujas imagens (dadas por f) pertencem ao domínio de g. No exemplo, observe que:

$$I(f) = \{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$
$$D(g) = \{2; 4; 6; 8; 10\}$$
$$I(f) \cap D(g) = \{4; 6; 8\}$$
$$D(g \circ f) = \{0; 4; 8\}$$
$$I(g \circ f) = \{1; 2; 3\}$$
$$CD(g \circ f) = CD(g) = U \text{ (convenção)}$$

Note, uma vez mais, que os elementos do domínio de g ○ f são aqueles cujas imagens, dadas por f, pertencem ao conjunto: I(f) ∩ D(g); e, para que exista g ○ f, deve-se ter: I(f) ∩ D(g) ≠ ∅.

Observações

Não confunda a notação g ○ f com a notação g • f; note também que a grafia g ○ f está "às avessas": a **primeira** função que se aplica é f e a **segunda** é g.

Dadas as funções g e f, pode-se pensar em duas funções compostas, g ○ f e f ○ g, para as quais se tem, respectivamente:

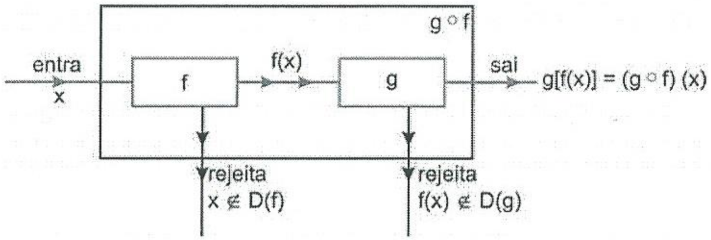
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

A composição de funções *não é uma operação comutativa*:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

Uma Representação Esquemática

Podemos ilustrar, com o esquema da figura abaixo todo o processo para se construir a função g ○ f, composta de f com g:



Exercícios Resolvidos

8.7) Sejam as funções f e g definidas pelos pares que as constituem:

$$f = \{(1; 2), (2; 5), (3; 6), (4; 0)\}$$
$$g = \{(2; 4), (5; 7), (6; 8), (-1; -3)\}$$

Obtenha a função g ○ f.

Solução

Calculamos: $(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g(2) = 4$

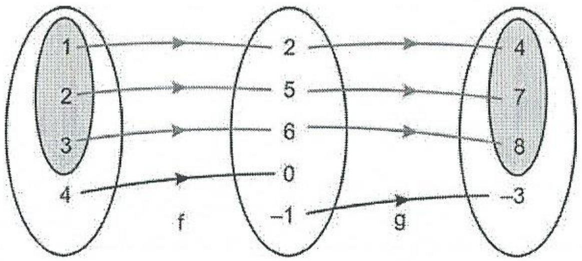
$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g(5) = 7$

$(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(6) = 8$

Note que 4 ∉ D(g ○ f), pois f(4) = 0 ∉ D(g).

Então:

$$g \circ f = \{(1; 4), (2; 7), (3; 8)\}$$



Observe que: $D(f) = \{1; 2; 3; 4\}$
$I(f) = \{2; 5; 6; 0\}$
$D(g) = \{2; 5; 6; -1\}$
$I(f) \cap D(g) = \{2; 5; 6\} \neq \varnothing$
$I(g) = \{4; 7; 8; -3\}$
$D(g \circ f) = \{1; 2; 3\}$
$I(g \circ f) = \{4; 7; 8\}$

8.8) Sejam as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

a) Determine D(f) e D(g).
b) Determine $D(g \circ f)$.
c) Dê a sentença aberta que define $g \circ f$.

Solução

a) Para o domínio da função f, deve-se ter $x \neq 1$:
$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; e, para o domínio da função g, deve-se ter $x \neq 0$:
$D(g) = \mathbb{R}^*$.

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ e $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)\}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \wedge \dfrac{x^2 - 4}{x - 1} \neq 0\}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \wedge 2 \wedge x \neq -2\}$

c) Se $x \neq 1$, $x \neq 2$ e $x \neq -2$:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\dfrac{x^2 - 4}{x - 1}} = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 4}$$

8.9) Sejam as funções f e g definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$g(x) = x^3$$

Para as funções $g \circ f$ e $f \circ g$, determine:
a) o domínio.
b) a sentença aberta que define cada uma delas.

Solução

Note que $D(f) = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e $D(g) = \mathbb{R}$

a) $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D(f) \wedge f(x) \in D(g)\}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \wedge x^3 \in \mathbb{R}$ ← satisfeita para todo x

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D(g) \wedge g(x) \in D(f)\}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \wedge x^3 \geq 0 \}$

A inequação $x^3 \geq 0$ nos dá $x \geq 0$, e daí:

$$D(f \circ g)\ \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = \mathbb{R}_+$$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^3 = (\sqrt{x})^3$

$$(g \circ f)(x) = (\sqrt{x})^3$$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^3}$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x^3}$$

Note que para todo $x \geq 0$ tem-se $(\sqrt{x})^3 = \sqrt{x^3}$; então como $D(g \circ f) = D(f \circ g)$, e como por convenção $CD(g \circ f) = CD(f \circ g)$ tem-se $g \circ f = f \circ g$.

8.10) Sejam as funções reais e de variável real definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = x^2$$

a) Determine $(g \circ f)(1)$ e $(f \circ g)(2)$.
b) Determine $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$.

Solução

a) $(g \circ f)(1) = g[f(1)] = g(1) = 1^2 = 1$
$(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(4) = 2$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] =$

$$= \begin{cases} g(x), & \text{se } g(x) \leq 1 \\ 2, & \text{se } g(x) > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & \text{se } x^2 \leq 1 \\ 2, & \text{se } x^2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x < -1 \text{ ou } x > 1 \end{cases}$$

Então:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leq 1 \\ 4, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

8.11) Se $f(x) = x + 2$, determine a sentença aberta que define uma função g tal que $(f \circ g)(x) = x$.

Solução

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = g(x) + 2$

Como $g(x) + 2 = x$, tem-se $g(x) = x - 2$.

8.12) Dadas as funções definidas por $f(x) = 3x$, $g(x) = (x - 1)^2$ e $h(x) = x + 2$, determine $[(h \circ f) \circ g](2)$.

Solução

$[(h \circ f) \circ g](2) = h\{f[g(2)]\}$

$[(h \circ f) \circ g](2) = h\{f[1]\}$

$[(h \circ f) \circ g](2) = h\{3\}$

$[(h \circ f) \circ g](2) = 5$

8.13) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = 5x - 3$ e $g(x) = 2x + k$. Determine **k** para que $f \circ g = g \circ f$.

Solução

Note que $f \circ g$ e $g \circ f$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, pois f e g o são. Então, para que $f \circ g = g \circ f$ deve-se ter $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$:

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = 5g(x) - 3 = 5(2x + k) - 3 = 10x + 5k - 3$

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = 2f(x) + k = 2(5x - 3) + k = 10x - 6 + k$

Então, deve-se ter: $5k - 3 = -6 + k$ e daí $k = -\dfrac{3}{4}$.

8.14) Se $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$ determine: $f\{f[f(x)]\}$

Solução

Começamos calculando $f[f(x)]$:

$$f[f(x)] = \frac{f(x)-1}{f(x)} = \frac{\frac{x-1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1}$$

Agora,

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)]-1}{f[f(x)]} = \frac{\frac{-1}{x-1}-1}{\frac{-1}{x-1}} = \frac{-1-x+1}{-1} = x$$

Então: $f\{f[f(x)]\} = x$

8.15) Determine: $f(x)$ se $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$.

Solução

Fazendo $x + 1 = y$, e daí $x = y - 1$, tem-se:

$f(y) = (y - 1)^2 - 3(y - 1) + 2$

$f(y) = y^2 - 5y + 6 \quad (1)$

Em (1), substituindo-se y por x:

$f(x) = x^2 - 5x + 6$

8.16)

> Seja f uma *função real de variável real*, de domínio A, para a qual: se $x \in A$, então $-x \in A$.
>
> Se para todo x de A se tem $f(-x) = f(x)$, f diz-se PAR.
>
> Se para todo x de A se tem $f(-x) = -f(x)$, f diz-se ÍMPAR.

Para as funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas pelas sentenças abaixo, diga qual é par e qual é ímpar:

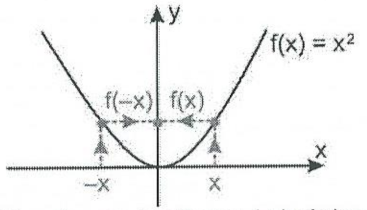
a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = x^2 + x$

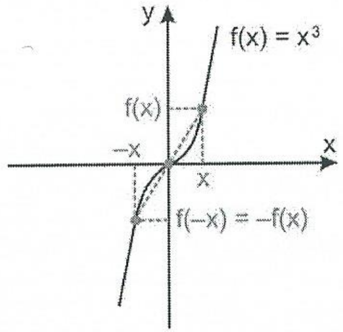
Solução

a) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: par



Note que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo Oy.

b) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$: ímpar



Note que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano.

c) $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \begin{cases} \neq f(x): \text{não é par} \\ \neq -f(x) = -x^2 - x: \text{não é ímpar} \end{cases}$

Essa função não se classifica segundo o critério par ou ímpar.

Exercícios Propostos

8.17) Sejam as funções f e g definidas pelos pares que as constituem:

$$f = \{(1; 2), (2; 1), (3; 4), (4; 6)\}$$
$$g = \{(2; 4), (3; 5), (5; 6)\}$$

Determine a função $g \circ f$.

8.18) Sejam as funções f e g definidas por:

$$f(x) = (x - 1)^2$$
$$g(x) = 2x + 1$$

Calcule:

a) $(f \circ g)(1)$

b) $(g \circ f)(2)$

c) $(f \circ f)(1)$

d) $(g \circ g)\left(-\frac{7}{2}\right)$

Nos exercícios de 8.19 a 8.24 as sentenças abertas definem as funções f e g; determine em cada caso:

a) o domínio da função f
b) o domínio da função g
c) o domínio da função $g \circ f$
d) a sentença aberta que define $g \circ f$
e) o domínio da função $f \circ g$
f) a sentença aberta que define $f \circ g$

8.19) $f(x) = (x - 1)^2$ e $g(x) = x + 1$

8.20) $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

8.21) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

8.22) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x+1}$

8.23) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = \frac{1}{x}$

8.24) $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^{-2}$

8.25) Sejam as funções reais e de variável real:

$$f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x \leq 1 \\ x, \text{ se } x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = 2x$$

a) Determine $(g \circ f)(0)$, $(f \circ g)(4)$, $(f \circ f)(-1)$ e $(g \circ g)(3)$.

b) Determine $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$.

8.26) Se $f(x) = 2x - 3$ e $f[g(x)] = x$, determine $g(x)$.

8.27) Considere as funções f e g definidas por $g(x) = |x|$ e $f(x) = x + 2$.

a) Determine $(f \circ g)(x)$.

b) Desenhe o gráfico da função $f \circ g$.

c) Resolva a inequação $(f \circ g)(x) < 6$.

8.28) Suponha que as funções f e g são definidas por:

$$f(x) = ax + b$$
$$g(x) = cx + d$$

Qual é a condição para que $f \circ g = g \circ f$?

8.29) Seja $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Calcule $f\{f[f(x)]\}$.

8.30) Dadas as funções definidas por $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = -x$ e $h(x) = x^2$, calcule $f\{g[h(-2)]\}$.

8.31) Para a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x$:

a) determine x se $f(x^2) = f(2x + 3)$.
b) verifique se $f(3x + 4) = 3f(x) + 4$.

8.32) Se $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = (f \circ f)(x)$, determine $g(2)$.

8.33) Se $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ e $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -x$, determine x.

8.34) Se $f(x) = 2x + 3$, calcule:

a) $f(0)$

b) $f(-x)$

c) $f(x + 1)$

d) $f(x) + 1$

e) $f\left(\frac{1}{x}\right)$

f) $\frac{1}{f(x)}$

g) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

8.35) Determine: f(x) se $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$.

8.36) Sejam as funções f e g, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$, definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ x+1, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ 2x+1, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$$

a) Determine $(g \circ f)(5)$, $f[g(2)]$ e $(f \circ f)(3)$.

b) Determine $(g \circ f)(x)$.

8.37) Para as funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas pelas sentenças abaixo, diga qual é *par* e qual é *ímpar*.

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = 3x - x^3$

c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^4+1}$

8.38) Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é ímpar. Determine f(0).

8.39) Verifique que $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ para:

$f : x \to x^2$

$g : x \to x$

$h : x \to \dfrac{1}{x}$

8.40) f, g e h são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Demonstre que:

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$$

8.41) f, g e h são funções de E em E. Demonstre que:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

Capítulo

9

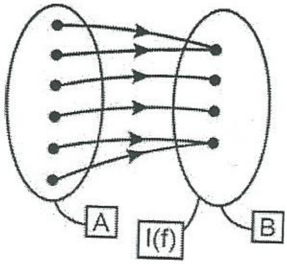
Tipologia das funções - Função inversa

9.1 – Função Sobrejetora

Definição

Seja f uma função de A em B; f diz-se **sobrejetora** se e somente se I(f) = B, isto é:

f é sobrejetora ⇔ I(f) = CD(f)



f é sobrejetora:
em cada elemento de B = CD(f) "chega pelo menos uma flecha".

Note que se f é sobrejetora, para todo elemento y de B existe ao menos um elemento x de A tal que f(x) = y, isto é, todo y de B é imagem de "pelo menos um" x de A.

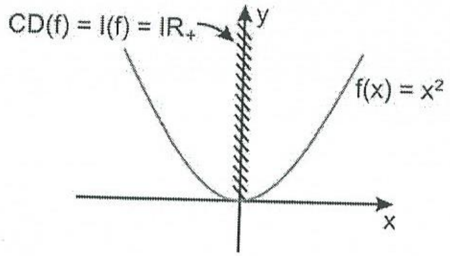
Quando a função f, de A em B, é sobrejetora, a equação f(x) = y admite para todo $y \in B$ pelo menos uma solução.

Exemplo

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$ é **sobrejetora**, pois para todo y, $y \in \mathbb{R}_+$, existe ao menos um x real, $x = \pm\sqrt{y}$, tal que f(x) = y.

Note que o contradomínio de f é dado: $\mathbb{R}_+$; o conjunto-imagem de f obtém-se projetando o gráfico de f sobre o eixo Oy: $I(f) = \mathbb{R}_+$.

Então, $CD(f) = I(f) = \mathbb{R}_+$ e f é sobrejetora, por definição.



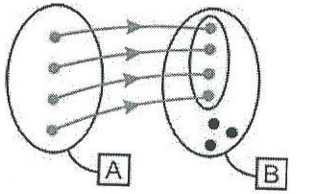
9.2 – FUNÇÃO INJETORA

Seja f uma função de A em B; f diz-se **injetora** se e somente se quaisquer que sejam os elementos x_1 e x_2 em A, se $x_1 \neq x_2$ tem-se: $f(x_1) \neq f(x_2)$.

$$f \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall x_1, x_1 \in A; \forall x_2, x_2 \in A : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Note que se f é injetora, um elemento y de B não é necessariamente imagem de algum elemento x de A, mas, se o for, é imagem de um *único* x de A.

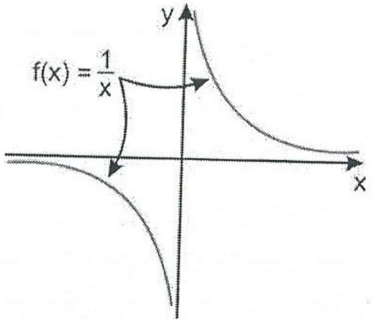
Quando a função f, de A em B, é injetora, a equação f(x) = y admite no máximo uma solução para todo $y \in B$.



f é injetora:
em cada elemento de B = CD(f) "chega no máximo uma flecha."

Exemplo

A função f, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é **injetora**.



Note que y = 0 não é imagem de nenhum elemento x de D(f) = $\mathbb{R}^*$ e que todo $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, é imagem de um único x de D(f) = $\mathbb{R}^*$.

Quaisquer que sejam x_1 e x_2 em $\mathbb{R}^*$, tem-se:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x_1}}_{f(x_1)} \neq \underbrace{\frac{1}{x_2}}_{f(x_2)}$$

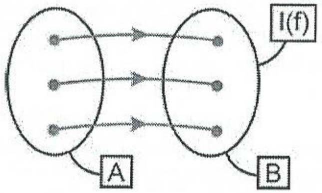
9.3 – FUNÇÃO BIJETORA

Definição

Seja f uma função de A em B; f diz-se **bijetora** se e somente se f é sobrejetora e é injetora.

$$f \text{ é bijetora} \Leftrightarrow (f \text{ é sobrejetora e } f \text{ é injetora})$$

Note que se f é bijetora, para todo elemento y de B existe um e um só elemento x de A tal que f(x) = y, isto é, todo y de B é imagem de um e um só x de A.



f é bijetora:
em cada elemento de B = CD(f) "chega uma e uma só flecha".

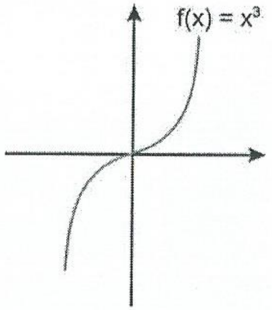
Quando a função f, de A em B, é bijetora, a equação f(x) = y admite para todo $y \in B$ uma e uma só solução.

Exemplo

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^3$ é **bijetora**, pois para todo $y \in \mathbb{R}$ = CD(f) existe um e um só x de A, $x = \sqrt[3]{y}$, tal que:

$$f(x) = y$$

Note que f é sobrejetora e é injetora.



9.4 – UM RECONHECIMENTO GRÁFICO

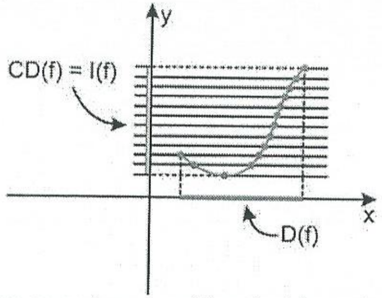
Seja f uma função real de variável real:

$$f: A \to B$$

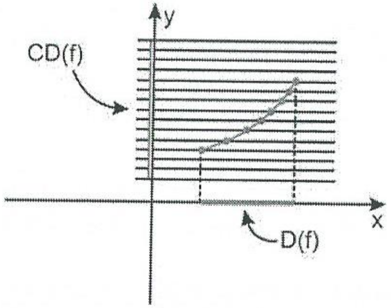
Podemos verificar graficamente se f é sobrejetora ou injetora ou bijetora, da seguinte forma:

Traçamos retas paralelas ao eixo Ox pelos pontos (0; y) com $y \in B$; então:

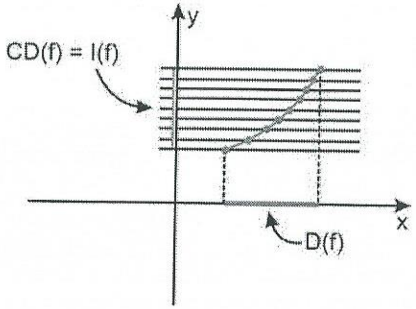
1º) Se essas retas encontram o gráfico de f em "pelo menos um" ponto, f é **sobrejetora**.



2º) Se essas retas encontram o gráfico de f "no máximo" em um ponto (há retas que não o encontram, mas aquelas que encontram o fazem em um único ponto) a função é **injetora**.

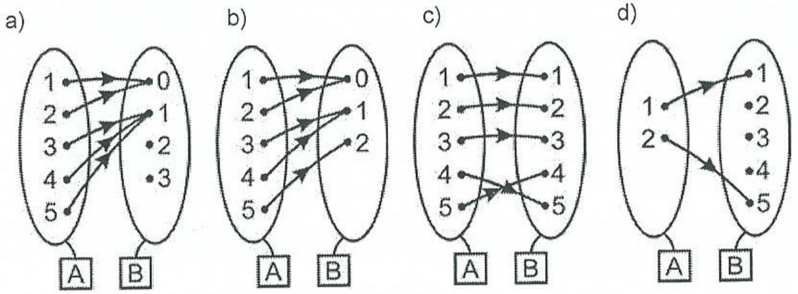


3º) Se essas retas encontram o gráfico de f em um e um só ponto, a função é **bijetora**.



Exercícios Resolvidos

9.1) As funções abaixo estão definidas através de "diagramas de flechas"; diga qual é sobrejetora, qual é injetora e qual é bijetora:



Solução

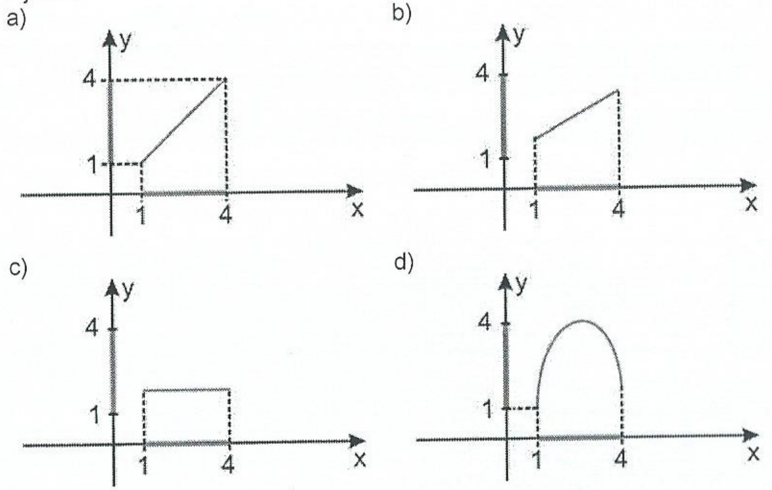
a) não é sobrejetora: nos elementos 2 e 3 de B não chegam flechas; observe que $I(f) \neq CD(f)$; não é injetora: nos elementos 0 e 1 de B chegam mais do que uma flecha; não é bijetora;

b) é sobrejetora: $I(f) = CD(f)$; não é injetora: nos elementos 0 e 1 de B chegam mais do que uma flecha; não é bijetora;

c) é sobrejetora: $I(f) = CD(f)$; é injetora: em cada elemento de B chega uma única flecha; é bijetora;

d) não é sobrejetora: nos elementos 2, 3 e 4 de B não chegam flechas, isto é, $I(f) \neq CD(f)$; é injetora: nos elementos 1 e 5 de B, onde chegam flechas, elas são únicas; não é bijetora.

9.2) As funções abaixo, definidas pelos gráficos, têm domínio A = [1; 4] e contradomínio A = [1; 4]. Diga qual é sobrejetora, qual é injetora e qual é bijetora:



Solução

Quando conhecemos o gráfico de uma função f e queremos decidir se ela é sobrejetora ou injetora ou bijetora, traçamos retas paralelas ao eixo Ox pelos pontos (0; y) com $y \in CD(f)$:

a) é bijetora; as retas encontram o gráfico em um e um só ponto; note que a função é sobrejetora e também é injetora;
b) é injetora; as retas encontram o gráfico no máximo em um ponto; não é sobrejetora e portanto não é bijetora;
c) não se classifica: não é sobrejetora, não é injetora e não é bijetora;
d) é sobrejetora; as retas encontram o gráfico em um ou mais do que um ponto; não é injetora e portanto não é bijetora.

9.3) Seja a função f definida por:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x|x| \end{cases}$$

Verifique que f é bijetora.

Solução

Vamos demonstrar que a equação:

$$x|x| = y \quad (I)$$

qualquer que seja y de $\mathbb{R} = CD(f)$, *admite uma e uma só solução.*

Se $y \geq 0$, tem-se:

$$x|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ \wedge \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

Se $y \leq 0$, tem-se:

$$x|x| = y \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -y \\ \wedge \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\sqrt{-y}$$

Portanto, a equação (I) admite, qualquer que seja o real y, solução única:

$$x = \sqrt{y} \text{ se } y \geq 0, x = -\sqrt{-y} \text{ se } y \leq 0$$

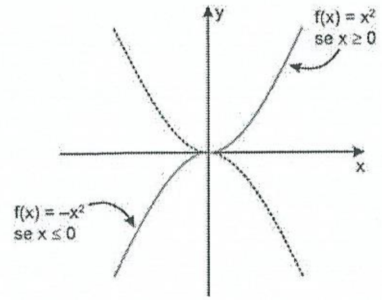
Para a obtenção do gráfico da função f note que:

Se $x \geq 0$: $|x| = x$ e $f(x) = x^2$

Se $x \leq 0$: $|x| = -x$ e $f(x) = -x^2$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geq 0 \\ -x^2, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$



f é bijetora: toda reta paralela ao eixo Ox que passa por (0; y) com $y \in \mathbb{R}$ corta o gráfico em um e só um ponto.

9.4) Considere a função f, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, \text{ se x é par} \\ \dfrac{x+1}{2}, \text{ se x é ímpar} \end{cases}$$

Verifique se f é sobrejetora ou injetora ou bijetora.

Solução

A função é sobrejetora, pois todo $a \in \mathbb{Z} = CD(f)$ é imagem de pelo menos um elemento de $\mathbb{Z} = D(f)$: esse elemento é 2a (par).

A função não é injetora, pois elementos do domínio da forma 2n e 2n – 1 têm mesma imagem: $f(2n) = f(2n - 1) = n$.

A função não é bijetora.

9.5) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em B, definida por:

$$f(x) = x^2 - 2x + 4$$

Determine B para que f seja sobrejetora.

Solução

Para que f seja sobrejetora deve-se ter $I(f) = CD(f)$; então:

$B = I(f)$

$$I(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{-\Delta}{4a}\right\}$$

$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 3\} = [3; +\infty[$

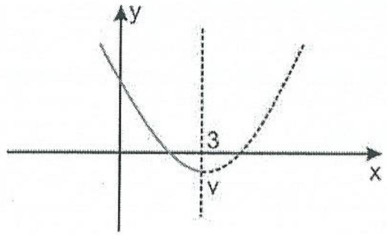
Daí: $B = [3; +\infty[$

9.6) Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x_0\}$. Considere a função f, de A em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Determine o maior valor de x_0 para que f seja injetora.

Solução



Note que CD(f) = $\mathbb{R}$; para que f seja injetora, retas paralelas ao eixo Ox que passam por (0; y), y $\in \mathbb{R}$ = CD(f), devem encontrar o gráfico "no máximo" em um ponto.

Para que isso aconteça, o maior valor de x_0 é $x_0 = \frac{-b}{2a} = 3$.

9.7) Sejam f e g funções de E em E. Mostre que se f e g são *injetoras*, a função g $\circ$ f é *injetora*.

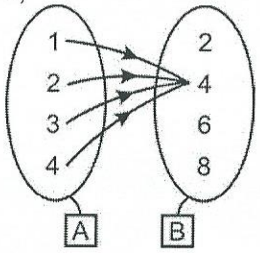
Solução

Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de E.
f é injetora: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
g é injetora: $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow g[f(x_1)] \neq g[f(x_2)]$
Portanto:
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$
isto é, g $\circ$ f é injetora.

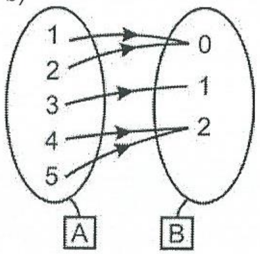
Exercícios Propostos

9.8) As funções abaixo estão definidas através de "diagramas de flechas". Diga qual é sobrejetora ou injetora ou bijetora:

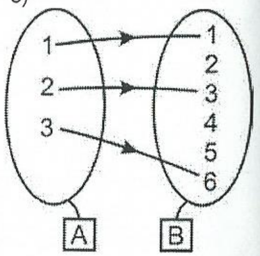
a)



b)

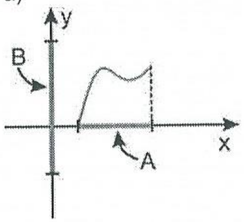


c)

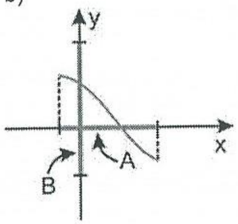


9.9) As funções abaixo, de A em B, são definidas pelos gráficos. Diga qual é sobrejetora ou injetora ou bijetora:

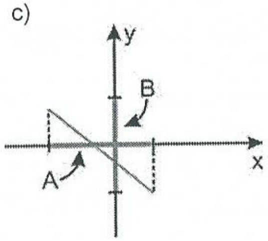
a)



b)



c)



9.10) Para as funções definidas abaixo, diga qual é sobrejetora ou injetora ou bijetora:

a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, f(x) = |x|

b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, f(x) = |x|

c) f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{1}{x}$

d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4$

e) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{|x| + x}{2}$

f) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, f(x) = [x]

(Sugestão: raciocine graficamente.)

9.11) Seja a função f definida por:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \frac{3x+5}{4x-3} \end{cases}$$

Verifique que f não é sobrejetora.

(Sugestao: número de soluções da equação $\frac{3x+5}{4x-3} = y$.)

9.12) Seja a função f, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, \text{ se x é par} \\ 0, \text{ se x é ímpar} \end{cases}$$

A funçâo f é sobrejetora? injetora?

9.13) Seja a função f, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}_+^*$, definida por:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Calcule $f\left(\frac{1}{2}\right)$, f(1) e f(2). A função é injetora?

9.14) Seja a função f, de ℝ em ℝ, definida por:

$$f(x) = \frac{2x-3}{x^2+1}$$

Resolva as equações f(x) = 1 e f(x) = – 1; conclua que f não é injetora e não é sobrejetora.

9.15) Seja a função f, de ℝ em B, definida por:

$$f(x) = -x^2 + 2x - 1$$

Determine B para que f seja sobrejetora.

9.16) Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq x_0\}$. Considere a função f, de A em ℝ, definida por:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Determine o menor valor de x_0 para que f seja injetora.

9.17) Sejam os conjuntos A e B tais que $n_A = p$ e $n_B = q$, e seja f uma função de A em B. Qual condição p e q devem satisfazer para que f seja sobrejetora? Injetora? Bijetora?

9.18) Quantas são as funções sobrejetoras de A = {1; 2; 3} em B = {1; 2}?

9.19) Quantas são as funções injetoras de A = {1; 2} em B = {1; 2; 3}?

9.20) Quantas são as funções bijetoras de A = {1; 2; 3} em B = {1; 2; 3}?

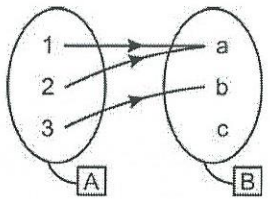
9.21) Sejam f e g funções de E em E. Mostre que se f e g são *sobrejetoras*, a função g ∘ f é *sobrejetora.*

9.5 – FUNÇÃO INVERSA

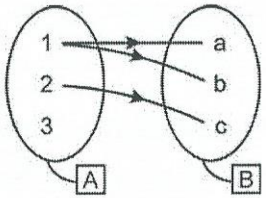
O Conceito

Sejam os conjuntos A = {1; 2; 3} e B = {a; b; c} e as relações de A em B:

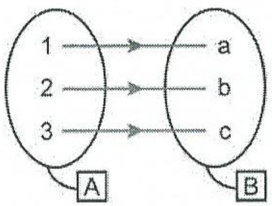
$\mathfrak{R}_1 = \{(1; a), (2; a), (3; b)\}$



$\mathfrak{R}_2 = \{(1; a), (1; b), (2; c)\}$



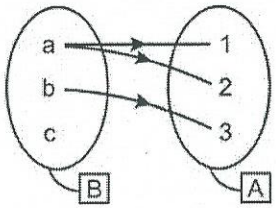
$\mathfrak{R}_3 = \{(1; a), (2; b), (3; c)\}$



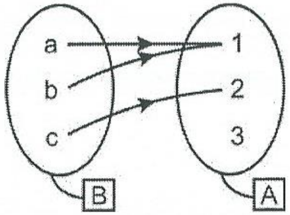
Observe que as relações $\mathfrak{R}_1$ e $\mathfrak{R}_3$ são *funções* de A em B; a relação $\mathfrak{R}_2$ não é.

Para cada uma das relações dadas podemos construir a sua *relação inversa*, de B em A:

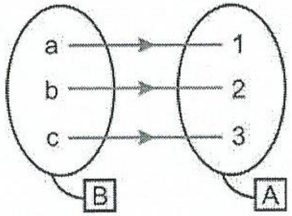
$\mathfrak{R}_1^{-1} = \{(a; 1), (a; 2), (b; 3)\}$



$\mathfrak{R}_2^{-1} = \{(a; 1), (b; 1), (c; 2)\}$



$\mathfrak{R}_3^{-1} = \{(a; 1), (b; 2), (c; 3)\}$



Observe que a relação $\mathfrak{R}_1$ é função de A em B, mas a relação $\mathfrak{R}_1^{-1}$ não é função de B em A (por quê?). A relação $\mathfrak{R}_2$ não é função de A em B e a relação $\mathfrak{R}_2^{-1}$ não é função de B em A.

Entretanto, *a relação $\mathfrak{R}_3$ é função de A em B e a relação inversa $\mathfrak{R}_3^{-1}$, também, é função de B em A.* Observe que $\mathfrak{R}_3$ é função bijetora de A em B; e isto significa que para todo $y \in B$ existe um e um só $x \in A$ tal que $(y; x) \in \mathfrak{R}_3^{-1}$, isto é, $\mathfrak{R}_3^{-1}$ é função de B em A.

Note também que $D(\mathfrak{R}_3^{-1}) = I(\mathfrak{R}_3)$ e $I(\mathfrak{R}_3^{-1}) = D(\mathfrak{R}_3)$.

Teorema

Seja f uma função de A em B; a relação inversa f^{-1} é uma função de B em A se e somente se é uma função bijetora.

Demonstração

1°) Vamos demonstrar que se f^{-1} é uma função de B em A então f é bijetora.

Seja y um elemento qualquer de B; então existe $x \in A$ tal que $(y; x) \in f^{-1}$, pois f^{-1} é função, e daí $(x; y) \in f$, isto é, f é sobrejetora.

Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de A, tais que $x_1 \neq x_2$. Note que se $f(x_1) = f(x_2) = y$ viria $f^{-1}_{(y)} = x_1$ e $f^{-1}_{(y)} = x_2$ contra a hipótese de que f^{-1} é função; então $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, isto é, f é injetora.

Logo f é bijetora.

2°) Vamos demonstrar que se f é bijetora, então f^{-1} é função de B em A.

Para todo y em B existe um elemento x em A tal que $(x; y) \in f$, pois f é sobrejetora. Então para todo y em B: $(y; x) \in f^{-1}$, isto é, todo y de B tem imagem x em A, dada por f^{-1}.

Supondo que um elemento $y \in B$ tenha as imagens x_1 e x_2 em A, dadas por f^{-1}, teremos: $(y; x_1) \in f^{-1}$ e $(y; x_2) \in f^{-1}$ e daí: $(x_1; y) \in f$ e $(x_2; y) \in f$; então $x_1 = x_2$, pois f é injetora.

Concluímos então que todo y de B possui uma e uma só imagem em A, dada por f^{-1} isto é, f^{-1} é função de B em A.

Definição

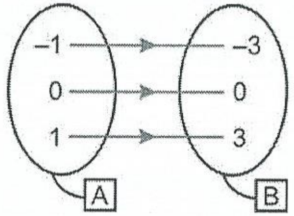
Seja f uma função **bijetora** de A em B, e seja f^{-1} sua relação inversa. O teorema anterior mostra que f^{-1} é uma função de B em A e que se denomina **função inversa** de f.

Diz-se que uma função é **invertível** se existe f^{-1}, isto é, se f é bijetora.

Exemplo

Sejam os conjuntos A = {–1; 0; 1}, B = {–3; 0; 3} e a função f, de A em B:

$$f = \{(-1; -3), (0; 0), (1; 3)\}$$

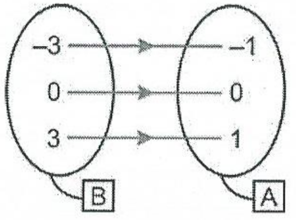


Note que f é bijetora; então f é invertível, isto é, existe f^{-1}. O domínio de f^{-1} é B e o seu contradomínio é A.

Os pares ordenados que pertencem a f^{-1} são obtidos dos pares ordenados que pertencem a f trocando-se, nestes, as coordenadas uma pela outra.

$$(-1; -3) \in f \text{ então } (-3; -1) \in f^{-1}$$
$$(0; 0) \in f \text{ então } (0; 0) \in f^{-1}$$
$$(1; 3) \in f \text{ então } (3; 1) \in f^{-1}$$

$$f^{-1} = \{(-3; -1), (0; 0), (3; 1)\}$$



Observações: Seja f uma função bijetora de A em B.

1°) Se $(x; y) \in f$ então $(y; x) \in f^{-1}$ e inversamente: note então a equivalência para as sentenças abertas:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

2°) $D(f^{-1}) = I(f)$ e $I(f^{-1}) = D(f)$; note também que pois $I(f) = CD(f)$, pois é bijetora.

3°) Observe que a função f^{-1} é também bijetora e que:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

A Sentença que Define a Função Inversa

Seja f uma função bijetora de A em B e seja $y = f(x)$ a sentença aberta que a define.

Da equivalência:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

concluímos que a função inversa, f^{-1}, de B em A, é definida pela sentença aberta $x = f^{-1}(y)$:

$$f = \{(x; y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$$
$$f^{-1} = \{(y; x) \in B \times A \mid x = f^{-1}(y)\}$$

Então, dada a sentença aberta que define a função f:

$$y = f(x)$$

para obtermos a sentença aberta que define a função inversa f^{-1} *expressamos x "em função" de y*:

$$x = f^{-1}(y)$$

Por exemplo, seja a função bijetora:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y = f(x) = x^3 \end{cases}$$

A função inversa, f^{-1}, é função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Para obtermos a sentença aberta que define f^{-1}, partimos da sentença aberta que define f:

$$y = x^3$$

expressando x "em função" de y:

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Então, a sentença aberta que define a função f^{-1} é:

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

$$f^{-1} = \{(y; x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sqrt[3]{x}\}$$

Como é comum representarmos a primeira coordenada de um par ordenado com a letra **x** e a segunda coordenada com a letra **y**, na sentença aberta $x = \sqrt[3]{y}$, que define f^{-1}, fazemos uma troca de letras: x por y e y por x; então:

$$f^{-1} = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[3]{y}\}$$

Um Resumo

Dada a sentença aberta:

$$y = f(x)$$

que define a função bijetora f, se quisermos a sentença aberta que define a função f^{-1}, procedemos da seguinte maneira:

1º passo: na sentença y = f(x), isola-se x no primeiro membro.

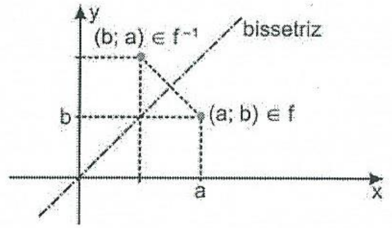
2º passo: troca-se a letra x pela letra y e a letra y pela letra x.

Uma Propriedade Geométrica

Seja f uma função bijetora, real e de variável real.

Se (a; b) ∈ f, então (b; a) ∈ f^{-1}.

Num sistema ortogonal xOy, os pontos de coordenadas (a; b) e (b; a) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.



Aplicando o raciocínio para todos os pares que pertencem a f, podemos concluir que:

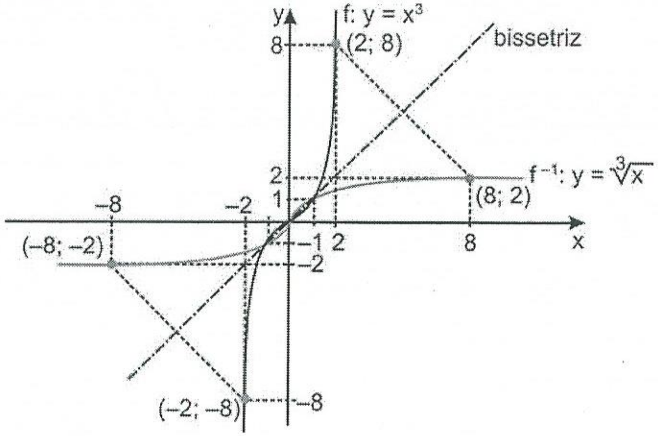
> Os gráficos da função f e sua função inversa f^{-1} são simétricos à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo

Seja a função bijetora: $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 \end{cases}$

A função inversa de f é: $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt[3]{x} \end{cases}$

Os gráficos de f e de f^{-1} estão na figura abaixo:



Exercícios Resolvidos

9.22) Seja a função f, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}^*$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Verifique que f é bijetora e determine f^{-1}.

Solução

f é sobrejetora, pois todo $y \in \mathbb{R}^* = CD(f)$ é imagem de um $x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^* = D(f)$.

f é injetora, pois para todo x_1, x_2 de $\mathbb{R}^* = D(f)$ tem-se:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x_1}}_{f(x_1)} \neq \underbrace{\frac{1}{x_2}}_{f(x_2)}$$

Então, f é bijetora.

A sentença que define f^{-1} obtém-se da seguinte forma:

1º passo: isola-se x na sentença aberta que define f:

$$y = \frac{1}{x}$$
$$xy = 1$$
$$x = \frac{1}{y}$$

2º passo: "trocam-se" as letras x e y:

$$y = \frac{1}{x}$$

Então: $\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Note que $f = f^{-1}$

9.23) Seja a função f definida por:

$$f: \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$
$$f(x) = \frac{x+2}{2x-3}$$

Verifique que f é bijetora e determine f^{-1}.

Solução

Para verificarmos que f é bijetora vamos mostrar que para todo y, $y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, a equação:

$$\frac{x+2}{2x-3} = y$$

admite uma e uma só solução x, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

Para

$$x \neq \frac{3}{2}: \frac{x+2}{2x-3} = y \Leftrightarrow x + 2 = y(2x-3) \Leftrightarrow x(1-2y) = -2-3y \Leftrightarrow x = \frac{3y+2}{2y-1} \quad \text{(I)}$$

Observe, então, que de (I) podemos concluir que para todo y, $y \neq \frac{1}{2}$, existe em correspondência um e um só x, $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$. Concluímos que f é bijetora.

A sentença aberta que define f^{-1} obtém-se de (I), trocando-se as letras x e y:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$$

Então:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\} \\ f^{-1}(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1} \end{cases}$$

9.24) Seja a função f definida por:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

Verifique que f é bijetora e determine f^{-1}

Solução

Para verificarmos que f é bijetora vamos mostrar que para todo y, $y \in \mathbb{R}_+ = CD(f)$, a equação:

$$x^2 = y$$

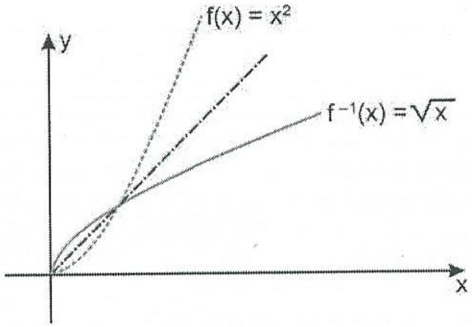
admite uma e uma só solução x, $x \in \mathbb{R}_+ = D(f)$.

Para $x \geq 0$, a equação nos dá $x = \sqrt{y}$, e como $y \geq 0$, a solução existe e é única.

Então, f é bijetora.

A função inversa de f é definida por:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$



9.25) A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x \cdot |x|$$

é bijetora. Determine f^{-1}. (Veja o exercício 9.3.)

Solução

Para $y \geq 0$ tem-se: $y = f(x) = x\,|x| \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Para $y \leq 0$ tem-se: $y = f(x) = x\,|x| \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = -\sqrt{-y}$.

A troca das letras x e y nos dá:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ se } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, \text{ se } x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

9.26) Seja f uma função bijetora de E em E. Demonstre que:

$$f^{-1} \circ f = I_E \quad \text{e} \quad f \circ f^{-1} = I_E$$

onde I_E é a **função identidade de domínio E**, isto é:

$$\begin{cases} I_E : E \to E \\ I_E(x) = x \end{cases}$$

Solução

As funções compostas $f^{-1} \circ f$ e $f \circ f^{-1}$ são de E em E; além disso:

$$(f^{-1} \circ f)\ (x) = f^{-1}[\ f(x)] = f^{-1}(y) = x$$

$$(f \circ f^{-1})\ (y) = f\ [\ f^{-1}(y)] = f(x) = y$$

Ficam demonstradas as igualdades.

Exercícios Propostos

9.27) Seja a função polinômio do 1° grau:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0 \end{cases}$$

Verifique que f é bijetora. Determine f^{-1}.

9.28) Para a função polinomial do 1° grau:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = ax + b,\ a \neq 0 \end{cases}$$

determine a e b para que $f = f^{-1}$.

9.29) Verifique se cada uma das funções definidas abaixo é bijetora; em caso positivo, determine a função inversa:

a) $\begin{cases} f: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+ \\ f(x) = x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{2\} \\ f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1} \end{cases}$

c) $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} f: \mathbb{R}_+ \to \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\} \\ f(x) = x^2 - 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} \end{cases}$

9.30) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 2x - 5$$

a) Determine f^{-1}.
b) Calcule $(f \circ f^{-1})\ (x)$ e $f^{-1}\ [f(x)]$.

9.31) Uma função bijetora de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x \geq 0 \\ x - 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Determine f^{-1}.

9.32) Sejam as funções bijetoras f e g, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x) = 2x - 1$$

$$g(x) = 4x + 3$$

Verifique que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

9.33) Seja a função f, bijetora, de $A = \mathbb{R} - \{5\}$ em $B = \mathbb{R} - \{m\}$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Determine **m** sabendo-se que a sentença aberta que define a função f^{-1} é:

$$f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-m}$$

9.34) Seja a função definida pela sentença aberta:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx-a},\quad a^2 + bc \neq 0$$

Determine $f^{-1}(x)$.
Por que a condição $a^2 + bc \neq 0$ é imposta?

9.35) Seja a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = 2x + 1 + |x - 1|$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Deduza se f é bijetora.
c) Em caso positivo dê f^{-1}.

Exercícios Suplementares

V.1) Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, crescentes em $\mathbb{R}$. Verifique que a função f + g é crescente em $\mathbb{R}$.

V.2) A função f, bijetora, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é crescente em $\mathbb{R}$. Verifique que f^{-1} é crescente em $\mathbb{R}$.

V.3) Se as funções:

$f: E \to F$

$g: F \to E$

são tais que $g \circ f = I_E$, então f é injetora e g é sobrejetora.

V.4) Uma função f, de E em F, é bijetora se e somente se existe uma função g, de F em E, tal que:

$$g \circ f = I_E \quad e \quad f \circ g = I_F, \quad e \quad g = f^{-1}$$

V.5) Sejam as funções bijetoras:

$f: E \to F$

$g: F \to G$

Mostre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

V.6) Um função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é tal que para todo **a**, $a \in \mathbb{R}$, e todo **b**, $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

a) Determine f(0).
b) Verifique que f é ímpar.
c) Se f(1) = k, determine f(n), $n \in \mathbb{N}^*$.

V.7) Uma função f, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, é tal que para todo **a**, $a \in \mathbb{R}$, e todo **b**, $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$$

O conjunto-imagem de f é I(f) = {–1; 1}.
a) Determine f(0).
b) Verifique que f é par.
c) Se $k \in \mathbb{Z}$ verifique que:

$$f(2k) = 1$$
$$f(1) = -1$$
$$f(2k + 1) = -1$$

V.8) Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é tal que:

$$f(x + 5) = f(x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

Determine $f\left(\frac{16}{3}\right)$, $f\left(\frac{29}{3}\right)$, f(12) + f(–7).

V.9) Seja a função real e de variável real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2(x + |x - 2|)}$$

a) Determine D(f).
b) Faça o gráfico de f.
e) Determine I(f).

V.10) As funções f e g satisfazem às condições:

$$f(x) = 2x + 1$$
$$g(2x - 1) = f(x - 1)$$

Determine g(x).

V.11) Uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, está assim definida:

1) $\forall x, x \in [0; 2], f(x) = x^3$
2) f é par
3) $f(x + 4) = f(x), \forall x, x \in \mathbb{R}$

a) Dê a sentença aberta que define f para $x \in [-2; 2]$.
b) Gráfico de f se $x \in [-6; 6]$.
c) Resolva a equação f(x) = 1.
d) Determine I(f).

Capítulo 1

1.3) a, b, d, f

1.4) declarativas: c; e
abertas: a; b; d

1.7) a) V = {5}
b) V = {6; 7; 8; 9}
c) V = {6; 7; 8}
d) V = {2; –2}

1.8) a) V = {(10; 8), (5; 3), (2; 0)}
b) V = {(4; 5), (0; 1)}
c) V = {(4; 2; 3), (1; 0; 1)}

1.12) a) Salvador não fica na Bahia.
b) Pássaros não voam.
c) Salvador fica na Bahia e pássaros voam.
d) Salvador fica na Bahia ou pássaros voam.
e) Salvador fica na Bahia ou pássaros não voam.
f) Salvador não fica na Bahia e pássaros voam.
g) Não é verdade que Salvador fique na Bahia ou pássaros voem.
h) Não é verdade que Salvador fique na Bahia e pássaros voem.

1.13) a) $p \wedge q$
b) $\sim p \wedge \sim q$
c) $\sim(p \wedge q)$
d) $\sim q \vee p$

1.18) a) $s \Rightarrow p$
b) $q \Rightarrow r$
c) $q \Rightarrow s$
d) $r \Rightarrow p$
e) $s \Rightarrow q$
f) $q \Rightarrow s$
g) $p \Rightarrow r$
h) $s \Rightarrow q$
i) $s \Leftrightarrow q$
j) $p \Leftrightarrow s$

1.19) a) V
b) V
c) F
d) V
e) V
f) F
g) F
h) V
i) V
j) V
k) V
l) V

1.20) a)

p	q	r	~r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee (\sim r)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V

b)

p	q	r	p ∨ q	r ∧ p	(p ∨ q) ⇒ (r ∧ p)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

1.21) a) Há pelo menos um marciano que não usa camisola.
b) Há pelo menos um camelo que tem rabo.
c) Não há habitantes na Lua.

Capítulo 2

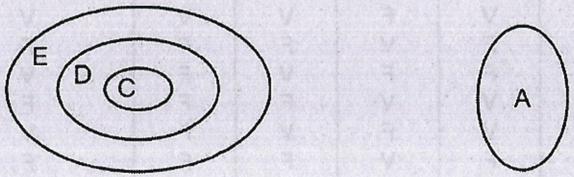
2.5) a) V d) F g) V j) F m) V
b) F e) V h) F k) V n) V
c) V f) F i) F l) F o) F

2.6) a) {0; 1; 2; 3; 4} g) {5; 7}
b) {2; 3; 4...} h) {0; 3; 6; 9;...}
c) {2; 3; 4} i) {1; 4; 7; 10...}
d) {–5; –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2} j) {1; 3; 5; 7...}
e) {–3; –2; –1; 1; 2; 3} k) {5}
f) {–5; –4; –3; –2; –1; 0} l) {∅}

gabarito correto e revisado ☺

2.12) a) V d) V g) F j) V m) V
b) F e) F h) V k) F n) V
c) F f) V i) F l) V o) F

2.13) Sejam:
E = conjunto das pessoas engraçadas
C = conjunto dos coelhos
A = conjunto das pessoas que sabem caçar borboletas
D = conjunto das pessoas que não sabem andar de bicicleta
O diagrama dos conjuntos é:



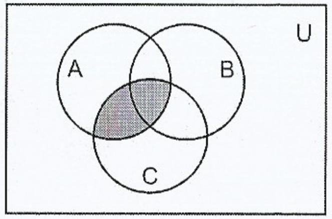
Assim, a resposta é d.

2.14) b

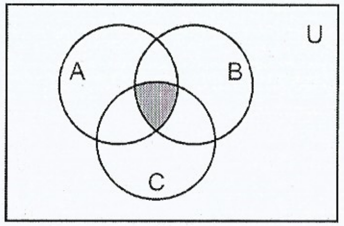
2.20) a) {1; 3; 5; 7; 9; 4; 6} g) {4}
b) {3} h) {2; 8; 10}
c) {2; 3; 4; 6; 8; 10} i) {3}
d) {1; 5; 4; 8; 6} j) {2; 3; 6; 7; 9; 10}
e) Ø k) {2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10}
f) {2; 4; 6; 8; 10; 3; 1; 5} l) {1; 2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10}

2.21) {4; 6; 7; 5; 9}

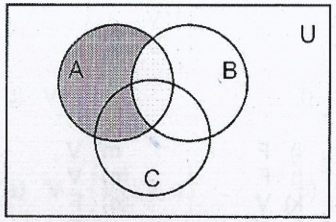
2.22)
a)



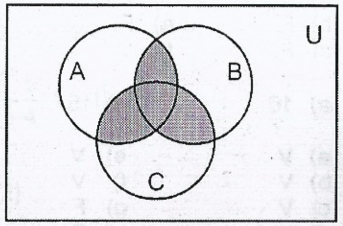
b)



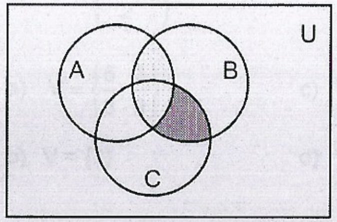
c)



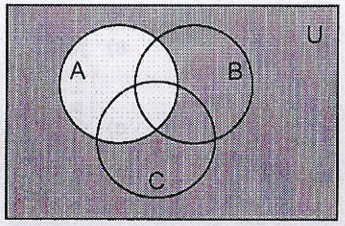
d)



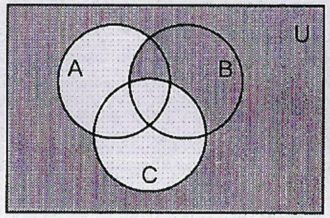
e)



f)



g)



2.23) c

2.24) a) F b) V c) V d) F e) V f) V g) F h) V i) F j) V k) V l) V

2.25) a) F b) V c) V d) F e) V f) V g) F h) V

2.29) a) 17 b) 30 c) 13

2.30) a) 70 b) 45 c) 30 d) 55 e) 7 f) 100

2.31) a) 16 b) 38 c) 32 d) 20

2.32) a) 500 b) 600 c) 400 d) 800 e) 1800 f) 1000

2.33) a) 40 b) 23 c) 43

2.38) a) V b) F c) F d) F e) F f) V g) V h) V i) F j) V k) V l) V m) F n) V

2.39) a) 16 b) 15

2.41) a) V b) V c) V d) V e) V f) V g) F h) F i) F j) F k) V l) V m) V n) V o) F p) F

2.42) a) [4; 9] b) [6; 7] c) [4; 6[d) [–3; 2] e)]9; 11[

2.43) a) [–1; 1[b) $\left[-3; \frac{5}{4}\right[$ c) ∅ d) $\left[-1; \frac{5}{4}\right[$

2.44) a) $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ b) $\left]\frac{3}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Capítulo 3

3.7) a) S = {3} b) S = {3} c) S = {2} d) $S = \left\{\frac{13}{5}\right\}$

3.8) a) S = ∅ b) S = ℝ

3.9) –13

3.14) a) $V = \left\{\frac{-8}{3}; \frac{9}{5}\right\}$ b) $V = \left\{\frac{3}{2}; 5; 3\right\}$ c) V = ∅ d) V = {10}

3.15) V = {4; 7}

3.16) a) V = ∅ b) V = {6} c) V = {9} d) V = ∅ e) $V = \left\{\frac{6}{5}\right\}$

3.21) a) V = {0; –1} b) $V = \left\{-9; 4; \frac{3}{2}\right\}$ c) $V = \left\{\frac{4}{7}\right\}$ d) V = ∅ e) V = {0; 4; –4} f) $V = \left\{-\frac{5}{4}; 1; -1\right\}$

3.22) a) $V = \left\{-\frac{1}{2}; 2; \pi\right\}$ b) $V = \left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$ c) V = {2}

3.24) a) $V = \left\{\frac{5}{8}; \frac{3}{2}\right\}$ b) V = {2} c) $V = \left\{-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right\}$ d) $V = \left\{\frac{13}{6}; \frac{5}{6}\right\}$

3.29) a) $V = \left\{\frac{a+b}{5}\right\}$ c) $\begin{cases} \text{Se } a \neq 1,\ V = \left\{\frac{4a+1}{a-1}\right\} \\ \text{Se } a = 1,\ V = \varnothing \end{cases}$

b) $\begin{cases} \text{Se } a \neq 2,\ V = \left\{\dfrac{15}{a-2}\right\} \\ \text{Se } a = 2,\ V = \varnothing \end{cases}$

d) $\begin{cases} \text{Se } a \neq 3,\ V = \left\{\dfrac{2b+8}{3-a}\right\} \\ \text{Se } a = 3 \text{ e } b \neq -4,\ V = \varnothing \\ \text{Se } a = 3 \text{ e } b = -4,\ V = \mathbb{R} \end{cases}$

3.35) a) $V = \left\{\left(\dfrac{11}{34}; \dfrac{-5}{34}\right)\right\}$ b) $V = \left\{\left(\dfrac{97}{29}; \dfrac{30}{29}\right)\right\}$

3.36) a) $V = \{(-2; 3; -4)\}$
b) $V = \{(5; -4; 2)\}$
c) $V = \left\{\left(-\dfrac{21}{4}; -\dfrac{11}{2}; 4\right)\right\}$

3.37) a) $V = \{(2; 3)\}$
b) $V = \left\{\left(\dfrac{7}{11}; \dfrac{70}{11}\right)\right\}$
c) $V = \left\{\left(\dfrac{13}{28}; \dfrac{39}{8}\right)\right\}$

3.45) a) $V = \left\{\left(1; -\dfrac{21}{4}\right)\right\}$
b) $V = \left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}$
c) $V = \left\{\left(\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}\right)\right\}$
d) $V = \left\{\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{2}{3}\right)\right\}$
e) $V = \{1; -3\}$
f) $V = \varnothing$

3.46) a) $V = \{0; 1\}$
b) $V = \{5; -5\}$
c) $V = \left\{\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right\}$
d) $V = \varnothing$
e) $V = \left\{0; \dfrac{3}{2}\right\}$

3.47) a) $V = \{-1; 9\}$
b) $V = \{1\}$
c) $V = \{1+\sqrt{11}; 1-\sqrt{11}\}$
d) $V = \{2\}$
e) $V = \left\{4; \dfrac{11}{2}\right\}$
f) $V = \{0; -1\}$
g) $V = \{2; 4\}$
h) $V = \{4; -4\}$

3.48) a) $V = \left\{1; -1; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{2}\right\}$ f) $V = \left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{-\sqrt{2}}{2}; \dfrac{1}{2}; \dfrac{-1}{2}\right\}$

b) $V = \left\{\dfrac{1}{3}; \dfrac{-1}{3}\right\}$
c) $V = \varnothing$
d) $V = \{3; 1\}$
e) $V = \{0; 1\}$
g) $V = \{9; 4\}$
h) $V = \left\{\dfrac{-2}{7}; \dfrac{-1}{5}\right\}$
i) $V = \{-3; 4\}$
j) $V = \varnothing$

3.49) a) $V = \left\{0; 2; -2; \dfrac{5}{2}\right\}$
b) $V = \left\{-\dfrac{5}{4}\right\}$
c) $V = \left\{0; \dfrac{1}{2}\right\}$
d) $V = \{3\}$

3.50) a) $V = \{-1; 4\}$ b) $V = \left\{1; \dfrac{-5}{3}\right\}$

3.51) a) $S = \left\{(3; 4); \left(\dfrac{-7}{4}; \dfrac{-24}{5}\right)\right\}$
b) $S = \left\{\left(-6; \dfrac{-4}{3}\right); (-2; -4)\right\}$
c) S = {4; 2;); (−2; 4)}
d) $S = \{(-1; 1)\}$
e) $S = \varnothing$

3.58) $\dfrac{52}{15}$

3.59) $\dfrac{109}{2}$

3.60) a) $\dfrac{11}{15}$ b) impossível c) $\dfrac{1}{2}$

3.61) $\dfrac{43}{9}$

3.62) a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 + 2x - 24 = 0$
c) $3x^2 - 5x - 2 = 0$
d) $x^2 - (3 + \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} = 0$

3.63) $x^2 + 10x + 25 = 0$

3.64) a) $(x - 3)(x + 6)$
b) $(2x - 3)(x + 5)$
c) $(2x + 3)^2$
d) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2)$
e) $(x + 1)(x - 1)(3x + 1)(3x - 1)$
f) $(x^2 + 4)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$

4.11) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$

d) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2}\right\}$

e) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

f) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{-1}{22}\right\}$

4.12) a) $V =]-6; 3[$

b) $V = \mathbb{R}$

c) $V = \left]\frac{-2}{9}; \frac{8}{9}\right[$

d) $V = \varnothing$

e) $V = \left]\frac{28}{5}; +\infty\right[$

4.13) a) $k > \frac{-25}{72}$

b) $k = \frac{-25}{72}$

c) $k \geq \frac{-25}{72}$

d) $k < \frac{-25}{72}$

4.18) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq \frac{1}{3}\right\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \vee 2 \leq x < 5\}$

d) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \vee x > \frac{23}{6}\right\}$

4.19) $V =]1; 2[$

4.20) $V =]\frac{2}{3}; 1]$

4.30) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 8\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 8\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > 8\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 8\}$

e) $V = \mathbb{R} - 3$

f) $V = \mathbb{R}$

g) $V = \varnothing$

h) $V = \{3\}$

i) $V = \mathbb{R}$

j) $V = \mathbb{R}$

k) $V = \varnothing$

l) $V = \varnothing$

m) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \vee x > 3\}$

n) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

o) $V = [-1; +1]$

p) $V = [0; 4]$

q) $V = \left]\frac{3-\sqrt{10}}{2}; \frac{3+\sqrt{10}}{2}\right[$

4.31) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee x > 2\}$ b) $V = [-2; 2]$

4.32) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \vee 3 < x < 4 \vee x \geq 5\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 4 \wedge x \neq 2\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1 \wedge x \neq 0\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \vee 3 \leq x < 6\}$

4.33) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \vee 1 - \sqrt{11} < x < 1 + \sqrt{11}\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3 \vee x \geq 13\}$

c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \vee -\frac{1}{3} \leq x < 3 \vee x \geq 9\right\}$

d) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1 \vee x \geq \frac{9}{5}\right\}$

4.34) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3 \vee 4 \leq x < 8\}$

b) $V = \left[3; \frac{7}{2}\right[$

4.35) $6 - \sqrt{35} < p < 6 + \sqrt{35}$

4.36) $-1 - 4\sqrt{2} < k < -1 + 4\sqrt{2}$

4.37) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 \vee x > 3\}$

4.40) a) F b) V c) V d) F e) F f) V g) V h) V i) V j) V k) V

4.41) $\left.\begin{array}{l} a > b \\ x > y \\ b + y > z \end{array}\right\} \Rightarrow a + x + b + y > b + y + z \Rightarrow a + x > z \Rightarrow a > z - x$

4.42) $\sqrt{2} + \sqrt{8} < \sqrt{3} + \sqrt{7} \Leftrightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{8})^2 < (\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{8} + 8 < 3 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + 7 \Leftrightarrow \sqrt{16} < \sqrt{21} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16 < 21$

Como 16 < 21 é verdadeira, o mesmo se dá com a sentença inicial.

4.43) a) $a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0\ (a - b)^2 \geq 0$

Como a sentença $(a - b)^2 \geq 0$ é verdadeira, o mesmo se dá com a sentença original.

b) Usando o resultado do item anterior temos:

$$\left.\begin{aligned}a^2+b^2\geq 2ab\\ a^2+c^2\geq 2ac\\ b^2+c^2\geq 2bc\end{aligned}\right\}\Rightarrow a^2+b^2+a^2+c^2+b^2+c^2\geq 2ab+2ac+2bc\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2\geq 2(ab+ac+bc)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$$

4.44) $$\left.\begin{aligned}a<b\Leftrightarrow a+a<a+b\Leftrightarrow 2a<a+b\Leftrightarrow a<\frac{a+b}{2}\\ a<b\Leftrightarrow a+b<b+b\Leftrightarrow a+b<2b\Leftrightarrow \frac{a+b}{2}<b\end{aligned}\right\}\Rightarrow a<\frac{a+b}{2}<b$$

4.45) Como a e b são positivos e a < b temos:

$$\left.\begin{aligned}a<b\Leftrightarrow a\cdot a<b\cdot a\Leftrightarrow a^2<ab\Leftrightarrow a<\sqrt{ab}\\ a<b\Leftrightarrow ab<b^2\Leftrightarrow \sqrt{ab}<b\end{aligned}\right\}\Rightarrow a<\sqrt{ab}<b$$

4.46) Sendo 0 < a < b temos:

(I) $\begin{cases} a<\dfrac{2ab}{a+b}\Leftrightarrow a(a+b)<2ab\Leftrightarrow a^2+ab<2ab\Leftrightarrow a^2<ab\Leftrightarrow a<b \\ \text{Como } a<b \text{ é verdade, } a<\dfrac{2ab}{a+b} \text{ também é verdade.}\end{cases}$

(II) $\begin{cases} \dfrac{2ab}{a+b}<b\Leftrightarrow 2ab<b(a+b)\Leftrightarrow 2ab<ab+b^2\Leftrightarrow ab<b^2\Leftrightarrow a<b \\ \text{Como } a<b \text{ é verdade, } \dfrac{2ab}{a+b}<b \text{ também é verdade.}\end{cases}$

De (I) e (II) temos:

$$a<\frac{2ab}{a+b}<b$$

4.47) Sendo a > 0, b > 0 e a ≠ b temos:

(I) $\begin{cases} \dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}\Leftrightarrow \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}<ab\Leftrightarrow \dfrac{4ab}{(a+b)^2}<1\Leftrightarrow 4ab<(a+b)^2\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4ab<a^2+2ab+b^2\Leftrightarrow 0<a^2-2ab+b^2\Leftrightarrow 0<(a-b)^2 \\ \text{Como } 0<(a-b)^2 \text{ é verdade, } \dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab} \text{ também é.}\end{cases}$

(II) $\begin{cases} \sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{ab}<a+b\Leftrightarrow 4ab<(a+b)^2\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4ab<a^2+2ab+b^2\Leftrightarrow 0<a^2-2ab+b^2\Leftrightarrow 0<(a-b)^2 \\ \text{Como } 0<(a-b)^2 \text{ é verdade, } \sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2} \text{ também é.}\end{cases}$

De (I) e (II) vem: $\dfrac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\dfrac{a+b}{2}$.

4.51) a) 4 b) 4 c) 2 d) 5 e) 6 f) –9

4.52) a) V b) V c) V d) F e) V f) V g) V h) V i) V

4.53) a) V = {7; –7} b) V = ∅ c) V = {0}

4.62) a) V = {17; –1}
b) $V=\{2\sqrt{2};-2\sqrt{2}\}$
c) $V=\left\{\frac{7}{3};\frac{13}{6}\right\}$
d) $V=\left\{\frac{25}{4};\frac{-1}{4}\right\}$
e) $V=\left\{\frac{-7}{5};\frac{17}{3}\right\}$
f) V = {2; –2}
g) $V=\left\{2;3;\frac{3+\sqrt{33}}{2};\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right\}$
h) $V=\left\{\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{5}{3}\right\}$
i) $V=\left\{-2;\frac{5}{2}\right\}$
j) V = ∅

4.63) a) V = {4; –4} b) V = {0; 6}

4.64) a) $V=\left\{\frac{-1}{9}\right\}$
b) V = ∅
c) V = {6}

4.65) a) $V=\left\{1;\frac{-9}{5}\right\}$
b) $V=\{x\in\mathbb{R}\mid -7\leq x\leq -4\}$
c) V = {28; –2}

4.66) a) $V=\left\{(6;11);\left(\frac{-2}{7};\frac{11}{7}\right)\right\}$

4.72) a) $V=\{x\in\mathbb{R}\mid x>6\vee x<-6\}$
b) $V=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 6\vee x\leq -6\}$
c) $V=\{x\in\mathbb{R}\mid -6<x<6\}$
d) $V=\{x\in\mathbb{R}\mid -6\leq x\leq 6\}$
e) $V=\mathbb{R}$
f) $V=\mathbb{R}$
g) V = ∅
h) V = ∅

4.73) a) $V=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x>\frac{7}{3}\vee x<1\right\}$
b) $V=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq\frac{7}{3}\vee x\leq 1\right\}$

c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{7}{3}\right\}$

d) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le \frac{7}{3}\right\}$

e) $V = \mathbb{R}$

f) $V = \mathbb{R}$

g) $V = \varnothing$

h) $V = \varnothing$

i) $V = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$

j) $V = \mathbb{R}$

k) $V = \varnothing$

l) $V = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

4.74) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \vee x > 9\}$

b) $V = \left]\frac{-47}{15}; \frac{-11}{5}\right[$

c) $V = \left[\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right]$

d) $V = [-2; 5]$

4.75) a) $V =]-6; 5[$

b) $V =]2; 5[$

c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \le \frac{1}{2} \vee x \ge \frac{7}{2}\right\}$

4.76) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \vee 4 < x < 6 \vee x > 6\}$

b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -4 \vee x \ge 4 \vee x = 2\}$

c) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 6 \wedge x \ne 2\}$

d) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x < 2 \wedge x \ne -2\}$

4.79) a) $\left.\begin{array}{l} |x-y| = |x+(-y)| \\ \text{Por } M_{14} \text{ temos } |x+(-y)| \le |x| + |-y| \end{array}\right\} \Rightarrow |x-y| \le |x| + |-y| \Rightarrow |x-y| \le |x| + |y|$

b) $\left.\begin{array}{l} |x| = |y-(y-x)| \\ |y-(y-x)| \le |y| + |y-x| \end{array}\right\} \Rightarrow |x| \le |y| + |y-x| \Rightarrow$

$\Rightarrow |y-x| \ge |x| - |y| \Rightarrow |x-y| \ge |x| - |y|$

c) $|x + y| = |x - (-y)| \ge |x| - |-y| = |x| - |y| \therefore |x + y| \ge |x| - |y|$

4.80)

$\left.\begin{array}{l} |x+y+z| = |(x+y)+z| \\ |(x+y)+z| \le |x+y| + |z| \end{array}\right\} \Rightarrow |x+y+z| \le |x+y| + |z|$

$\oplus\begin{cases} |x+y+z| \le |x+y| + |z| \\ |x+y| \le |x| + |y| \end{cases}$

$\overline{|x+y+z| \le |x| + |y| + |z|}$

4.81) $|(x + y) - (a + b)| = |x + y - a - b| = |(x - a) + (y - b)| \le |x - a| + |y - b|$

$\oplus\begin{cases} |(x+y)-(a+b)| \le |x-a| + |y-b| \\ |x-a| < k \\ |y-b| < k \end{cases}$

$\overline{|(x+y)-(a+b)| \le 2k}$

Capítulo 5

5.4) a) $x = \frac{42}{11}$ e $y = \frac{168}{11}$ b) $x = 11$ e $y = 6$

5.5) a) (0; 0), (a; b) b) $\alpha = \left(\frac{1}{2}; -1\right)$

5.6) Da hipótese: {{a}; {a; b}} = {{b}; {b; a}}, como {a; b} = {b; a} segue-se que {a} = {b} e daí a = b; se {a} = {b; a} também a = b.

5.11) a) {(3; 3), (3; 4), (3; 5), (4; 3), (4; 4), (4; 5), (5; 3), (5; 4), (5; 5)}

b) {(3; 1), (3; 2), (3; 3), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3)}

c) {(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3), (3; 1), (3; 2), (3; 3)}

d) {(1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 3), (3; 4), (3; 5)}

e) {(3; 3)}

f) {(1; 3), (1; 4), (1; 5), (2; 3), (2; 4), (2; 5), (3; 1), (3; 2), (3; 3), (3; 4), (3; 5), (4; 1), (4; 2), (4; 3), (5; 1), (5; 2), (5; 3)}

g) {(1; 3), (2; 3), (3; 3), (4; 3), (5; 3)}

5.13) a) n^2

b) m^2

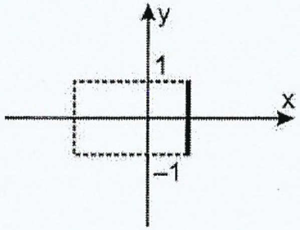
c) $n \cdot m$

d) n

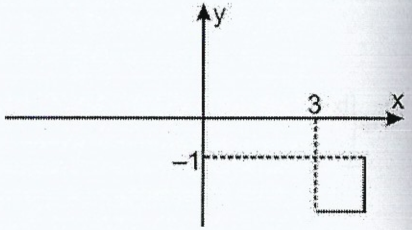
e) $m^2 - m$

5.14) A = {1; 2; 3}, B = {2; 4}

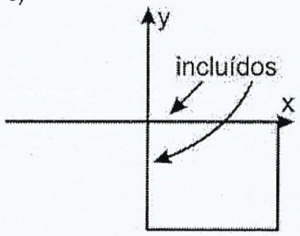
5.16) a)



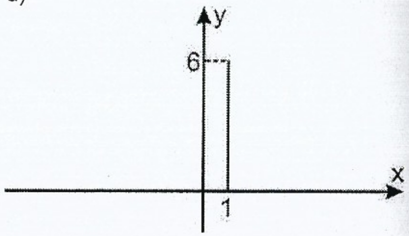
b)



c)



d)

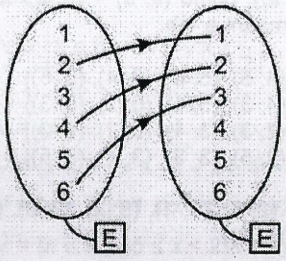


5.20) a) F
b) V
c) V
d) F

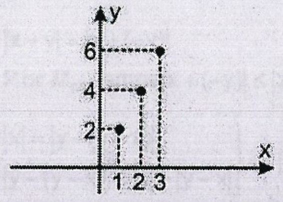
5.21) $D(\mathfrak{R}) = \{x\}$, $I(\mathfrak{R}) = B$

5.22) $2^{m \cdot n}$

5.23) a) {(2; 1), (4; 2), (6; 3)}
b)

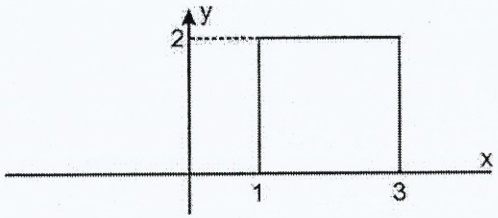


c)



5.27) a) {(−1; −1), (0; 0), (1; 1), (2; 2), (3; 3)}
b) $D(\mathfrak{R}) = \{-1; 0; 1; 2; 3\} = I(\mathfrak{R})$
c) $\mathfrak{R} = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y \wedge -1 \leq x \leq 3 \wedge -1 \leq y \leq 3\}$

5.28)



5.29) a) {(5; 0), (3; 4), (4; 3), (0; 5), (−3; 4), (−4; 3), (0; 5), (−4; −3), (−3; −4), (0; −5), (3; −4), (4; −3)}
b) $D(\mathfrak{R}) = \{-5; -4; -3; 0; 3; 4; 5\} = I(\mathfrak{R})$
c) É o conjunto constituído por 12 pontos sobre uma circunferência de centro na origem e raio 5.

5.30) $\mathfrak{R}_1 = \{(1; \{1; 2\}), (2; \{1; 2\}), (1; \{1; 2; 3\}), (2; \{1; 2; 3\}), (3; \{1; 2; 3\})\}$
$\mathfrak{R}_2 = \{(\{1; 2\}; \{1; 2; 3\})\}$

5.36) $\mathfrak{R}_3$ e $\mathfrak{R}_5$

5.37) $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_4$ e $\mathfrak{R}_5$

5.38) $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ e $\mathfrak{R}_5$

5.39) $\mathfrak{R}_2$

5.40) sim

5.41) não (x < x é falso)

5.42) sim

5.43) sim

5.44) a) 1º) $\mathfrak{R} = \{(-1; -2), (0; 0), (1; 2)\}$
2º) $D(\mathfrak{R}) = \{-1; 0; 1\}$; $I(\mathfrak{R}) = \{-2; 0; 2\}$
3º) $\mathfrak{R}^{-1} = \{(-2; -1), (0; 0), (2; 1)\}$
$\mathfrak{R}^{-1} = \{(x; y) \in A^2 \mid x = 2y\}$

b) 1º) $\mathfrak{R} = \{(-1; -2), (0; -1), (1; 0), (2; 1), (3; 2)\}$
2º) $D(\mathfrak{R}) = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$; $I(\mathfrak{R}) = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$
3º) $\mathfrak{R}^{-1} = \{(-2; -1), (-1; 0), (0; 1), (1; 2), (2; 3)\}$
$\mathfrak{R}^{-1} = \{(x; y) \in A^2 \mid y = 2x\}$

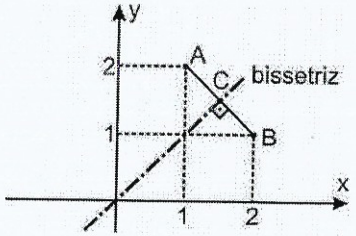
c) 1º) $\mathfrak{R} = \{(-2; -1), (-1; -2), (1; 2), (2; 1)\}$
2º) $D(\mathfrak{R}) = \{-2; -1; 1; 2\} = I(\mathfrak{R})$
3º) $\mathfrak{R}^{-1} = \mathfrak{R}$

5.45) a) $\mathfrak{R}^{-1} = A \times A$ e $\mathfrak{R}' = \varnothing$

b) $\Re^{-1} = \varnothing$ e $\Re' = A \times A$

c) $\Re$

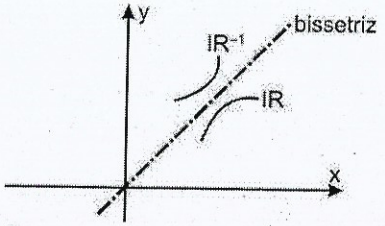
5.47)



a) sim

b) med($\overline{AC}$) = med($\overline{BC}$)

c) O gráfico de $\Re^{-1}$ é simétrico ao gráfico de $\Re$ com relação à bissetriz:

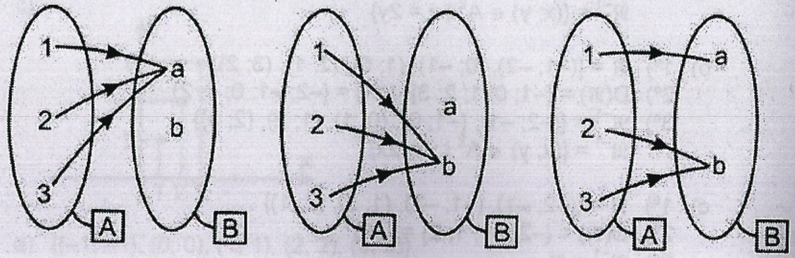


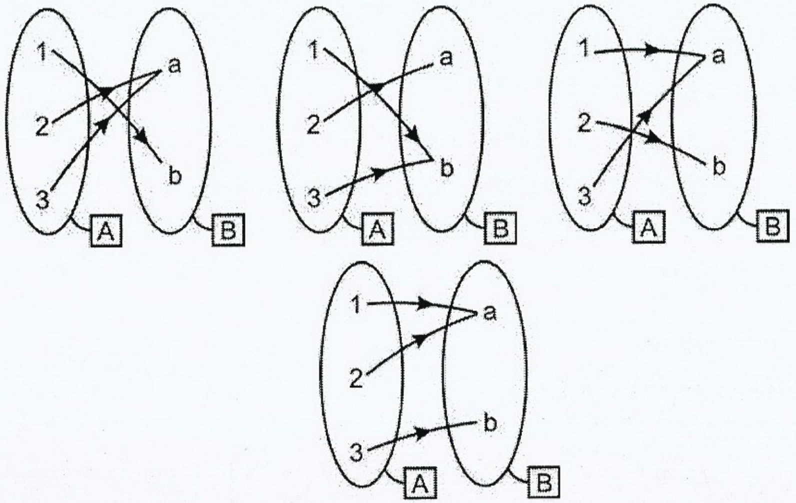
5.48) Devemos provar que se (a; b) $\in \Re_1 \cup \Re_2$ então (b; a) $\in \Re_1 \cup \Re_2$.
Se (a; b) $\in \Re_1 \cup \Re_2$ então (a; b) $\in \Re_1$ ou (a; b) $\in \Re_2$ e como $\in \Re_1$ e $\Re_2$ são simétricas: (b; a) $\in \Re_1$ ou (b; a) $\in \Re_2$ e daí (b; a) $\in \Re_1 \cup \Re_2$.

5.52) a e c

5.53) a) A
b) {0; 1; 4}
c) 4
d) 1
e) –2; 2
f) 0; 1

5.54)



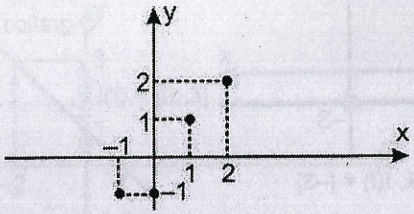


Em nosso curso de Análise Combinatória está demonstrado que se um conjunto A possui **m** elementos e um conjunto B possui **p** elementos, o número de funções de A em B é dado por $\mathbf{p}^m$.

5.55) a) F b) F c) V d) V
e) V

5.56) sim; todo x de A tem imagem x.

5.61) a) {(–1; –1), (0; –1), (1; 1), (2; 2)}
b) {–1; 1; 2}
c) {–1; 1; 2}
d)



5.62) {0}

5.63) a) 1 b) 0 c) 0 d) 1

5.64) 0; –1

5.65) sim

5.66) não

6.4) a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R} - \{1; 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

6.5) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x > 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

6.6) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge x \neq 0\}$
b) $\{1\}$
c) $\mathbb{R}$

6.7) a) $\mathbb{R}_+$ b) $\mathbb{R}$ c) $\mathbb{R}$ d) $\{0\}$

6.8) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
b) $\mathbb{R}_-^*$
c) $\mathbb{R}_+^*$

6.9) a) $\{1\}$ b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ c) $\mathbb{R}$ (convenção)

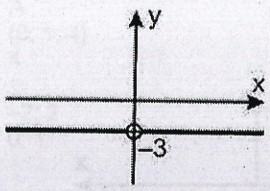
6.10) a' = 0; D(f) = $\mathbb{R}$; a > 0: D(f) = $\mathbb{R}_-$; a < 0; D(f) = $\mathbb{R}_+$

6.11) m = 3

6.14) a e d

6.15) a) D(f) = [–2; 3]; I(f) = [–3; 2]
b) –2; 2; 0; –3; 0
c) {–1; 1; 3}
d) $[-2; -1[\cup]1; 3[$

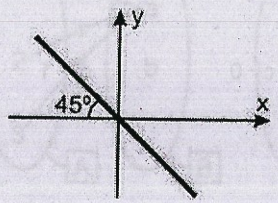
6.21) a)



D(f) = $\mathbb{R}$, I(f) = {–3}

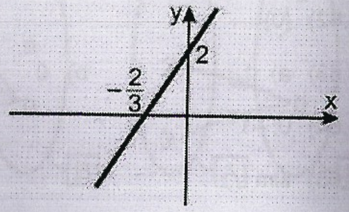
b) D(f) = $\mathbb{R}$, I(f) = {0}
O gráfico é o eixo Ox

c)



D(f) = I(f) = $\mathbb{R}$

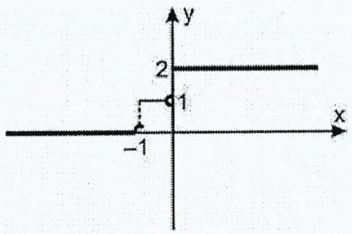
d)



D(f) = I(f) = $\mathbb{R}$

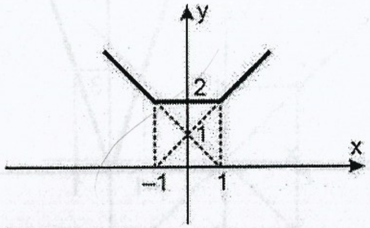
6.22) (–2; –7)

6.23) a) 0; 1; 2; 2
b)



c) I(f) = {0; 1; 2}

6.24) a)

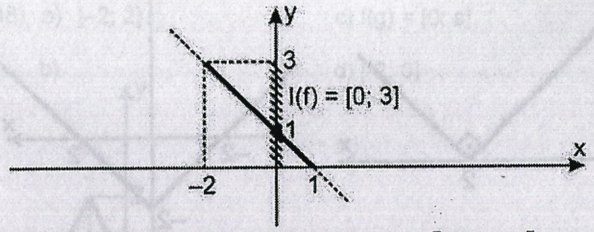


I(f) = [2; +∞[

6.25) a) $a = -\frac{1}{2}$ e $b = 1$

6.26) m = 1: não há ponto fixo; m ≠ 1: o ponto fixo é $x = \frac{-1}{m-1}$

6.27)



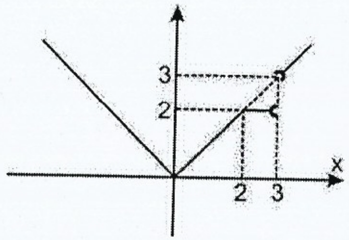
6.28) a) ∅ b) $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

6.36) a) m < –1 ou m > 1 b) –1 < m < 1

6.44) Para que f(x) = x deve-se ter x ≥ 0: são seus pontos-fixos.
O zero da função é x = 0.

6.45) a) 2; 2; 2; π

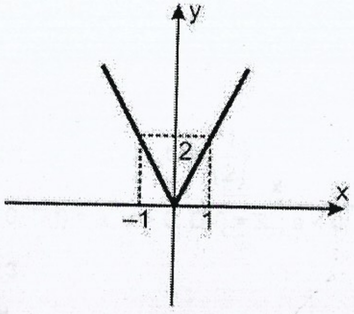
b)



c) $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$; $I(f) = \mathbb{R}_+$

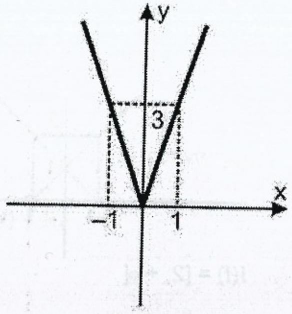
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -2 \text{ ou } 2 \leq x < 3\}$

6.46) a)



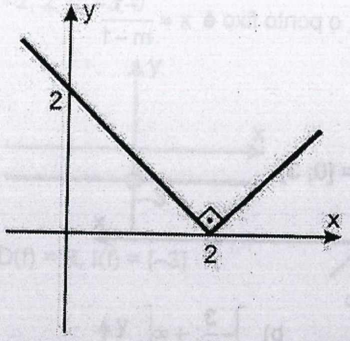
$I(f) = \mathbb{R}_+$

b)



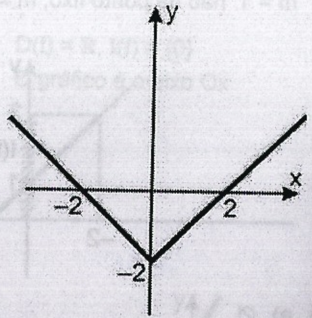
$I(f) = \mathbb{R}_+$

c)



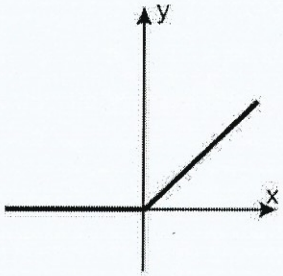
$I(f) = \mathbb{R}_+$

d)



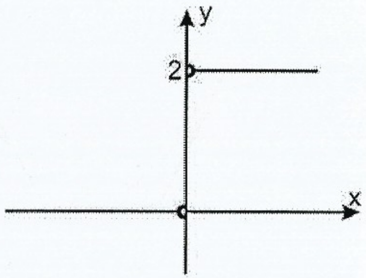
$I(f) = [-2; +\infty[$

6.47) a)



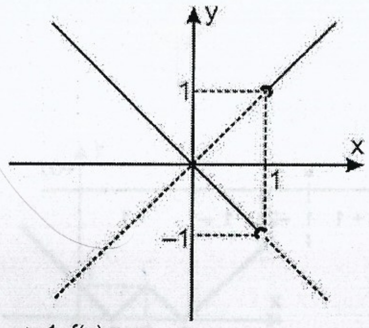
$x \geq 0$: $f(x) = x$
$x \leq 0$: $f(x) = 0$
$D(f) = \mathbb{R}$; $I(f) = \mathbb{R}_+$

b)



$x > 0$: $f(x) = 2$
$x < 0$: $f(x) = 0$
$D(f) = \mathbb{R}^*$; $I(f) = \{0; 2\}$

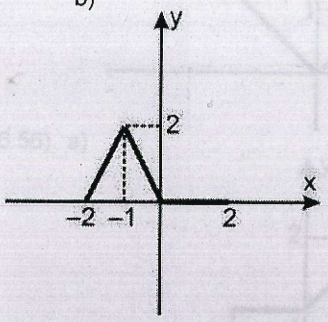
c)



$x > 1$; $f(x) = x$
$x < 1$; $f(x) = -x$
$D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; $I(f) =]-1; +\infty[$

6.48) a) $[-2; 2]$

b)

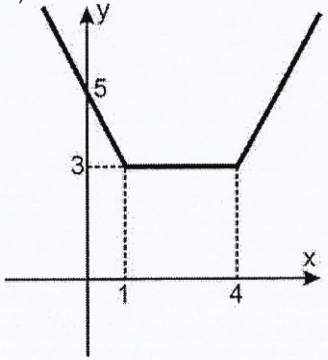


$f(x) \geq 0$; $g(x) = f(x)$
$f(x) < 0$; $g(x) = 0$

c) $I(g) = [0; s]$

d) $[-2; 0]$

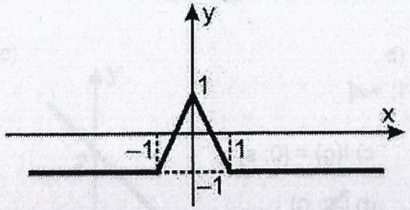
6.49) a)



b) I(f) = [3; +∞[

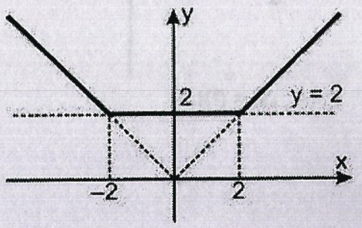
6.50) a)

x	−∞		−1		0		1		+∞
f(x)		−1	−1	2x + 1	1	−2x + 1	−1	−1	



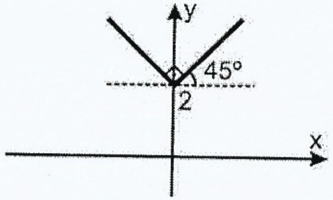
b) I(f) = [−1; 1]

6.51)

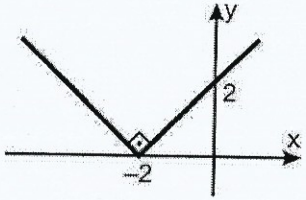


I(f) = [2; +∞[
desenhe y = 2 e y = |x| e considere a curva que está "por cima".

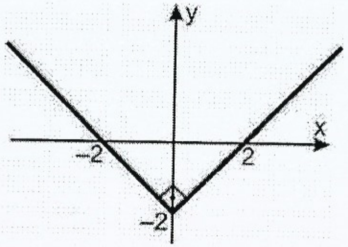
6.54) a)



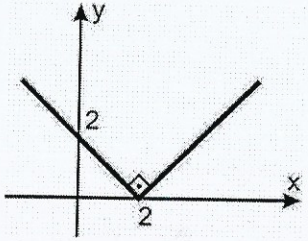
b)



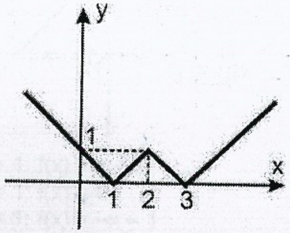
c)



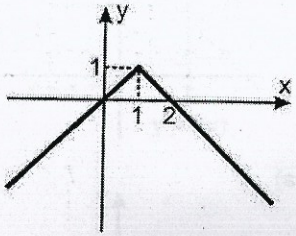
d)



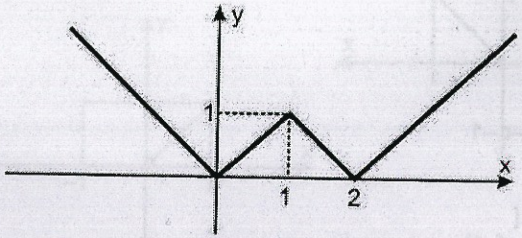
6.55) a)



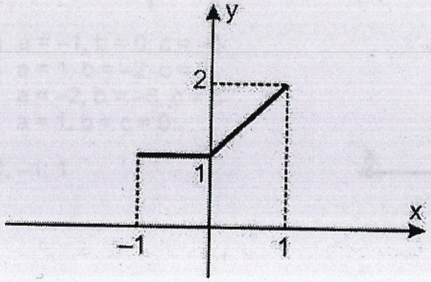
b)



c)

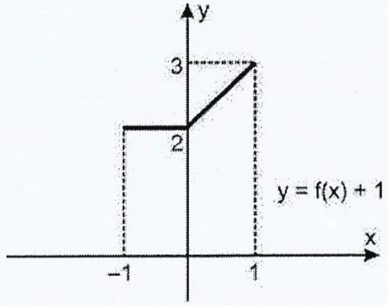


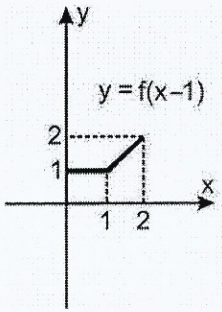
6.56) a)

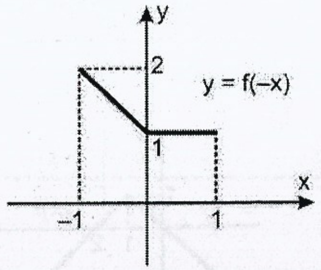


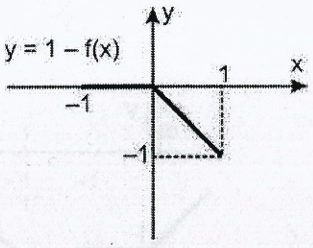
b) D(f) = [−1; 1]
I(f) = [1; 2]

c)

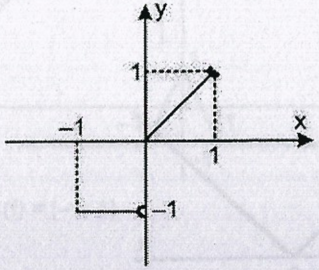






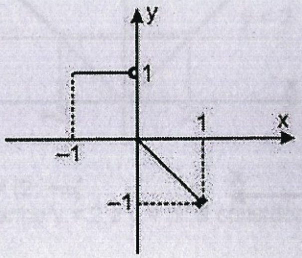


6.57) a)



b) D(f) = [−1; 1[
I(f) = [0; 1[∪ {−1}

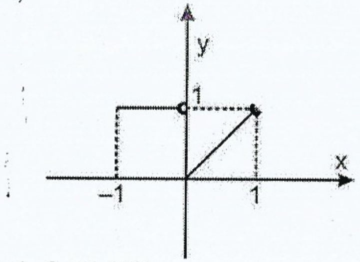
c)



d) [0; 1[∪ {−1}

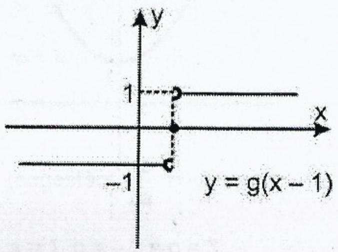
e) S = D(f)

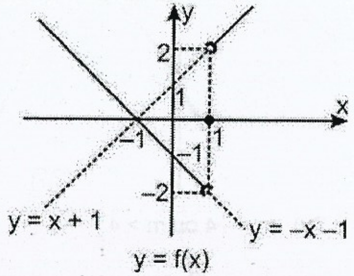
f)



g) S = [−1; 0[

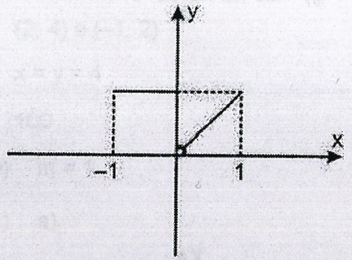
6.58)





x > 1: f(x) = x + 1
x = 1: f(x) = 0
x < 1: f(x) = −x − 1

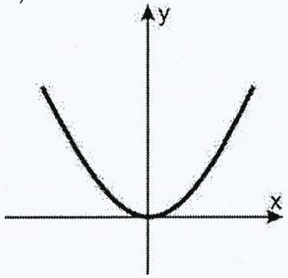
6.59)



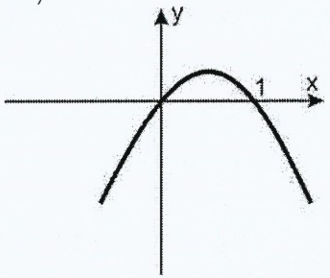
6.62) a) a = −1, b = 0, c = −1
b) a = 1, b = −2, c = 2
c) a = −2, b = −6, c = 0
d) a = 1, b = c = 0

6.63) −1; −1; 1

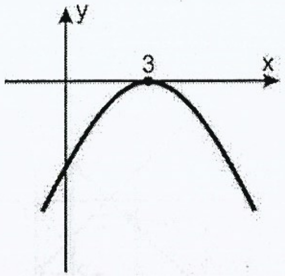
6.64) a)



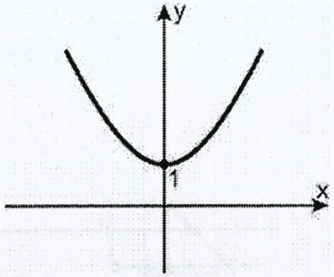
b)



c)



d)



6.70) $m < -4$ ou $m > 4$

6.71) a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $0; -\frac{1}{4}$

c) não há zeros

d) 0

e) 1 e 3

f) 3

g) não há zeros

6.72) a) 1 e 5
b) 1
c) não há ponto fixo

6.73) $k \leq -2$ ou $k \geq 2$

6.74) $k = 0$ ou $k = 1$

6.75) $-3 < k < 3$

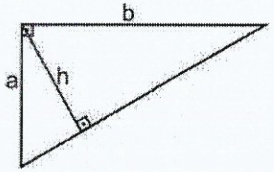
6.76) $m = 0$: 1 ponto fixo $x = 1$

$m = \frac{1}{4}$: 1 ponto fixo $x = 2$

$m < \frac{1}{4}$: não há ponto fixo

$m > \frac{1}{4}$: 2 ponto fixos

6.77)



(sugestão: calcule Δ e use a relação $\sqrt{a^2+b^2}\cdot h = a\cdot b$)

6.78) Note que: $|f(x) = f(x)$, se $f(x) \geq 0$ e daí $S = [5; 6]$

6.79) b) $b \neq 0$: $S = \{0\}$
$b = 0$: $S = \mathbb{R} - \{1; -1\}$

6.89) a) em $x = 2$, $y_m = -4$
b) em $x = 2$, $y_M = 5$
c) em $x = -5$, $y_m = -33$
d) em $x = 0$, $y_m = 1$
e) em $x = 0$, $y_M = 0$

6.90) $m = 4$

6.91) $m = -1$

6.92) (sugestão: $\frac{-b}{2a} = -2$ em $m - 1 < 0$) $m = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$

6.93) $a = 1$, $b = -2$ e $c = 3$

6.94) $b = -2$ e $c = 3$

6.95) $\frac{A^2}{4}$

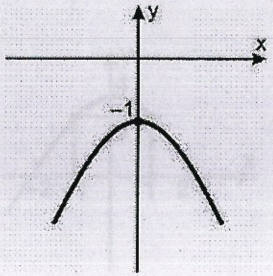
6.96) (2; 4) e (–1; 2)

6.97) $x = y = 4$

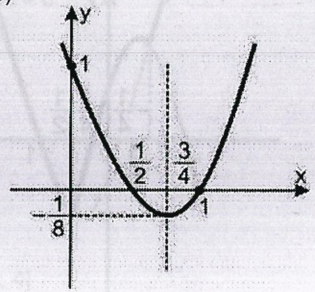
6.99) 100

6.100) $m = 1$

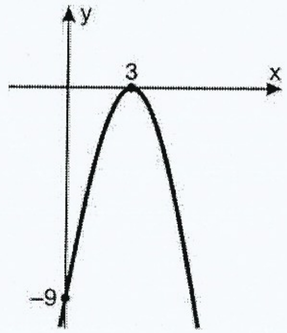
6.101) a)

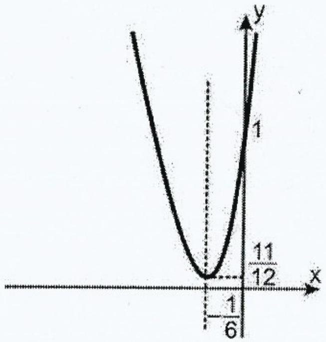


b)

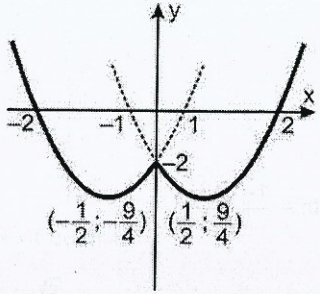


c)

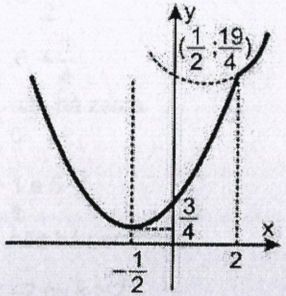




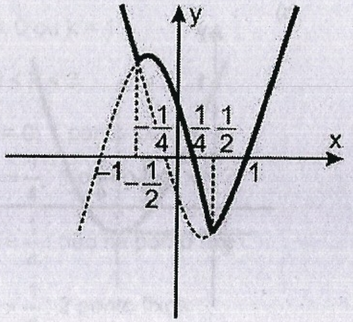
6.102)



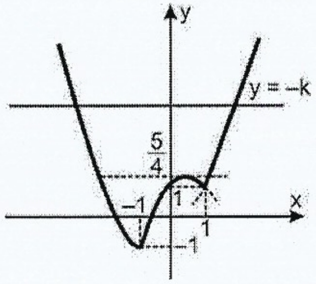
6.103)



6.104)



6.105)

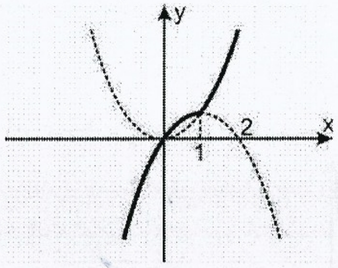


$k < -\frac{5}{4}$: 2 soluções; $k = -\frac{5}{4}$: 3 soluções; $-\frac{5}{4} < k < -1$: 4 soluções

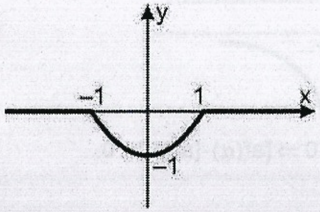
$k = -1$: 3 soluções; $-1 < k < 1$: 2 soluções; $k = 1$: 1 solução

$k > 1$: nenhuma solução

6.106) Note que: $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

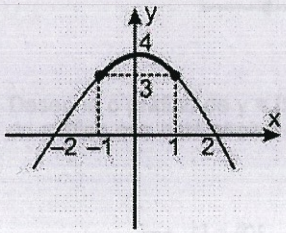


6.107)



6.108) $a > 0$; $x_V = \frac{b}{2a} \Rightarrow b > 0$; $c < 0$; $b^2 - 4ac > 0$; $a - b + c > 0$ (faça $x = 1$ e note que $f(1) > 0$); $a + b + c > 0$; $a - 2b + 4c = 0$

6.109)



I(f) = [3; 4]

6.110) a) $\left[-\frac{5}{2}; +\infty\right[$ d) $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[$

b) $\mathbb{R}_-$ e) $[8; +\infty[$

c) $\left]-\infty; \frac{25}{12}\right]$ f) $\mathbb{R}_-$

6.111) $\frac{7}{16}$

6.112) $a > 0$; $\ell < 0$, $b^2 - ac < 0$; $m^2 - \ell n > 0$; $\ell b^2 - 2mab + na^2 > 0$

6.113) $-2 < m < 2$

6.117) a) $x_1 < 1 < x_2$ c) $x_1 < x_2 < 6$

b) $x_1 < x_2 < 3$ d) $3 < x_1 < x_2$

6.118) $0 < m < 4$

6.119) $m \geq \frac{11}{9}$

6.120) $2\sqrt{2} \leq m < \frac{11}{9}$

6.121) $a < -2$

6.122) $m < 0$, $-1 < x_1 < 1 < 2 < x_2 < 3$

$0 < m < 1$: $-1 < 1 < x_1 < 2 < 3 < x_2$

$1 < m$, $x_1 < -1 < 1 < x_2 < 2 < 3$

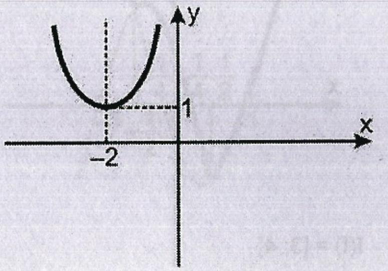
6.123) $p < x_1 < q < x_2 < r$

6.124) $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0 \xrightarrow{a^2 > 0} a^2 f(\alpha) f(\beta) < 0 \Rightarrow [af(\alpha)\cdot[af(\beta)] < 0 \ldots$

6.125) $0 < a < \frac{1}{2}$

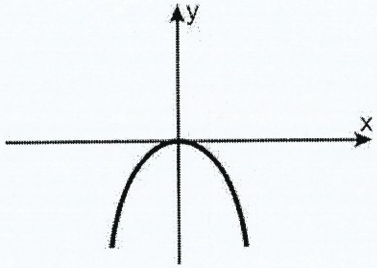
6.129) a) $a > 0$ b) $a < 0$

6.130)



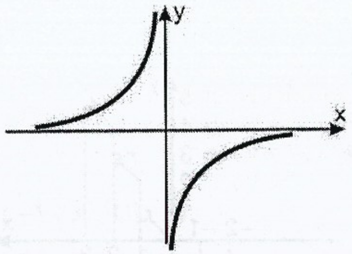
$I(f) = [1; +\infty[$

6.131)

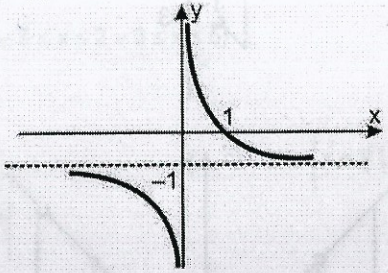


6.132) c) ± 1

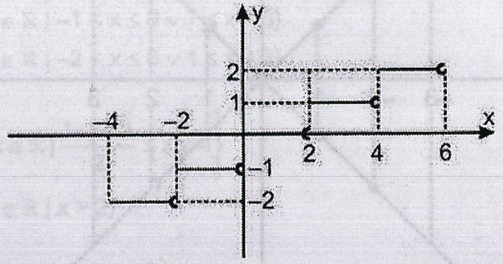
6.133)



6.134) Note que: $\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$

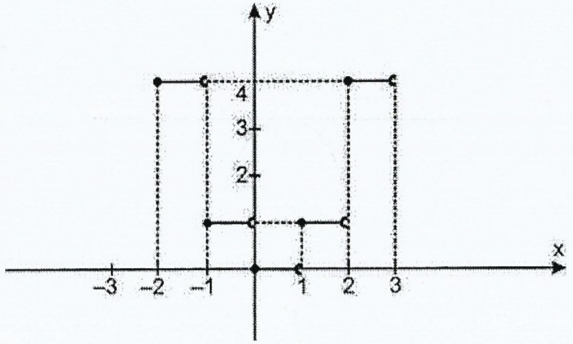


6.135)

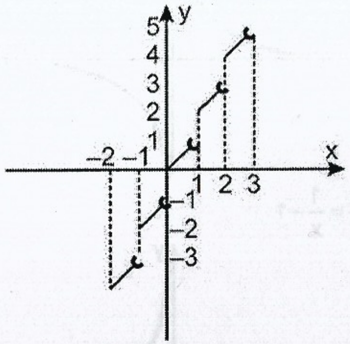


6.136) Desenhe o gráfico de $y = [x]$ e faça uma reflexão em torno de Ox da parte do gráfico que está abaixo de Ox.

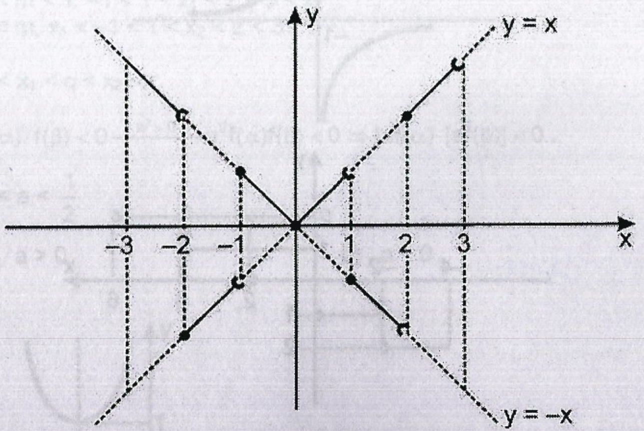
6.137)



6.138)



6.139)



6.140) a) [3; 4[b) ∅

6.141) $\mathbb{N}$

6.142) todos os inteiros são pontos fixos

Capítulo 7

7.5) a) V = {–5; 4} b) V = {0; –7} c) V = {4}

7.6) a) V = {5; –2}
b) V = {0; 4}
c) V = {4; 8}
d) V = {3}

7.7) $V = \left\{\frac{9}{35}; \frac{2}{15}\right\}$

7.8) a) V = {3} b) V = {1}

7.9) a) V = {5; –5} b) V = {0; 1; 3}

7.15) a) V =]4; +∞[
b) V = [4; +∞[
c) V = ∅
d) V = {4}
e) V =]4; +∞[
f) V = [4; +∞[
g) V =]– ∞; 4[
h) V =]– ∞; 4]

7.16) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le -1 \vee x \ge 11\}$
b) $V = \left]-\frac{5}{2}; \frac{11}{2}\right[$

7.17) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x \le 2 \vee 3 \le x \le 5\}$
b) V = [–3; 6]
c) V = [–3; 6[

7.18) a) V =]40; +∞[
b) $V = \left]-\infty; \frac{134}{7}\right[$
c) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee x > \frac{5}{6}\right\}$

7.20) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \le 0 \vee 7 \le x < 8\}$
b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \le 0 \vee 1 \le x < 3\}$

7.21) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+\sqrt{41}}{2} \le x < 4\right\}$
b) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

7.23) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \le x \le \frac{9}{2}\right\}$
b) V = ∅
c) V =]8; +∞[
d) V = [8; +∞[

7.26) a) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0 \vee x \ge 4\}$

b) V = {x ∈ ℝ | x < 0 ∨ x > 4}

c) V = {x ∈ ℝ | x < −2 ∨ x > 6}

7.27) a) $V = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \le \frac{-9-\sqrt{89}}{4} \vee x > 2 \right\}$

b) $V = \left[-\frac{19}{6}; 5 \right[$

7.32) a) $x = \frac{17}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$

b) x = 5 e y = 4

c) x = 6 e y = 1

d) $x = \frac{15}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$

e) não é possível

f) não é possível

7.33) a = 2 e b = 3

Capítulo 8

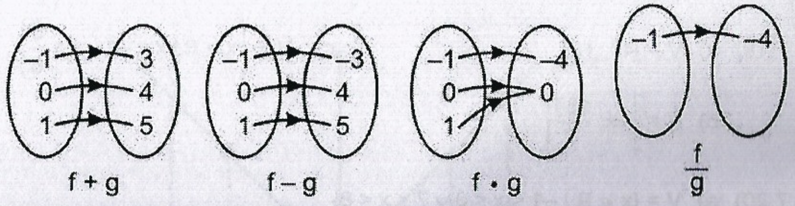
8.3) f + g = {(1; 4), (2; 6), (3; 4)}

f − g = {(1; 0), (2; 0), (3; 4)}

f · g = {(1; 4), (2; 9), (3; 0)}

$\frac{f}{g}$ = (1; 1), (2; 1)}

8.4)



Adotamos por definição CD = ℝ.

8.5) D(f + g) = ℝ

D(f − g) = ℝ

D(f · g) = ℝ

$D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{1; -1\}$

$(f + g)(x) = x + x^2 - 1$

$(f - g)(x) = x - x^2 - 1$

$(f \cdot g)(x) = x(x^2 - 1)$

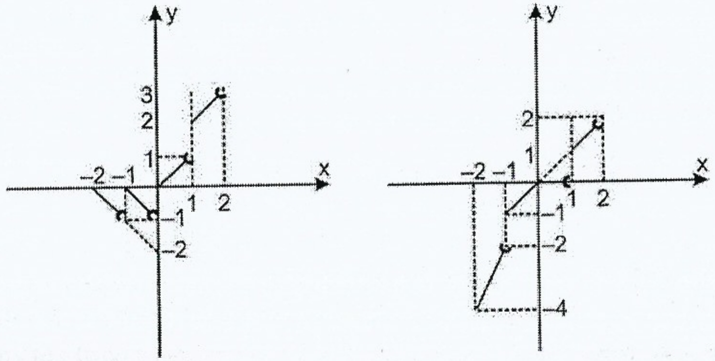
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

8.6) a) $D(f + g) = D(f - g) = D(f \cdot g) = \mathbb{R}$; $D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - [0; 1[$

(f + g) = |x| + [x]; (f − g) (x) = |x| − [x];

$(f \cdot g) = |x| \cdot [x]$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{|x|}{[x]}$

b)



8.17) {(1; 4)}

8.18) a) 4

b) 19

c) 1

d) −11

8.19) a) ℝ

b) ℝ

c) ℝ

d) $(x - 1)^{2+1}$

e) ℝ

f) x^2

8.20) a) ℝ

b) $\mathbb{R}_+$

c) ℝ

d) |x|

e) $\mathbb{R}_+$

f) $(\sqrt{x})^2$

8.21) a) {x ∈ ℝ | x ≤ −1 ∨ x > 1}

b) ℝ

c) {x ∈ ℝ | x ≤ −1 ∨ x ≥ 1}

d) |x|

e) ℝ

f) |x|

8.22) a) ℝ*

b) ℝ − {−1}

c) $\mathbb{R}^* - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

d) $\frac{x}{2x - 1}$

e) ℝ − {−1}

f) −x

8.23) a) {x ∈ ℝ | x ≥ 1}

b) ℝ*

d) $\frac{1}{\sqrt{x - 1}}$

e)]0; 1]

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

f) $\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

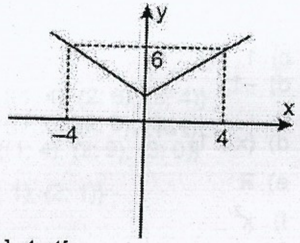
8.24) a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{R}^*$
c) $\mathbb{R}^*$
d) x^{-4}
e) $\mathbb{R}^*$
f) x^{-4}

8.25) a) 0; 8; –1; 12

b) $g[f(x)] = \begin{cases} -2x, \text{ se } x \leq 1 \\ 2x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ $\quad f[g(x)] = \begin{cases} -2x, \; x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2x, \; x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

8.26) $\dfrac{x+3}{2}$

8.27) a) $|x| + 2$
b)



c) $]-4; 4[$

8.28) $(a - 1)\,d = b(c - 1)$

8.29) $\dfrac{1-x}{1+x}$

8.30) $-\dfrac{1}{4}$

8.31) a) 3 ou –1
b) $f(3x + 4) \neq 3f(x) + 4$

8.32) 52

8.33) 1

8.34) a) 3
b) $-2x + 3$
c) $2x + 5$
d) $2x + 4$
e) $\dfrac{3x+2}{x}$
f) $\dfrac{1}{2x+3}$
g) 2

8.35) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$

8.36) a) 11; 10; 12
b) $\begin{cases} 2x+1, \text{ se } x \text{ é ímpar} \\ 2x+3, \text{ se } x \text{ é par} \end{cases}$

8.37) a) par
b) ímpar
c) par

8.38) zero

8.41) Seja $x \in E$; façamos $f(x) = y$, $g(y) = z$ e $h(z) = w$
$[(h \circ g) \circ f]\,(x) = (h \circ g)\,(f(x)) = (h \circ g)\,(y) = h[g(y)] = h(z) = w$
$[h \circ (g \circ f)]\,(x) = h[(g \circ f)\,(x)] = h\,\{g\,[f(x)]\,\} = h\,[g(y)] = h(z) = w$

Capítulo 9

9.8) a) não se classifica
b) sobre e não in
c) in e não sobre

9.9) a) não se classifica
b) in e não sobre
c) bijetora

9.10) a) não se classifica
b) sobre e não in
c) bijetora
d) não se classifica
e) sobre e não in
f) sobre e não in

9.11) $y = \dfrac{3}{4}$ não é imagem de nenhum x.

9.12) Não é injetora: 0 é imagem de infinitos valores de x. f é sobrejetora, pois para todo $y \in CD(f)$ existe $x = 2y$, tal que $f(x) = y$.

9.13) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = f(2) = \dfrac{17}{4}$ (não é injetora); $f(1) = 2$

9.14) não existe x | f(x) = 1; existem 2 valores de x, tal que f(x) = –1.

9.15) $\mathbb{R}_+$

9.16) 3

9.17) $p \geq q$, $p \leq q$, $p = q$

9.18) 6

9.19) 6

9.20) 6

9.21) Como g é sobrejetora, para todo $z \in E$ existe $y \in E \mid g(y) = z$; como f é sobrejetora, para todo $y \in E$ existe $x \in E$ tal que $f(x) = y$.
Logo, para todo $z \in E$ existe $x \in E$, tal que: $z = g(y) = g[f(x)] = (g \circ f)(x)$.

9.27) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

9.28) (a = 1 e b = 0) ou (a = –1 e b qualquer)

9.29) a) $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_-;\ f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$

b) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\};\ f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$

c) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

d) $f^{-1}: \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\} \to \mathbb{R}_+;\ f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

e) $f^{-1}: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}^*;\ f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$

9.30) a) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$

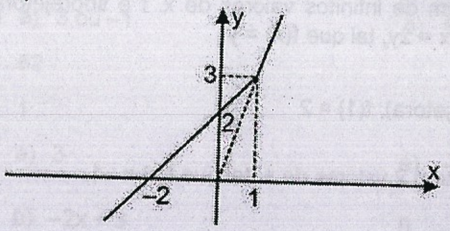
b) x e x

9.31) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, \text{ se } x \geq -1 \\ x+1, \text{ se } x < -1 \end{cases}$

9.33) m = 2

9.34) $f^{-1}(x) = f(x)$; para que f seja bijetora.

9.35) a)



b) Retas encontram o gráfico de f em um e somente um ponto, portanto a função é bijetora.

c) $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{-1}(x) = \frac{2x}{3} - 1 - \frac{1}{3} \cdot |x-3|$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

Parte I

I.1) V = {(0; –1); (–1; –4)}

I.2)

p	q	r	~r	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim r$	$\sim(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim r)$
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	V	V

I.3) a) $\left[-\frac{49}{10}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$

b) [1; π[

c) ∅

I.4) a) 22
b) 24
c) 35
d) 7

Parte II

II.1) a) $a < -\frac{13}{3}$

II.2) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 0 \text{ ou } 5 < x \leq 7\}$

b) ∅

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 0 \text{ ou } \sqrt{2} \leq x \leq 7\}$

II.3) S = {0}

II.4) $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

II.5) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > -1\}$

II.6) $V = \left\{\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{-1}{3}\right)\right\}$

II.7) $(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+4)(x+2)(x-2)$

II.8) $V = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 \vee 1 < x < 2\}$

II.9) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -2 \vee -1 \le x < \frac{-1}{2} \vee \frac{1}{2} < x \le 1 \vee x \ge 2\right\}$

II.10) 4

Parte III

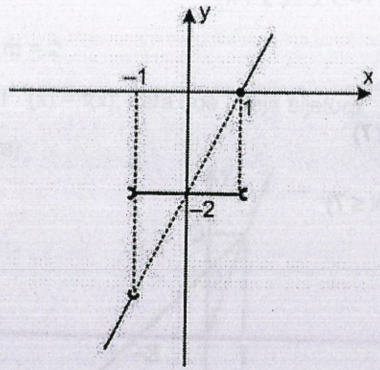
III.1) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

III.2) $C_0 = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x\, \Re\, 0\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge x - 0$ é divisível por $3\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6\}$

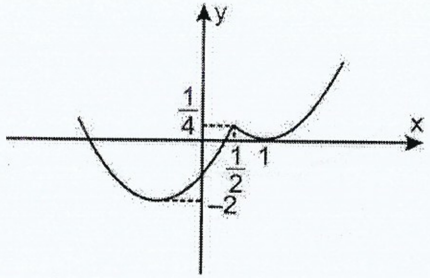
III.3) a) $\Re = \{(9; 1), (6; 2), (3; 3)\}$
b) $D(\Re) = \{9; 6; 3\}$; $I(\Re) = \{1; 2; 3\}$
c) $\Re^{-1} = \{(1; 9), (2; 6), (3; 3)\}$

III.4) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \le -2$ ou $-1 \le x < 0\}$
b) $]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; 4[$

III.5)



III.6)

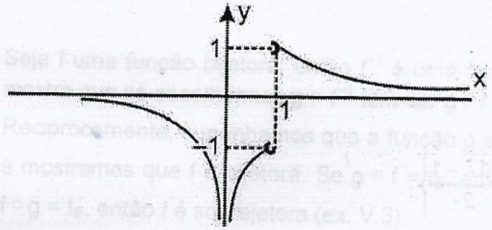


III.7) $a = \frac{3}{4}$ e $x_0 = -\frac{1}{12}$

III.8) $-\frac{171}{49} < m < -3$

III.9) $f(1) = -1$ e $f(2) = 1$ (veja ex. 6.112)
$m < 0$: $1 < x_1 < 2 < x_2$
$m > 0$: $x_1 < 1 < x_2 < 2$

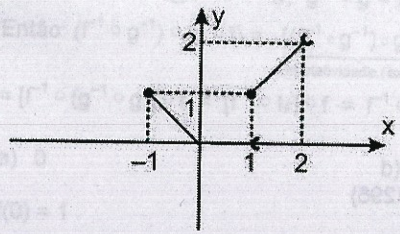
III.10)



III.11) $\frac{\ell}{2}$

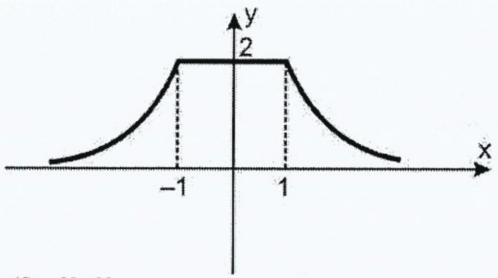
III.12) $p = 0$ ou ($p > 0$ e $-2 \le a < 0$)

III.13)



III.14) Note que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$; faça $x = 1, 2, 3, ..., 100$ e some: $\frac{100}{101}$

III.15)



$I(f) =]0; 2]$

Parte IV

IV.1) $S = \{4\}$

IV.2) $S = \left\{\frac{5}{4}\right\}$

IV.3) $m < 0$: $S = \varnothing$
$m = 0$: $S = \mathbb{R}_+$
$m > 0$: $S = \left\{-\frac{m}{3}\right\}$

IV.4) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leq x < \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right\}$

IV.5) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} < x < 3\right\}$

IV.6) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0\}$

IV.7) Se $a < b < a\sqrt{2}$: 2 raízes
Se $b < a$: 1 raiz

IV.8) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

IV.9) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 81 \text{ ou } x \geq 1296\}$

IV.10) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

IV.11) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

IV.12) 8; $\sqrt{5} - 1$; $\sqrt{5} + 1$

IV.14) $\frac{s+d}{2} = \sqrt{a}$ e $\frac{s-d}{2} = \sqrt{b}$ e $sd = a - b$; se s é racional, então $d = \frac{a-b}{s}$ é racional e $\sqrt{a} = \frac{s+d}{2}$ é racional: absurdo! Etc.

$A^2 - B$ deve ser um quadrado perfeito; $3\sqrt{3} + 2$.

Parte V

V.3) Sejam x_1 e x_2 dois elementos quaisquer de E e suponhamos que $f(x_1) = f(x_2)$; como $g \circ f = I_E$ temos:

$x_1 = I_E(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g[f(x_1)] = g[f(x_2)] = (g \circ f)(x_2) = I_E(x_2) = x_2$
o que mostra que f é injetora.
Se x é um elemento qualquer de E, então $y = f(x)$ pertence a F e temos:
$x = I_E(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(y)$ e daí g é sobrejetora.

V.4) Seja f uma função bijetora; então f^{-1} é uma função de F em E e o ex. 9.26 mostra que se escolhermos $g = f^{-1}$ tem-se: $g \circ f = I_E$ e $f \circ g = I_E$.
Reciprocamente, suponhamos que a função g satisfaça: $g \circ f = I_E$ e $f \circ g = I_F$ e mostremos que f é bijetora. Se $g \circ f = I_E$, então f é injetora (ex. V.3) e se $f \circ g = I_E$, então f é sobrejetora (ex. V.3).

V.5) Do exercício anterior, basta mostrar que:
$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_G$
e: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_E$
Temos: $f^{-1} \circ f = I_E$, $f \circ f^{-1} = I_F$, $g^{-1} \circ g = I_F$ e $g \circ g^{-1} = I_G$.
Então: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \underbrace{[(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ g] \circ f}_{\text{comutatividade (ex. 8.41)}} =$
$= [f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g)] \circ f = [f^{-1} \circ I_F] \circ f = f^{-1} \circ f = I_E$ etc.

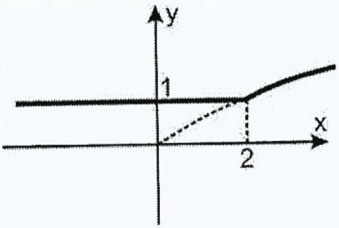
V.6) a) 0 b) nk

V.7) $f(0) = 1$

V.8) 1; –1; 0

V.9) a) $\mathbb{R}$

b)

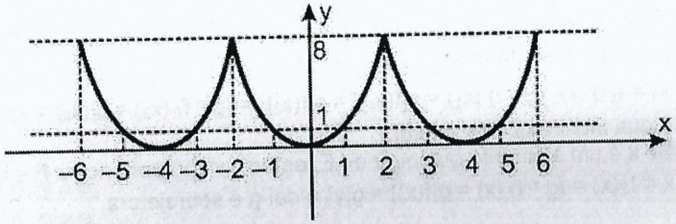


c) $I(f) = [1; +\infty[$

V.10) $g(x) = c$

V.11) a) $f(x) = |x^3|$

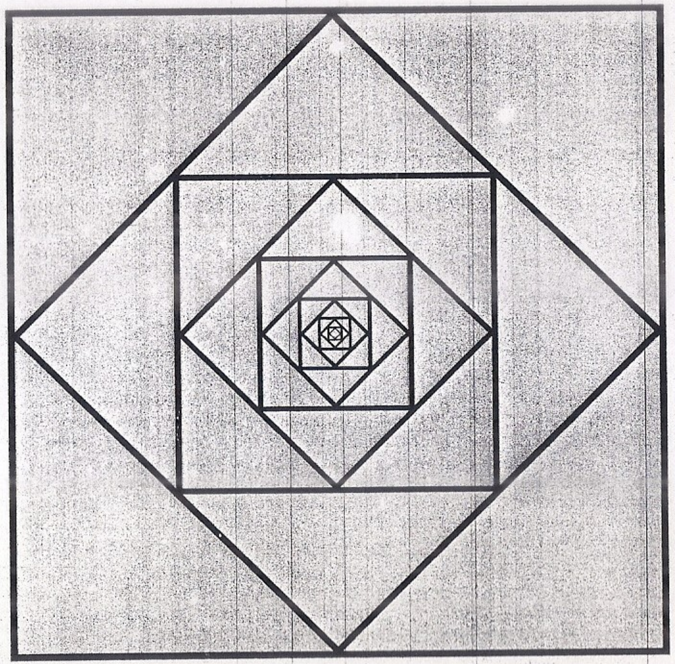
b)



c) $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é ímpar}\}$

d) $[0; 8]$

NOÇÕES DE MATEMÁTICA



VOLUME 2
Progressões e Logaritmos

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

PROGRESSÕES E LOGARITMOS

Noções de Matemática

VOLUME 2

Capa:
Annysteyne Maia Chaves

CIP – Brasil. Catalogação-na-Fonte.
Câmara Brasileira do Livro, SP

P958 Progressões e logaritmos: 2º grau / Aref Antar Neto. (et al.) Fortaleza: Ed. Vestseller, 2009. (Noções de matemática; v.2)

1. Logaritmos 2. Progressões aritméticas 3. Progressões geométricas I. Antar Neto, Aref, 1949 – II. Série.

78-1723

17. CDD – 511.2
18. – 513.4
17. – 511.7
18. – 513.22

Índices para catálogo sistemático:
1. Logaritmos: Aritmética 511.7 (17.) 513.22 (18.)
2. Progressões: Aritméticas 511.2 (17.) 513.4 (18.)

Editora VestSeller

www.VestSeller.com.br

Índice

Parte I

Capítulo 1. **Potências e raízes**.....09

1.1 — Potência de expoente inteiro.....09
1.2 — Algumas propriedades das potências de expoente inteiro.....13
1.3 — Raízes.....16
1.4 — Propriedades das raízes.....19
1.5 — Potência de expoente racional.....24
1.6 — Propriedades das potências de expoente racional.....25
1.7 — Potência de expoente irracional.....30
1.8 — Potência de expoente real.....33

Capítulo 2. **A indução**.....35

2.1 — O que é a indução?.....35
2.2 — O método da Indução Matemática.....37

Parte II

Capítulo 3. **Sequências**.....47

3.1 — Introdução.....47
3.2 — Função.....48
3.3 — Sequência finita.....50
3.4 — Meios e extremos.....52
3.5 — Sequência infinita.....53
3.6 — Recorrência.....54
3.7 — Somatório.....64
3.8 — Produtório.....66

Capítulo 4. **Progressões aritméticas**.....71

4.1 — Definição.....71
4.2 — Sequências crescentes e decrescentes.....71
4.3 — Propriedades.....72
4.4 — Fórmula do termo geral.....72
4.5 — Média aritmética.....85
4.6 — Propriedades.....85
4.7 — Representações especiais.....86
4.8 — Propriedades.....89
4.9 — Soma dos termos.....90
4.10 — Potências dos números naturais.....98

Capítulo 5. **Progressões harmônicas** 103

5.1 — Definição 103
5.2 — Média harmônica 103
5.3 — Propriedades 104

Capítulo 6. **Progressões geométricas** 107

6.1 — Definição 107
6.2 — Classificação quanto ao crescimento 107
6.3 — Propriedades 108
6.4 — Fórmula do termo geral 109
6.5 — Média geométrica 116
6.6 — Propriedades 117
6.7 — Representações especiais 118
6.8 — Propriedades 124
6.9 — Produto dos termos 125
6.10 — Soma dos termos 126
6.11 — Limite da soma 131
6.12 — Progressões aritmético - geométricas 137

Parte III

Capítulo 7. **Logaritmos** 143

7.1 — Introdução 143
7.2 — Definição de logaritmo 144
7.3 — Consequências imediatas 145
7.4 — Resumo 146

Capítulo 8. **Propriedades dos logaritmos** 151

8.1 — Primeira propriedade 151
8.2 — Segunda propriedade 151
8.3 — Terceira propriedade 152
8.4 — Quarta propriedade 152
8.5 — Casos particulares 153

Capítulo 9. **Logaritmos decimais** 161

9.1 — Sistema de logaritmos decimais 161
9.2 — Característica e mantissa 161
9.3 — Notação mista dos logaritmos negativos 165
9.4 — Determinação da característica 166
9.5 — Propriedade fundamental da mantissa 168
9.6 — Uso da tábua de logaritmos 168
9.7 — Cálculo aproximado de expressões numéricas, com auxílio de logaritmos 171

Capítulo 10. **Logaritmos neperianos – Uma breve história** 175

10.1 — Logaritmos neperianos 175
10.2 — Uma breve história 176
10.3 — Mudança de base 176

Capítulo 11. **Progressões geométricas** 177

11.1 — Dedução da fórmula de mudança de base 177
11.2 — Consequências 178

Parte IV

Capítulo 12. **Função exponencial – função logaritmo – inequações** 189

12.1 — O conceito de função 189
12.2 — Função real de variável real 190
12.3 — Gráfico de uma função real de variável real 190
12.4 — Introdução às funções exponencial e logaritmo 191
12.5 — Função exponencial 191
12.6 — Gráficos da função exponencial 191
12.7 — Inequações exponenciais 193
12.8 — Função logaritmo 197
12.9 — Inequações logarítmicas 199
12.10 — Gráfico da função logaritmo 207

Capítulo 13. **Construção de gráficos** 211

13.1 — Um resumo 211
13.2 — Construção de gráficos 212

Capítulo 14. **Exponencial e logaritmo: funções inversas** 217

14.1 — O conceito de função inversa 217
14.2 — Logaritmo e exponencial: funções inversas 218

Respostas dos exercícios propostos 224
Respostas dos exercícios suplementares 248
Tábua de logaritmos decimais 258

PARTE I

Capítulo 1 – **Potências e raízes**
Capítulo 2 – **A indução**

Capítulo 1

Potências e raízes

Neste capítulo vamos examinar as definições e as propriedades mais importantes que envolvem as *potências* e as *raízes*. Elas serão úteis nos capítulos posteriores, onde definiremos *logaritmo* de um número real positivo, e onde estudaremos as propriedades das funções exponencial e logarítmica.

1.1. POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO

Definição

Sejam a um número real *qualquer* e *n* um número natural.

Define-se **potência n-ésima do número a** que se indica com o símbolo a^n da seguinte forma:

$$a^0 = 1$$
$$a^n = a \cdot a^{n-1}, \text{ para } n \geq 1$$

Da definição acima obtemos:

$a^1 = a \cdot a^0 = a \cdot 1 = a$
$a^2 = a \cdot a^1 = a \cdot a$
$a^3 = a \cdot a^2 = a \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a$
$a^4 = a \cdot a^3 = a \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a$
....

Observe então que, para $n \geq 2$, a^n é o produto de **n** fatores iguais a **a**:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n fatores}}$$

O número real **a** é chamado **base** da potência e o número natural **n** é chamado **expoente** da potência.

Exemplos

a) $2^0 = (-2)^0 = 0^0 = 1$
b) $2^1 = 2$; $(-2)^1 = -2$; $0^1 = 0$
c) $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
d) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$
e) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$
f) $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$

Exercícios Resolvidos

1.1) Calcule:
a) $(-2)^4$ b) -2^4 c) $-(-2)^3$

Solução

a) $(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$

b) $-2^4 = -(2^4) = -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) = -16$

c) $-(-2)^3 = -[(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)] = -(-8) = 8$

É comum confundir-se $(-a)^n$ com $-a^n$. Note que:

$$(-a)^n = \underbrace{(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot\ldots\cdot(-a)}_{\text{n fatores iguais a } -a}$$

$$-a^n = -(a^n) = -\underbrace{(a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a)}_{\text{n fatores iguais a a}}$$

1.2) Se $a < 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, qual é o *sinal* de a^n?

Solução

Se **n** é par, o número de fatores no desenvolvimento de a^n é par; como $a < 0$, tem-se $a^n > 0$.

Se **n** é ímpar, o número de fatores no desenvolvimento de a^n é ímpar; como $a < 0$, tem-se $a^n < 0$.

1.3) Calcule:
$S = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \ldots + (-1)^{98} + (-1)^{99}$

Solução

Na expressão acima, observe que se **n** é par tem-se $(-1)^n = 1$ e se **n** é ímpar tem-se $(-1)^n = -1$; então:

$S = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + \ldots + (-1)^{98} + (-1)^{99}$

$$S = \underbrace{1-1}_{\text{zero}} + \underbrace{1-1}_{\text{zero}} + \underbrace{1-\ldots}_{\text{zero}} + \underbrace{1-1}_{\text{zero}}$$

$S = 0$

Exercícios Propostos

1.4) Calcule:
a) $(-3)^3$ c) $-(-3)^3$ e) -3^4
b) -3^3 d) $(-3)^4$ f) $-(-3)^4$

1.5) Calcule:
a) $(-2)^0$ c) 0^0 e) $(-1)^{10}$
b) $(-1)^1$ d) 0^5 f) $(\pi)^0$

1.6) Dê, segundo os valores de **n**, $n \in \mathbb{N}$, os *sinais* de:
a) 3^n
b) $(-3)^n$
c) 0^n
d) 1^n

1.7) Para $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$, calcule:
$(-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \ldots + (-1)^n$

1.8) Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $f(x) = 5x^{2n+1} - 10\cdot x^{2n} + 3\cdot x^{2n-1} + 5$, calcule $f(-1)$.

Definição

Sejam **a** um número real *diferente de zero*, e **n** um número natural; define-se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos

a) $2^{-1} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$

b) $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

c) $-14x^{-2}y = -14\dfrac{1}{x^2}y = \dfrac{-14y}{x^2}\ (x \neq 0)$

d) $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{25}} = 25$

Exercícios Resolvidos

1.9) Calcule:

a) $(-2)^{-2}$ d) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$

b) -2^{-2} e) $\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}}$

c) $-(-2)^{-2}$ f) $-\left(-\dfrac{4}{5}\right)^{-2}$

Solução

a) $(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{(-2)(-2)} = \frac{1}{4}$

b) $-(2^{-2}) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$

c) $-(-2)^{-2} = -\frac{1}{(-2)^2} = -\frac{1}{(-2)(-2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{9}$

e) $\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{9}{4}}} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

f) $-\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2} = -\frac{1}{\left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{16}{25}} = -\frac{25}{16}$

Exercícios Propostos

1.10) Calcule:

a) $(-3)^{-3}$

b) -3^{-3}

c) $-(-3)^{-3}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$

e) $\frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}}$

f) $-\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$

1.11) Calcule:

a) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + 2^{-2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} - (-2)^{-2}}$

b) $\left[2^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 5 \cdot 2^0\right]^{-1}$

1.12) Se $ab \neq 0$ e $a + b \neq 0$, simplifique:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{(a+b)^{-1}}$$

1.13) Sendo $ab \neq 0$ e $a + b \neq 0$, verifique que se $4(a + b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$, então $a = b$.

1.14) Se $x \neq 0$ e $x + x^{-1} = m$, calcule $x^2 + x^{-2}$ em função de **m**.

1.2. ALGUMAS PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS DE EXPOENTE INTEIRO

A definição de a^n para o número natural **n** e a definição dada para a^{-n} possibilitam definir **potência n-ésima do número real a**, quando **n** é um **número inteiro**.

Para o número real **a** e para o número inteiro **n**, define-se:

$$a^n = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 0 \\ a \cdot a^{n-1}, \text{ se } n \geq 1 \\ \dfrac{1}{a^{-n}}, \text{ se } n < 0 \text{ e } a \neq 0 \end{cases}$$

Para os números reais **a** e **b** e para os *números inteiros* **m** e **n** valem as propriedades:

I. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$

III. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

IV. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

Exemplos

a) $4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1024$

b) $\frac{10^2}{10^4} = 10^{2-4} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

c) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4096$

d) $(x^2y)^3 = (x^2)^3 \cdot y^3 = x^6y^3$

e) $\left(\frac{x}{2}\right)^4 = \frac{x^4}{2^4} = \frac{x^4}{16}$

f) Observe que: $a^{m^n} = a^{(m^n)}$ e não se deve confundir a^{m^n} com $a^{(m^n)}$; assim:

$$2^{2^3} = 2^{(2^3)} = 2^8$$

$$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

Exercícios Resolvidos

1.15) Sendo ab $\neq$ 0, simplifique: $\dfrac{(a^5b^3)^4}{(a^2b^4)^2}$

Solução

$$\frac{(a^5b^3)^4}{(a^2b^4)^2} = \frac{(a^5)^4\cdot(b^3)^4}{(a^2)^2\cdot(b^4)^3} = \frac{a^{20}\cdot b^{12}}{a^4\cdot b^8} = a^{20-4}\cdot b^{12-8} = a^{16}\cdot b^4$$

1.16) Se $n \in \mathbb{N}^*$, simplifique a expressão: $y = \dfrac{2^{n+4} - 2\cdot 2^n}{2\cdot 2^{n+3}}$

Solução

$$y = \frac{2^n\cdot 2^4 - 2\cdot 2^n}{2\cdot 2^n\cdot 2^3} = \frac{\cancel{2^n}(2^4-2)}{2\cdot\cancel{2^n}\cdot 2^3} = \frac{2^4-2}{2\cdot 2^3} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

1.17) Sendo abc $\neq$ 0, simplifique a expressão:

$$y = 2^8\cdot 16^{-3}\cdot a^8b^{-4}c^{-3}\cdot\left(\frac{a^{-5}b^{-2}}{a^4c^8}\right)^3$$

Solução

$$y = 2^8\cdot(2^4)^{-3}\cdot a^8b^{-4}c^{-3}\cdot\frac{(a^{-5}b^{-2})^3}{(a^4c^8)^3}$$

$$y = 2^8\cdot 2^{-12}\cdot a^8b^{-4}c^{-3}\cdot\frac{(a^{-5})^3\cdot(b^{-2})^3}{(a^4)^3\cdot(c^8)^3}$$

$$y = 2^{8-12}\cdot a^8b^{-4}c^{-3}\cdot\frac{a^{-15}b^{-6}}{a^{12}c^{24}}$$

$$y = 2^{-4}\cdot\frac{a^8a^{-15}}{a^{12}}\cdot b^{-4}b^{-6}\cdot\frac{c^{-3}}{c^{24}}$$

$$y = 2^{-4}\cdot a^{8-15-12}\cdot b^{-4-6}\cdot c^{-3-24}$$

$$y = 2^{-4}\cdot a^{-19}\cdot b^{-10}\cdot c^{-27}$$

ou, se quisermos usar apenas expoentes positivos:

$$y = \frac{1}{16\cdot a^{19}b^{10}c^{27}}$$

1.18) Simplifique a expressão:

$$A = \frac{ab^{-2}\cdot(a^{-1}b^2)^4\cdot(ab^{-1})^2}{a^{-2}b\cdot(a^2b^{-1})^3\cdot a^{-1}b}$$

e calcule o seu valor para $a = 10^{-3}$ e $b = -10^{-2}$

Solução

$$A = \frac{ab^{-2}\cdot(a^{-1})^4(b^2)^4\cdot a^2(b^{-1})^2}{a^{-2}b\cdot(a^2)^3(b^{-1})^3\cdot a^{-1}b} = \frac{ab^{-2}\,a^{-4}\,b^8a^2\,b^{-2}}{a^{-2}\,ba^6\,b^{-3}\,a^{-1}b} =$$

$$= \frac{a^{1-4+2}\cdot b^{-2+8-2}}{a^{-2+6-1}\cdot b^{1-3+1}} = \frac{a^{-1}b^4}{a^3\,b^{-1}} = a^{-1-3}\cdot b^{4-(-1)} = a^{-4}\cdot b^5$$

Se $a = 10^{-3}$ e $b = -10^{-2}$, obtemos:

$$A = (10^{-3})^{-4}\cdot(-10^{-2})^5 = 10^{12}\cdot(-1\cdot 10^{-2})^5 = 10^{12}\cdot(-1)^5\cdot(10^{-2})^5 =$$

$$= 10^{12}\cdot(-1)\cdot 10^{-10} = -1\cdot 10^{12-10} = -10^2 = -100$$

Exercícios Propostos

1.19) Sendo ab $\neq$ 0, simplifique as expressões abaixo e dê as respostas utilizando expoentes positivos:

a) $\dfrac{(ab^2)^3}{(a^2b)^2}$

b) $(a^{-3}b^2)^0$

c) $\dfrac{7^{-1}a^0b^{-2}}{(3ab)^{-4}}$

d) $\left[\left(\dfrac{ab^{-2}\cdot 2^{-1}}{b^{-2}a^2}\right)^{-1}\right]^3$

e) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}$

f) $\dfrac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}$, $a \neq b$

1.20) Se α e β são números inteiros e $2^\alpha = m$ e $2^\beta = n$, calcule em função de **m** e **n**:

a) $2^{2\alpha+3\beta}$

b) $2^{\beta-\alpha}$

c) $2^{5\alpha-\beta}$

d) $4^{\alpha-\beta}$

e) $0,5^{\beta+\alpha}$

f) $0,25^{3\alpha-2\beta}$

1.21) Sendo abc $\neq$ 0, simplifique a expressão:

$$A = 2^8\cdot 4^{-3}\cdot(a^4b^{-2})^3\cdot\left(\frac{b^{-2}a^5}{a^{-1}b^{-3}c^4}\right)^{-2}$$

1.22) Simplifique:

$$\frac{[(-12)^{-8}]^{-2}\cdot 75^{-4}\cdot(-4)^{-9}}{(25^{-2})^4\cdot 18^6\cdot 10^4}$$

1.23) Considere o produto:

$P = [x^{(2^m)} + y^{(2^m)}] \cdot [x^{(2^m)} - y^{(2^m)}],\ m \in \mathbb{N}^*$

a) Verifique que $P = x^{(2^{m+1})} - y^{(2^{m+1})}$

b) Suponha $x = 10^4$, $y = 10^2$ e $m = 2$; determine com quantos zeros "termina" o número P.

1.3. RAÍZES

Consideremos os seguintes problemas e as suas correspondentes respostas.

Ache as raízes:

1º) cúbica de 27
Resposta: 3, pois $3^3 = 27$

2º) cúbica de 0
Resposta: 0, pois $0^3 = 0$

3º) quinta de –32
Resposta: –2, pois $(-2)^5 = -32$

4º) quarta de 81
Resposta: 3 e –3, pois 3^4, $(-3)^4 = 81$

5º) sexta de 0
Resposta: 0, pois $0^6 = 0$

6º) quadrada de –25
Resposta: não existe

Observe o 6º problema: *Um número negativo não admite raiz quadrada.* Para perceber isso, basta tentar calculá-la. Se um número **b** fosse raiz quadrada de –25, deveria acontecer:

$$b^2 = -25$$

e é fácil ver que isto é impossível, pois o quadrado de um número real é *não negativo.*

O 4º problema mostra um caso em que existem duas raízes opostas, ou seja, de mesmo valor absoluto e sinais contrários; isso ocorre sempre que calculamos uma *raiz de índice par de um número positivo.*

Observe nos 1º, 2º e 3º problemas que quando calculamos uma *raiz de índice ímpar de um número real* obtivemos um único resultado.

Podemos resumir as diferentes situações da seguinte forma:

Sejam o número real **a** e **n** um número inteiro positivo.

1. Chama-se **raiz n-ésima do número real a**, se existir, ao número real **b** que satisfaz à condição:

$$b^n = a$$

2. A **existência** da raiz n-ésima do número real **a** é dada pela tabela abaixo:

	n ímpar	n par
a > 0	existe uma raiz única, positiva, indicada por $\sqrt[n]{a}$	existem duas raízes opostas, a positiva indicada por $\sqrt[n]{a}$, e a negativa indicada por $-\sqrt[n]{a}$
a = 0	existe uma raiz única, que é zero	existe uma raiz única, que é zero
a < 0	existe uma raiz única, negativa, indicada por $\sqrt[n]{a}$	não existe raiz

Exemplos

a) A raiz cúbica de 8 é 2, pois: $2^3 = 8$.
Indica-se essa raiz por $\sqrt[3]{8}$.
Assim: $\sqrt[3]{8} = 2$.

b) A raiz cúbica de –8 é –2, pois: $(-2)^3 = -8$.
Indica-se essa raiz por $\sqrt[3]{-8}$.
Assim: $\sqrt[3]{-8} = -2$.

c) A raiz quadrada de zero é zero, pois: $0^2 = 0$.
Indica-se $\sqrt{0} = 0$

d) As raízes quadradas de 16 são 4 e –4, pois: $4^2 = (-4)^2 = 16$.
Indicamos essas raízes por $\sqrt{16}$ e $-\sqrt{16}$.
Assim: $\sqrt{16} = 4$ e $-\sqrt{16} = -4$.

Observações

1º) No símbolo $\sqrt[n]{a}$, **a** denomina-se **radicando** e **n** denomina-se **índice** da raiz.

2º) Se tivermos a > 0 e n **par**, o símbolo $\sqrt[n]{a}$ indica **apenas** a raiz n-ésima **positiva** de **a**. Nesse caso, se quisermos indicar a raiz n-ésima **negativa** de a usamos o símbolo $-\sqrt[n]{a}$.
Então, $\sqrt{4} = 2$ e não $\sqrt{4} = \pm 2$; observe que $-\sqrt{4} = -2$.

3º) Quando calculamos a *raiz n-ésima positiva de a*, n *par*, *de um quadrado perfeito*, devemos ter cuidado para não cometermos enganos; assim por exemplo:

$$\sqrt{5^2} = 5$$

$$\sqrt{(-5)^2} = 5 \text{ e não } \sqrt{(-5)^2} = -5$$

Note, pela 2ª observação, que se a > 0 e n é par, o símbolo $\sqrt[n]{a}$ indica apenas a raiz n-ésima positiva de **a**; então para todo número real x devemos escrever:

$$\sqrt{x^2} = |x| \qquad |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Exercícios Resolvidos

1.24) Simplifique a expressão:

$$A = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{(3+\sqrt{3})^2}$$

Solução

$$\sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} = \left|\sqrt{3}-3\right| = -(\sqrt{3}-3) = 3-\sqrt{3}, \text{ (observe que } \sqrt{3}-3<0)$$

$$\sqrt{(3+\sqrt{3})^2} = \left|3+\sqrt{3}\right| = 3+\sqrt{3}$$

Então,

$$A = 3-\sqrt{3}+3+\sqrt{3}$$

$$A = 6$$

1.25) Considere a expressão:

$$Y = \sqrt{(x-1)^2}$$

Quais são as diferentes *formas* que ela pode assumir, segundo os valores de x?

Solução

$$Y = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 \leq 0 \end{cases} \qquad |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Então:

$$Y = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{se } x \leq 1 \end{cases}$$

Exercícios Propostos

1.26) Classifique cada uma das sentenças abaixo em Verdadeira (V) ou Falsa (F):

a) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$

b) $\sqrt[4]{16} = 2$

c) $\sqrt[3]{27} = 3$

d) $\sqrt[3]{-27} = -3$

e) $-\sqrt[4]{16} = -2$

f) $\sqrt{(-5)^2} = -5$

1.27) Verifique que $\sqrt{\dfrac{1}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\dfrac{1}{(2+\sqrt{5})^2}} = 4$

1.28) Considere a expressão:

$$y = \sqrt{(x+1)^2}$$

Quais são as diferentes formas que ela pode assumir, segundo os valores de x?

1.4. PROPRIEDADES DAS RAÍZES

Sendo **a** e **b** números reais **não negativos**, **m**, **n** e **p** números *inteiros positivos*, valem as propriedades:

I. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

II. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$

III. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

IV. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

V. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}}$

Exemplos

a) $\sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{3 \cdot 4} = \sqrt[5]{12}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{10}{2}} = \sqrt[3]{5}$

c) $(\sqrt[5]{2})^3 = \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5]{8}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[3 \cdot 4]{3} = \sqrt[12]{3}$

e) $\sqrt[4]{5^3} = \sqrt[4 \cdot 2]{5^{3 \cdot 2}} = \sqrt[8]{5^6}$

Exercícios Resolvidos

1.29) Calcule: $A = \sqrt[5]{1} + \sqrt[6]{0} + \sqrt[4]{81} + \sqrt[3]{-125} - \sqrt[3]{64}$

Solução

Sendo:

$\sqrt[5]{1} = 1$, $\sqrt[6]{0} = 0$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[3]{-125} = -5$ e $\sqrt[3]{64} = 4$, temos:

$$A = 1+0+3+(-5)-4$$

$$A = -5$$

1.30) Simplifique: $y = 4 \cdot \sqrt{147} + 3 \cdot \sqrt{75} + \sqrt{192}$

Solução

$$y = 4 \cdot \sqrt{49 \cdot 3} + 3 \cdot \sqrt{25 \cdot 3} + \sqrt{64 \cdot 3}$$

$$y = 4 \cdot \sqrt{49} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{64} \cdot \sqrt{3}$$

$$y = 4 \cdot 7 \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 5 \cdot \sqrt{3} + 8 \cdot \sqrt{3}$$

$$y = 28\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$$

$$y = 51\sqrt{3}$$

1.31) Reduza ao *mesmo índice*: $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{7}$

Solução

O *índice comum* é o M.M.C. entre os índices 2, 3 e 4, que é 12. Então, aplicando a propriedade V:

mult. por 6

$$\sqrt{5} = \sqrt[2]{5^1} = \sqrt[12]{5^6} = \sqrt[12]{15625}$$

mult. por 6

mult. por 4

$$\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{16}$$

mult. por 4

mult. por 3

$$\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7^1} = \sqrt[12]{7^3} = \sqrt[12]{343}$$

mult. por 3

1.32) Efetue as operações:

a) $(\sqrt{98} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{6}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}}$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6} + \sqrt{5}}$

Solução

a) $(\sqrt{98} - \sqrt{8}) \cdot \sqrt{6} = (\sqrt{49 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 2}) \cdot \sqrt{6} = (7\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \cdot \sqrt{6} =$
$= 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{12} = 5\sqrt{4 \cdot 3} = 5 \cdot 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

b) Observe que para efetuarmos o produto das duas raízes, isto é, para aplicarmos a propriedade **I**, devemos *reduzi-las ao mesmo índice*:
$\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{500}$

c) Também aqui devemos reduzir as raízes ao mesmo índice:
$$\frac{\sqrt[4]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[12]{4^3}}{\sqrt[12]{2^4}} = \sqrt[12]{\frac{4^3}{2^4}} = \sqrt[12]{4}$$

d)
$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{5}) - \sqrt{5}(\sqrt{6} - \sqrt{5})}{(\sqrt{6} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{5})} =$$
$$= \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2} =$$
$$= \frac{6 + \sqrt{30} - \sqrt{30} + 5}{6 - 5} = \frac{11}{1} = 11$$

1.33) *Racionalize* os denominadores das frações:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

Solução

No problema, pretende-se determinar uma fração cujo denominador é um número racional e que seja igual à fração dada:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5 \cdot 5^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{2\sqrt{3} + 3}{4 - 3} = 2\sqrt{3} + 3$

Observe que, de um modo geral, para *racionalizarmos* o denominador de uma fração como $\dfrac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ou $\dfrac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$, multiplicamos o seu numerador e o seu denominador pelo "conjugado do denominador":

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$$

d)
$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}} = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} =$$
$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{18} + \sqrt{30}}{2(\sqrt{6})^2} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}$$

1.34) Se $x = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$, calcule:

a) $x^2 + xy + y^2$ b) $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$

Solução

a)

$$x^2 = \left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{10+2\sqrt{20}+2}{4} = \frac{12+2\sqrt{20}}{4} =$$

$$= \frac{12+2\cdot\sqrt{4\cdot 5}}{4} = \frac{12+4\sqrt{5}}{4} = \frac{4(3+\sqrt{5})}{4} = 3+\sqrt{5}$$

$$y^2 = \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{10-2\sqrt{20}+2}{4} = \frac{12-2\sqrt{20}}{4} =$$

$$= \frac{12-2\cdot\sqrt{4\cdot 5}}{4} = \frac{12-4\sqrt{5}}{4} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} = 3-\sqrt{5}$$

$$xy = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} = \frac{(\sqrt{10})^2-(\sqrt{2})^2}{4} = \frac{10-2}{4} = 2$$

Então, $x^2 + xy + y^2 = 3 + \sqrt{5} + 2 + 3 - \sqrt{5} = 8$

b) Note que $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = x^2(x+y) + y^2(x+y) = (x+y)(x^2+y^2)$

Mas, $x + y = \dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

$x^2 + y^2 = 3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5} = 6$

Então, $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = (x+y)(x^2+y^2) = \sqrt{10}\cdot 6 = 6\sqrt{10}$

Exercícios Propostos

1.35) Calcule: $\sqrt[9]{-1} + \sqrt[3]{0} - \sqrt[5]{243} - \sqrt[4]{81} + \sqrt{49}$

1.36) Simplifique: $A = 3\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + \sqrt{2} - \sqrt{75} + \sqrt{48}$

1.37) Reduza ao mesmo índice: $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$

1.38) Coloque em *ordem crescente* os números: $\sqrt{6}$, $\sqrt[4]{12}$, $\sqrt[8]{72}$

1.39) Efetue as operações:

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10})\cdot\sqrt{2}$

b) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{4}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

d) $3\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-3}{3}\right)^2 + 6\cdot\left(\dfrac{\sqrt{6}-3}{3}\right)$

e) $\sqrt{4\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} + \sqrt[3]{8\sqrt{\dfrac{1}{2}}} - 2\sqrt[6]{32}}$

1.40) Racionalize os denominadores das frações:

a) $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{7}}$

c) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

d) $\dfrac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}}$

1.41) Verifique que:

a) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}$

b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 0$

c) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)^2 = -\sqrt{15}$

1.42) Racionalize o denominador de $\dfrac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$

1.43) Se $x = \dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ e $y = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}$, calcule:

a) $x + y$

b) $x^2 + y^2$

c) $x^2 + 3xy + y^2$

d) $x^3 + y^3$

1.44) Considere o número:

$A = (\sqrt{6}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-2)\cdot\sqrt{\sqrt{3}+2}$

a) Calcule A^2.

b) Deduza o valor de A.

1.45) Seja $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

a) Verifique que: $\dfrac{1}{f(x)}=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

b) Verifique que: $\dfrac{1}{f(1)}+\dfrac{1}{f(2)}+\dfrac{1}{f(3)}+\ldots+\dfrac{1}{f(n)}=\sqrt{n+1}-1$

1.5. POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Sejam dados o número **real positivo a** e o número **racional** $\dfrac{m}{n}$, com **m** e **n** inteiros, $n \neq 0$.

Nesse número $\dfrac{m}{n}$, o denominador **n** será sempre escolhido *positivo*. Assim, se $\dfrac{m}{n}$ é negativo, teremos **n** positivo e **m** negativo.

Nestas condições, o símbolo $a^{\frac{m}{n}}$ é definido por:

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos

a) $4^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{4^1}=\sqrt{4}=2$

b) $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

c) $8^{-\frac{1}{3}}=8^{\frac{-1}{3}}=\sqrt[3]{8^{-1}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}=\dfrac{1}{2}$

Podemos definir potência de expoente racional para o caso a = 0, mas com a condição $\dfrac{m}{n}>0$:

$$0^{\frac{m}{n}}=0\left(\frac{m}{n}>0\right)$$

Na definição acima, a condição $\dfrac{m}{n}>0$ é necessária para manter uma coerência com as definições dadas anteriormente. Por exemplo, sabemos que *não se pode escrever*:

$$0^{-2}=\frac{1}{0^2}=\frac{1}{0}$$

Da mesma forma, *não podemos escrever*:

$$0^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{0^{-2}}$$

1.6. PROPRIEDADES DAS POTÊNCIAS DE EXPOENTE RACIONAL

As potências de expoente racional obedecem às mesmas regras operatórias vistas para potências de expoente inteiro.

Se **a** e **b** são números reais **positivos** e $\dfrac{m}{n}$ e $\dfrac{p}{q}$ são números racionais (m, n, p e q são inteiros e $nq \neq 0$), valem as propriedades:

I. $a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

II. $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}\ (a\neq 0)$

III. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$

IV. $(a\cdot b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}}$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}\ (b\neq 0)$

Exemplos

a) $2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{6}{6}}=2$

b) $\dfrac{2^{\frac{5}{3}}\cdot 2^{\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{2^{\frac{5}{3}+\frac{7}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{2^{\frac{31}{6}}}{2^{\frac{1}{6}}}=2^{\frac{31}{6}-\frac{1}{6}}=2^{\frac{30}{6}}=2^5=32$

c) $(3^2)^{\frac{5}{6}}=3^{2\cdot\frac{5}{6}}=2^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{3^5}=\sqrt[3]{3^3\cdot 3^2}=3\sqrt[3]{9}$

d) $(2x^3)^{-\frac{1}{3}}=2^{-\frac{1}{3}}\cdot(x^3)^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\cdot x^{3\left(-\frac{1}{3}\right)}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot x^{-1}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}\cdot x}$, $(x>0)$

Exercícios Resolvidos

1.46) Expresse em forma de potência com expoente racional os seguintes radicais:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[4]{2}$

c) $\sqrt[3]{7^2}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{11}}$

Solução

a) $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt[4]{2} = 2^{\frac{1}{4}}$

c) $\sqrt[3]{7^2} = 7^{\frac{2}{3}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{11}} = \sqrt[6]{11} = 11^{\frac{1}{6}}$

1.47) Calcule, substituindo as potências de expoente racional pelos correspondentes radicais:

a) $4^{\frac{1}{2}}$

b) $16^{\frac{1}{4}}$

c) $27^{\frac{2}{3}}$

d) $64^{-\frac{5}{6}}$

Solução

a) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$

b) $16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^1} = \sqrt[4]{16} = 2$

c) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{(3^3)^2} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9$

d) $64^{-\frac{5}{6}} = 64^{\frac{-5}{6}} = \sqrt[6]{64^{-5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{64^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{(2^6)^5}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{30}}} = \frac{\sqrt[6]{1}}{\sqrt[6]{(2^5)^6}} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

1.48) Utilizando as propriedades das potências de expoente racional, simplifique:

a) $(0,04)^{-\frac{1}{2}}$

b) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}}$

c) $27^{-\frac{2}{3}} \cdot 9^{1,5}$

d) $5^0 \cdot 2^3 \cdot 8^{\frac{2}{3}}$

Solução

a) $(0,04)^{-\frac{1}{2}} = \left[(0,2)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = (0,2)^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = (0,2)^{-1} = \frac{1}{0,2} = 5$

b) $\left(25^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{9}{4}} = 25^{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{4}} = 25^{\frac{3}{2}} = \left(5^2\right)^{\frac{3}{2}} = 5^{2\cdot\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$

c) $27^{-\frac{2}{3}} \cdot 9^{1,5} = \left(3^3\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{3}{2}} = 3^{3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)} \cdot 3^{2\cdot\frac{3}{2}} = 3^{-2} \cdot 3^3 = 3^{-2+3} = 3^1 = 3$

d) $5^0 \cdot 2^3 \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 1 \cdot 2^3 \cdot \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^3 \cdot 2^{3\cdot\frac{2}{3}} = 2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$

1.49) Sendo **a**, **b** e **c** números reais positivos, simplifique:

$$A = (ab^{-3}c^3)^{\frac{1}{2}} \cdot (a^7b^4c^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^{-5}bc)^{\frac{1}{6}}$$

Solução

$$A = a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{7}{3}}b^{\frac{4}{3}}c^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{7}{3}-\frac{5}{6}} \cdot b^{-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{1}{6}} \cdot c^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6}} =$$

$$= a^{\frac{3+14-5}{6}} \cdot b^{\frac{-9+8+1}{6}} \cdot c^{\frac{9+4+1}{6}} = a^{\frac{12}{6}} \cdot b^{\frac{0}{6}} \cdot c^{\frac{14}{6}} = a^2 \cdot b^0 \cdot c^{\frac{7}{3}} = a^2 \cdot c^{\frac{7}{3}}$$

Se quisermos a resposta utilizando os radicais correspondentes:

$$A = a^2 \cdot \sqrt[3]{c^7} = a^2 \cdot \sqrt[3]{c^6 \cdot c} = a^2 \cdot c^2 \cdot \sqrt[3]{c}$$

1.50) Suposta definida, simplifique a expressão:

$$y = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1} + \frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1} - \frac{4}{a-1}\right)^{-3}$$

Solução

Lembrando que $\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 1^2 = a-1$, o M.M.C. dos denominadores é a – 1, tem-se:

$$y = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right) + \left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right) - 4}{a-1}\right]^{-3}$$

$$y = \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^2 + \left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2 - 4}{a-1}\right]^{-3}$$

$$y = \left(\frac{a+2a^{\frac{1}{2}}+1+a-2a^{\frac{1}{2}}+1-4}{a-1}\right)^{-3}$$

$$y = \left(\frac{2a-2}{a-1}\right)^{-3} = \left[\frac{2(a-1)}{a-1}\right]^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

1.51) Se, $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$, calcule:

a) $x+x^{-1}$

b) x^2+x^{-2}

c) $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}$

Solução

a) Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ obtemos:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=9$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+2x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=9$$

$$x+2x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}+x^{-1}=9$$

$$x+2+x^{-1}=9$$

E, daí:

$$x+x^{-1}=7$$

b) Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade $x + x^{-1} = 7$ obtemos:

$$(x+x^{-1})^2=49$$

$$x^2+2x\cdot x^{-1}+(x^{-1})^2=49$$

$$x^2+2x^{1-1}+x^{-2}=49$$

$$x^2+2+x^{-2}=49$$

E, daí:

$$x^2+x^{-2}=47$$

c) Elevando ao cubo os dois membros da igualdade $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ obtemos:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^3=27$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3+3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2\cdot x^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3=27$$

$$x^{\frac{3}{2}}+3xx^{-\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}x^{-1}+x^{-\frac{3}{2}}=27$$

$$x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=27$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3\underbrace{\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)}_{3}=27$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+9=27$$

E, daí:

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=18$$

Então, $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+2}{x^2+x^{-2}+3}=\dfrac{18+2}{47+3}=\dfrac{20}{50}=\dfrac{2}{5}$

Exercícios Propostos

1.52) Calcule:

a) $16^{\frac{5}{4}}$

b) $625^{\frac{3}{4}}$

c) $(0{,}001)^{-\frac{2}{3}}$

1.53) Calcule:

a) $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0{,}5}+16^{0{,}75}-(0{,}5)^{-5}+\left(-\dfrac{3}{7}\right)^0\cdot 5$

b) $(0{,}027)^{-\frac{1}{3}}-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{-1}+256^{0{,}75}-3^{-1}+(5{,}5)^0$

1.54) Calcule: $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{5}{6}}}{a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ para a = 0,01 e b = 27

1.55) Utilize as potências de expoente racional para simplificar:

a) $\dfrac{1}{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$

b) $\sqrt{\sqrt{a}\cdot\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}}$

c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a^4}$

1.56) Utilize as potências de expoente racional para simplificar:

$$\sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}}\cdot\sqrt{\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}}$$

1.57) Simplifique:

a) $\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{-\frac{2}{3}}}\div\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}b^4c^{-1}}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{a}\cdot a^{\frac{1}{6}}\cdot a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}}$

1.58) Supondo definida, simplifique a expressão:

$$\frac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1-x}$$

1.59) Se $x=2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$, calcule $2x^3+6x$.

1.60) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}\div\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{ba}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x^2b^2}+\sqrt[3]{x^2b}}$

b) $\left(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}+\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}$

1.61) Simplifique a expressão:

$$y=\left(\frac{1}{1-x^{-0,5}}-\frac{1}{1-x^{-1}}\right)\cdot(x-1)$$

Calcule o valor de y para x = 0,0036.

1.62) Determine x, $x\in\mathbb{Q}$, tal que:

a) $9^x=27$

b) $32^x=4$

c) $64^{\frac{2}{x}}=16$

d) $16^{\frac{3}{x}}=\frac{1}{8}$

e) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{2}{x}}=25$

f) $100^{1,5}=10^x$

1.7. POTÊNCIA DE EXPOENTE IRRACIONAL

Seja **a** um **número real positivo**.

O problema que aqui se coloca é dar para a^x, onde **x** é um número **irracional**, uma definição justa, que respeite as regras de cálculo usuais das potências.

Vejamos um exemplo: como definir $2^{\sqrt{2}}$?

Como $\sqrt{2}$ é número irracional, $2^{\sqrt{2}}$ não tem significado se considerarmos apenas as definições vistas até aqui. Entretanto, o processo para a definição de $2^{\sqrt{2}}$ se utiliza das potências de expoente *racional*.

Inicialmente, observe que se **r** e **s** são números **racionais** e r < s tem-se $2^r<2^s$; parece razoável que essa propriedade se mantenha quando definimos 2^x para **x irracional**; assim, se r e s são racionais e:

$$r<\sqrt{2}<s$$

então devemos ter:

$$2^r<2^{\sqrt{2}}<2^s \qquad \text{(I)}$$

Consideremos agora as sucessivas *aproximações racionais* de $\sqrt{2}$:

$$1,4<\sqrt{2}<1,5$$
$$1,41<\sqrt{2}<1,42$$
$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$
$$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$$
$$1,41421<\sqrt{2}<1,41422$$
....

O conjunto de desigualdades acima e a conclusão (I) permitem-nos deduzir que $2^{\sqrt{2}}$ também satisfaz a um conjunto de desigualdades:

$$2^{1,4}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,5}$$
$$2^{1,41}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,42}$$
$$2^{1,414}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,415}$$
$$2^{1,4142}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,4143}$$
$$2^{1,41421}<2^{\sqrt{2}}<2^{1,41422}$$
....

No conjunto de desigualdades acima, substituindo as potências de expoente racional por aproximações decimais, obtemos uma sequência de intervalos de *amplitudes cada vez menores*:

$$2,639<2^{\sqrt{2}}<2,829$$
$$2,657<2^{\sqrt{2}}<2,676$$
$$2,664<2^{\sqrt{2}}<2,667$$
$$2,665<2^{\sqrt{2}}<2,666$$
....

Observe que o número $2^{\sqrt{2}}$ pertence a todos os intervalos da sequência, e que à medida em que os intervalos vão se sucedendo, vamos obtendo aproximações, por falta e por excesso, que nos dão uma avaliação cada vez mais precisa para $2^{\sqrt{2}}$.

A construção acima nos dá uma aproximação para $2^{\sqrt{2}}$ com três casas decimais: 2,665.

O procedimento descrito acima para definir $2^{\sqrt{2}}$ pode ser ampliado para a definição de a^x, onde **a** é um **número real positivo** e **x** é um número **irracional**.

Para isso, suponhamos a > 1, e consideremos *duas sequências*:

Uma, crescente, constituída por **números racionais** menores do que x:

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$$

A outra, decrescente, constituída por **números racionais** maiores do que x:

$$s_1, s_2, s_3, \ldots s_n, \ldots$$

As duas sequências devem ser construídas de tal forma que as diferenças $s_1 - r_1$, $s_2 - r_2$, $s_3 - r_3$, ..., $s_n - r_n$, ... sejam cada vez menores, isto é, aproximam-se de zero.

Então, o conjunto de desigualdades:

$$r_1 < x < s_1$$
$$r_2 < x < s_2$$
$$r_3 < x < s_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gera, para a > 1, o conjunto de desigualdades:

$$a^{r_1} < a^x < a^{s_1}$$
$$a^{r_2} < a^x < a^{s_2}$$
$$a^{r_3} < a^x < a^{s_3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Observe que as potências de *expoente racional*:

$$a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$$

são aproximações "por falta" de a^x, e que as potências de *expoente racional*

$$a^{s_1}, a^{s_2}, a^{s_3}, \ldots$$

são aproximações "por excesso" a^x.

Note também que, à medida em que o *número irracional* x é "cercado" por intervalos de amplitudes cada vez menores: $r_n < x < s_n$, a^x é "cercado" pelos correspondentes intervalos: $a^{r_n} < a^x < a^{s_n}$, também de amplitudes cada vez menores. Diremos, então, que tais intervalos de extremidades a^{r_n} e a^{s_n} vão definir um número que é a^x.

Para 0 < a < 1, a definição de a^x, x irracional, é análoga. Apenas, como $0 < a < 1$, a desigualdade: $r_n < x < s_n$ gera a desigualdade: $a^{r_n} > a^x > a^{s_n}$.

Observações

1º) Se x é um número **irracional positivo**, definimos:

$$0^x = 0$$

2º) Para todo número irracional x, define-se:

$$1^x = 1$$

3º) Se a < 0 e x é número irracional, o símbolo a^x *não está definido*.

4º) Para as potências de expoente irracional são válidas as propriedades usuais das potências.

Exercícios Propostos

1.63) Simplifique:

a) $0^{\sqrt{2}} - 1^{\sqrt{5}} + 7^{-\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt[3]{5}}}{25^{\sqrt[6]{3{,}125}}}$

c) $\left(3^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} \cdot 9^{\sqrt{6}} \div 3^3$

d) $\left[\dfrac{27^{\sqrt{12}} \cdot 3^{\sqrt{2}} \cdot 3^{\sqrt{48}}}{9^{\sqrt{27}} \cdot 3^{\sqrt{75}}}\right]^{\sqrt{2}}$

1.64) Com auxílio de uma "calculadora" construa uma sequência de intervalos que define $3^{\sqrt{2}}$. Dê uma aproximação de $3^{\sqrt{2}}$ com três casas decimais.

1.8. POTÊNCIA DE EXPOENTE REAL

Com as definições vistas até aqui, para o **número real positivo a** e para o número real **x**, qualquer, fica definido o número a^x, isto é, uma **potência de expoente real**.

Note que para a definição de a^x, com x real (racional ou irracional) há uma forte exigência: a > 0.

Observe também que se a > 0, então $a^x > 0$ para todo x real.

Propriedades

Sejam **a** e **b números reais positivos** e x e y números reais quaisquer; valem as seguintes propriedades:

I. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

II. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

III. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

IV. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Capítulo

2 A indução

2.1. O QUE É A INDUÇÃO?

Podemos responder à pergunta dizendo que a *indução* é um processo de raciocínio, que faz a passagem de hipóteses ou conhecimentos particulares para conclusões gerais.

As ciências naturais utilizam-se daquilo que denominamos *indução empírica*. Esta, de uma série de observações particulares de um certo fenômeno, estabelece uma proposição geral que deve reger todas as possibilidades do fenômeno.

As leis gerais determinadas pela indução empírica não são providas de um grau absoluto de validade. O grau de certeza com que se estabelece uma lei depende do número de experiências feitas, bem como de confirmações posteriores do mesmo fenômeno.

Nas ciências naturais, em geral, um raciocínio desse tipo é plenamente convincente. Por exemplo, quando uma pessoa diz que "Todo homem é mortal", esta afirmação tem toda a certeza possível, dado o número enorme de confirmações que esta proposição teve através da História. Porém, o caráter desta proposição não é o mesmo que o de uma afirmação ou teorema demonstrado por meio de raciocínios puramente matemáticos.

Poder-se-ia dizer, então, que na Matemática a indução não se aplica como raciocínio válido, pois esta ciência não se satisfaz com os "graus de certeza", obtidos pela indução empírica. Essa é, porém, uma idéia errônea. É verdade que a *meta* que se procura atingir na Matemática é a forma dedutiva e axiomática, na qual os fatos e conceitos se apresentam interligados perfeitamente, de acordo com uma sequência lógica. Tal meta, entretanto, só pode ser atingida mediante todo um processo construtivo para o qual contribuem decisivamente a sensibilidade, a intuição e a experimentação. Com isto, queremos dizer que mesmo numa *ciência exata* como é a Matemática, ocupam lugar de destaque a contribuição da indução empírica, a imaginação que inventa e a construção experimental, elementos que constituem a *força diretriz* e *motora* mediante a qual pode ser atingida a meta final: a forma cristalizada de estrutura axiomática e dedutiva.

Um exemplo de como se pode utilizar a indução na Matemática é o seguinte: suponha que desejamos uma *fórmula* que nos dá o valor da soma:

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n,$$

para qualquer valor inteiro positivo de **n**.

Essa soma apresenta os valores seguintes:

Para n = 1: $S_1 = 2$

Para n = 2: $S_2 = 2 + 2^2 = 6$

Para n = 3: $S_3 = 2 + 2^2 + 2^3 = 14$

Para n = 4: $S_4 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$

Para n = 5: $S_5 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$

....

Por meio de experimentações sucessivas, o matemático "achou" a fórmula:

$$S_n = 2[(n-1)^2 + n],$$

a qual nos fornece:

Para n = 1: $S_1 = 2$ (satisfaz!)
Para n = 2: $S_2 = 2[1^2 + 2] = 6$ (satisfaz!)
Para n = 3: $S_3 = 2[2^2 + 3] = 14$ (satisfaz!)

É de se supor, então, que esta é a fórmula geral procurada. Puro engano! Isso não é verdade, pois para n = 4 tem-se:

$$S_4 = 2[3^2 + 4] = 26$$

valor diferente do real, que é $S_4 = 30$.

Concluímos, então, que a fórmula encontrada satisfaz para n = 1, 2 e 3, *mas não satisfaz em geral.*

Com o prosseguimento das tentativas, encontrou-se a expressão:

$$S_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 12}{6}$$

que fornece valores corretos para n = 1, 2, 3, 4 e 5, mas para n = 6 não satisfaz.

Com esse processo, o matemático consegue se aproximar cada vez mais da fórmula geral. Num dado instante, após muita pesquisa, chegou-se à fórmula:

$$S_n = 2^{n+1} - 2$$

que se mostrou válida, por exemplo, de n = 1 até n = 1 500.

Podemos, então, afirmar que esta é a fórmula procurada?

Não! O fato de uma expressão ser válida para um número bastante grande de casos particulares não significa que ela seja válida para todos os casos. Quem poderá garantir que para um valor de **n** superior a 1 500 não vai falhar a expressão encontrada?

Do exemplo discutido acima tiramos uma conclusão simples, mas importante:

"Uma proposição pode ser correta para um número bastante grande de casos particulares e ao mesmo tempo pode ser falsa em geral."

É justamente neste ponto que se distanciam a Matemática e as ciências naturais. Se o problema discutido acima fosse restrito ao campo da Sociologia, por exemplo, poderíamos afirmar que a expressão encontrada é válida "com uma determinada porcentagem de certeza". Tal certeza será maior ou menor, conforme seja o número de casos particulares examinados.

A Matemática não se satisfaz com essa "porcentagem de certeza". Ela exige certeza absoluta. Dessa maneira, temos que provar rigorosamente que a fórmula encontrada é válida para todo n.

O que se pode concluir, após esta discussão, é que a construção experimental foi útil para se encontrar uma fórmula, sobre a qual recaem suspeitas de que é de fato a expressão procurada. A prova, a demonstração rigorosa, que vai selar a questão, é dada dentro da Matemática por um processo especial de raciocínio que se denomina INDUÇÃO MATEMÁTICA.

2.2. O MÉTODO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA

Tomemos o exemplo discutido no item anterior.

Por meio de um processo intuitivo conseguiu-se uma possível fórmula para exprimir a soma:

$$S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n$$

Presume-se que seja:

$$S_n = 2^{n+1} - 2$$

Surge, então, a seguinte dúvida: temos uma proposição que se mostrou correta em muitos casos particulares; é, no entanto, impossível verificar todos os casos particulares. Como podemos saber se a proposição é correta em geral?

Quando uma proposição depende dos números naturais, **o método da Indução Matemática** constitui um eficiente instrumento para verificar a validade da proposição no caso geral. Para aplicar a Indução Matemática é necessário demonstrar dois teoremas:

Teorema 1: A proposição é válida para n = 1
Teorema 2: Se a proposição for válida para n = k, **então**, ela também é válida para o caso seguinte, n = k + 1

Vamos, então, demonstrar que é válida para todo **n** a proposição:

$$2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

Teorema 1: A proposição é válida para n = 1.

Para demonstrar este teorema, basta fazer uma *verificação direta.*

Para n = 1, temos:

(1º membro) = 2

(2º membro) = $2^2 - 2 = 2$

Teorema 2: De acordo com o enunciado deste teorema, devemos *supor* (HIPÓTESE) que a propriedade é válida para um certo valor n = k, e *provar* (TESE) que, então, ela também é válida para n = k + 1.

Hipótese: $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 2$

Tese: $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2$

Demonstração

Vamos somar aos dois membros da expressão da hipótese o número 2^{k+1}; resulta:

$$\underbrace{2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k + 2^{k+1}}_{\text{1º membro da tese}} = \underbrace{2^{k+1} - 2 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 2 = 2^{k+2} - 2}_{\text{2º membro da tese}}$$

Os dois teoremas foram provados. Podemos então dizer que

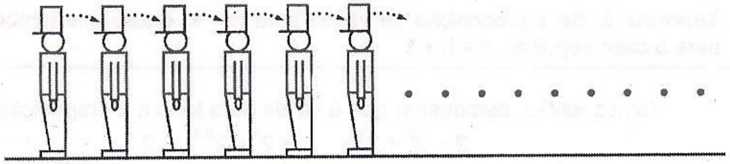
$$S_n = 2^{n+1} - 2$$

para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$.

Observações

1ª) Para o aluno é um tanto difícil convencer-se da eficiência da demonstração. Porém, com um pouco de reflexão sobre o que foi feito, podemos atingir um acordo.
Inicialmente, devemos notar que não seria possível verificar, experimentalmente, a proposição para todos os números naturais. O Teorema 1 corresponde à verificação experimental para o 1º caso: n = 1.
O Teorema 2 *permite passar* de *um caso para o seguinte*. Assim, por exemplo, como a proposição vale para n = 1, **então**, podemos imediatamente concluir que ela também vale para n = 2 (Teorema 2). Fica, assim, provado que a proposição vale para n = 2, mas sem necessidade de uma nova verificação experimental. Retomando o raciocínio, temos: a proposição vale para n = 2, então vale também para n = 3 (Teorema 2). Percebe-se assim que, por aplicações sucessivas do Teorema 2, qualquer natural poderá ser atingido, sem necessidade de verificar experimentalmente.

Intuitivamente, o método pode ser entendido com um artifício muito simples: suponhamos que temos soldados de chumbo colocados em fila, que começa por um deles e prossegue indefinidamente:



Como podemos ter certeza de que, derrubando o primeiro deles, todos os soldados cairão?

Para isso, basta provar que:

1º) O primeiro soldado cai.

2º) Os soldados estão situados de tal modo que toda vez que um qualquer deles cai, automaticamente, golpeia e faz o soldado seguinte cair.

Assim, mesmo que a fila se estenda indefinidamente, podemos afirmar que todos os soldados vão cair.

2ª) É importante notar a **necessidade da demonstração dos dois Teoremas**: **1** e **2**. É claro que não basta o Teorema 1: a simples verificação de um caso particular é insuficiente.

Do mesmo modo, não basta a demonstração única do Teorema 2.

3ª) Na demonstração do Teorema 2, a *passagem* do caso n = k para o caso n = k + 1 é equivalente à *passagem* do caso n = k − 1 para o caso n = k.

Em cada problema escolhemos aquela que mais facilitar os cálculos algébricos.

4ª) Em alguns problemas a proposição dada é válida *a partir de um certo número natural* n_0. Nesse caso, o Teorema 1 é a verificação para $n = n_0$.

Exercícios Resolvidos

2.1) Prove que a soma dos n primeiros números inteiros e positivos é $\frac{n(n+1)}{2}$.

Solução

Devemos demonstrar que:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Teorema 1

Para n = 1 tem-se:

(1º membro) = 1

(2º membro) = $\frac{1\cdot 2}{2}=1$

Teorema 2

Hipótese: $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

Tese: $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

Somando aos dois membros da hipótese o número k + 1, obtemos:

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k+(k+1)}_{1^\circ\text{ membro da tese}}=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$

$$\underbrace{=(k+1)\cdot\left(\frac{k}{2}+1\right)=(k+1)\cdot\frac{k+2}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}}_{2^\circ\text{ membro da tese}}$$

Observe que neste problema não foi necessário "adivinhar" a fórmula; ela foi dada no próprio enunciado.

2.2) Vamos escrever em ordem crescente os números ímpares positivos:

$$1, 3, 5, 7, \ldots$$

Chamemos o primeiro de μ_1, o segundo de μ_2, o terceiro de μ_3 etc...

$$\mu_1=1,\ \mu_2=3,\ \mu_3=5,\ \mu_4=7,\ \ldots$$

Surge, então, o seguinte problema: "encontrar uma fórmula para o número ímpar genérico μ_n, expresso em função de **n**".

Solução

Podemos escrever:

$$\mu_1 = 2\cdot 1 - 1$$
$$\mu_2 = 2\cdot 2 - 1$$
$$\mu_3 = 2\cdot 3 - 1$$

Se examinarmos cuidadosamente as três igualdades, seremos levados a crer que para se obter o *n-ésimo número ímpar*, μ_n, é preciso multiplicar **n** por 2 e subtrair 1:

$$\mu_n = 2n - 1$$

Vamos provar que essa fórmula é verdadeira.

Teorema 1: A fórmula é válida para n = 1. De fato, vimos que $\mu_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ (é o primeiro ímpar positivo!)

Teorema 2: Hipótese: $\mu_k = 2k - 1$

Tese: $\mu_{k+1} = 2(k+1) - 1 = 2k + 1$

Somando 2 aos dois membros da hipótese:

$$\mu_k + 2 = (2k - 1) + 2$$

Observando que para se obter o ímpar μ_{k+1} basta somar 2 ao ímpar "anterior" μ_k tem-se na igualdade acima:

$$\therefore \quad \mu_{k+1} = 2k + 1,$$

que é a tese.

2.3) Calcular a soma dos **n** primeiros números ímpares positivos:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

Solução

Já existem fórmulas na Matemática que resolvem o problema acima. Entretanto, o nosso interesse não é usá-las, mas descobri-las através da indução. Para isso é necessário inicialmente estabelecer uma hipótese, isto é, simplesmente tentar "adivinhar" a resposta.
Dando valores particulares a **n** obtemos:

$S_1 = 1$
$S_2 = 1 + 3 = 4$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

É fácil notar que $S_1 = 1^2$, $S_2 = 2^2$, $S_3 = 3^2$, $S_4 = 4^2$,... o que nos faz "acreditar" que em geral:

$$S_n = n^2$$

Vamos provar que esta fórmula é verdadeira.

Teorema 1: A fórmula é valida para n = 1:

$$S_1 = 1^2 = 1$$

Teorema 2: Hipótese: $S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

Tese: $S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + \underbrace{[2(k+1) - 1]}_{2k+1} = (k+1)^2$

Somando aos dois membros da hipótese o número $[2(k + 1) - 1] = 2k + 1$ obtemos:

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1]}_{1^\circ \text{ membro da tese}} = \underbrace{k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2}_{2^\circ \text{ membro da tese}}$$

2.4) Estudar, para $n \in \mathbb{N}^*$, a validade da desigualdade:

$$2^n > 2n + 1$$

Solução

Vamos examinar alguns casos particulares:

$n = 1 : 2^1 > 2 \cdot 1 + 1$, é falsa
$n = 2 : 2^2 > 2 \cdot 2 + 1$, é falsa
$n = 3 : 2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, é válida
$n = 4 : 2^4 > 2 \cdot 4 + 1$, é válida

Somos levados a crer que a desigualdade é válida para $n \geq 3$. Vamos prová-la.

Teorema 1: Para n = 3 está verificado

Teorema 2: Hipótese: $2^k > 2k + 1$

Tese: $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$ ou $2^{k+1} > 2k + 3$

Multiplicando os dois membros da hipótese por 2:

$$2^k \cdot 2 > (2k + 1) \cdot 2$$
$$2^{k+1} > 4k + 2$$

Mas, $4k + 2 = (2k + 3) + (2k - 1)$, e como $2k - 1 > 0$, pois $k \geq 3$ tem-se:

$$4k + 2 > 2k + 3$$

Logo: $2^{k+1} > 2k + 3$

2.5) Demonstre que para todo n, $n \in \mathbb{N}^*$, o número:

$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

é divisível por 133.

Solução

Teorema 1: Para n = 1

$A_1 = 11^3 + 12^3 = 3059 = 133 \cdot 23$

Teorema 2: Suponhamos que $A_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1}$ seja divisível por 133. Vamos provar que $A_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2(k+1)+1}$ é tambem divisível por 133.

Temos:

$A_{k+1} = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 12^2$

Como $12^2 = 144 = 133 + 11$, segue-se que:

$A_{k+1} = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot (133 + 11) = 11^{k+2} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 11 + 12^{2k+1} \cdot 133 =$

$= 11 \cdot \underbrace{[11^{k+2} + 12^{2k+1}]}_{\text{divisível por 133 por hipótese.}} + 12^{2k+1} \cdot 133$

As duas parcelas são divisíveis por 133, e daí a tese.

Exercícios Propostos

Para $n \in \mathbb{N}^*$, nos exercícios de 2.6 a 2.12, prove as proposições indicadas:

2.6) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

2.7) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2.8) $1 + 5 + 14 + \ldots + \dfrac{(n-4)(n-3)(2n-7)}{6} = \dfrac{(n-4)(n-3)^2(n-2)}{12}$ $(n \geq 5)$

2.9) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2.10) $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

2.11) $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n(n+1)}{2}$

2.12) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \ldots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

2.13) Ache a *expressão geral* dos números x_n, sabendo-se que $x_1 = 1$ e que para todo natural p, $p > 1$, $x_p = x_{p-1} \cdot 2$. Com a Indução Matemática, demonstre a validade da resposta.

2.14) Estude a validade da desigualdade: $2^n > n^2$.

2.15) **Desigualdade de Bernoulli**. Sendo $a > -1$ e **n** inteiro positivo prove que:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

2.16) Se $n \in \mathbb{N}^*$ demonstre que $10^n - 1$ é divisível por 9.

2.17) Se $n \in \mathbb{N}^*$ demonstre que $n^3 + 5n$ é divisível por 6.

2.18) Se $n \in \mathbb{N}^*$ demonstre que $2^{2n-1} \cdot 3^{n+2} + 1$ é divisível por 11.

Exercícios Suplementares

I.1) Os números reais **a** e **b** são positivos; **m**, **n**, **p**, **r** e **q** são números inteiros. Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\left[(a^m)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{q}{n}}\right]^{nr}}{\left[\sqrt[q]{b^m} \cdot \left(\sqrt[m]{b}\right)^r\right]^{mq}} \div \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-p}\right]^r$$

I.2) Sejam a, b, c, x, y e z números reais positivos, dos quais a, b e c são inteiros. Demonstre que se b é **média aritmética** entre **a** e **c**, e **y** é **média geométrica** entre **x** e **z** então:

$$x^b \cdot y^c \cdot z^a = x^c \cdot y^a \cdot z^b$$

I.3) Calcule o valor da expressão $y = \dfrac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ para:

a) $x = 2 + \sqrt{3}$ b) $x = 2 - \sqrt{3}$

I.4) Considere a expressão $y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$. Quais são as diferentes formas que ela pode assumir segundo os valores de x?

I.5) Racionalize o denominador da fração $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$.

I.6) Se $g(x) = \sqrt{x}$, prove que $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} = \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$ para $x > 0$, $a > 0$ e $x \neq a$.

I.7) As raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são α e β. Para $n \in \mathbb{N}^*$ toma-se: $S_n = \alpha^n + \beta^n$.
Demonstre que $a \cdot S_{n+2} + b \cdot S_{n+1} + c \cdot S_n = 0$

I.8) Para $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \geq 2$ prove que: $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

I.9) Demonstre que $\dfrac{1}{2}\left[a^n + b^n\right] \geq \left[\dfrac{1}{2}(a+b)\right]^n$, para $n \in \mathbb{N}^*$, com **a** e **b** positivos.

I.10) Traçando **n** retas em um plano, não se pode dividi-lo em mais do que 2^n "partes". Demonstre.

I.11) Para todo n em $\mathbb{N}$, $n \geq 2$, prove que:

$$\frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

I.12) Estude a validade da desigualdade: $n^3 < 2^n$.

PARTE II

Capítulo 3 – **Sequências**
Capítulo 4 – **Progressões aritméticas**
Capítulo 5 – **Progressões harmônicas**
Capítulo 6 – **Progressões geométricas**

Capítulo 3

Sequências

3.1. INTRODUÇÃO

Neste item apresentaremos de modo informal o conceito de *sequência*. Mais adiante definiremos sequência como sendo um tipo especial de função.

É comum necessitarmos colocar "em uma certa ordem" os elementos de um conjunto. Com essa "ordenação" obtemos o que se denomina uma **sucessão** ou uma **sequência**.

Por exemplo, os dias da semana poderiam ser ordenados assim:

segunda-feira	1º dia
terça-feira	2º dia
quarta-feira	3º dia
quinta-feira	4º dia
sexta-feira	5º dia
sábado	6º dia
domingo	7º dia

Embora uma sequência possa ser formada por elementos quaisquer, neste livro vamos nos interessar apenas por sequências de *números reais*.

Exemplos

a) Consideremos a sequência $\left(10; -8; \sqrt{2}; 5; \frac{7}{3}\right)$

Podemos dizer que:

primeiro termo é 10
o segundo termo é −8
o terceiro termo é $\sqrt{2}$
o quarto termo é 5
o quinto termo é $\frac{7}{3}$.

Repare que para representar a sequência, colocamos seus elementos entre parênteses.

b) A sequência (3; 7; 8) é diferente da sequência (8; 3; 7) pois, embora sejam formadas pelos mesmos elementos, eles estão em *ordens diferentes*.

É usual representar o i-ésimo termo de uma sequência por a_i (ou b_i ou c_i etc). Assim:

a_1 representa o primeiro termo
a_2 representa o segundo termo
a_3 representa o terceiro termo e assim por diante.

Exemplo

Na sequência (4 ; −2 ; π ; 0) temos:

$$a_1 = 4,\ a_2 = -2,\ a_3 = \pi,\ a_4 = 0$$

Os exemplos que demos até agora são de sequências **finitas**, isto é, têm um número finito de termos. Mas podemos ter também sequências infinitas, isto é, sequências que têm número infinito de termos.

Consideremos por exemplo, a sequência dos números naturais pares, ordenados em ordem crescente.

(0; 2; 4; 6; 8; ...)

Esta é uma *sequência infinita.*

3.2. FUNÇÃO

Vamos lembrar neste item o conceito de função.

Consideremos dois conjuntos não vazios **A** e **B**. Uma **função de A em B** é um conjunto f de pares ordenados (x; y), com $x \in A$ e $y \in B$, satisfazendo a condição:

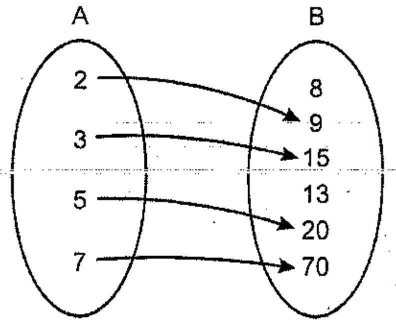
para cada elemento $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x; y) \in f$

Exemplos

a) Sejam os conjuntos
A = {2; 3; 5; 7} e B = {8; 9; 15; 13; 20; 70}.
Consideremos o seguinte conjunto de pares ordenados:

f = {(2; 9); (3; 15); (5; 20); (7; 70)}

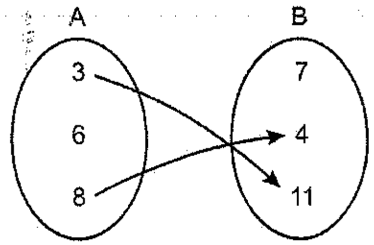
Este conjunto pode ser representado por um *diagrama de flechas*, como vemos ao lado. O conjunto f é uma **função de A em B**, pois cada elemento de A está *relacionado* com um **único** elemento de B. No conjunto A não pode "sobrar" elemento sem correspondente em B, enquanto que em B pode "sobrar" elemento sem correspondente em A (no nosso exemplo "sobram" em B os números 8 e 13).



b) Consideremos os conjuntos
A = {3; 6; 8} e B = {7; 4; 11}.
Seja o conjunto

f = {(3; 11); (8; 4)}.

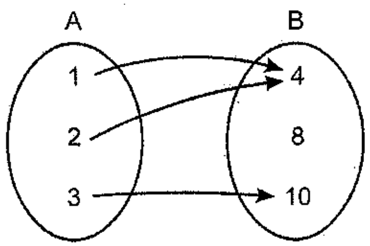
O conjunto **f não** é uma função de A em B pois "sobra" no conjunto A o elemento 6 sem correspondente em B.



c) Sendo A = {1; 2; 3} e B = {4; 8; 10} considere o seguinte conjunto g:

g = {(1, 4); (2; 4); (3; 10)}

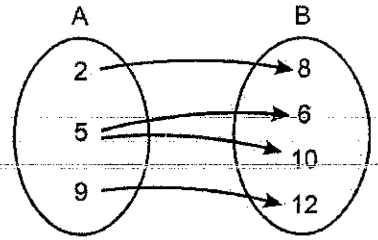
O conjunto g é uma função de A em B. O fato de haver dois elementos de A (os números 1 e 2) com o mesmo correspondente em B (o número 4) não contradiz a nossa definição.



d) Sendo A = { 2; 5; 9} e B = { 8; 6; 10; 12} consideremos o conjunto:

h = {(2; 8); (5; 6); (5; 10); (9; 12)}

O conjunto h **não** é uma função de A em B, pois há um elemento de A (o número 5) que está em correspondência com dois elementos distintos de B (os números 6 e 10) e, de acordo com a definição de função, a cada elemento de A deve corresponder um **único** elemento de B.



Observações

Consideremos uma função f de A em B. Temos:

1ª) o conjunto A é chamado de **domínio de f**, sendo representado por

D(f)

2ª) o conjunto B é chamado de **contradomínio de f**, sendo indicado por

CD(f)

3ª) se o par ordenado (x; y) pertence à função f dizemos que **y é a imagem de x pela função f** e escrevemos:

$$y = f(x)$$

4ª) o conjunto de todos os elementos de B que são imagens de algum elemento de A é chamado **conjunto-imagem de f** e é indicado por:

I(f)

5ª) algumas notações usadas para dizer que f é uma função de A em B são:

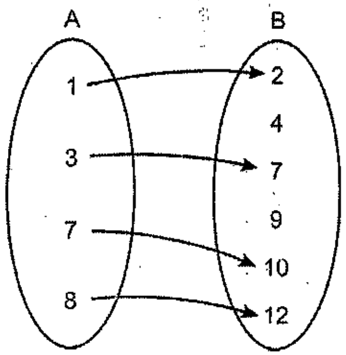
$$f : A \longrightarrow B$$

$$A \xrightarrow{f} B$$

Exemplo

Consideremos os conjuntos A = {1; 3; 7; 8} e B = {2; 4; 7; 9; 10; 12} e seja a função f de A em B:

f = {(1; 2); (3; 7); (7; 10); (8; 12)}



O domínio de f é: D(f) = {1; 3; 7; 8} = A
O contradomínio de f é: CD(f) = {2; 4; 7; 9; 10; 12} = B
O conjunto-imagem de f é: I(f) = {2; 7; 10; 12}
Para dizermos que a imagem de 1 é 2 escrevemos:

$$f(1) = 2$$

Se quisermos dizer que a imagem de 3 é 7 escrevemos:

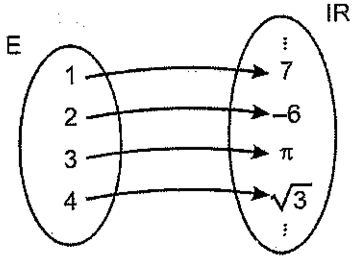
$$f(3) = 7$$

3.3. SEQUÊNCIA FINITA

Consideremos o conjunto E = {1; 2; 3; ...; k} também indicado por $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \geq n \geq k\}$. Chamamos de **sequência finita** qualquer função de E em $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais e $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais).

Exemplo

Consideremos o conjunto E = {1; 2; 3; 4} e a função f dada pelo diagrama de flechas:



$f(1) = 7$
$f(2) = -6$
$f(3) = \pi$
$f(4) = \sqrt{3}$

Esta função é uma sequência finita.
Podemos também usar a notação dada no item 3.1 e escrever:

$$f_1 = 7,\ f_2 = -6,\ f_3 = \pi,\ f_4 = \sqrt{3}$$

Consideremos uma sequência **f** de domínio E = {1; 2; 3;...; k}. Podemos representá-la por

$$(f(1); f(2); f(3); \dots ; f(k))$$

ou então por $(f_n)_{n \in E}$

ou ainda por $(f_n)_{1 \leq n \leq k}$

onde f_n é o **termo geral**

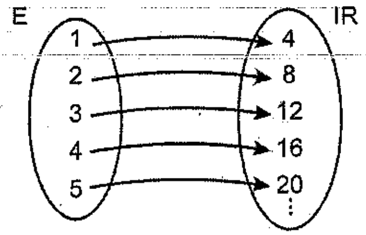
As *imagens* costumam ser chamadas de *termos* da sequência e diremos que:

f(1) é o 1º termo
f(2) é o 2º termo
f(3) é o 3º termo
etc.

No lugar de f(1), f(2), f(3), ... podemos escrever f_1, f_2, f_3, ...

Exemplo

Seja E = {1; 2; 3; 4; 5} e a função a de E em $\mathbb{R}$ dada por a(x) = 4x



$a(1) = 4(1) = 4$
$a(2) = 4(2) = 8$
$a(3) = 4(3) = 12$
$a(4) = 4(4) = 16$
$a(5) = 4(5) = 20$

Esta função é uma sequência finita que poderá ser representada por

$$(4;\ 8;\ 12;\ 16;\ 20)$$

Podemos também escrever:
$a_1 = 4$
$a_2 = 8$
$a_3 = 12$
$a_4 = 16$
$a_5 = 20$

Esta sequência tem 5 termos onde
4 é o primeiro termo
8 é o segundo termo
12 é o terceiro termo
16 é o quarto termo
20 é o quinto termo

Consideremos a sequência

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_k;\ \ldots;\ a_p;\ \ldots\ldots\ a_n)$$

Onde a_k, a_{k+1}, $a_{k+2}, \ldots$, a_p são termos consecutivos.

Em certos casos será útil, observar que, de a_k até a_p, o total de termos (contando com a_k e a_p) é igual a

$$\boxed{p - k + 1} \qquad (3.1)$$

Exemplos

a) $\underbrace{a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7;\ a_8}_{6\ \text{termos}}$ $\quad 6 = 8 - 3 + 1$

b) $\underbrace{a_{20};\ a_{21};\ a_{22};\ a_{23};\ a_{24}}_{5\ \text{termos}}$ $\quad 5 = 24 - 20 + 1$

3.4. MEIOS E EXTREMOS

Consideremos a sequência finita

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ .\ .\ .\ ;\ a_n)$$

Os termos $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_n}$ são chamados **extremos** da sequência; os outros termos são chamados de **meios**.

Dois termos são **equidistantes dos extremos** quando o número de termos que antecedem um deles é igual ao número de termos que sucedem o outro.

Exemplo

Consideremos a sequência

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7;\ a_8;\ a_9)$$

a_1 e a_9 são os extremos
a_2 e a_8 são equidistantes dos extremos
a_3 e a_7 são equidistantes dos extremos
a_4 e a_6 são equidistantes dos extremos

Suponhamos que a_k e a_p sejam termos equidistantes dos extremos da sequência finita:

$$(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_k;\ldots;\ a_p\ldots;\ a_n)$$

Então devemos ter (de acordo com a fórmula 3.1)

$$k - 1 + 1 = n - p + 1$$

isto é,

$$\boxed{k + p = n + 1} \qquad (3.2)$$

Assim, no exemplo anterior, a_3 e a_7 são termos equidistantes dos extremos a_1 e a_9. Temos então: $3 + 7 = 1 + 9$

3.5. SEQUÊNCIA INFINITA

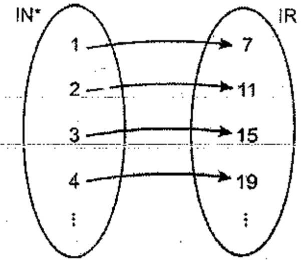
Seja $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos números naturais diferentes de zero:

$$\mathbb{N}^* = \{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$$

Chamamos de **sequência infinita** qualquer função de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Consideremos a função de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(n) = 4n + 3$



$f(1) = 4(1) + 3 = 7$
$f(2) = 4(2) + 3 = 11$
$f(3) = 4(3) + 3 = 15$
$f(4) = 4(4) + 3 = 19$

Esta é uma sequência infinita que pode ser representada por

$$(7;\ 11;\ 15;\ 19;\ ...)$$

Dada uma sequência infinita f podemos representá-la por

$$(f_1;\ f_2;\ f_3;\ ...)$$

ou por

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

ou simplesmente por: (f_n), onde f_n é o **termo geral**.

3.6. RECORRÊNCIA

Para determinarmos uma sequência, além dos processos apresentados nos exemplos anteriores, podemos usar o processo de **recorrência**. Tal processo consiste em dar o primeiro termo (ou os primeiros) e uma sentença aberta que permita calcular cada termo em função do anterior (ou dos anteriores).

Exemplos

a) Consideremos a sequência infinita tal que $a_1 = 5$ e para todo $n > 1$ tem-se

$$a_n = a_{n-1} + 3$$

Vemos que cada termo a_n da sequência é igual ao anterior a_{n-1} somado com 3.

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + 3 = 5 + 3 = 8 \\ a_2 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11 \\ a_4 = a_3 + 3 = 11 + 3 = 14 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Portanto, a sequência pode ser representada por:

$$(5;\ 8;\ 11;\ 14;\ ...)$$

b) Consideremos a sequência f de domínio E = {1; 2; 3; 4; 5; 6} tal que $f_1 = 3$, $f_2 = 7$ e cada termo, a patir do terceiro, é igual à soma dos anteriores. Temos:

$$\begin{cases} f_3 = f_1 + f_2 = 3 + 7 = 10 \\ f_4 = f_1 + f_2 + f_3 = 3 + 7 + 10 = 20 \\ f_5 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 3 + 7 + 10 + 20 = 40 \\ f_6 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 3 + 7 + 10 + 20 + 40 = 80 \end{cases}$$

Assim a sequência é: (3; 7; 10; 20; 40; 80)

c) Seja a sequência infinita tal que:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

Vemos que cada termo dessa sequência (a partir do terceiro) é igual à soma dos dois anteriores:

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\ a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Temos então: (1; 1; 2; 3; 5; 8;...)

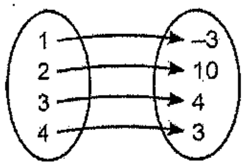
Esta sequência é chamada **sequência de Fibonacci** e tem importantes propriedades. "Fibonacci" é o nome pelo qual ficou conhecido um importante matemático chamado Leonardo de Pisa, que viveu entre 1180 e 1250 aproximadamente. ("Fibonacci" significa filho de Bonaccio.)

Exercícios Resolvidos

3.1) Consideremos a sequência

$$(a_n)\ 1 \leq n \leq 4$$

definida pelo diagrama abaixo:



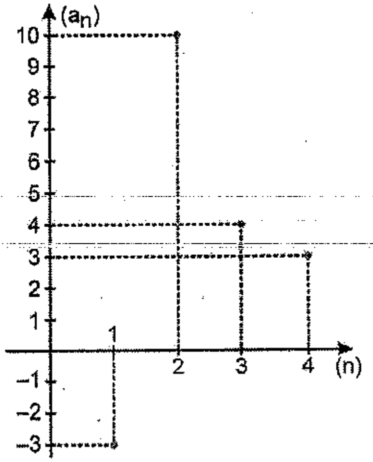
Esboce o gráfico dessa sequência.

Solução

Os pares ordenados que formam a sequência são:

$$(1;\ -3);\ (2;\ 10);\ (3;\ 4);\ (4;\ 3)$$

Representemos esses pares num sistema de coordenadas cartesianas.



3.2) Escreva os 4 primeiros termos das sequências infinitas dadas por:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $a_n = (-1)^n$

c) $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$

Solução

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

$a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$a_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$ $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dots\right)$

$a_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$

$a_4 = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

b) $a_n = (-1)^n$

$a_1 = (-1)^1 = -1$

$a_2 = (-1)^2 = +1$ $(-1; 1; -1; 1; \dots)$

$a_3 = (-1)^3 = -1$

$a_4 = (-1)^4 = +1$

c) $b_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$

$b_1 = (-1)^1 \dfrac{1}{1+2} = -\dfrac{1}{3}$

$b_2 = (-1)^2 \dfrac{2}{2+2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ $\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{5}; \dfrac{2}{3}; \dots\right)$

$b_3 = (-1)^3 \dfrac{3}{3+2} = -\dfrac{3}{5}$

$b_4 = (-1)^4 \dfrac{4}{4+2} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

3.3) Escreva os 5 primeiros termos das sequências infinitas definidas por:

a) $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 2n & (n \geq 2) \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4 & (n \geq 2) \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} & (n \geq 3) \end{cases}$

Solução

a) $a_1 = 4$

$a_n = a_{n-1} + 2n$

$a_2 = a_1 + 2(2) = 4 + 4 = 8$

$a_3 = a_2 + 2(3) = 8 + 6 = 14$

$a_4 = a_3 + 2(4) = 14 + 8 = 22$

$a_5 = a_4 + 2(5) = 22 + 10 = 32$

$(4; 8; 14; 22; 32; \dots)$

b) $\begin{cases} a_1 = -3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 4 \end{cases}$

$a_2 = 2a_1 + 4 = 2(-3) + 4 = -2$

$a_3 = 2a_2 + 4 = 2(-2) + 4 = 0$

$a_4 = 2a_3 + 4 = 2(0) + 4 = 4$

$a_5 = 2a_4 + 4 = 2(4) + 4 = 12$

$(-3; -2; 0; 4; 12; \dots)$

c) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \\ a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \end{cases}$

$a_3 = 2a_2 + 3a_1 = 2(3) + 3(2) = 12$

$a_4 = 2a_3 + 3a_2 = 2(12) + 3(3) = 33$

$a_5 = 2a_4 + 3a_3 = 2(33) + 3(12) = 102$

$(2; 3; 12; 33; 102; \dots)$

3.4) Seja a sequência infinita cujo termo geral é

$$a_n = 3n - 4$$

determine:

a) a_8

b) a_{k+1}

c) a_{3k-1}

Solução

a) $a_8 = 3(8) - 4 = 24 - 4 = 20$

b) $a_{k+1} = 3(k+1) - 4 = 3k + 3 - 4 = 3k - 1$

c) $a_{3k-1} = 3(3k-1) - 4 = 9k - 3 - 4 = 9k - 7$

3.5) Dê os termos gerais das seguintes sequências:

a) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}; \dots\right)$

b) $(2; 4; 6; 8; 10; 12; \dots)$

c) $(2; 4; 8; 16; 32; 64; \dots)$

d) $(1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots)$

e) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{5}{6}; \dfrac{7}{8}; \dfrac{9}{10}; \dots\right)$

f) $(1^3; 3^5; 5^7; 7^9; 9^{11}; \dots)$

g) $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{4}; \dfrac{3}{8}; \dfrac{4}{16}; \dfrac{5}{32}; \dots\right)$

Solução

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

b) $a_n = 2n$

c) $a_n = 2^n$

d) $a_n = 2n - 1$

e) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n}$

f) $a_n = (2n-1)^{2n+1}$

g) $a_n = \dfrac{n}{2^n}$

3.6) Considere a sequência infinita dada por

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

a) Escreva os 4 primeiros termos dessa sequência.

b) Determine as constantes **a** e **b** tais que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$

c) Calcule o valor da soma

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Solução

a) $a_1 = \dfrac{1}{(2-1)(2+1)} = \dfrac{1}{(1)(3)} = \dfrac{1}{3}$

$a_2 = \dfrac{1}{(4-1)(4+1)} = \dfrac{1}{(3)(5)} = \dfrac{1}{15}$

$a_3 = \dfrac{1}{(6-1)(6+1)} = \dfrac{1}{(5)(7)} = \dfrac{1}{35}$

$a_4 = \dfrac{1}{(8-1)(8+1)} = \dfrac{1}{(7)(9)} = \dfrac{1}{63}$

Assim, a sequência é:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 3}; \frac{1}{3\cdot 5}; \frac{1}{5\cdot 7}; \frac{1}{7\cdot 9}; \dots\right) \text{ ou } \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{15}; \frac{1}{35}; \frac{1}{63}; \dots\right)$$

b) $$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{(2n-1)} + \frac{b}{(2n+1)} = \frac{a(2n+1)+b(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{2na + a + 2nb - b}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b)n + (a-b)}{(2n-1)(2n+1)}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}^*$ devemos ter então:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2a+2b)n + (a-b)}{(2n-1)(2n+1)}$$

Assim:

$$\begin{cases} 2a + 2b = 0 \\ a - b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = -\dfrac{1}{2}$

Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ vale:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}$$

c) Queremos calcular $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, isto é:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

Usando o resultado do item b, podemos escrever:

$$\oplus \begin{cases} \dfrac{1}{1\cdot 3} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{3} \\[2mm] \dfrac{1}{3\cdot 5} = \dfrac{\frac{1}{2}}{3} - \dfrac{\frac{1}{2}}{5} \\[2mm] \dfrac{1}{5\cdot 7} = \dfrac{\frac{1}{2}}{5} - \dfrac{\frac{1}{2}}{7} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1} \end{cases}$$

Adicionando membro a membro essas igualdades, vários termos vão se cancelar, e ficaremos com:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{n}{2n+1}$$

3.7) Considere a sequência infinita definida por:

$$a_n = n^2$$

e seja (b_n) uma sequência dada por:

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

a) Escreva os 6 primeiros termos de (a_n).

b) Escreva os 5 primeiros termos de (b_n).

c) Dê a fórmula do termo geral de (b_n) em função de n.

Solução

a) $a_n = n^2$
$a_1 = (1)^2 = 1$
$a_2 = (2)^2 = 4$
$a_3 = 3^2 = 9$
$a_4 = 4^2 = 16$
$a_5 = 5^2 = 25$
$a_6 = 6^2 = 36$
$(a_n) = (1; 4; 9; 16; 25; 36; ...)$

b) $b_n = a_{n+1} - a_n$
$b_1 = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$
$b_2 = a_3 - a_2 = 9 - 4 = 5$
$b_3 = a_4 - a_3 = 16 - 9 = 7$
$b_4 = a_5 - a_4 = 25 - 16 = 9$
$b_5 = a_6 - a_5 = 36 - 25 = 11$
$(b_n) = (3; 5; 7; 9; 11; ...)$

c) $b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
$b_n = 2n + 1$

3.8) Consideremos as sequências infinitas (a_n) e (b_n) dadas por:

$$\begin{cases} a_n = 4n - 1 \\ b_n = 2n \end{cases}$$

e seja (c_n) a sequência infinita dada por

$$c_n = a_{b_n}$$

a) Escreva os 8 primeiros termos de (a_n).
b) Escreva os 4 primeiros termos de (b_n).
c) Escreva os 4 primeiros termos de (c_n).
d) Dê o termo geral de (c_n) em função de **n**.

Solução

a) $a_n = 4n - 1$
$a_1 = 4(1) - 1 = 3$
$a_2 = 4(2) - 1 = 7$
$a_3 = 4(3) - 1 = 11$
$a_4 = 4(4) - 1 = 15$
$a_5 = 4(5) - 1 = 19$
$a_6 = 4(6) - 1 = 23$
$a_7 = 4(7) - 1 = 27$
$a_8 = 4(8) - 1 = 31$
$(a_n) = (3; 7; 11; 15; 19; 23; 27; 31;...)$

b) $b_n = 2n$
$b_1 = 2(1) = 2$
$b_2 = 2(2) = 4$
$b_3 = 2(3) = 6$
$b_4 = 2(4) = 8$
$(b_n) = (2; 4; 6; 8; ...)$

c) $c_n = a_{b_n}$
$c_1 = a_{b_1} = a_2 = 7$
$c_2 = a_{b_2} = a_4 = 15$
$c_3 = a_{b_3} = a_6 = 23$
$c_4 = a_{b_4} = a_8 = 31$
$(c_n) = (7; 15; 23; 31;...)$

d) $c_n = a_{b_n} = a_{2n}$
$a_n = 4n - 1 \Rightarrow a_{2n} = 4(2n) - 1 = 8n - 1$
Assim:
$c_n = a_{2n} = 8n - 1$
$c_n = 8n - 1$

3.9) Em um exemplo do item 3.6 mencionamos a **sequência de Fibonacci**, a qual é dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \qquad n \geq 3 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

Usando o **método da Indução Matemática** demonstre que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Solução

Teorema 1: Façamos, em primeiro lugar, a verificação para n = 1 e n = 2

$$a_1 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

$$a_2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{4\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Teorema 2: Vamos agora admitir que a fórmula vale para n = k e n = k + 1 e tentar demonstrar que isso implica no fato da fórmula ser verdadeira para n = k + 2.

Supondo então que a fórmula vale para n = k e n = k + 1, temos:

$$a_k = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad a_{k+1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}}$$

Pela definição da sequência de Fibonacci temos

$$a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$$

Assim:

$$a_{k+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)}{\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}$$

É fácil observar que

$$\begin{cases} \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

e portanto:

$$a_{k+2} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}}{\sqrt{5}}$$

Assim concluímos que a fórmul · vale para n = k + 2.

Exercícios Propostos

3.10) Dê os 5 primeiros termos das sequências infinitas dadas por:

a) $a_n = 3n$
b) $a_n = 2n - 1$
c) $a_n = 2n + 1$
d) $a_n = 2n$
e) $a_n = 2n + 6$
f) $a_n = \frac{4n-1}{5n+2}$

3.11) Dê os 6 primeiros termos das sequências infinitas dadas por:

a) $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2 \end{cases} \quad (n \geq 2)$

b) $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 5 \\ a = a_{n-1} + 2a_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 3)$

c) $a_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$

3.12) Consideremos a sequência (a_n) dada por:

$$a_n = \frac{3}{4}n - 1$$

Determine:
a) a_5
b) a_{k+4}
c) a_{2k}

3.13) Seja a sequência de domínio E = {1; 2; 3; 4} dada por

$$a_n = n - 2$$

Faça o gráfico dessa sequência.

3.14) Consideremos a sequência (a_n) dada por $a_n = 2n + 3$ e seja (b_n) dada por

$$b_n = 5a_n + 3a_{n+1}$$

Dê o termo geral b_n em função de **n**.

3.15) Considere as sequências (a_n), (b_n) e (c_n) definidas por:

$$\begin{cases} a_n = 2n + 4 \\ b_n = a_n^2 \\ c_n = b_{n+1} - b_n \end{cases}$$

a) Dê a fórmula do termo geral de (b_n) em função de n.
b) Dê a fórmula do termo geral de (c_n) em função de n.

3.16) Uma sequência infinita tem termo geral dado por

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

a) Escreva os 4 primeiros termos da sequência.
b) Determine as constantes a e b tais que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$$

c) Dê a fórmula da soma dos **n** primeiros termos dessa sequência, em função de **n** (sugestão: veja o problema 3.6).

3.17) Dê as fórmulas dos termos gerais das seguintes sequências:

a) (4; 6; 8; 10; 12;...)

b) (10; 12; 14; 16; 18; 20;...)

c) (3; 5; 7; 9; 11;...)

d) (9; 11; 13; 15; 17;...)

e) $\left(\frac{7}{4}; \frac{9}{6}; \frac{11}{8}; \frac{13}{10};...\right)$

f) $(1^2; 2^3; 3^4; 4^5; 5^6;...)$

3.18) Consideremos as sequências (a_n) e (b_n) dadas por

$$\begin{cases} a_n = 3n + 2 \\ b_n = 2n - 1 \end{cases}$$

e seja (c_n) a sequência dada por $c_n = b_{a_n}$

a) Dê a fórmula do termo geral de (c_n) em função de n.

b) Escreva os 4 primeiros termos de (c_n).

3.7. SOMATÓRIO

Em certos casos podemos abreviar a escrita de uma soma usando o símbolo Σ (é a letra grega "sigma", que corresponde à letra S do nosso alfabeto, sugerindo assim a palavra "soma"), que é chamado **símbolo de somatório**. A maneira de se usar esse símbolo será vista nos exemplos seguintes.

Exemplos

a) $\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

b) $\sum_{i=3}^{7} a_i = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

c) $\sum_{i=1}^{5} 7i = 7(1) + 7(2) + 7(3) + 7(4) + 7(5)$

d) $\sum_{i=0}^{2} (4i - 7) = [4(0) - 7] + [4(1) - 7] + [4(2) - 7]$

De modo geral, sendo k e n números naturais com $k \leq n$, o símbolo

$$\sum_{i=k}^{n} a_i$$

representa a soma: $a_k + a_{k+1} + ... + a_n$

e lemos assim:

"somatório dos a_i, com **i** variando de **k** a **n**".

Os números **k** e **n** são chamados **limites do somatório** e é fácil verificar que o número de termos de $\sum_{i=k}^{n} a_i$ é igual a n − k + 1.

Exemplo

Consideremos o somatório $\sum_{i=2}^{7} a_i$

Lemos assim:

"somatório dos a_i para **i** variando de **2** a **7**".

Os limites do somatório são 2 e 7. Fazendo o desenvolvimento,

$$\sum_{i=2}^{7} a_i = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$$

observamos que há 6 termos, isto é, o número de termos é 7 − 2 + 1.

Propriedades

a) $$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad (3.3)$$

De fato:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + ... + (a_n + b_n) =$$

$$= (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (b_1 + b_2 + ... + b_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (3.4)$$

De fato:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + ... + ca_n = c(a_1 + a_2 + ... + a_n) = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Caso Especial

Sendo a uma constante, temos:

$$\sum_{i=1}^{n} a = n \cdot a$$

Exemplos

a) $\sum_{i=1}^{3} a = a + a + a = 3a$

b) $\sum_{i=1}^{3} (5i+2) = \sum_{i=1}^{3} 5i + \sum_{i=1}^{3} 2 = 5\sum_{i=1}^{3} i + 3(2) =$

$= 5(1+2+3) + 3(2) = 5(6) + 3(2) = 36$

3.8. PRODUTÓRIO

Sejam **k** e **n** números naturais com $k \leq n$. O símbolo

$$\prod_{i=k}^{n} a_i$$

representa o produto

$$a_k \cdot a_{k+1} \cdot \ldots \cdot a_n$$

Exemplos

a) $\prod_{i=1}^{4} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$

b) $\prod_{i=2}^{7} a_i = a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7$

O símbolo Π é chamado **símbolo de produtório** (Π é a letra grega "pi" maiúscula).

Propriedades

a) $\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$ (3.5)

De fato:

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = (a_1 b_1) \cdot (a_2 b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n b_n) =$$

$$= (a_1 a_2 \ldots a_n)(b_1 b_2 \ldots b_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i$$

b) $\prod_{i=1}^{n} ca_i = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$ (3.6)

De fato:

$$\prod_{i=1}^{n} ca_i = (ca_1)(ca_2)\ldots(ca_n) =$$

$$= \underbrace{(c \cdot c \cdot \ldots c)}_{\text{n fatores}}(a_1 \cdot a_2 \ldots a_n) = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Caso Especial

Sendo c uma constante temos:

$$\prod_{i=1}^{n} c = c^n$$

Exemplo

$$\prod_{i=1}^{4} c = c \cdot c \cdot c \cdot c = c^4$$

Exercícios Resolvidos

3.19) Desenvolva os somatórios:

a) $\sum_{i=1}^{5} b_i$

b) $\sum_{j=1}^{3} a_j$

c) $\sum_{i=3}^{6} (9i)$

d) $\sum_{i=0}^{3} (6i+2)$

e) $\sum_{k=1}^{5} 2^k (-1)^{k+1}$

Solução

a) $\sum_{i=1}^{5} b_i = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$

b) $\sum_{j=1}^{3} a_j = a_1 + a_2 + a_3$

c) $\sum_{i=3}^{6} (9i) = 9(3) + 9(4) + 9(5) + 9(6)$

d) $\sum_{i=0}^{3} (6i+2) = [6(0)+2] + [6(1)+2] + [6(2)+2] + [6(3)+2]$

e) $\sum_{k=1}^{5} 2^k (-1)^{k+1} = 2^1(-1)^2 + 2^2(-1)^3 + 2^3(-1)^4 + 2^4(-1)^5 + 2^5(-1)^6$

3.20) Calcule:

a) $\sum_{i=0}^{3}\left[(-1)^i+2^{i+1}\right]$

b) $\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$

Solução

a) $\sum_{i=0}^{3}\left[(-1)^i+2^{i+1}\right]=\left[(-1)^0+2^1\right]+\left[(-1)^1+2^2\right]+\left[(-1)^2+2^3\right]+\left[(-1)^3+2^4\right]=$

$= (1 + 2) + (-1 + 4) + (1 + 8) + (-1 + 16) =$

$= (3) + (3) + (9) + (15) = 30$

b) $\sum_{k=0}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^6=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{64}=$

$=\frac{64+16+4+1}{64}=\frac{85}{64}$

3.21) Represente as expressões abaixo usando o símbolo de somatório:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + 10$

b) $2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$

c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

d) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$

Solução

a) $\sum_{i=1}^{5}(2i)$

b) $\sum_{i=1}^{6}2^i$

c) $\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

d) $\sum_{i=1}^{6}(2i-1)$

3.22) Desenvolva os produtórios:

a) $\prod_{i=4}^{9}a_i$ b) $\prod_{i=4}^{7}(3i)$

Solução

a) $\prod_{i=4}^{9}a_i=a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot a_7\cdot a_8\cdot a_9$

b) $\prod_{i=4}^{7}(3i)=(3\cdot4)(3\cdot5)(3\cdot6)(3\cdot7)$

Exercícios Propostos

3.23) Desenvolva os somatórios:

a) $\sum_{i=1}^{4}5i$

b) $\sum_{k=3}^{8}3^k$

c) $\sum_{k=4}^{9}\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}$

3.24) Calcule:

a) $\sum_{i=1}^{5}(3i-6)$

b) $\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\,2^{k+1}$

3.25) Desenvolva os produtórios:

a) $\prod_{j=1}^{3}8^j$

b) $\prod_{i=3}^{6}\frac{4i}{i+1}$

3.26) Represente as expressões abaixo usando os símbolos de somatório ou produtório:

a) $4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24$

b) $3 + 7 + 11 + 15$

c) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{16}\cdot\frac{5}{32}\cdot\frac{6}{64}$

Capítulo 4

Progressões aritméticas

4.1. DEFINIÇÃO

Chamamos de **progressão aritmética** (PA) qualquer sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com uma constante denominada razão da progressão. Em outras palavras:

> Uma **progressão aritmética** de **razão r** é uma sequência tal que:
> $$a_n = a_{n-1} + r \ (n > 1)$$

Exemplos

a) Consideremos a sequência (3; 5; 7; 9; 11). Vemos que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com 2. Dizemos então que a sequência é uma progressão aritmética de razão r = 2.

b) A sequência (2; 7; 12; 17; 22; 27) é uma progressão aritmética de razão igual a 5.

c) A sequência (20; 17; 14; 11; 8; 5; 2; –1) é uma PA de razão r = –3.

d) A sequência (5; 5; 5; 5; 5) é uma PA de razão r = 0.

e) A sequência $\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}; 2; \frac{7}{3}; \frac{8}{3}; 3\right)$ é uma PA de razão $r = \frac{1}{3}$.

f) Consideremos a PA infinita dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} - 2 \end{cases}$$

A razão dessa PA é r = –2 e seus primeiros termos estão representados abaixo:

$$(4; 2; 0; -2; -4; -6; ...)$$

4.2. SEQUÊNCIAS CRESCENTES E DECRESCENTES

Consideremos a sequência $(a_n)_{n \in E}$ de domínio E. Dizemos que:

1º) a sequência é **crescente** se, e somente se, para todo $n \in E$ (com n > 1) tem-se:

$$a_n > a_{n-1}$$

2º) a sequência é **decrescente** se, e somente se, para todo $n \in E$ (com n > 1) tem-se:

$$a_n < a_{n-1}$$

3º) a sequência é **estacionária** se, e somente se, para todo $n \in E$ (com $n > 1$) tem-se:

$$a_n = a_{n-1}$$

Exemplos

a) a sequência (2; 7; 20; 42; 70) é crescente
b) a sequência (18; 14; 12; 3; –4; –20) é decrescente
c) a sequência (8; 8; 8; 8; 8) é estacionária
d) a sequência (4; 6; 17; 20; 19; 18; 2) não é crescente, nem decrescente, nem estacionária.

4.3. PROPRIEDADES

Consideremos a progressão aritmética $(a_n)_{n \in E}$ de domínio E e razão **r**. Valem as propriedades:

1ª) A PA é crescente $\Leftrightarrow r > 0$

De fato:
A PA é crescente $\Leftrightarrow a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1} + r > a_{n-1} \Leftrightarrow r > 0$

2ª) A PA é decrescente $\Leftrightarrow r < 0$

A verificação desta propriedade é análoga à verificação da 1ª.

3ª) A PA é estacionária $\Leftrightarrow r = 0$

A verificação desta propriedade também é análoga à verificação da 1ª.

4.4. FÓRMULA DO TERMO GERAL

Consideremos a PA de razão **r**:

$$(a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots)$$

Temos:

$$\oplus\begin{cases} \cancel{a_2} = a_1 + r \\ \cancel{a_3} = \cancel{a_2} + r \\ \cancel{a_4} = \cancel{a_3} + r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Lembrando da fórmula 3·1 do capítulo 3, o número de igualdade ao lado é: $n - 2 + 1 = n - 1$

Somando membro a membro essas n – 1 igualdades teremos:

$$a_n = a_1 + \underbrace{r + r + r + \ldots + r}_{(n-1)\text{ parcelas}}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \quad (4.1)$$

Exemplos

a) Podemos então escrever:
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_1 + 2r$
$a_4 = a_1 + 3r$
$a_{20} = a_1 + 19r$
$a_{37} = a_1 + 36r$

b) É importante observar que se $a_n = a_{n-1} + r$ então $r = a_n - a_{n-1}$, isto é, para obtermos a razão de uma PA, basta fazermos a diferença entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o anterior. Assim, na PA (5; 12; 19; 26; 33) a razão r pode ser obtida do seguinte modo:

$$r = 12 - 5 = 7 \text{ ou } r = 19 - 12 = 7$$

c) Determinemos o 8º termo da seguinte PA: (1; 3; 5;...)

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ a_8 &= a_1 + 7r = 1 + 7(2) = 15 \end{aligned}$$

Tomemos novamente a PA de razão **r**:

$$(a_1;\ a_2;\ \ldots\ a_k;\ \ldots;\ a_n;\ \ldots)$$

Podemos escrever:

$$\oplus\begin{cases} \cancel{a_{k+1}} = a_k + r \\ \cancel{a_{k+2}} = \cancel{a_{k+1}} + r \\ \cancel{a_{k+3}} = \cancel{a_{k+2}} + r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = \cancel{a_{n-1}} + r \end{cases}$$

O total de **igualdades** ao lado é: $n - (k+1) + 1$ ou $n - k - 1 + 1$ ou: $n - k$

Somando membro a membro essas **n – k** igualdades, teremos:

$$a_n = a_k + \underbrace{r + r + r + \ldots + r}_{(n-k)\text{ parcelas}}$$

$$a_n = a_k + (n-k)r \quad (4.2)$$

A fórmula 4.1 é um caso particular da fórmula 4.2.

Exemplos

a) Podemos escrever:
$a_{20} = a_3 + (20 - 3)r = a_3 + 17r$
$a_{40} = a_5 + 35r$

b) Consideremos uma PA em que $a_7 = -9$ e $r = 4$ e calculemos a_{15}.
$a_{15} = a_7 + 8r = (-9) + 8(4) = -9 + 32 = 23$

A fórmula 4.2 foi estabelecida para $n \geq k$, mas é fácil perceber que ela vale também para $n \leq k$. Assim, por exemplo, podemos escrever:

$a_5 = a_9 + (5-9)r = a_9 - 4r$
$a_3 = a_{20} + (3-20)r = a_{20} - 17r$
$a_7 = a_{30} - 23r$

Considerando a fórmula 4.1 temos:

$a_n = a_1 + (n-1)r = a_1 + nr - r$
ou
$a_n = \underbrace{r}_{\text{constante}}n + \underbrace{(a_1 - r)}_{\text{constante}}$

Portanto, qualquer sequência onde o termo geral é dado por uma expressão do tipo:

$$a_n = An + B \qquad (4.3)$$

onde **A** e **B** são constantes, *é uma PA de razão igual a A.*

Exemplos

a) A sequência cujo termo geral é $a_n = 7n - 8$ é uma PA de razão igual a 7 (portanto é uma PA crescente).

b) A sequência cujo termo geral é $a_n = -3n + \frac{5}{8}$ é uma PA de razão igual a -3 (portanto é uma PA decrescente).

c) A sequência cujo termo geral é $a_n = 9$ é uma PA de razão igual a zero (PA estacionária). Poderíamos também escrever: $a_n = 0n + 9$. Supondo que seja uma PA infinita teremos:

(9; 9; 9; 9;...)

Exercícios Resolvidos

4.1) Determine o oitavo termo de uma PA onde $a_5 = 6$ e $a_{17} = 30$

Solução

De acordo com a fórmula 4.2 temos:
$a_{17} = a_5 + 12r$
$30 = 6 + 12r$
$12r = 24$
$r = 2$
Assim: $a_8 = a_5 + 3r = 6 + 3(2) = 12$

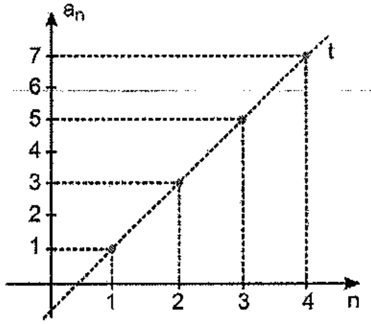
4.2) Seja a PA de domínio E = {1; 2; 3; 4} cujo termo geral é $a_n = 2n - 1$

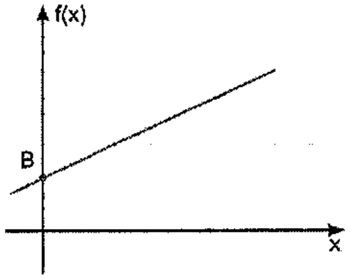
a) qual é a razão dessa PA?
b) quais são os termos dessa PA?
c) faça o gráfico de a_n em função de n.

Solução

a) $a_n = 2n - 1 \Rightarrow r = 2$
b) $a_1 = 2(1) - 1 = 1$
$a_2 = 2(2) - 1 = 3$
$a_3 = 2(3) - 1 = 5$
$a_4 = 2(4) - 1 = 7$
c)

n	a_n
1	1
2	3
3	5
4	7





Os pares ordenados que deverão formar o gráfico são:

(1; 1), (2; 3), (3; 5), (4; 7),

isto é, apenas 4 pares e, portanto, o nosso gráfico tem apenas 4 pontos que são os assinalados no nosso desenho (esses pontos não devem ser "ligados"). Observamos que os 4 pontos estão sobre uma mesma reta t o que não é de estranhar pois, como sabemos, quando temos uma função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, do tipo:

$$f(x) = Ax + B$$

onde **A** e **B** são constantes, o gráfico é uma reta que corta o eixo vertical no ponto de ordenada B. Como uma PA apresenta sempre termo geral do tipo

$$a_n = An + B$$

o gráfico de uma PA será um conjunto de pontos alinhados.

4.3) Consideremos a PA (–5; –1; 3;...)
a) determine a posição do número 103 nessa PA
b) verifique se o número 8726 é um dos termos da PA.

Solução

a) $r = (-1) - (-5) = -1 + 5 = 4$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$103 = -5 + (n - 1)(4)$

Resolvendo esta equação obtemos n = 28 e, assim, o número 103 é o 28º termo da PA.

b) Suponhamos que exista um número natural **n** tal que:

$a_n = 8\,726$

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$8\,726 = -5 + (n - 1)(4)$

Porém, resolvendo esta equação, obtemos $n = \frac{8\,735}{4}$ que não é número natural.
Portanto, 8 726 não é termo dessa PA.

4.4) Numa PA temos $a_3 = 11$ e $a_7 = 27$. Determine a_1 e r.

Solução

$a_3 = a_1 + 2r$
$11 = a_1 + 2r$
$a_7 = a_1 + 6r$
$27 = a_1 + 6r$

Temos então o sistema: $\begin{cases} a_1 + 2r = 11 \\ a_1 + 6r = 27 \end{cases}$

Resolvendo-o, obtemos $a_1 = 3$ e $r = 4$

4.5) Numa PA temos $a_2 + a_4 = 14$ e $a_3 + a_6 = 23$. Escreva os quatro primeiros termos da progressão.

Solução

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_4 = a_1 + 3r \\ a_3 = a_1 + 2r \\ a_6 = a_1 + 5r \end{cases} \qquad \begin{aligned} &a_2 + a_4 = 14 \\ &a_1 + r + a_1 + 3r = 14 \\ &2a_1 + 4r = 14 \\ &a_1 + 2r = 7 \text{ (I)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &a_3 + a_6 = 23 \\ &a_1 + 2r + a_1 + 5r = 23 \\ &2a_1 + 7r = 23 \text{ (II)} \end{aligned}$$

Temos então o sistema formado pelas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} a_1 + 2r = 7 \\ 2a_1 + 7r = 23 \end{cases}$$

Resolvendo-o, obtemos $a_1 = 1$ e $r = 3$. Assim a progressão é:

(1; 4; 7; 10;...)

4.6) Determine o número de termos **n** de uma PA finita na qual o primeiro termo é 1, o último é 17 e a razão é r = n – 1.

Solução

$a_n = a_1 + (n - 1)r$
$17 = 1 + (n - 1)(n - 1)$
$(n - 1)^2 = 16$

$n - 1 = \pm 4 \begin{cases} n - 1 = 4 \Leftrightarrow n = 5 \\ n - 1 = -4 \Leftrightarrow n = -3 \text{ (não serve pois n deve ser natural)} \end{cases}$

Assim: n = 5

4.7) Numa PA de razão r = –3, o 17º termo é igual a 20% do 1º termo. Escreva os 4 primeiros termos da PA.

Solução

a_{17} é igual a 20% de a_1, isto é, $a_{17} = \frac{20}{100} a_1 = \frac{1}{5} a_1 = \frac{a_1}{5}$

Sabemos que: $a_{17} = a_1 + 16r$

Assim: $\frac{a_1}{5} = a_1 + 16(-3)$

Resolvendo esta equação obtemos $a_1 = 60$
Assim a PA é: (60; 57; 54; 51;...)

4.8) *Interpole* 4 meios aritméticos entre –3 e 22.

Solução

Interpolar 4 meios aritméticos entre –3 e 22 significa que devemos achar 4 números que "colocados" entre –3 e 22 deverão formar uma PA, onde o primeiro termo é –3 e o último é 22. Teremos, portanto, um total de 6 termos.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
–3					22

4 meios

$$\begin{cases} a_6 = a_1 + 5r \\ 22 = -3 + 5r \\ 5r = 25 \\ r = 5 \end{cases}$$

Portanto, a PA é:

(–3; 2; 7; 12; 17; 22)

e os 4 meios são: 2, 7, 12 e 17.
Devemos observar que podemos usar a palavra "inserir" no lugar da palavra "interpolar".

4.9) Numa PA de razão r = –6, a razão entre o 21º termo e o 1º termo é igual a $\frac{3}{5}$. Escreva os 3 primeiros termos da PA.

Solução

Dizer que a razão entre o 21º termo e o 1º termo é igual a $\frac{3}{5}$ significa que

$$\frac{a_{21}}{a_1} = \frac{3}{5}.$$

Podemos, então, escrever: $a_{21} = \frac{3}{5}a_1$.

Mas: $a_{21} = a_1 + 20r$

Assim: $\frac{3a_1}{5} = a_1 + 20(-6)$

Resolvendo esta equação, obtemos $a_1 = 300$. Assim a PA é:

(300; 294; 288;...)

4.10) Qual é o primeiro termo negativo da PA $\left(\frac{4}{5}; \frac{13}{20}; \ldots\right)$?

Solução

$$r = \frac{13}{20} - \frac{4}{5} = \frac{13-16}{20} = -\frac{3}{20}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r = \frac{4}{5} + (n-1)\left(\frac{-3}{20}\right) = \frac{-3}{20}n + \frac{4}{5} + \frac{3}{20}$$

$$a_n = -\frac{3}{20}n + \frac{19}{20}$$

Assim:

$$a_n < 0 \iff -\frac{3}{20}n + \frac{19}{20} < 0 \iff n > \frac{19}{3}$$

Como $\frac{19}{3} \cong 6{,}3$ e n deve ser natural, concluímos que:

$$a < 0 \Leftrightarrow n \geq 7$$

Portanto, o 1º termo negativo é a_7:

$$a_7 = a_1 + 6r = \frac{4}{5} + 6\left(-\frac{3}{20}\right) = \frac{4}{5} - \frac{9}{10} = -\frac{1}{10}$$

4.11) Uma função f de domínio $\mathbb{N}$ é dada por:

$$\begin{cases} f(0) = 5 \\ f(n+1) = \dfrac{4f(n)+3}{4} \end{cases}$$

Calcule f(60)

Solução

Temos: $f(n+1) = \frac{4f(n)+3}{4} = f(n) + \frac{3}{4}$

Esta relação de recorrência define uma PA de razão $r = \frac{3}{4}$, tal que:

$$\begin{cases} f(0) = a_1 = 5 \\ f(1) = a_2 \\ f(2) = a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(60) = a_{61} \end{cases} \qquad a_{61} = a_1 + 60r = 5 + 60\left(\frac{3}{4}\right) = 5 + 45 = 50$$

4.12) Consideremos a PA de termo geral a_n e razão r. Sendo k um número real não nulo, consideremos a sequência de termo geral b_n tal que:

$$b_n = k \cdot a_n$$

Mostre que (b_n) é uma PA e calcule sua razão.

Solução

Sendo (a_n) uma PA de razão **r** podemos escrever (de acordo com a fórmula 4.3)

$$a_n = rn + c$$

onde **c** é uma constante. Assim:

$$b_n = ka_n = k(rn + c) = krn + kc$$

Como **kr** e **kc** são constantes, ainda de acordo com a fórmula 4.3 concluímos que (b_n) é uma PA cuja razão é igual a $k \cdot r$.

4.13) a) Considere as sequências (a_n) e (b_n) definidas por:

$$a_n = 3n - 2 \text{ e } b_n = 2n$$

Consideremos ainda a sequência (c_n) definida por:

$$c_n = a_{b_n}$$

Mostre que (c_n) é uma PA e calcule sua razão.

Solução

$$\left.\begin{matrix} c_n = a_{b_n} \\ b_n = 2n \end{matrix}\right\} c_n = a_{2n}$$

$$a_n = 3n - 2 \Rightarrow a_{2n} = 3(2n) - 2 = 6n - 2$$

Assim: $c_n = a_{2n} = 6n - 2$

De acordo com a fórmula 4.3 concluímos que (c_n) é uma PA de razão igual a 6.

b) Sendo (a_n) e (b_n) sequências definidas por:

$$a_n = n^2 \text{ e } b_n = a_{n+1} - a_n$$

Mostre que (b_n) é uma PA e calcule sua razão.

Solução

$a_n = n^2 \Rightarrow a_{n+1} = (n+1)^2$

$b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

Se $b_n = 2n + 1$, de acordo com a fórmula 4.3 concluímos que (b_n) é uma PA de razão igual a 2.

$(a_n) = (1; 4; 9; 16; 25; 36; 49;...)$

$(b_n) = (3; 5; 7; 9; 11;...)$

4.14) Um capital de R$ 200,00 foi colocado a juros simples de 3% ao mês. Qual o montante após 47 meses?

Solução

O montante é a soma do capital com os juros.

3% de $200 = \frac{3}{100} \cdot 200 = 6$

Assim, a cada mês o montante é acrescido de R$ 6,00 e podemos afirmar então que os montantes formam uma PA de razão 6 (em reais). Sendo a_1 o montante após o 1º mês temos:

$$a_1 = 200 + 6 = 206$$

e portanto, o montante após 47 meses será:

$$a_{47} = a_1 + 46r = 206 + 46(6) = 482$$

Temos, então, que após 47 meses, o montante será igual a R$ 482,00.

4.15) Sabendo que os números 12, 32 e 40 são termos de uma PA crescente, determine os possíveis valores da razão **r**.

Solução

(...; 12;... ; 32;... ; 40;...)

Podemos escrever: $\begin{cases} 32 = 12 + xr \\ 40 = 12 + yr \end{cases}$

onde **x** e **y** são números naturais não nulos (com y > x)

$\begin{cases} 32 = 12 + xr \Leftrightarrow xr = 20 \quad (I) \\ 40 = 12 + yr \Leftrightarrow yr = 28 \quad (II) \end{cases}$

Como obviamente $r \neq 0$, podemos dividir membro a membro as equações (I) e (II) obtendo:

$$\frac{x}{y} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

Como a fração $\frac{5}{7}$ é irredutível e os números **x** e **y** são naturais (não nulos) o menor valor possível para **x** é 5 e o menor valor possível para **y** é 7. Mas:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7} = \frac{10}{14} = \frac{15}{21} = \frac{20}{28} = \frac{25}{35} = ...$$

isto é, para $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ basta que $x = 5k$ e $y = 7k$, onde $k \in \mathbb{N}^*$

$\left.\begin{matrix} x = 5k \\ xr = 20 \end{matrix}\right\} 5kr = 20$

onde: $r = \frac{20}{5k} = \frac{4}{k}$

Portanto, os valores possíveis para a razão r são da forma $r = \frac{4}{k}$, onde **k** é um número natural qualquer não nulo.

4.16) Cada uma das progressões aritméticas a seguir tem 80 termos:

$(a_n) = (9; 13;...)$

(b_n) (10; 13;...)

Quantos números são ao mesmo tempo termos das duas progressões?

Solução

$a_{80} = 9 + 79(4) = 325$ $\qquad (a_n) = (9; 13; ...; 325)$

$b_{80} = 10 + 79(3) = 247$ $\qquad (b_n) = (10; 13;...; 247)$

A razão de (a_n) é 4 e a razão de (b_n) é 3, isto é, os termos de (a_n) vão crescendo *de 4 em 4* e os termos de (b_n) vão crescendo *de 3 em 3*. O mínimo múltiplo comum de 4 e 3 é igual a 12 e, portanto, a "coincidência" se dá *de 12 em 12*.

+12 +12

$(a_n) = (9; (13); 17; 21; (25); 29; 33; (37); 41; ...; 325)$

$(b_n) = (10; (13); 16; 19; 22; (25); 28; 31; 34; (37); 40; ...; 247)$

+12 +12

Portanto, os termos coincidentes formam uma PA de razão igual a 12, e primeiro termo igual a 13. Representando por c_n o termo geral dessa progressão temos:

$\begin{cases} c_1 = 13 \\ c_n = 13 + (n-1)12 = 13 + 12n - 12 = 12n + 1 \end{cases}$

Sendo 325 o último termo de (a_n) e 247 o último termo de (b_n), o último termo de (c_n) não pode superar 247.

$c_n \leq 247$

$12n + 1 \leq 247$

$n \leq \frac{246}{12}$

Mas $\frac{246}{12} = 20,5$ e como **n** é natural, temos: $n \leq 20$

Assim, o maior valor possível para **n** é 20 e, portanto, o último termo de (c_n) é:

$$c_{20} = c_1 + 19(12) = 13 + 19(12) = 241$$

Temos, então, que o número de termos coincidentes é 20 e a PA dos termos coincidentes é:

$$(13; 25; 37;...; 241)$$

4.17) Quantos múltiplos de 7 há entre 12 e 864?

Solução

Depois de 12, o primeiro múltiplo de 7 é 14. Efetuando a divisão euclidiana de 864 por 7 temos:

```
864 | 7
16    123        864 - 3 = 861
 24
 (3)
```

Portanto, 861 é o último múltiplo de 7 antes de 864. Temos, então, uma PA finita de razão 7, primeiro termo 14 e último termo 861:
(14; 21; 28;...; 861)

$a_n = a_1 + (n-1)r$
$861 = 14 + (n-1)(7)$
Resolvendo esta equação obtemos $n = 122$.

4.18) Verifique se os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{8}$ podem ser termos de uma PA.

Solução

É óbvio que esses números não podem ser termos consecutivos de uma PA pois $\sqrt{3}-\sqrt{2} \neq \sqrt{8}-\sqrt{3}$.
Vamos verificar, então, se eles podem ser termos não consecutivos de uma PA.
Supondo que essa PA (se existir) seja crescente e de razão **r** ($r \neq 0$) temos:

$$\left(\ldots;\ \sqrt{2};\ldots;\ \sqrt{3};\ldots;\ \sqrt{8};\ldots\right)$$

$$\begin{cases}\sqrt{3} = \sqrt{2} + xr \\ \sqrt{8} = \sqrt{2} + yr\end{cases} \text{ com } \mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ naturais não nulos}$$

$$\text{Portanto: } \begin{cases} xr = \sqrt{3}-\sqrt{2} & \text{(I)} \\ yr = \sqrt{8}-\sqrt{2} & \text{(II)}\end{cases}$$

Dividindo membro a membro (II) por (I), temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\left(\sqrt{8}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{24}+\sqrt{16}-\sqrt{6}-2}{3-2} =$$

$$= \frac{\sqrt{4\cdot 6}+4-\sqrt{6}-2}{1} = 2\sqrt{6}-\sqrt{6}+2 = \sqrt{6}+2$$

Portanto, deveríamos ter $\frac{y}{x} = \sqrt{6}+2$.

Mas acontece que $\frac{y}{x}$ é um número racional (pois y e x são naturais não nulos) e $\sqrt{6}+2$ é um número irracional. Assim, concluímos que não é possível $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{8}$ serem termos de uma mesma PA.

Exercícios Propostos

4.19) Determine:
a) o 15º termo da PA (3; –1;...)
b) o 20º termo da PA $\left(2;\ \frac{7}{3};\ \ldots\right)$
c) o 30º termo da PA $\left(15;\ \frac{3}{4};\ldots\right)$
d) o 10º termo da PA $(4;\ 2+3\sqrt{2};\ldots)$

4.20) Numa PA tem-se $a_4 = 13$ e $a_6 = 21$. Determine a_1 e a razão.

4.21) Numa PA tem-se $a_{20} = \sqrt{3}-1$ e $a_{30} = 19\sqrt{3}+35$. Determine a_{42}.

4.22) Determine o número de termos **n** de uma PA na qual o primeiro termo é igual a 1, o último termo é 21 e a razão $r = n$.

4.23) Uma PA tem termo geral dado por $a_n = \frac{-3n+1}{6}$. Qual a razão da PA?

4.24) Numa PA de n termos e razão r temos $a_1 = -\frac{2}{15}$, $a_n = \frac{2}{3}$ e $rn = 1$. Calcule r e n.

4.25) Numa PA temos $a_1 = -1$ e $a_7 = \frac{1}{r}$. Calcule a razão.

4.26) Numa PA temos $a_1 = 2$ e $r = -\frac{1}{2}$. Determine o número k tal que $a_k = \frac{k-5}{k}$.

4.27) Numa PA, $a_5 = 23$ e $a_{12} = -40$. Calcule o primeiro termo negativo.

4.28) Numa PA temos $a_p = q$ e $a_q = p$, com $p \neq q$. Determine a_1 e a_{p+q}.

4.29) Quantos múltiplos de 4 há entre 10 e 8 539?

4.30) Considere a PA (a_n) de razão r e a sequência (b_n) dada por:

$$b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$$

Mostre que (b_n) é uma PA e calcule sua razão.

4.31) Sendo (a_n) uma PA de termos positivos e de razão $r \neq 0$, demonstre que:

a) $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$

b) $\frac{1}{a_1\cdot a_2} + \frac{1}{a_2\cdot a_3} + \ldots + \frac{1}{a_{n-1}\cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$

4.32) Consideremos as sequências (a_n) e (b_n) dadas por:

$$a_n = 4n + 1 \text{ e } b_n = 2n + 1$$

a) escreva os 5 primeiros termos de (a_n);
b) escreva os 5 primeiros termos de (b_n);
c) mostre que (a_{b_n}) é uma PA e calcule a sua razão;
d) escreva os 4 primeiros termos de (a_{b_n}).

4.33) Sabendo que os números 13, 31 e 43 são termos de uma PA crescente, calcule os possíveis valores da razão **r**.

4.34) Cada uma das progressões aritméticas a seguir tem 100 termos:

(4; 8;...) (3; 8;...)

Quantos termos em comum elas têm?

4.35) Considere a PA (a_n) onde $a_p = \frac{1}{p}$ e $a_q = \frac{1}{q}$. Calcule a_{p+q}, supondo $p \neq q$.

4.36) Na PA (a_n) temos $a_p = A$ e $a_q = B$. Calcule a_{p+q} supondo $p \neq q$.

4.37) Interpole 133 meios aritméticos entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{28}{3}$.

4.38) Inserir entre 1 e 31 **n** meios aritméticos de modo que a razão entre o 7º e o $(n-1)$º meio seja igual a $\frac{5}{9}$.

4.39) Quantos meios aritméticos devemos inserir entre 5 e 200 de modo que a razão **r** seja menor que 3?

4.40) Considere a progressão aritmética:

$$\left(\frac{n^2-3}{n}; \frac{n^2+2}{n}; \ldots\right) n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o termo de ordem **n**.

4.41) Considere a função f: $A \to \mathbb{R}$ dada por $\begin{cases} f(-8) = 10 \\ f(n+1) = f(n) - 5 \end{cases}$

onde A = {–8; –7; –6; –5;...}. Determine f(100).

4.42) Consideremos a PA $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$ de **razão r**. Usando o princípio de indução matemática, demonstre que para todo **n** pertencente ao domínio temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

4.43) Sendo E = {1; 2; 3; 4; 5} considere a PA $(a_n)_{n \in E}$ dada por $a_n = -2n + 8$. Esboce o gráfico de a_n em função de n.

4.5. MÉDIA ARITMÉTICA

Consideremos **n** números $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A **média aritmética** deles é por definição o número $\mathbf{m_a}$ calculado do seguinte modo:

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad (4.4)$$

Poderíamos também escrever:

$$m_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Exemplos

a) A média aritmética dos números 4, 5 e 17 é:

$$m_a = \frac{4+5+17}{3} = \frac{26}{3}$$

b) A média aritmética dos números 7 e –4 é:

$$m_a = \frac{(7)+(-4)}{2} = \frac{3}{2}$$

4.6. PROPRIEDADES

Sejam **a**, **b** e **c** três termos consecutivos de uma PA de razão **r**:

(...; a; b; c; ...)

Temos: $\begin{cases} b = a + r \\ b = c - r \end{cases}$

Somando membro a membro estas duas igualdades temos:

$$2b = a + c$$

$$b = \frac{a+c}{2}$$

isto é:

Dados três termos consecutivos de uma PA, o do meio é média aritmética dos outros dois.

Exemplo

Consideremos o seguinte problema:

"Determine o valor de x de modo que x – 3, 3x – 7 e x – 5 sejam termos consecutivos de uma PA."

Devemos ter então: $3x - 7 = \frac{(x-3)+(x-5)}{2}$.

Resolvendo esta equação obtemos $x = \frac{3}{2}$.

4.7. REPRESENTAÇÕES ESPECIAIS

É muito frequente aparecerem problemas de PA com poucos termos. Nestes casos pode ser útil usar representações especiais. Vamos considerar dois casos: número ímpar de termos e número par de termos.

a) **número ímpar de termos**

Se forem três termos podemos representá-los por:

$$x - r,\ x,\ x + r$$

onde **r é a razão.**

Se forem cinco termos podemos representá-los por:

$$x - 2r,\ x - r,\ x,\ x + r,\ x + 2r$$

b) **número par de termos**

Se forem 4 termos podemos representá-los por:

$$x - 3y,\ x - y,\ x + y,\ x + 3y$$

onde a razão é $r = 2y$

Se forem 6 termos:

$$x - 5y,\ x - 3y,\ x - y,\ x + y,\ x + 3y,\ x + 5y$$

Exemplo

Determine três números em PA tais que sua soma seja 18 e o terceiro a metade do primeiro.

Solução

$$\begin{cases}(x-r)+(x)+(x+r)=18\\ x+r=\dfrac{x-r}{2}\end{cases}$$

$$(x-r)+x+(x+r)=18 \Leftrightarrow 3x=18 \Leftrightarrow x=6$$

$$x+r=\frac{x-r}{2}$$

$$6+r=\frac{6-r}{2}$$

$$r=-2$$

A PA é então: (8; 6; 4)

Observe que a utilização das **representações especiais** é particularmente interessante, quando se conhece a soma dos termos da PA.

Exercícios Resolvidos

4.44) Determine as médias aritméticas dos seguintes números:

a) $4;\ \frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$

b) -9 e 17

Solução

a) $m_a = \dfrac{4+\frac{2}{3}+\frac{5}{8}}{3} = \dfrac{\frac{127}{24}}{3} = \dfrac{127}{72}$

b) $m_a = \dfrac{-9+17}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

4.45) Determine o valor de x de modo que os números 1, 2 + x e 6 − x sejam termos consecutivos de uma PA.

Solução

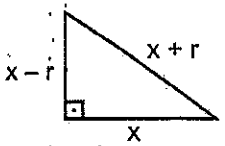
O termo central deve ser média aritmética dos outros dois:

$$2+x=\frac{1+(6-x)}{2}$$

Resolvendo esta equação obtemos $x = 1$.

4.46) Determine as medidas dos lados de um triângulo retângulo de perímetro 36, sabendo-se que as medidas dos lados estão em PA.

Solução



$(x - r) + (x) + (x + r) = 36$
$3x = 36$
$x = 12$

Pelo teorema de Pitágoras: $(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2$

Substituindo x por 12: $(12 + r)^2 = (12 - r)^2 + 12^2$

Resolvendo esta equação obtemos $r = 3$. Assim, $x - r = 9$ e $x + r = 15$.

Portanto, os lados do triângulo medem 9, 12 e 15.

4.47) A soma de 4 números em PA é 96 e o terceiro é o dobro do segundo. Determine a PA.

Solução

Sejam $x - 3y$, $x - y$, $x + y$ e $x + 3y$ os números.
$(x - 3y) + (x - y) + (x + y) + (x + 3y) = 96$
$4x = 96$
$x = 24$

Temos também:
$x + y = 2(x - y)$
$24 + y = 2(24 - y)$

Resolvendo a equação obtemos $y = 8$.

$x - 3y = 24 - 3(8) = 0$
$x - y = 24 - 8 = 16$
$x + y = 24 + 8 = 32$
$x + 3y = 24 + 3(8) = 48$
A PA é: (0; 16; 32; 48)

4.48) Os três termos de uma sequência são proporcionais aos números 3, 5 e 9. Somando 4 ao termo do meio, a nova sequência é uma PA. Determine a sequência inicial.

Solução

Seja (x; y; z) a sequência; x, y e z são proporcionais aos números 3, 5 e 9, isto é

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{9} = k$$

e portanto $\begin{cases} x = 3k \\ y = 5k \\ z = 9k \end{cases}$

Podemos, então, representar a sequência por:

(3k; 5k; 9k)

Somando 4 ao termo do meio a nova sequência é:

(3k; 5k + 4; 9k)

Sendo ela uma PA, temos:

$$5k + 4 = \frac{3k + 9k}{2}$$

Resolvendo esta equação obtemos k = 4 e, portanto: x = 12, y = 20 e z = 36. A sequência original é assim: (12; 20; 36).

4.49) Determine uma PA de três termos cuja soma é 9 e cujo produto é igual a 15.

Solução

$(x - r) + (x) + (x + r) = 9$
$3x = 9$
$x = 3$

$(x - r)(x)(x + r) = 15$
$(3 - r)(3)(3 + r) = 15$
$r^2 = 4$
$r = \pm 2$

Para r = 2 $\begin{cases} x - r = 1 \\ x = 3 \\ x + r = 5 \end{cases}$ e a PA é (1; 3; 5)

Para r = –2 $\begin{cases} x - r = 5 \\ x = 3 \\ x + r = 1 \end{cases}$ e a PA é (5; 3; 1)

Exercícios Propostos

4.50) Determine uma PA de três termos cuja soma é 15 e a soma de seus inversos é $\frac{33}{40}$.

4.51) Determine o valor de x de modo que $x - 1$, $2x - 4$ e $x^2 - 4x - 1$ sejam termos consecutivos de uma PA.

4.52) A soma dos 4 termos de uma PA é igual a 8 e o produto do primeiro pelo último é igual a –140. Determine a PA.

4.53) Numa PA crescente de 3 termos, a soma dos termos é 21 e o produto é –105. Determine a PA.

4.54) Num triângulo retângulo as medidas dos lados estão em PA. Mostre que essas medidas são proporcionais aos números 3, 4 e 5.

4.55) Os três termos de uma sequência são proporcionais aos números 2, 5 e 7. Subtraindo 4 do termo do meio, os números passam a formar uma PA. Determine a sequência original.

4.56) Os números **a**, **b** e **c** formam uma PA (nessa ordem). Mostre que a sequência

$(a^2bc; ab^2c; abc^2)$

também é uma PA.

4.57) A soma dos 4 termos de uma PA é igual a 2 e a soma de seus quadrados é igual a 46. Determine a PA.

4.8. PROPRIEDADES

a) Consideremos a PA finita de razão r

$(a_1; a_2 \dots ; a_p \dots ; a_q; \dots ; a_n)$

onde a_p e a_q são equidistantes dos extremos. Como já vimos, temos:

$$p + q = n + 1$$

isto é,

$$p - 1 = n - q$$

Temos também: $\begin{cases} a_p = a_1 + (p-1)r \\ a_n = a_q + (n-q)r \end{cases}$

Subtraindo membro a membro essas duas igualdades temos:

$$a_p - a_n = a_1 - a_q + (p-1)r - (n-q)r$$

$$a_p + a_q = a_1 + a_n$$

isto é,

A soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. (4.6)

b) Sejam a_p, a_q, a_t e a_u termos quaisquer de uma PA de razão $r \neq 0$. Então:

$$p + q = t + u \Rightarrow a_p + a_q = a_t + a_u \quad (4.7)$$

De fato:

$$\begin{cases} a_p = a_1 + (p-1)r \\ a_q = a_1 + (q-1)r \end{cases} \qquad \begin{cases} a_t = a_1 + (t-1)r \\ a_u = a_1 + (u-1)r \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_p + a_q = 2a_1 + (p-1)r + (q-1)r = 2a_1 - 2r + (p+q)r \\ a_t + a_u = 2a_1 + (t-1)r + (u-1)r = 2a_1 - 2r + (t+u)r \end{cases}$$

$$a_p + a_q = a_t + a_u \Leftrightarrow \cancel{2a_1} - \cancel{2r} + (p+q)r = \cancel{2a_1} - \cancel{2r} + (t+u)r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p+q)\cancel{r} = (t+u)\cancel{r} \Leftrightarrow p + q = t + u$$

Se $r = 0$ vale, obviamente, a implicação

$$p + q = t + u \Rightarrow a_p + a_q = a_t + a_u$$

mas, não vale a implicação

$$a_p + a_q = a_t + a_u \Rightarrow p + q = t + u$$

c) Consideremos uma PA finita com um número ímpar de termos cujo termo central é a_p:

$$(a_1; a_2 \ldots ; a_{p-1}; a_{p+1} \ldots ; a_n)$$

Neste caso, a_{p-1} e a_{p+1} são equidistantes dos extremos e, portanto,

$$a_{p-1} + a_{p+1} = a_1 + a_n$$

Mas, sabemos que: $a_p = \dfrac{a_{p-1} + a_{p+1}}{2}$ e, portanto: $a_p = \dfrac{a_1 + a_n}{2}$, isto é:

Dada uma PA com número ímpar de termos, o termo central é média aritmética dos extremos e, portanto, é também média aritmética de qualquer par de termos equidistantes dos extremos. (4.8)

4.9. SOMA DOS TERMOS

Vamos deduzir uma fórmula que permita calcular a soma dos **n** primeiros termos de uma PA. Representando por S_n essa soma temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad (I)$$

ou também: $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$ (II)

Somando membro a membro as igualdades (I) e (II) temos:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)}_{\text{n parênteses}}$$

Note que dentro de cada parênteses está a soma de dois termos equidistantes dos extremos ou a própria soma dos extremos (se n for ímpar, num dos parênteses teremos $a_p + a_p$ onde a_p é o termo central entre a_1 e a_n). Portanto, as expressões entre parênteses são todas iguais a $a_1 + a_n$:

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad (4.9)$$

Podemos escrever também do seguinte modo:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exercícios Resolvidos

4.58) Numa PA de 23 termos, a_5 e a_p são equidistantes dos extremos. Determine p.

Solução

Devemos ter $5 + p = 1 + 23$ e, portanto, $p = 19$.

4.59) Numa PA tem-se $a_5 + a_{30} = 60$. Calcule o valor de $a_8 + a_{27}$.

Solução

$5 + 30 = 8 + 27 \Rightarrow a_5 + a_{30} = a_8 + a_{27} = 60$.

4.60) Calcule a soma dos 20 primeiros termos da PA.
(3; 7; 11;...)

Solução

$$\begin{cases} r = 4 \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad a_{20} = a_1 + 19r = 3 + 19(4) = 79$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20})20}{2} = \frac{(3 + 79)20}{2} = 820$$

4.61) Calcule a soma dos 30 primeiros termos de uma PA em que $a_7 + a_{24} = 400$.

Solução

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})30}{2} = 15(a_1 + a_{30})$$

Porém: $a_1 + a_{30} = a_7 + a_{24}$ e, assim:

$S_{30} = 15(a_1 + a_{30}) = 15(a_7 + a_{24}) = 15(400) = 6\,000$

4.62) Considere a PA (–3; 2; 7;...)

a) Determine a fórmula que dá a soma dos **n** primeiros termos em função de **n**.

b) Calcule a soma dos 15 primeiros termos.

c) Sendo a_i um *termo genérico* dessa PA, calcule:

$$\sum_{i=7}^{40} a_i$$

Solução

a) $a_1 = -3$ $\qquad r = 5$

$$a_n = a_1 + (n-1)r = (-3) + (n-1)(5) = -3 + 5n - 5 = 5n - 8$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(-3 + 5n - 8)n}{2} = \frac{5}{2}n^2 - \frac{11}{2}n$$

$$S_n = \frac{5}{2}n^2 - \frac{11}{2}n$$

b) Usando a fórmula do item a temos:

$$S_{15} = \frac{5}{2}(15)^2 - \frac{11}{2}(15) = 480$$

c) $$\sum_{i=7}^{40} a_i = a_7 + a_8 + .. + a_{40} = (a_1 + a_2 + .. + a_6 + a_7 + .. + a_{40}) - (a_1 + a_2 + .. + a_6)$$

$$= S_{40} - S_6 = \left[\left(\frac{5}{2}(40)^2 - \frac{11}{2}(40)\right)\right] - \left[\left(\frac{5}{2}(6)^2 - \frac{11}{2}(6)\right)\right] = 3723$$

4.63) A soma dos **n** primeiros termos de uma PA infinita é dada por:

$$S_n = 4n^2 - 6n$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Determine o primeiro termo e a razão.

Solução

$S_n = 4n^2 - 6n$

$$\begin{cases} S_1 = 4(1)^2 - 6(1) = -2 \\ S_2 = 4(2)^2 - 6(2) = 4 \end{cases}$$

Porém $S_1 = a_1$ e $S_2 = a_1 + a_2$. Assim temos: $\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_1 + a_2 = 4 \end{cases}$ onde tiramos $a_2 = 6$.

$r = a_2 - a_1 = 6 - (-2) = 8$

A PA é: (–2; 6; 14; ...)

4.64) Determine a fórmula da soma dos **n** primeiros números naturais ímpares.

Solução

A sequência dos números naturais ímpares, ordenados em ordem crescente, é uma PA de razão r = 2.

$$(1;\ 3;\ 5;\ 7;\ ...)$$

$a_1 = 1$; $a_n = a_1 + (n - 1)r = 1 + (n - 1)(2) = 2n - 1$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

$S_n = n^2$

Confronte esta solução com as soluções dos problemas 2.2 e 2.3!

4.65) Sendo x um número real não nulo, calcule:

$E = x^{-53} \cdot x^{-50} \cdot x^{-47} \cdot x^{-44} \cdot ... \cdot x^{7}$

Solução

Na multiplicação de potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes. Assim:

$$E = x^{-53-50-47\ ...\ +7}$$

A sequência (–53; –50; ...; +7) é uma PA de **n** termos e razão r = 3. Determinemos o valor de n:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$7 = -53 + (n - 1)(3)$

Resolvendo esta equação obtemos n = 21.

Assim:

$$(-53) + (-50) + (-47) + ... + (7) = \frac{[(-53) + (7)]21}{2} = -483$$

Portanto: $E = x^{-483}$

4.66) Considere a PA cujo termo geral é $a_n = 4n - 3$. Calcule

$$\sum_{i=5}^{43} a_i$$

Solução

$$\sum_{i=5}^{43} a_i = \underbrace{a_5 + a_6 + ... + a_{43}}_{39\ \text{termos}} = \frac{(a_5 + a_{43})39}{2}$$

$$a_n = 4n - 3 \Rightarrow \begin{cases} a_5 = 4(5) - 3 = 17 \\ a_{43} = 4(43) - 3 = 169 \end{cases}$$

$$\sum_{i=5}^{43} a_i = \frac{(7 + 169)39}{2} = 3627$$

Um outro modo de "encaminhar" o problema é:

$$\sum_{i=5}^{43} a_i = S_{43} - S_4, \text{ onde } \begin{cases} S_{43} = \text{soma dos 43 primeiros termos} \\ S_4 = \text{soma dos 4 primeiros termos} \end{cases}$$

4.67) Sendo x um número natural com x > 1 calcule:

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\frac{x-3}{x}+\ldots+\frac{1}{x}$$

Solução

A sequência $\left(\frac{x-1}{x}; \frac{x-2}{x}, \ldots; \frac{1}{x}\right)$ é uma PA de razão $r = \frac{x-2}{x} - \frac{x-1}{x} = \frac{-1}{x}$.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{x-1}{x} \\ a_n = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} = (n-1)\left(\frac{-1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{n}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\frac{n}{x} = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Onde: n = x – 1

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{\left(\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}\right)(x-1)}{2} = \frac{x-1}{2}$$

4.68) Prove que, se numa PA, $S_m = S_n$ (com m ≠ n) então $S_{m+n} = 0$.

Solução

$$a_n = a_1 + (n-1)r = a_1 + nr - r$$

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2} = \frac{(a_1+a_1+nr-r)n}{2} = \frac{r}{2}n^2 + \left(\frac{2a_1-r}{2}\right)n$$

$$S_m = \frac{r}{2}m^2 + \left(\frac{2a_1-r}{2}\right)m$$

Como $S_m = S_n$, vem:

$$\frac{r}{2}m^2 + \frac{2a_1-r}{2}m = \frac{r}{2}n^2 + \frac{2a_1-r}{2}n$$

$$rm^2 + (2a_1-r)m = rn^2 + (2a_1-r)n$$

$$rm^2 - rn^2 + m(2a_1-r) - n(2a_1-r) = 0$$

$$(m^2-n^2)r + (2a_1-r)(m-n) = 0$$

$$(m-n)(m+n)r + (2a_1-r)(m-n) = 0$$

Como m – n ≠ 0, podemos cancelá-lo:

$$(m+n)r + (2a_1-r) = 0$$

$$(m+n-1)r + 2a_1 = 0 \quad \text{(I)}$$

Por outro lado: $a_{m+n} = a_1 + (m+n-1)r$

E assim:

$$S_{m+n} = \frac{(a_1+a_{m+n})(m+n)}{2} = \frac{[a_1+a_1+(m+n-1)r](m+n)}{2} = \frac{[2a_1+(m+n-1)r](m+n)}{2}$$

Pela relação (I), a expressão entre colchetes é igual a zero e portanto:

$$S_{m+n} = 0$$

4.69) Lembrando que $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, calcule:

$E = 1^2 - 2^2 + 3^3 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 99^2 - 100^2$

Solução

$$\oplus\begin{cases} 1^2-2^2 = (1-2)(1+2) = -3 \\ 3^2-4^2 = (3-4)(3+4) = -7 \\ 5^2-6^2 = (5-6)(5+6) = -11 \\ \ldots\ldots \\ 99^2-100^2 = (99-100)(99+100) = -199 \end{cases}$$

Somando membro a membro temos:

$$E = \underbrace{(-3)+(-7)+(-11)+\ldots+(-199)}_{50 \text{ termos}} = \frac{(-3-199)50}{2} = -5050$$

Um outro modo de fazer esse problema é:

$$E = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \ldots + 99^2 - 100^2 = \sum_{n=1}^{50}\left[(2n-1)^2 - (2n)^2\right]$$

Mas $(2n-1)^2 - (2n)^2 = -4n + 1$

Assim: $E = \sum_{n=1}^{50}(-4n+1)$

A sequência de termo geral $a_n = -4n + 1$ é uma PA tal que

$$\begin{cases} a_1 = -4(1)+1 = -3 \\ a_{50} = -4(50)+1 = -199 \end{cases}$$

Portanto:

$$E = \sum_{n=1}^{50}(-4n+1) = \frac{(-3-199)50}{2} = -5050$$

4.70) Considere a sequência (y_n) dada por $\begin{cases} y_1 = 7 \\ y_n = y_{n-1} + 2n \end{cases}$

Determine y_{45}.

Solução

Pela relação de recorrência vemos que a sequência dada não é PA. De $y_n = y_{n-1} + 2n$ vem:

$$\oplus \begin{cases} \cancel{y_2} = y_1 + 2(2) \\ \cancel{y_3} = \cancel{y_2} + 2(3) \\ \cancel{y_4} = \cancel{y_3} + 2(4) \quad \leftarrow \boxed{\text{termos ao lado 44 igualdades}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ y_{45} = \cancel{y_{44}} + 2(45) \end{cases}$$

Somando membro a membro essas 44 igualdades temos:

$$y_{45} = y_1 + 2(2) + 2(3) + 2(4) + \dots + 2(45) = 7 + \underbrace{4 + 6 + 8 + \dots + 90}_{\text{PA de 44 termos}} =$$

$$= 7 + \frac{(4+90)44}{2} = 2075$$

4.71) Considere a PA (–7; –1; 5; 11;...; 83). Calcule a soma dos termos de ordem par:

Solução

$$\begin{cases} r = 6 \\ a_1 = -7 \\ a_n = 83 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ 83 &= -7 + (n-1)(6) \\ n &= 16 \end{aligned}$$

Queremos: $S = \underbrace{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{16}}_{8 \text{ termos}}$

$$S = \frac{(a_2 + a_{16})8}{2} = \frac{(-1+83)8}{2} = 328$$

Exercícios Propostos

4.72) Numa PA de 57 termos, a_k e a_{32} são equidistantes dos extremos. Determine o valor de k.

4.73) Calcule a soma dos 40 primeiros termos da PA (–3; 1; 5;...)

4.74) Calcule $\sum_{i=1}^{12} (-3i + 6)$.

4.75) Consideremos uma PA de termo geral $a_n = 3n - 20$. Calcule $\sum_{i=10}^{40} a_i$.

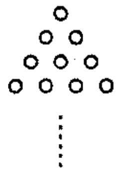
4.76) Calcule a soma dos 40 primeiros termos de uma PA na qual $a_{12} + a_{29} = 60$.

4.77) Numa PA temos $a_4 = 13$ e $a_7 = 25$. Calcule a soma dos 20 primeiros termos.

4.78) Calcule a soma de todos os múltiplos de 4 que estão entre 10 e 1413.

4.79) Calcule a soma de todos os números naturais que estão entre 16 e 900 e que dão resto 2 ao serem divididos por 3.

4.80) Um sargento tentou colocar os 480 soldados sob seu comando, em forma de triângulo com um soldado na 1ª linha, 2 soldados na 2ª linha e assim por diante. No fim, sobraram 15 soldados fora do triângulo. Quantas linhas tem esse triângulo?



4.81) O primeiro termo de uma PA é 20 e a soma dos 10 primeiros termos é 65. Determine a razão da progressão

4.82) Considere a PA $\left(\frac{2}{3}; \frac{5}{2}; \dots\right)$. Determine a expressão que dá a soma dos n primeiros termos em função de n.

4.83) A soma dos n primeiros termos de uma PA infinita é dada por:

$$S_n = -3n^2 + 4n$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Escreva os três primeiros termos da PA.

4.84) A soma dos **n** primeiros termos de uma sequência infinita é dada por:

$$S = n^2 - 3n + 1$$

a) Escreva os 4 primeiros termos dessa sequência.
b) Essa sequência é uma PA?

4.85) A soma dos **k** primeiros termos da PA $\left(\frac{1}{3}; 1; \frac{5}{3}; \dots\right)$ é igual a 147. Calcule o valor de k.

4.86) Seja a PA $\left(41; \frac{203}{5}; \dots\right)$ e seja S_n a soma dos **n** primeiros termos. Determine os valores de **n** para os quais $S_n < 0$.

4.87) Calcule a soma dos termos de ordem ímpar da progressão aritmética:

$$(8; 5; 2; \dots; -85)$$

4.88) Calcule o valor de $E = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - \ldots + 91^2$.

4.89) Seja a sequência (y_n) dada por

$$\begin{cases} y_1 = 11 \\ y_n = y_{n-1} + 7n \ (n > 1) \end{cases}$$

Determine a fórmula que dá o termo geral y_n em função de **n**.

4.90) Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, calcule:

$$\frac{n^2+7}{n} + \frac{n^2+9}{n} + \frac{n^2+11}{n} + \ldots + \frac{n^2+41}{n}$$

4.10. POTÊNCIAS DOS NÚMEROS NATURAIS

Vamos estabelecer fórmulas para o cálculo das seguintes somas:

$$\begin{cases} \gamma_n^{(1)} = 1+2+3+\ldots+n \\ \gamma_n^{(2)} = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 \\ \gamma_n^{(3)} = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

O cálculo de $\gamma_n^{(1)}$ é **simples**, pois a sequência (1; 2; 3; ...; n) é uma PA. Portanto:

$$\gamma_n^{(1)} = 1+2+3+\ldots+n = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$\boxed{\gamma_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n} \quad (4.10)$$

Para o cálculo de $\gamma_n^{(2)}$ recorreremos a um artifício. Vamos partir da identidade

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$\begin{cases} \cancel{2^3} = (1+1)^3 = 1^3 + 3(1)^2 + 3(1) + 1^3 \\ \cancel{3^3} = (2+1)^3 = \cancel{2^3} + 3(2)^2 + 3(2) + 1^3 \\ \cancel{4^3} = (3+1)^3 = \cancel{3^3} + 3(3)^2 + 3(3) + 1^3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+1)^3 = \quad = \cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1^3 \end{cases}$$

Somando membro a membro essas n igualdades temos:

$$(n+1)^3 = 1 + 3\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right) + 3(1+2+3+\ldots+n) + (1+1+1+\ldots+1)$$

$$(n+1)^3 = 1 + 3\,\gamma_n^{(2)} + 3\,\gamma_n^{(1)} + n$$

$$(n+1)^3 = 3\,\gamma_n^{(2)} + 3\,\frac{n(n+1)}{2} + n + 1$$

Dessa igualdade tiramos:

$$\gamma_n^{(2)} = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n+1)}{3}$$

$$\gamma_n^{(2)} = \frac{2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)}{6} =$$

$$= \frac{2\left(n^3+3n^2+3n+1\right) - 3n^2 - 3n - 2n - 2}{6} =$$

$$= \frac{2n^3+6n^2+6n+2-3n^2-3n-2n-2}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

Portanto:

$$\boxed{\gamma_n^{(2)} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n} \quad (4.11)$$

Fatorando a expressão do lado direito podemos escrever também:

$$\boxed{\gamma_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad (4.12)$$

Partindo da identidade:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

e procedendo de modo semelhante ao que fizemos anteriormente podemos obter $\gamma_n^{(3)}$:

$$\boxed{\gamma_n^{(3)} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2} \quad (4.13)$$

Do desenvolvimento de $(n+1)^5$ obtém-se $\gamma_n^{(4)}$; do desenvolvimento de $(n+1)^6$ obtém se e assim por diante.

Vamos resumir então os casos mais importantes:

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_n^{(1)} &= 1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ \gamma_n^{(2)} &= 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ \gamma_n^{(3)} &= 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \end{aligned}} \quad (4.14)$$

Exercícios Resolvidos

4.91) Calcule a soma $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 10^2$

Solução

$$S = \gamma_{10}^{(2)} = \frac{1}{3}(10)^3 + \frac{1}{2}(10)^2 + \frac{1}{6}(10) = \frac{1000}{3} + \frac{100}{2} + \frac{10}{6} = \frac{1155}{3} = 385$$

4.92) Seja a PA de termo geral $a = 4n - 3$.
Calcule: $S = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_8^2$

Solução

$$S = \sum_{n=1}^{8} a_n^2 = \sum_{n=1}^{8}(4n-3)^2 = \sum_{n=1}^{8}\left(16n^2 - 24n + 9\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{8}\left(16n^2\right) - \sum_{n=1}^{8}(24n) + \sum_{n=1}^{8}(9) =$$

$$= 16\sum_{n=1}^{8} n^2 - 24\sum_{n=1}^{8} n + \sum_{n=1}^{8}(9) = 16\gamma_8^{(2)} + 8(9) \quad -24\ \gamma_8^{(1)}$$

$$\begin{cases} \gamma_8^{(2)} = \frac{1}{3}(8)^3 + \frac{1}{2}(8)^2 + \frac{1}{6}(8) = \frac{512}{3} + \frac{64}{2} + \frac{8}{6} = 204 \\ \gamma_8^{(1)} = \frac{1}{2}(8)^2 + \frac{1}{2}(8) = 32 + 4 - 36 \end{cases}$$

Assim:
$S = 16\,(204) - 24\,(36) + 8(9) = 2472$

4.93) Calcule a soma:
$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + 20 \cdot 21 \cdot 22$

Solução

$$S = \sum_{n=1}^{20} n(n+1)(n+2) = \sum_{n=1}^{20}\left(n^3 + 3n^2 + 2n\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{20} n^3 + 3\sum_{n=1}^{20} n^2 + 2\sum_{n=1}^{20} n = \gamma_{20}^{(3)} + 3\gamma_{20}^{(2)} + 2\gamma_{20}^{(1)} =$$

$$\begin{cases} \gamma_{20}^{(3)} = \frac{1}{4}(20)^4 + \frac{1}{2}(20)^3 + \frac{1}{4}(20)^2 = 44\,100 \\ \gamma_{20}^{(2)} = \frac{1}{3}(20)^3 + \frac{1}{2}(20)^2 + \frac{1}{6}(20) = 2\,870 \\ \gamma_{20}^{(1)} = \frac{1}{2}(20)^2 + \frac{1}{2}(20) = 210 \end{cases}$$

Assim:
$S = 44\,100 + 3(2\,870) + 2(210) = 53\,130$

Exercícios Propostos

4.94) Calcule:
a) $1 + 2 + 3 + \ldots + 30$
b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 12^2$
c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 10^3$

4.95) Calcule:
a) $4^2 + 7^2 + 10^2 + 13^2 + 16^2 + \ldots + 46^2$
b) $2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \ldots + 16^3$

4.96) Calcule:
a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 20 \cdot 21$
b) $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1)$
c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$

4.97) Seja a PA cujo termo geral é $a_n = 2n - 1$. Calcule:

$$\sum_{n=1}^{10} a_n^3$$

Capítulo 5

Progressões harmônicas

5.1. DEFINIÇÃO

Consideremos uma sequência cujos termos são diferentes de zero. Dizemos que a sequência é uma **progressão harmônica (PH)** se, e somente se, os inversos dos termos formam uma PA, isto é,

$(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots)$ é uma PH se, e somente se, $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots \frac{1}{a_n}, \ldots\right)$ é uma PA onde, para todo i, $a_i \neq 0$.

Exemplos

a) A sequência (3; 5; 7; 9; 11; 13) é uma PA; portanto, a sequência $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}; \frac{1}{9}; \frac{1}{11}; \frac{1}{13}\right)$ é uma PH.

b) A sequência $\left(\frac{4}{3}; 1; \frac{4}{5}; \frac{2}{3}\right)$ é uma PH pois, a sequência $\left(\frac{3}{4}; 1; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$ é uma PA $\left(\text{de razão } r = \frac{1}{4}\right)$.

A relação de recorrência para uma PH é:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + r \qquad a_n \neq 0, \quad a_{n-1} \neq 0, \quad n \geq 2$$

5.2. MÉDIA HARMÔNICA

Consideremos n números diferentes de zero:

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

A **média harmônica** deles é o número m_h definido por:

$$m_h = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}{n}\right)}$$

isto é, **a média harmônica dos n números é o inverso da média aritmética dos inversos dos números.**

Exemplos

a) Determinemos a média harmônica dos números 3, 4 e 5 (aqui temos n = 3).

$$m_h = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{3}\right)} = \frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}} = \frac{3}{\frac{20+15+12}{60}} = \frac{3}{\frac{47}{60}} = \frac{180}{47}$$

b) Determine a média harmônica de dois números reais **a** e **b** não nulos.

$$m_h = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

5.3. PROPRIEDADE

Sejam **a**, **b** e **c** três termos consecutivos de uma PH

$$(\ldots;\ a;\ b;\ c;\ \ldots)$$

Neste caso $\left(\ldots;\ \frac{1}{a};\ \frac{1}{b};\ \frac{1}{c};\ \ldots\right)$ é uma PA e, portanto,

$$\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2} \quad \text{ou} \quad b = \frac{1}{\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{2}\right)}$$

Isto significa que **b** é média harmônica de **a** e **c**.
Assim:

> Dados três termos consecutivos de uma PH, o termo central é média harmônica dos outros dois.

Exercícios Resolvidos

5.1) Determine o 10° termo da PH.

$$\left(\frac{3}{5};\ \frac{3}{7};\ \frac{3}{9};\ \ldots\right)$$

Solução

Achemos primeiramente o décimo termo da PA

$$\left(\frac{5}{3};\ \frac{7}{3};\ \frac{9}{3};\ \ldots\right)$$

cuja razão é $r = \frac{2}{3}$. Sendo a_{10} o décimo termo da PA, temos:

$$a_{10} = a_1 + 9r = \frac{5}{3} + 9\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3} + \frac{18}{3} = \frac{23}{3}$$

Portanto, o 10º termo da PH é $\frac{3}{23}$.

5.2) Inserir 4 meios harmônicos entre $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{17}$.

Solução

Vamos primeiramente inserir 4 meios aritméticos entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{17}{5}$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{5} \\ a_6 = \frac{17}{5} \\ r = ? \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_6 &= a_1 + 5r \\ \frac{17}{5} &= \frac{2}{5} + 5r \\ r &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Os 4 meios aritméticos entre $\frac{2}{5}$ e $\frac{17}{5}$ são:

$$\frac{5}{5};\ \frac{8}{5};\ \frac{11}{5};\ \frac{14}{5}$$

e, portanto, os 4 meios harmônicos entre $\frac{5}{2}$ e $\frac{5}{17}$ são:

$$\frac{5}{5};\ \frac{5}{8};\ \frac{5}{11};\ \frac{5}{14}$$

Exercícios Propostos

5.3) Determine a média harmônica de:
a) 4 e 10
b) 2, –4 e 8

5.4) Determine o 20° termo da PH.

$$\left(\frac{3}{2};\ \frac{2}{5};\ \ldots\right)$$

5.5) Interpole 6 meios harmônicos entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{24}$.

5.6) Sejam **x**, **y** e **z** números reais positivos. Mostre que se $(x^2;\ y^2;\ z^2)$ é uma PA então $(y + z;\ z + x;\ x + y)$ é uma PH.

Capítulo

6 Progressões geométricas

6.1. DEFINIÇÃO

Chamamos de **progressão geométrica (PG)** qualquer sequência onde cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante denominada **razão da PG**.

Em outras palavras:

Uma progressão geométrica de razão q, é uma sequência tal que:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \qquad (n > 1)$$

a) Na sequência (3; 6; 12; 24; 48) observamos que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 2. Portanto, é uma PG de razão q = 2.

b) Na sequência $\left(180; 60; 20; \frac{20}{3}; \frac{20}{9}\right)$ vemos que cada termo, a partir do 2º, é igual ao anterior multiplicado por $\frac{1}{3}$. Portanto, a sequência é uma PG de razão $q = \frac{1}{3}$.

c) A sequência (5; –20; 80; –320; ...) é uma PG de razão q = –4.

d) A sequência (5; 5; 5; 5; 5) é uma PG de razão q = 1. Porém, ela é também uma PA de razão r = 0.

e) A sequência (15; 0; 0; 0; 0; 0; ...) é uma PG de razão q = 0.

f) A sequência (0; 0; 0; 0; 0; 0) é uma PG de razão *indeterminada*. É também uma PA de razão r = 0.

A PG de razão indeterminada tem pouco interesse, e portanto, raramente falaremos dela daqui em diante.

6.2. CLASSIFICAÇÃO QUANTO AO CRESCIMENTO

a) **PG de razão indeterminada**

Neste caso é óbvio que a PG é estacionária.

b) **PG de razão q = 1**

Neste caso também é fácil perceber que a PG é estacionária.

c) **PG de razão q = 0**

Quando a razão é igual a zero, como por exemplo na PG:

(8; 0; 0; 0; 0; ...)

a PG não é crescente, nem decrescente, nem estacionária.

d) **PG de razão q < 0**

Neste caso a PG não é crescente, nem decrescente, nem estacionária, pois os termos vão mudando de sinal à medida que passamos de um termo de ordem **k** para o termo de ordem k + 1. Neste caso dizemos que a PG é **oscilante** ou **alternante**.

Exemplos

a) A PG (4; –8; 16; –32; 64) é oscilante.
b) A PG (–5; 15; –45; 135) é oscilante.
c) **PG de razão q tal que q > 0 e q ≠ 1.**

Neste caso, os termos terão todos o mesmo sinal e a PG será crescente ou decrescente.

6.3. PROPRIEDADES

Uma PG de razão q é crescente se, e somente se:

$a_1 > 0$ e $q > 1$

ou

$a_1 < 0$ e $0 < q < 1$

Já sabemos que neste caso devemos ter q > 0 e, portanto, todos os termos terão o mesmo sinal. Sendo n > 1 temos:

$$\text{PG é crescente} \Leftrightarrow a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_{n-1}\cdot q > a_{n-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_{n-1}\, q - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow a_{n-1}(q-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n-1} > 0 \;\text{ e }\; q-1>0 \\ \text{ou} \\ a_{n-1} < 0 \;\text{ e }\; q-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{n-1} > 0 \;\text{ e }\; q>1 \\ \text{ou} \\ a_{n-1} < 0 \;\text{ e }\; q<1 \end{cases}$$

Lembrando que *todos os termos têm o mesmo sinal* e q > 0, vem:

$$\text{PG é crescente} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \;\text{ e }\; q>1 \\ \text{ou} \\ a_1 < 0 \;\text{ e }\; 0<q<1 \end{cases}$$

Uma PG de razão q é decrescente se, e somente se:

$a_1 > 0$ e $0 < q < 1$

ou

$a_1 < 0$ e $q > 1$

A justificativa desta propriedade é análoga à da propriedade anterior e assim sendo, deixamos por conta do leitor.

Exemplos

a) Na PG (3; 6; 12; 24;...) temos q = 2 e, portanto:

$a_1 > 0$ e $q > 1$

É uma PG crescente.

b) Na PG $\left(60; 20; \frac{20}{3}; ...\right)$ temos $q = \frac{1}{3}$ e, portanto:

$a_1 > 0$ e $0 < q < 1$

É uma PG decrescente.

c) A PG (–10; –20; –40;...) é decrescente de razão q = 2. Neste caso temos:

$a_1 < 0$ e $q > 1$

d) A PG (–120; –60; –30; –15; ...) é crescente de razão $q = \frac{1}{2}$. Aqui temos:

$a_1 < 0$ e $0 < q < 1$

6.4. FÓRMULA DO TERMO GERAL

Consideremos a PG de razão q

$(a_1; a_2; a_3;...; a_n;...)$

Suponhamos inicialmente que não se trata da PG de razão indeterminada e que $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$. Temos:

$$\otimes \begin{cases} a_2 = a_1 \cdot q \\ a_3 = a_2 \cdot q \\ a_4 = a_3 \cdot q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro essas n – 1 igualdades temos:

$$\cancel{a_2}\cdot\cancel{a_3}\cdot\cancel{a_4}\cdot\ldots\cdot a_n = a_1\cdot\cancel{a_2}\cdot\cancel{a_3}\cdot\ldots\cdot\cancel{a_{n-1}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot q\cdot\ldots q}_{n-1\text{ fatores}}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (6.1)$$

A equação 6.1 foi obtida, supondo que $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ e que não se trata de PG de razão indeterminada. Mas é fácil verificar que a equação 6.1 é válida, mesmo para os casos em que $a_1 = 0$ ou $q = 0$.

Exemplos

a) $a_2 = a_1 \cdot q$
$a_3 = a_1 \cdot q^2$
$a_4 = a_1 \cdot q^3$
$a_{20} = a_1 \cdot q^{19}$
$a_{k+3} = a_1 \cdot q^{k+2}$

b) Desde que nenhum termo da PG seja nulo, podemos obter a razão dividindo um termo qualquer (a partir do 2º) pelo anterior. Assim:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_{20}}{a_{19}} = \frac{a_7}{a_6}$$

c) Determinemos o 9º termo da PG
(4; 2; 1;...)

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ q = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad a_9 = a_1 \cdot q^8 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^8 = 4 \cdot \frac{1}{2^8} = = 2^2 \cdot \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Consideremos uma PG cujos termos sejam todos diferentes de zero:

(a_1; a_2; a_3;...;a_k;...;a_n;...)

$$\otimes \begin{cases} \cancel{a_{k+1}} = a_k \cdot q \\ \cancel{a_{k+2}} = \cancel{a_{k+1}} \cdot q \\ \cancel{a_{k+3}} = \cancel{a_{k+2}} \cdot q \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = \cancel{a_{n-1}} \cdot q \end{cases}$$

Multiplicando membro a membro essas n – k igualdades temos:

$$a_n = a_k \cdot \underbrace{q\cdot q\cdot q\cdot\ldots q}_{n-k\text{ fatores}}$$

$$a_n = a_k \cdot q^{n-k} \quad (6.2)$$

A equação 6.1 é um caso particular de 6.2, a qual foi deduzida para o caso em que nenhum termo da PG é nulo. Mas é fácil verificar que em qualquer caso vale 6.2.

Exemplos

a) $a_{20} = a_4 \cdot q^{20-4} = a_4 \cdot q^{16}$
$a_{30} = a_5 \cdot q^{25}$

b) Consideremos uma PG onde $a_7 = \frac{2}{3}$, $q = 9$ e calculemos a_{15}

$$a_{15} = a_7 \cdot q^8 = \frac{2}{3}\cdot(9)^8 = \frac{2}{3}\cdot(3^2)^8 = \frac{2}{3}\cdot 3^{16} = 2\cdot 3^{15}$$

Consideremos a equação 6.1 para o caso $q \neq 0$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$a_n = a_1 \cdot q^n \cdot q^{-1} = \frac{a_1}{q} q^n$$

$$a_n = \left(\frac{a_1}{q}\right)(q)^n$$

$\frac{a_1}{q}$ → constante; q → constante

Portanto, uma sequência onde o termo geral é dado por uma expressão do tipo

$$a_n = A \cdot B^n \quad (6.3)$$

onde **A** e **B** são constantes não nulas, é uma PG *cuja razão é igual a B*.

Exemplos

a) A sequência cujo termo geral é dado por $a_n = 4 \cdot 5^n$ é uma PG de razão q = 5.

b) A sequência de termo geral $a_n = -8\left(\frac{2}{3}\right)^n$ é uma PG de razão $q = \frac{2}{3}$.

Exercícios Resolvidos

6.1) Determine o 6º termo da PG (1; $\sqrt{2}$; 2;...) e dê a fórmula do seu termo geral em função de n.

Solução

$$q = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \qquad a_1 = 1$$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 = (1)\left(\sqrt{2}\right)^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4}\cdot\sqrt{2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = (1)\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^n = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}\right)^n$$

6.2) Numa PG tem-se $a_1 = 3$ e $a_6 = 96$. Determine sua razão.

Solução

$a_6 = a_1 \cdot q^5$

$96 = 3 \cdot q^5$

$q^5 = 32 = 2^5$

$q^5 = 2^5 \Leftrightarrow q = 2$

6.3) Numa PG temos $a_1 = 6$ e $a_5 = 486$
Determine sua razão.

Solução

$a_5 = a_1 \cdot q^4$

$486 = 6 \cdot q^4$

$q^4 = \dfrac{486}{6} = 81 = 3^4$

$q^4 = 3^4 \Leftrightarrow q = \pm 3$

Para $q = 3$, a PG é: (6; 18; 54; 162;...).

Para $q = -3$, a PG é: (6; -18; 54; -162;...)

6.4) O número 384 é um dos termos da PG $\left(\dfrac{3}{8}; \dfrac{3}{4}; \ldots\right)$. Determine sua "posição".

Solução

$q = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{8}} = 2$

$a_1 = \dfrac{3}{8}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$384 = \dfrac{3}{8} \cdot 2^{n-1}$

$\dfrac{(384)(8)}{3} = \dfrac{2^n}{2}$

$2^n = 2048 = 2^{11}$

$2^n = 2^{11} \Leftrightarrow n = 11$

Portanto, 384 é o 11° termo da PG.

6.5) Numa PG temos $a_1 + a_2 = -4$ e $a_3 + a_4 = -36$. Escreva os 5 primeiros termos da PG.

Solução

$a_2 = a_1 \cdot q \qquad a_3 = a_1 \cdot q^2 \qquad a_4 = a_1 \cdot q^3$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = -4 \\ a_3 + a_4 = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 q = -4 \\ a_1 q^2 + a_1 q^3 = -36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1(1+q) = -4 & \text{(I)} \\ a_1 q^2 (1+q) = -36 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a membro a equação (II) pela equação (I) temos:

$$\frac{a_1 q^2 (1+q)}{a_1 (1+q)} = \frac{-36}{-4} = 9$$

$$q^2 = 9 \Rightarrow q = \pm 3$$

Da equação (I) vem: $a_1 = \dfrac{-4}{1+q}$

$$\begin{cases} \text{para } q = 3 \text{ temos } a_1 = \dfrac{-4}{1+3} = -1 \text{ e a PG é } (-1; -3; -9; -27; -81; \ldots) \\ \text{para } q = -3 \text{ temos } a_1 = \dfrac{-4}{1-3} = 2 \text{ e a PG é } (2; -6; 18; -54; 162; \ldots) \end{cases}$$

6.6) Numa PG temos $a_3 = 3$ e $a_9 = \dfrac{3^7}{2^6}$. Determine a_7.

Solução

$a_9 = a_3 \cdot q^6$

$\dfrac{3^7}{2^6} = 3 \cdot q^6$

$q^6 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^6$

$q = \pm \dfrac{3}{2}$

$a_7 = a_3 \cdot q^4$

Como $q^4 > 0$ temos:

$a_7 = 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = 3 \cdot \dfrac{3^4}{2^4} = \dfrac{243}{16}$

6.7) **Inserir** 5 meios geométricos entre 3 e 192.

Solução

Devemos formar uma PG de 7 termos onde $a_1 = 3$ e $a_7 = 192$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
3						192

5 meios

$a_7 = a_1 \cdot q^6$

$192 = 3 \cdot q^6$

$q^6 = 64 = 2^6$

$q^6 = 2^6 \Leftrightarrow q = \pm 2$

Portanto, há duas possibilidades:

para $q = 2$: (3; 6; 12; 24; 48; 96; 192)

para $q = -2$: (3; –6; 12; –24; 48; –96; 192)

6.8) Numa PG o 4° termo é 20% do 3° termo. Sabendo que $a_1 = 2000$, calcule a_5.

Solução

$20\% = \dfrac{20}{100} = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$

Se a_4 é 20% de a_3, então $a_4 = \dfrac{1}{5} a_3$.

Isto quer dizer que a razão é $q = \frac{1}{5}$ e assim

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 = (2000)\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{2000}{5^4} = \frac{2^4 \cdot 5^3}{5^4} = \frac{2^4}{5} = \frac{16}{5}$$

6.9) A população de uma cidade aumenta à taxa de 10% ao ano. Sabendo que em 1970 a população era de 200.000 habitantes, qual a população em 1974?

Solução

Dizer que a população aumenta de 10% ao ano significa que se em um certo ano a população é de x habitantes, o número de habitantes no ano seguinte será

$$x + 10\% \text{ de } x = x + 0{,}1\,x = 1{,}1\,x$$

Assim, de um ano para outro, o número de habitantes é multiplicado por 1,1 e portanto os números de habitantes em cada ano formam uma PG de razão $q = 1{,}1$. Sendo h_{1970} o número de habitantes em 1970 e h_{1974} o número de habitantes em 1974, temos:

$$h_{1974} = h_{1970} \cdot q^4 = (200.000)\,(1{,}1)^4 = (200.000)\,(1{,}4641) = 292.820$$

6.10) Um automóvel foi comprado por R$ 200 000,00 e sofre uma desvalorização de 20% ao ano. Qual o seu valor após 6 anos?

Solução

Sendo x o valor do automóvel em um certo ano, no ano seguinte será

$$x - 20\% \text{ de } x = x - 0{,}2\,x = 0{,}8\,x$$

Portanto, de um ano para o outro o valor do automóvel é multiplicado por 0,8. Em 6 anos seu valor (em reais) será:

$$V = (200\,000)\,(0{,}8)^6 = (200\,000)\,(0{,}262\,144) = 31\,250$$

Portanto, após 6 anos o valor do carro será de R$ 31 250,00.

6.11) Um capital de R$ 400 000,00 foi colocado a juros compostos de 10% ao mês. Calcule o montante após 4 meses.

Solução

Quando os juros são compostos, a taxa é aplicada não sobre o capital inicial mas sobre o montante anterior. Portanto, se x é o montante em um certo mês, no mês seguinte o montante será:

$$x + 10\% \text{ de } x = x + 0{,}1\,x = 1{,}1\,x$$

Assim os montantes mensais formam uma PG de razão $q = 1{,}1$. Sendo R$ 400 000,00 o capital inicial, após 4 meses o montante (em reais) será:

$$m = (400\,000)\,(1{,}1)^4 = (400\,000)\,(1{,}4641) = 585\,640$$

Portanto, após 4 meses o montante será R$ 585 640,00.

6.12) Um tanque tem 1000 litros de álcool. Retiram-se 200 litros que são substituídos por água. Misturamos bem e em seguida retiram-se 200 litros dessa mistura que são substituídos por água, e assim sucessivamente. Após 4 retiradas, quantos litros de álcool restam?

Solução

Antes de cada retirada o tanque tem 1000 litros de líquido dos quais são retirados 200 litros (isto é, $\frac{1}{5}$ do total). Portanto a cada retirada tiramos $\frac{1}{5}$ do líquido que estava no recipiente e portanto restam $\frac{4}{5}$. Assim, a cada retirada, a quantidade de álcool no tanque é multiplicada por $\frac{4}{5}$. Depois da 4ª retirada, a quantidade de álcool que resta é (em litros):

$$1000\left(\frac{4}{5}\right)^4 = 1000 \cdot \left(\frac{256}{625}\right) = 1000\,(0{,}4096) = 409{,}6$$

Assim, após a 4ª retirada, sobrarão 409,6 litros de álcool.

6.13) Considere a PG cujo termo geral é

$$a_n = 3 \cdot 2^n$$

e seja a sequência cujo termo geral é

$$b_n = (a_n)^5$$

Mostre que (b_n) é uma PG e calcule a razão.

Solução

$$b_n = (a_n)^5 = (3 \cdot 2^n)^5 = \underbrace{3^5}_{\text{constante}} \cdot (\underbrace{2^5}_{\text{constante}})^n$$

De acordo com a equação 6.3 podemos afirmar que (b_n) é uma PG cuja razão é igual a 2^5.

Exercícios Propostos

6.14) Consideremos a PG $\left(\frac{1}{32}; \frac{1}{16}; \frac{1}{8}; \ldots\right)$.

a) Dê a fórmula de seu termo geral.
b) Determine o 10º termo.

6.15) Numa PG temos $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_7 = \frac{243}{64}$. Determine a razão.

6.16) Numa PG tem-se $a_1 = \frac{25}{8}$ e $q = \frac{2}{5}$. Determine i sabendo que $a_i = \frac{8}{625}$.

6.17) Numa PG temos $a_5 = -\frac{1}{3}$ e $q = -6$. Calcule a_8.

6.18) Numa PG temos $a_3 + a_5 + a_8 = 370$ e $a_4 + a_6 + a_9 = 740$. Calcule o primeiro termo e a razão.

6.19) Numa PG temos $a_{k-1} = 64x$ e $a_{k+2} = -27x$, onde $x \neq 0$. Calcule a_{k+4}.

6.20) Calcule as razões das seguintes progressões geométricas.

a) $\left(\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{12}; \ldots\right)$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{5}{2}; \frac{25\sqrt{3}}{6}; \ldots\right)$

c) $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}; \frac{3-2\sqrt{2}}{4}; \ldots\right)$

6.21) Um capital de R$ 500.000,00 foi colocado a juros compostos de 20% ao ano. Calcule o montante após 3 anos.

6.22) Sendo (a_n) uma PA de termo geral

$$a_n = 3n - 2$$

considere a sequência (b_n) cujo termo geral é

$$b_n = 4^{a_n}$$

Mostre que (b_n) é uma PG e calcule sua razão.

6.23) A sequência (a_n) é uma PA cujo termo geral é

$$a_n = 3n - 4$$

e a sequência (b_n) é uma PG cujo termo geral é

$$b_n = 5 \cdot 2^n$$

Considere a sequência (c_n) dada por

$$c_n = b_{a_n}$$

Prove que é uma PG e calcule sua razão.

6.24) Numa PG temos $a_{m+n} = A$ e $a_{m-n} = B$. Sendo $A > 0$ e $B > 0$, calcule a_m.

6.5. MÉDIA GEOMÉTRICA

Consideremos **n** números

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

A **média geométrica** deles é o número m_g dado por:

$$m_g^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \quad (6.4)$$

isto é:

$$m_g^n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

É óbvio que, quando **n** for *par*, devemos ter

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \geq 0$$

Exemplo

Consideremos os 3 números 4, −6 e 9. A média geométrica deles é m_g dada por:

$$m_g^3 = (4)(-6)(9) = -216 = -6^3$$

Portanto $m_g = -6$

No caso de dois números x e y, a média geométrica m_g é dada por

$$m_g^2 = x \cdot y$$

Exemplo

Consideremos os números 4 e 16. A média geométrica m_g deles deve satisfazer:

$$m_g^2 = 4(16) = 64$$

Portanto $m_g = \pm 8$

Observação

Alguns autores definem a média geométrica do seguinte modo:

$$m_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_n}$$

Isto acarreta que quando **n** é par, $m_g \geq 0$ (veja o item 1.3).

6.6. PROPRIEDADE

Sejam **a**, **b** e **c** três termos consecutivos de uma PG

$$(\ldots; a; b; c; \ldots)$$

Suponhamos inicialmente que os três são diferentes de zero e seja **q** a razão da PG. Temos:

$$\frac{b}{a} = q \text{ e } \frac{c}{b} = q$$

Portanto: $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ e assim $b^2 = ac$

É fácil verificar que mesmo no caso em que $q = 0$ vale $b^2 = ac$. Portanto:

Dados três termos consecutivos de uma PG, o termo central é média geométrica dos outros dois. (6.5)

Exemplo

Determine o valor de x de modo que os números $x - 8$, $x + 1$ e $x - 17$ sejam termos consecutivos de uma PG.

Solução

$(\ldots; x - 8; x + 1; x - 17; \ldots)$

$(x + 1)^2 = (x - 8)(x - 17)$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 17x - 8x + 136$

$27x = 135$

$x = 5$

6.7. REPRESENTAÇÕES ESPECIAIS

Como no caso da PA, quando a PG tem poucos termos pode ser conveniente representá-los de modo especial. Supondo que a razão q seja diferente de zero temos:

a) para 3 termos

$$\frac{x}{q};\ x;\ xq$$

b) para 5 termos

$$\frac{x}{q^2};\ \frac{x}{q};\ x;\ xq;\ xq^2$$

c) para 4 termos

$$\frac{x}{y^3};\ \frac{x}{y};\ xy;\ xy^3 \quad (q = y^2)$$

d) para 6 termos

$$\frac{x}{y^5};\ \frac{x}{y^3};\ \frac{x}{y};\ xy;\ xy^3;\ xy^5 \quad (q = y^2)$$

Exercícios Resolvidos

6.25) Determine as médias geométricas dos números:
a) -10 e -40 b) 16, 4 e 8

Solução

a) $m_g^2 = (-10)(-40) = 400$

$m_g = \pm\sqrt{400} = \pm 20$

b) $m_g^3 = (16)(4)(8) = 2^9$

$m_g = 2^3 = 8$

6.26) Sejam **x** e **y** dois números reais positivos. Sendo m_a, m_g e m_h, respectivamente, as médias aritméticas, geométrica e harmônica de x e y, mostre que

$$m_h \le |m_g| \le m_a$$

Solução

$m_a = \dfrac{x+y}{2}$; $|mg| = \sqrt{xy}$; $m_h = \dfrac{2xy}{x+y}$

I) $|mg| \le m_a \Leftrightarrow \sqrt{xy} \le \dfrac{x+y}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{xy} \le x+y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2 \Leftrightarrow 4xy \le x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2$

Como $(x-y)^2 \ge 0$ é verdade, então $|m_g| \le m_a$ também o é.

II. $m_h \le |mg| \Leftrightarrow \dfrac{2xy}{x+y} \le \sqrt{xy} \Leftrightarrow \dfrac{4x^2y^2}{(x+y)^2} \le xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{4xy}{(x+y)^2} \le 1 \Leftrightarrow 4xy \le (x+y)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4xy \le x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \le (x-y)^2$

Como $(x-y)^2 \ge 0$ é verdade, então $m_h \le |m_g|$ também o é.

Reunindo as conclusões (I) e (II) temos:

$$m_h \le |m_g| \le m_a$$

6.27) Que número devemos somar aos números -1, 1 e 4 de modo que se obtenha, nessa ordem, uma PG?

Solução

Sendo x o número procurado, a sequência

$$(-1 + x;\ 1 + x;\ 4 + x)$$

é uma PG e portanto:

$(1 + x)^2 = (-1 + x)(4 + x)$

$1 + 2x + x^2 = -4 - x + 4x + x^2$

$-x = -5$

$x = 5$

6.28) Mostre que, para que a sequência

$$(a;\ b;\ c)$$

seja ao mesmo tempo PA e PG, devemos ter $a = b = c$

Solução

Se (a; b; c) é PA, de razão **r**, podemos escrever:

$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

isto é, a sequência pode ser representada por

$$(b - r;\ b;\ b + r)$$

Como é PG, deve valer:

$b^2 = (b - r)(b + r)$

$b^2 = b^2 - r^2$

$r^2 = 0$

$r = 0$

$\begin{cases} a = b - r = b \\ c = b + r = b \end{cases}$

Assim: $a = b = c$

6.29) Determine 3 números em PG conhecendo sua soma $\frac{19}{9}$ e o seu produto $\frac{8}{27}$.

Solução

Sejam $\frac{x}{q}$; x; xq os três números

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = \frac{19}{9} & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = \frac{8}{27} & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II) tiramos $x^3 = \frac{8}{27}$ e portanto $x = \frac{2}{3}$. Substituindo em (I) obtemos:

$$\frac{2}{3q} + \frac{2}{3} + \frac{2q}{3} = \frac{19}{9}$$

$$6 + 6q + 6q^2 = 19q$$

$$6q^2 - 13q + 6 = 0$$

Esta equação tem duas raízes: $q' = \frac{3}{2}$ e $q'' = \frac{2}{3}$.

$$q = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{9} \\ xq = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{a PG é } \left(\frac{4}{9}; \frac{2}{3}; 1\right)$$

$$q = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{q} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1 \\ xq = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{a PG é } \left(1; \frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right)$$

Observe que a utilização das *representações especiais* é particularmente interessante quando se conhece o produto dos termos da PG.

6.30) Numa PG de 5 termos reais, a soma dos termos de ordem ímpar é 21 e a soma dos termos de ordem par é 10. Determine a PG.

Solução

Representemos os termos da PG por $\frac{x}{q^2}$; $\frac{x}{q}$; x; xq; xq^2

$$\begin{cases} \frac{x}{q^2} + x + xq^2 = 21 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} + xq = 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Este sistema de equações não é tão simples como os que apareceram nos exercícios 6.5 e 6.18. Precisaremos usar alguns artifícios.

De (I) tiramos:

$$\frac{x}{q^2} + xq^2 = 21 - x$$

$$x\left(\frac{1}{q^2} + q^2\right) = 21 - x$$

$$\frac{1}{q^2} + q^2 = \frac{21 - x}{x} \qquad \text{(III)}$$

De (II) tiramos:

$$x\left(\frac{1}{q} + q\right) = 10$$

$$\frac{1}{q} + q = \frac{10}{x} \qquad \text{(IV)}$$

No quadro ao lado vemos que $\frac{1}{q^2} + q^2 = \left(\frac{1}{q} + q\right)^2 - 2$

$$\left(\frac{1}{q} + q\right)^2 = \frac{1}{q^2} + 2 \cdot \frac{1}{q} \cdot q + q^2 = \frac{1}{q^2} + q^2 + 2$$

Portanto:

$$\frac{1}{q^2} + q^2 = \left(\frac{1}{q} + q\right)^2 - 2$$

Assim:

$$\frac{21 - x}{x} = \left(\frac{10}{x}\right)^2 - 2$$

$$\frac{21 - x}{x} = \frac{100}{x^2} - 2$$

$$21x - x^2 = 100 - 2x^2$$

$$x^2 + 21x - 100 = 0$$

As raízes desta equação são $x' = 4$ e $x'' = -25$

1º) para x = 4 vem: $\frac{1}{q} + q = \frac{10}{x} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

onde tiramos q = 2 ou $q = \frac{1}{2}$

Tomando q = 2, a PG é (1; 2; 4; 8; 16)

Tomando $q = \frac{1}{2}$, a PG é (16; 8; 4; 2; 1)

2º) para $x = -25$ vem: $\frac{1}{q} + q = \frac{10}{x} = \frac{10}{-25} = -\frac{2}{5}$

onde tiramos a equação:

$5q^2 + 2q + 5 = 0$

que não admite raízes reais.

6.31) Consideremos uma PG crescente de termos positivos e de razão q. Determine os valores de q para os quais três termos consecutivos dessa PG possam ser as medidas dos lados de um triângulo.

Solução

Sejam $\frac{x}{q}$, x e xq os três termos, com $x > 0$ e $q > 1$. O maior número é xq.

Para garantir que os três números sejam as medidas dos lados de um triângulo, basta impor que o maior seja menor que a soma dos outros dois.

$$xq < \frac{x}{q} + x$$

Dividindo por x:

$q < \frac{1}{q} + 1$

$q^2 < 1 + q$

$q^2 - q - 1 < 0$

Esta inequação é satisfeita para:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Mas, como $q > 1$, a resposta é:

$$1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

6.32) Determine uma PG de três termos positivos, sabendo que a soma dos termos é 21 e a soma dos quadrados dos termos é 189.

Solução

1º modo: Um modo de resolver este exercício é representar os termos por $\frac{x}{q}$, x e xq escrevendo:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} + x + xq = 21 \\ \frac{x^2}{q^2} + x^2 + x^2q^2 = 189 \end{cases}$$

Em seguida procede-se como no exercício 6.30. Vamos então encaminhar a resolução de um outro modo.

2º modo: Representando a PG por (a; b; c) temos:

$$\begin{cases} a+b+c = 21 & \text{(I)} \\ a^2+b^2+c^2 = 189 & \text{(II)} \end{cases}$$

Lembrando da identidade:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

e usando $b^2 = ac$ temos:

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2b^2 + 2bc$

$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2b(a + b + c)$

$21^2 = 189 + 2b\,(21)$

$441 = 189 + 42b$

$b = 6$

Substituindo em (I) e (II) temos:

$$\begin{cases} a+c = 15 & \text{(III)} \\ a^2+c^2 = 153 & \text{(IV)} \end{cases}$$

De (III) vem $a = 15 - c$. Substituindo em (IV) obtemos a equação

$$c^2 - 15c + 36 = 0,$$

que tem raízes $c' = 3$ e $c'' = 12$.

$$\begin{cases} \text{para } c = 3 \text{ vem } a = 12 \text{ e a PA é } (12; 6; 3) \\ \text{para } c = 12 \text{ vem } a = 3 \text{ e a PA é } (3; 6; 12) \end{cases}$$

Exercícios Propostos

6.33) Determine as médias geométricas dos seguintes números:

a) 12 e 27

b) 6; 8; 4 e 24

6.34) Determine o valor de x de modo que $(x - 4; 8 + x; 44 + x)$ seja PG.

6.35) O produto de três números em PG é −9 261 e a soma do 1º com o 2º é −17. Determine a PG.

6.36) A soma dos três primeiros termos de uma PG é $\frac{7}{2}$ e a soma dos quadrados desses termos é $\frac{21}{4}$. Determine a PG.

6.37) A sequência (a; b; c) é uma PA cuja soma dos termos é 24 e a sequência $(a; 2b; 10c - 12)$ é uma PG. Determine a, b e c.

6.38) Determine x de modo que $(2^x; 3^x; 5^x)$ seja uma PG.

6.39) Determine 5 números em PG sabendo que $a_2 + a_4 = 10$ e $a_1 + a_3 + a_5 = 21$.

6.40) A sequência (a; b; c) é uma PG de razão $q \neq 0$, tal que $a < 0$. Determine os valores de q tais que $c > 4b - 3a$.

6.41) Sabendo que (a; b; c) é uma PG mostre que $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$.

6.8. PROPRIEDADES

a) Consideremos uma PG finita onde a_r e a_s são equidistantes dos extremos:

$$(a_1; a_2; \ldots; a_r; \ldots; a_s; \ldots a_n)$$

Suponhamos, inicialmente, que todos os termos sejam diferentes de zero (portanto, a razão q é diferente de zero). Temos:

$$\begin{cases} a_r = a_1 \cdot q^{r-1} & \text{(I)} \\ a_n = a_s \cdot q^{n-s} & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo membro a membro as igualdades (I) e (II), temos:

$$\frac{a_r}{a_n} = \frac{a_1 \cdot q^{r-1}}{a_s \cdot q^{n-s}}$$

$$\frac{a_r}{a_n} = \frac{a_1}{a_s}$$

Como a_r e a_s são equidistantes dos extremos, temos $r - 1 = n - s$ e, portanto, $q^{r-1} = q^{n-s}$.

$$a_r \cdot a_s = a_1 \cdot a_n \quad \text{(III)}$$

isto é:

O produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos. (6.6)

É fácil verificar que essa propriedade vale também no caso em que q = 0 ou no caso da PG de razão indeterminada.

b) Consideremos uma PG finita de número ímpar de termos, em que a_p é termo central:

$$(a_1; a_2; \ldots; a_{p-1}; a_p; a_{p+1}; a_n)$$

Neste caso a_{p-1} e a_{p+1} são equidistantes dos extremos e, portanto:

$$a_{p-1} \cdot a_{p+1} = a_1 \cdot a_n$$

Mas sabemos que $a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$. Portanto:

$$a_p^2 = a_1 \cdot a_n$$

isto é:

Numa PG de número ímpar de termos, o termo central é média geométrica dos extremos e, portanto, é média geométrica de qualquer par de termos equidistantes dos extremos. (6.7)

6.9. PRODUTO DOS TERMOS

Seja P_n o produto dos **n** primeiros termos de uma PG.

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \, a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n \quad \text{(I)}$$

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot \ldots \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1 \quad \text{(II)}$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (I) e (II) temos:

$$P_n^2 = \underbrace{(a_1a_n)(a_2a_{n-1})(a_3a_{n-2})\ldots(a_{n-2}a_3)(a_{n-1}a_2)(a_na_1)}_{\text{n parênteses}}$$

Dentro de cada um dos parênteses temos o produto de dois termos equidistantes dos extremos ou o próprio produto dos extremos (ou o quadrado do termo central quando n for ímpar) e assim, cada um desses produtos é igual a a_1a_n. Portanto:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \quad (6.8)$$

Podemos chegar a outra fórmula para obter P_n:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_n =$$
$$= a_1 \cdot (a_1q)(a_1q^2)(a_1q^3)\ldots(a_1q^{n-1}) =$$
$$= \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1)}_{\text{n vezes}}(q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot \ldots \cdot q^{n-1}) =$$
$$= a_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}$$

Porém, $1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \dfrac{[1+(n-1)][n-1]}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

Portanto:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (6.9)$$

Podemos representar de outro modo:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Exemplo

Calcule o produto dos 20 primeiros termos da PG:

$$\left(\frac{-2}{27}; \frac{2}{9}; \frac{-2}{3}; 2; \ldots\right)$$

Solução

$$a_1 = \frac{-2}{27} = \frac{-2}{3^3} \qquad q = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{-2}{27}} = -3$$

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P_{20} = a_1^{20} \cdot q^{\frac{20(19)}{2}} = a_1^{20} \cdot q^{190} = \left(\frac{-2}{3^3}\right)^{20} (-3)^{190} =$$

$$= \frac{2^{20}}{3^{60}} \cdot 3^{190} = 2^{20} \cdot 3^{130}$$

6.10. SOMA DOS TERMOS

Vamos deduzir fórmulas que permitam calcular a soma dos **n** primeiros termos de uma PG. Representando essa soma por S_n, vamos considerar 3 casos.

1º) **razão indeterminada**

É o caso da PG (0; 0; 0; 0; ...) e, portanto, para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos:

$$S_n = 0 \qquad (6.10)$$

2º) **q = 1**

Neste caso a PG pode ser escrita (a_1; a_1; a_1; ...) e, portanto:

$$S_n = n \cdot a_1 \qquad (6.11)$$

3º) **q ≠ 1**

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \qquad (I)$$

Multiplicando os dois membros de (I) por q:

$$q \cdot S_n = \underbrace{a_1q}_{a_2} + \underbrace{a_2q}_{a_3} + \underbrace{a_3q}_{a_4} + \ldots + \underbrace{a_{n-2}q}_{a_{n-1}} + \underbrace{a_{n-1}q}_{a_n} + a_n \cdot q$$

Isto é:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \qquad (II)$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (II) e (I) temos:

$qS_n - S_n = a_nq - a_1$

$S_n(q - 1) = a_nq - a_1$

E como $q \neq 1$, temos:

$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q-1} \qquad (6.12)$$

A fórmula 6.12 pode ser transformada para uma outra forma:

$$S_n = \frac{a_nq - a_1}{q-1} = \frac{a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1}{q-1} = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} \qquad (6.13)$$

Exercícios Resolvidos

6.42) Calcule $\prod_{i=1}^{12}(4 \cdot 3^n)$.

Solução

A sequência de termo geral $a_n = 4 \cdot 3^n$ é uma PG de razão q = 3 e primeiro termo $a_1 = 4(3)^1 = 12$.

Como $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ temos:

$$\prod_{i=1}^{12}(4 \cdot 3^n) = P_{12} = a_1^{12} \cdot q^{\frac{12(11)}{2}} = a_1^{12} \cdot q^{66} = (12)^{12}(3)^{66} =$$

$$= (3 \cdot 4)^{12}(3)^{66} = 3^{12} \cdot 4^{12} \cdot 3^{66} = 3^{78} \cdot 4^{12}$$

6.43) Calcule a soma dos 7 primeiros termos da PG (2; 6; 18; ...)

Solução

$a_1 = 2$ $\qquad q = \frac{6}{2} = 3$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

$$S_7 = \frac{a_1(q^7-1)}{q-1} = \frac{2(3^7-1)}{3-1} = \frac{2(2187-1)}{2} = 2186$$

6.44) Determine, em função de n, o valor da soma

$$S = 1 + 10 + 100 + \ldots + 10^{n-1}$$

Solução

A sequência $(1; 10; 100; ...; 10^{n-1})$ é uma PG de n termos com $a_1 = 1$ e $q = 10$.

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{1(10^n-1)}{10-1} = \frac{10^n-1}{9}$$

6.45) Calcule as seguintes somas:

a) $A = 9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{999...9}_{\text{n algarismos}}$

b) $B = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{111....1}_{\text{n algarismos}}$

Solução

a) $A = 9 + 99 + 999 + ... + 999 ... 9 =$

$= (10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ... + (10^n - 1) =$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n) - \underbrace{(1+1+1+...+1)}_{\text{n parcelas}} =$

$$= \frac{10(10^n-1)}{10-1} - n = \frac{10(10^n-1)}{9} - n = \frac{10(10^n-1)-9n}{9}$$

b) $B = 1 + 11 + 111 + ... + 111 ... 1 = \frac{9+99+999+...+999...9}{9}$

Aproveitando o resultado do item anterior temos:

$$B = \frac{A}{9} = \frac{10(10^n-1)-9n}{81}$$

6.46) A soma dos **n** primeiros termos de uma PG de razão diferente de 1 é dada, para todo n, por:

$$S_n = \frac{a^{n-4}+a^{n-3}-a^{-4}-a^{-3}}{a^2-1}$$

onde $a^2 \neq 1$. Determine a razão da PG e o 1º termo.

Solução

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{a^{-3}+a^{-2}-a^{-4}-a^{-3}}{a^2-1} = \dfrac{a^{-2}-a^{-4}}{a^2-1} = \dfrac{a^{-4}(a^2-1)}{a^2-1} = a^{-4} \\ S_2 = \dfrac{a^{-2}+a^{-1}-a^{-4}-a^{-3}}{a^2-1} = \dfrac{a^{-4}(a^2+a^3-1-a)}{a^2-1} = \dfrac{a^{-4}[a^2(1+a)-(1+a)]}{a^2-1} = \\ = \dfrac{a^{-4}[(1+a)(a^2-1)]}{a^2-1} = a^{-4}(1+a) = a^{-4}+a^{-3} \end{cases}$$

Mas: $S_1 = a_1$ e $S_2 = a_1 + a_2$

Portanto:

$$\begin{cases} a_1 = a^{-4} \\ a_1 + a_2 = a^{-4} + a^{-3} \end{cases}$$

onde tiramos $a_2 = a^{-3}$ e, portanto:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a^{-3}}{a^{-4}} = a$$

6.47) Sendo $x \neq 0$, calcule a soma:

$$S = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 + ... + \left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$$

Solução

$$S = \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right) + \left(x^4+2+\frac{1}{x^4}\right) + ... + \left(x^{2n}+2+\frac{1}{x^{2n}}\right) =$$

$$= (x^2+x^4+...+x^{2n}) + \underbrace{(2+2+...+2)}_{\text{n parcelas}} + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+...+\frac{1}{x^{2n}}\right)$$

Neste ponto vamos considerar 2 casos:

1º) $x^2 = 1$

$S = (1 + 1 + ... + 1) + (2 + 2 + ... + 2) + (1 + 1 + ... + 1) = n + 2n + n = 4n$

Portanto, para $x^2 = 1$ vem $S = 4n$

2º) $x^2 \neq 1$

- $x^2 + x^4 + ... + x^{2n} = \dfrac{x^2[(x^2)^n - 1]}{x^2-1} = \dfrac{x^2(x^{2n}-1)}{x^2-1}$
- $2 + 2 + ... + 2 = 2n$
- $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4} + ... + \dfrac{1}{x^{2n}} = \dfrac{\frac{1}{x^2}\left[\left(\frac{1}{x^2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{x^2}-1} = \dfrac{\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x^{2n}}-1\right]}{\frac{1-x^2}{x^2}} =$

$$= \frac{\frac{1-x^{2n}}{x^{2n}}}{\frac{1-x^2}{x^2}} = \frac{1-x^{2n}}{x^{2n}(1-x^2)} = \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)}$$

Então:

$$S = \frac{x^2(x^{2n}-1)}{x^2-1} + 2n + \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}(x^2-1)} = 2n + \frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$$

6.48) Calcule o produto dos n primeiros termos de uma PG conhecendo-se a sua soma S e a soma S' dos seus inversos.

Solução

Observemos, inicialmente, que se tivermos uma PG (a_1; a_2; ...a_n) de razão q, a sequência dos inversos dos termos:

$$\left(\frac{1}{a_1}; \frac{1}{a_2}; ...; \frac{1}{a_n}\right)$$

é também uma PG cuja razão é igual a $\frac{1}{q}$ (estamos supondo que todos os termos são diferentes de zero). Assim:

$$S = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$$

$$S' = \frac{\left(\frac{1}{a_1}\right)\left[\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{q} - 1} = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{\frac{1-q^n}{q^n}}{\frac{1-q}{q}} = \frac{q^n - 1}{a_n(q-1)}$$

Portanto:

$$\frac{S}{S'} = \frac{a_1\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)}{\frac{1}{a_n}\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right)} = a_1 \cdot a_n$$

Mas de acordo com a fórmula 6.8 temos:

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n = \left(\frac{S}{S'}\right)^n$$

portanto: $|P_n| = \sqrt{\left(\frac{S}{S'}\right)^n}$

Exercícios Propostos

6.49) Considere a PG $\left(\frac{1}{2}; -1; 2; -4; ...\right)$. Calcule o produto dos 22 primeiros termos.

6.50) Para a PG do exercício anterior, calcule a soma dos 6 primeiros termos.

6.51) Considere a PG cujo termo geral é $a_n = 2 \cdot 3^{n-2}$. Calcule a soma dos 10 primeiros termos.

6.52) Numa PG tem-se razão q = 2 e a soma dos 6 primeiros termos igual a 63. Determine o primeiro termo.

6.53) Numa PG tem-se $a_1 \cdot q = 3$ e $a_1 + q = \frac{7}{2}$. Calcule a soma dos 5 primeiros termos.

6.54) Calcule a soma dos **n** primeiros termos da sequência:

$$(1; 2; 2^2; 2^3; ...)$$

6.55) Seja **A** a soma dos **n** primeiros termos da sequência: (1; 3; 9; 27;...). Calcule, em função de A, a soma dos **n** primeiros termos da sequência:

$$\left(1; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{27}; ...\right)$$

6.56) Considere a sequência dada por $a_n = 2^{1-n}$. Calcule o número x dado por:

$$x = \prod_{i=1}^{4} a_i + \prod_{i=1}^{6} a_i$$

6.57) Uma PG tem $a_1 = 3$ e $q = 4$. A soma dos **k** primeiros termos dessa PG é igual a 4 095. Calcule k.

6.11. LIMITE DA SOMA

Consideremos uma PG infinita de razão $q \neq 0$, tal que $|q| < 1$, isto é, $-1 < q < 1$. Neste caso observa-se que, à medida que **n** aumenta, $|a_n|$ diminui.

Exemplos

a) Na PG $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; ...\right)$ a razão é $q = \frac{1}{2}$ e os termos vão diminuindo à medida que **n** aumenta.

b) Na PG $\left(3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; \frac{-1}{81}; ...\right)$ temos $q = -\frac{1}{3}$ (e, portanto, $|q| < 1$). Observamos que, à medida que **n** aumenta, o módulo de a_n diminui.

Para estes casos, deixando **n** aumentar indefinidamente, o termo a_n *tende a zero*. Dizemos que:

"o limite de a_n, para **n** tendendo ao infinito, é igual a zero"

e simbolizamos por:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

Tomemos a fórmula 6.12, que nos dá a soma dos **n** primeiros termos de uma PG de razão $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$$

Fazendo **n** *tender ao infinito*, a_n *tende a zero*; podemos então escrever:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-a_1}{q-1}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} \qquad (6.14)$$

Podemos escrever simplesmente:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1-q} \qquad (\text{para } 0 \neq |q| < 1)$$

ou

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-q} \qquad (\text{para } 0 \neq |q| < 1)$$

Exemplo

Consideremos a PG infinita

$$\left(4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ldots\right)$$

cuja razão é $q = \frac{1}{2}$ e, portanto, estamos no caso $0 \neq |q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$$

Isto significa que, *por mais termos que tomemos* nesta progressão, a soma nunca ultrapassará o número 8, "chegando cada vez mais perto". Assim, temos, por exemplo:

$$\begin{cases} S_2 = 4+2 = 6 \\ S_3 = 4+2+1 = 7 \\ S_4 = 4+2+1+\frac{1}{2} = 7{,}5 \\ S_5 = 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = 7{,}75 \\ S_6 = 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} = 7{,}875 \\ S_7 = 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} = 7{,}9375 \\ S_8 = 4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} = 7{,}96875 \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Observações

1ª) Em vez de "limite da soma" poderemos falar simplesmente na "soma dos termos da PG infinita".

2ª) O assunto de **limites** será estudado com mais detalhes no volume 8 desta coleção.

Exercícios Resolvidos

6.58) Calcule o limite da soma dos termos da PG

$$\left(\frac{8}{3};\ \frac{8}{9};\ \frac{8}{27};\ldots\right)$$

Solução

$$a_1 = \frac{8}{3} \quad , \quad q = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{8}{3}} = \frac{1}{3} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{8}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = 4$$

6.59) Seja a PG infinita $\left(8;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots\right)$. Calcule a soma dos seus termos de ordem ímpar.

Solução

Neste caso, ao pedir simplesmente a *soma*, queremos nos referir ao *limite da soma*. Repare que a PG $\left(8;\ 2;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{8};\ \ldots\right)$ tem razão $q = \frac{1}{4}$ e a sequência dos seus termos de ordem ímpar $\left(8;\ \frac{1}{2};\ \ldots\right)$ é uma PG de razão $q' = q^2 = \frac{1}{16}$. Assim, sendo S a soma dos termos de ordem ímpar, temos:

$$S = \frac{a_1}{1-q^2} = \frac{8}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{\frac{16-1}{16}} = \frac{8(16)}{15} = \frac{128}{15}$$

6.60) Um trem move-se com velocidade constante quando surge um obstáculo um pouco adiante. O maquinista, imediatamente, começa a frear de modo que **no 1º segundo o trem anda 20 metros e em cada segundo seguinte anda,** aproximadamente, 80% do que andou no segundo anterior. Sabendo que no instante em que o maquinista começou a frear o obstáculo estava a 150 metros do trem, pergunta-se: haverá choque entre o trem e o obstáculo?

Solução

Como em cada segundo o trem vai percorrer 80% do que percorreu no segundo anterior, os espaços percorridos por ele em cada segundo formarão uma PG de razão q = 80% e $a_1 = 20$. Como $0 \neq |q| < 1$, a soma dos espaços percorridos tem um limite. Temos.

$$q = 80\% = \frac{80}{100} = 0{,}8 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{20}{1-0{,}8} = \frac{20}{0{,}2} = 100$$

Portanto o trem percorrerá menos de 100 metros, e assim, nunca haverá o choque, pois inicialmente o trem estava a 150 metros do obstáculo.

6.61) Calcule a geratriz da dízima periódica 0,212121...

Solução

$$x = 0{,}212121\ldots = 0{,}21 + 0{,}0021 + 0{,}000021 + \ldots =$$

$$= \frac{21}{100} + \frac{21}{10000} + \frac{21}{1000000} + \ldots = \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \frac{21}{10^6} + \ldots$$

A sequência $\left(\frac{21}{10^2}; \frac{21}{10^4}; \ldots\right)$ é uma PG de razão

$$q = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Logo

$$x = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{21}{100}}{1-0{,}01} = \frac{\frac{21}{100}}{0{,}99} = \frac{21}{99} = \frac{7}{3}$$

Portanto:

$$0{,}2121\ldots = \frac{7}{33}$$

6.62) Calcule a geratriz da dízima 0,999...

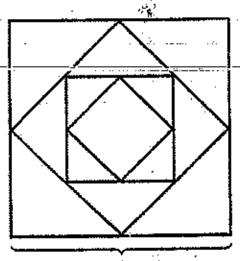
Solução

$$x = 0{,}999\ldots = 0{,}9 + 0{,}09 + 0{,}009 + \ldots =$$

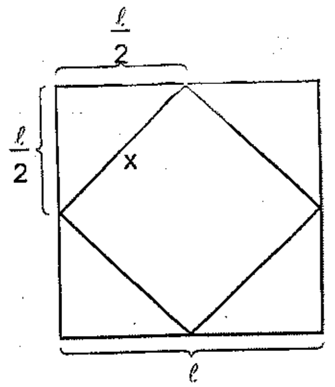
$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Assim: 0,999... = 1

6.63. Consideremos um quadrado de lado **a**. Unindo os pontos médios dos lados obtemos um outro quadrado. Unindo os pontos médios do novo quadrado obtemos um outro quadrado e vamos, assim, procedendo indefinidamente. Calcule o limite da soma das áreas de todos os quadrados assim construídos.



Solução



Sendo ℓ a medida do lado de um dos quadrados e **x** a medida do lado do quadrado seguinte, temos:

$$x^2 = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{\ell^2}{4} + \frac{\ell^2}{4} = \frac{2\ell^2}{4}$$

$$x^2 = \frac{\ell^2}{2}$$

Mas, ℓ_2 é a área do quadrado cujo lado mede ℓ e x^2 é a área do quadrado cujo lado mede x. Vemos, então, que de um quadrado para o seguinte, a área é multiplicada por $\frac{1}{2}$. Portanto, a sequência das áreas é uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e primeiro termo $a_1 = a_2$.

$$\lim S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$$

6.64) Calcule o limite da expressão

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\ \ldots$$

onde a > 0, quando o número de radicais aumenta indefinidamente.

Solução

$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\ \ldots = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} \cdot a^{\frac{1}{16}} \cdot \ldots = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots}$$

$$\text{Mas: } \lim\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\text{Assim: } \lim\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}\ \ldots = a^1 = a$$

Exercícios Propostos

6.65) Calcule o limite da soma dos termos da PG:

$$\left(60;\ -45;\ \frac{135}{4};\ldots\right)$$

6.66) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 2^{-n}$

6.67) Sendo a > 1 calcule:

$$\frac{a+1}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\ldots$$

6.68) Calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{54}+\ldots\right)$

6.69) A soma dos termos de uma PG infinita é igual a 10 e o primeiro termo é igual a 6. Calcule a razão.

6.70) Seja x um número real não nulo, tal que $-1 < x < 1$. Calcule a soma:

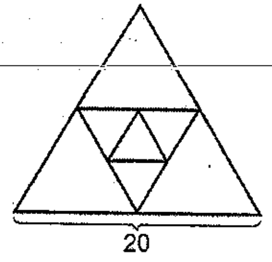
$$x-\frac{x}{3}+x^2-\frac{x}{9}+x^3-\frac{x}{27}+x^4-\frac{x}{81}+\ldots$$

6.71) Numa PG infinita a soma dos termos de ordem ímpar é 54 e a soma dos termos de ordem par é 36. Determine a PG.

6.72) Resolva a equação:

$$x+\frac{x}{4}+\frac{x}{16}+\frac{x}{64}+\ldots=80$$

6.73) Um triângulo equilátero tem lado medindo 20. Ligando os pontos médios dos lados obtemos um outro triângulo equilátero. Ligando os pontos médios dos lados do novo triângulo, obtemos um outro triângulo equilátero e, assim, vamos procedendo indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos os triângulos assim construídos.



6.74) Calcule o limite da expressão:

$$\sqrt{a^3\sqrt{b^5\sqrt{a^3\sqrt{b^5}}}}\ \ldots$$

com a > 0 e b > 0, quando o número de radicais aumenta indefinidamente.

6.75) Calcule:

$$S=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots\right)+\ldots+\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)^2}+\ldots\right]+\ldots$$

6.12. PROGRESSÕES ARITMÉTICO-GEOMÉTRICAS

Uma sequência do tipo:

$$(a;\ (a+r)q;\ (a+2r)q^2;\ (a+3r)q^3;\ \ldots)$$

é chamada **progressão aritmético-geométrica.**

Os números a, a + r, a + 2r; ... formam uma PA de razão r e os números q, q^2, q^3, ... formam uma PG de razão **q**.

Para acharmos a soma S_n dos n primeiros termos dessa progressão, usamos um procedimento análogo ao usado na dedução da fórmula da soma dos n primeiros termos da PG (ver item 6.10):

"multiplicamos S_n por q e fazemos a diferença $S_n - qS_n$"

Exercícios Resolvidos

6.76) Calcule a soma dos **n** primeiros termos da sequência:

$$1;\ (3)\ (3);\ (5)\ (3^2);\ (7)\ (3^3);\ (9)\ (3^4);$$

Solução

Aqui temos r = 2 e q = 3. O termo de ordem **n** dessa sequência é:

$$a_n = (2n-1)\ (3)^{n-1}$$

Assim, a soma procurada é:

$$S = 1 + 3(3) + 5(3^2) + 7(3^3) + 9(3^4) + \ldots + (2n-3)(3^{n-2}) + (2n-1)(3^n - 1) \quad (I)$$

Multiplicando os dois membros de (I) por q = 3, obtemos:

$$3S_n = 1(3) + 3(3^2) + 5(3^3) + 7(3^4) + 9(3^5) + \ldots + (2n-3)(3^{n-1}) + (2n-1)(3^n) \quad (II)$$

Subtraindo membro a membro (II) de (I):

$$\odot\begin{cases} S_n = 1+3(3)+5(3^2)+7(3^3)+\ldots+(2n-3)(3^{n-2})+(2n-1)(3^{n-1}) \\ 3S_n = 1(3)+3(3^2)+5(3^3)+\ldots+(2n-3)(3^{n-1})+(2n-1)3^n \end{cases}$$

$$-2S_n = 1+2(3)+2(3^2)+2(3^3)+\ldots\ldots\ldots\ldots+2(3^{n-1})-(2n-1)3^n$$

$$-2S_n = 1-(2n-1)(3^n)+2\underbrace{(3+3^2+3^3+\ldots+3^{n-1})}_{\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}}$$

$$-2S_n = 1-(2n-1)3^n+2\left[\frac{3(3^{n-1}-1)}{2}\right]=$$

$$=1-(2n-1)3^n+3(3^{n-1}-1)=$$

$$=1-(2n-1)3^n+3^n-3=1-3+(1-2n+1)3^n=$$

$$=-2+(2-2n)3^n$$

Portanto: $S_n = 1 + (n-1)3^n$

6.77) Sendo x > 1 calcule o *limite da soma*

$$1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\ldots$$

Solução

Aqui tem r = 1 e $q=\frac{1}{x}\left(\text{note que } \frac{1}{x}<1\right)$

$$-\begin{cases} S=1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^4}+\ldots \\ \frac{1}{x}S=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\ldots \end{cases}$$

$$S-\frac{1}{x}S=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$

$$S\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$$

$$S\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x}{x-1}$$

$$S=\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x}{x-1}=\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

Exercícios Propostos

6.78) Determine a soma dos **n** primeiros termos da sequência

$$(1;\ 2(3);\ 3(3^2);\ 4(3^3);\ldots)$$

6.79) Sendo 0 < x < 1, calcule $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$

6.80) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^{n-1}}$

Exercícios Suplementares

II.1) Sabendo que $\frac{1}{(2n+1)(2n+5)}=\frac{\frac{1}{4}}{(2n+1)}-\frac{\frac{1}{4}}{(2n+5)}$

Calcule o valor da soma:

$$\frac{1}{3(7)}+\frac{1}{5(9)}+\frac{1}{7(11)}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+5)}$$

II.2) Considere as seguintes progressões geométricas:
a) (2; 4; 8; 16; 32)
b) $\left(8;\ 4;\ 2;\ 1;\ \frac{1}{2}\right)$
c) (2; –4; 8; –16)
Esboce os seus gráficos.

II.3) Sabendo que (a; b; c) é uma PA, mostre que
$(a^2 + ab + b^2;\ c^2 + ac + a^2;\ b^2 + bc + c^2)$
também é uma PA.

II.4) Numa PA de 3 termos a soma de seus termos é igual a 6 e a soma dos quadrados dos termos é igual a 14. Determine a PA.

II.5) Determine 5 números em PA, sabendo que sua soma é igual a 5 e a soma de seus cubos é 265.

275

II.6) Numa PA de razão **r** temos $a_7 = 7$ e $a_1r=\frac{11}{8}$. Determine a_1 e r.

II.7) Calcule $\left[\sum_{i=1}^{20}(2i-4)\right]^2$

II.8) Numa PA, sendo S_n a soma dos n primeiros termos, sabe-se que $S_7 = S_{11}$. Calcule S_{18}.

→ Questão errada.

II.9) Determine o valor de x na igualdade:

$$2 + 5 + 8 + \ldots + x = 126$$

II.10) Numa PA o terceiro termo é a + 4b e o décimo terceiro termo é a + 24b. Calcule em função de a e b a soma dos 16 primeiros termos.

II.11) Numa PA decrescente de 4 termos, a soma dos termos é igual a 22 e a soma de seus quadrados é 166. Determine a PA.

II.12) Numa PG temos $a_1 + a_2 = 28$ e $a_3 + a_4 = 175$. Determine a razão e o primeiro termo da progressão.

II.13) Determine três números em PG sabendo que sua soma é 13 e a soma de seus quadrados é 91.

II.14) Numa PG temos $a_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ e $a_3 = \frac{3-2\sqrt{2}}{6}$. Calcule a_1. Solução errada

II.15) A população de certa cidade cresce 15% a cada 6 meses. Se em janeiro de 1965 a população era de 80.000 habitantes, qual sua população em janeiro de 1968?

II.16) Calcule o limite da soma

$$\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\ldots$$

II.17) Considere a sequência (a_n) definida por

$$a_i = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a) Calcule a_1, a_2 e a_3.
b) Mostre que (a_n) é uma PG e determine seu termo geral.
c) Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

II.18) Calcule $8^2 + 12^2 + 16^2 + \ldots + 32^2$.

II.19) Calcule $\sum_{n=1}^{20} n(n+3)$.

II.20) Considere a PG de termo geral.

$$a_n = 2 \cdot 4^n$$

e seja a sequência (b_n) definida por

$$b_n = a_n^2$$

a) Mostre que (b_n) é uma PG e determine sua razão.
b) Calcule $\sum_{n=1}^{10} b_n$.

II.21) Determine as geratrizes das seguintes dízimas periódicas
a) 0,444...
b) 0,252525...
c) 0,125125125...

PARTE III

Capítulo 7 – **Logaritmos**

Capítulo 8 – **Propriedades dos logaritmos**

Capítulo 9 – **Logaritmos decimais**

Capítulo 10 – **Logaritmos neperianos – Uma breve história**

Capítulo 11 – **Mudança de base**

Capítulo 7

Logaritmos

7.1. INTRODUÇÃO

Na primeira parte deste volume, estudamos a resolução de algumas *equações exponenciais*, onde a determinação da incógnita não apresentava grandes dificuldades. Faremos uma rápida revisão através de alguns exemplos. (Veja o exercício 1.62.)

Exemplos

a) $2^x = 32$
Como $32 = 2^5$, temos $2^x = 2^5$ portanto, $x = 5$

b) $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{4}{25}$

Como $\frac{4}{25} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$, temos $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$; portanto, $x = -2$

c) $7^x = \sqrt[3]{49}$

Como $\sqrt[3]{49} = 7^{\frac{2}{3}}$, temos $7^x = 7^{\frac{2}{3}}$; portanto, $x = \frac{2}{3}$

d) $\pi^x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

Como $\frac{1}{\sqrt{\pi}} = \pi^{-\frac{1}{2}}$, temos $\pi^x = \pi^{-\frac{1}{2}}$; portanto, $x = -\frac{1}{2}$

e) $11^x = 121^{\sqrt{2}}$
Como $121^{\sqrt{2}} = 11^{2\sqrt{2}}$, temos $11^x = 11^{2\sqrt{2}}$; portanto, $x = 2\sqrt{2}$

Esse tipo de equação pode ser representado, genericamente, pela igualdade:

$$a^x = b$$

onde **a** e **b** são números reais positivos, e $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$.

Devemos notar que as equações examinadas nos exemplos acima apresentaram uma certa *facilidade* de resolução, pois, foi possível escrever o número **b** como uma potência de base **a** de expoente inteiro ou fracionário, mas sempre *racional*. Entretanto, essa mesma facilidade não ocorre em casos como, por exemplo, a = 3 e b = 16. Sabemos que *existe* um número real **x** tal que $3^x = 16$; é evidente que **x** não pode ser um número inteiro. Na verdade, nesse caso, **x** é um número **irracional** e, por isso, sua representação decimal só pode ser escrita *aproximadamente*. No exemplo em questão, podemos escrever $x \cong 2{,}524$, pois

$$3^{2,524} \cong 16$$

A partir do problema enunciado simbolicamente pela igualdade $a^x = b$ surge a noção de **logaritmo**.

7.2. DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Sejam **a** e **b** números reais positivos, e $a \neq 1$. Nessas condições, define-se:

Logaritmo de b na base a é o expoente x que satisfaz à igualdade $a^x = b$

Indicamos o **logaritmo de b na base a** com a notação $\log_a b$. A definição é, então, traduzida pela **equivalência**:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Exemplos

a) $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$

b) $\log_3 27 = 3$, pois $3^3 = 27$

c) $\log_{10} \frac{1}{10} = -1$, pois $10^{-1} = \frac{1}{10}$

d) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$, pois $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$

e) $\log_{11} \sqrt[3]{11} = \frac{1}{3}$, pois $11^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{11}$

f) $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1$, pois $\left(\sqrt{7}\right)^1 = \sqrt{7}$

g) $\log_{13} 1 = 0$, pois $13^0 = 1$

Observações

1ª) **Nomenclatura:** na igualdade $\log_a b = x$, **x** é o **logaritmo**, **a** chama-se **base** e **b** chama-se **logaritmando**. O número **b** pode, também, ser chamado de **antilogaritmo** e ser indicado pela igualdade:

$$b = \text{antilog}_a x$$

2ª) **Uma convenção:** quando se *omite* a base **a**, escrevendo-se apenas $\log b$, subentende-se que a base é $a = 10$. Os logaritmos de base 10 chamam-se **logaritmos decimais**.

3ª) **Existência do logaritmo:** a definição de logaritmo faz restrições aos valores do logaritmando **b** e da base **a**. Ao escrevermos a expressão $\log_a b$, devemos, sempre, lembrar que são necessárias as condições:

$$a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} \quad \text{e} \quad b \in \mathbb{R}_+^*$$

isto é,

$$a > 0, \ a \neq 1 \quad \text{e} \quad b > 0$$

A condição $a > 0$ (como vimos anteriormente), é necessária para que a expressão a^x tenha significado, *qualquer que seja o expoente real* **x**. Além disso, sendo $a > 0$, resulta sempre $a^x > 0$ e por isso mesmo torna-se necessária a condição $b > 0$, sem o que não seria possível a igualdade $a^x = b$. Por outro lado, a condição $a \neq 1$ também se faz necessária pois, como $1^x = 1$ para todo x, se tivéssemos $a = 1$, então o único valor possível para b seria também 1 e o conceito de logaritmo, nesse caso, perderia qualquer interesse.

7.3. CONSEQUÊNCIAS IMEDIATAS

Sejam **a**, **b** e **c** números reais positivos ($a \neq 1$) e α um número real qualquer.

Da definição de logaritmo, são imediatas as seguintes conclusões:

(I) $\log_a 1 = 0$

Evidente, pois, para todo **a**, $a^0 = 1$.

(II) $\log_a a = 1$

Decorre, imediatamente, do fato $a^1 = a$.

(III) $\log_a a^\alpha = \alpha$

(IV) $a^{\log_a b} = b$

De fato, se fizermos $\log_a b = x$, teremos $a^{\log_a b} = a^x = b$.

(V) Se $\log_a b = \log_a c$, então $b = c$

Como $\log_a b = \log_a c$, podemos indicar ambos os logaritmos com a mesma letra x:

$$\log_a b = x \quad \text{e} \quad \log_a c = x$$

Então, pela definição, temos:

$$a^x = b \quad \text{e} \quad a^x = c$$

ou seja, $b = c$.

Nota: É imediato que a recíproca também é verdadeira, isto é, se $b = c$, então $\log_a b = \log_a c$, onde *a*, *b* e *c* satisfazem as condições de existência.

7.4. RESUMO

Definição :

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Condições de Existência :

$b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$

Consequências da definição :

(I) $\log_a 1 = 0$

(II) $\log_a a = 1$

(III) $\log_a a^\alpha = \alpha$

(IV) $a^{\log_a b} = b$

(V) $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Exercícios Resolvidos

7.1) Calcule $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[5]{27}$

Solução

Fazendo $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[5]{27} = x$, temos $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt[5]{27}$ ou $3^{-2x} = 3^{\frac{3}{5}}$ onde $-2x = \frac{3}{5}$;

portanto, $x = \log_{\frac{1}{9}} \sqrt[5]{27} = -\frac{3}{10}$.

7.2) Calcule o valor da expressão:

$y = \log_2 1 + \log_2 2 + 3 \cdot \log_3 27 - 2\log_5 \frac{1}{25}$

Solução

Das consequências da definição, temos:

$\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$ e $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$.

Então, $y = 0 + 1 + 3 \cdot (3) - 2 \cdot (-2) = 14$

7.3) Calcule o valor de $x = 5^{-1+\log_5 2}$.

Solução

$x = 5^{-1+\log_5 2} = 5^{-1} \cdot 5^{\log_5 2}$

Lembrando que $5^{\log_5 2} = 2$, vem: $x = \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5}$

7.4) Resolva a equação $x^{2\log_x 3} \cdot \log_2 x = 18$.

Solução

Observando que $x^{2\log_x 3} = \left(x^{\log_x 3}\right)^2 = (3)^2 = 9$, a equação fica:

$$9 \cdot \log_2 x = 18 \text{ ou } \log_2 x = 2, \text{ onde } x = 2^2 = 4$$

Portanto, S = {4}

7.5) Determine x para que $\log_x 9x = 2$.

Solução

Se $\log_x 9x = 2$, temos $x^2 = 9x$ ou $x^2 - 9x = 0$, ou ainda $x(x-9) = 0$, onde vem $x = 0$ ou $x = 9$. No entanto, sabemos que nem o logaritmando, nem a base podem ser nulos; logo, $x = 0$ não convém e assim S = {9}.

7.6) Resolva a equação $\log(7x + 4) = \log(5x + 2)$.

Solução

Da consequência (V), temos $7x + 4 = 5x + 2$ onde obtemos $x = -1$.
No entanto, sabemos que os *logaritmandos* $7x + 4$ e $5x + 2$ só podem assumir valores positivos e isto não ocorre quando substituímos x pelo valor determinado, o que equivale a dizer que a equação dada não admite solução. Então, $S = \varnothing$.

7.7) Mostre que, se $\log_a b^\alpha = p$ e $\log_{a^\alpha} b = q$ $(pq\alpha \neq 0)$, então $\frac{p}{q} = \alpha^2$.

Solução

Se $\log_a b^\alpha = p$ então $a^p = b^\alpha$ (1)

Se $\log_{a^\alpha} b = q$, então $a^{\alpha q} = b$ (2)

De (1) e (2): $a^p = (a^{\alpha q})^\alpha$ ou $a^p = a^{\alpha^2 q}$

onde $p = \alpha^2 q$ e, finalmente, $\frac{p}{q} = \alpha^2$.

7.8) Resolva a equação $3^{4x+1} - 7 \cdot 3^{2x} + 2 = 0$, sendo dado $\log_3 2 = 0{,}631$.

Solução

Como $3^{4x+1} = 3^{4x} \cdot 3^1$ e $3^{4x} = (3^{2x})^2$ a equação dada pode ser escrita:

$$3 \cdot (3^{2x})^2 - 7 \cdot (3^{2x}) + 2 = 0$$

Fazendo, agora, a *mudança de variável* $3^{2x} = y$, temos a equação:

$$3y^2 - 7y + 2 = 0$$

cujas raízes são $y = \frac{1}{3}$ ou $y = 2$; voltando, então, a $3^{2x} = y$, temos as igualdades:

$$3^{2x} = \frac{1}{3} \text{ e } 3^{2x} = 2$$

Para a primeira, como $\frac{1}{3} = 3^{-1}$, temos $3^{2x} = 3^{-1}$, onde $2x = -1$; portanto

$x = -\frac{1}{2}$.

Para resolvermos a segunda, lembremos a equivalência

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

Então: $3^{2x} = 2 \Leftrightarrow 2x = \log_3 2 = 0,631$

onde $x \cong 0,315$

Logo, $S = \left\{-\frac{1}{2};\ 0,315\right\}$

Exercícios Propostos

7.9) Calcule:

a) $\log_{11} 121$

b) $\log_{121} 11$

c) $\log_2 \frac{1}{32}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 32$

e) $\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{9}$

f) $\log_{\sqrt[4]{7}} \sqrt[3]{7}$

g) $\log_{25} \sqrt[5]{625}$

h) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$

i) $\log_{\frac{1}{5}} 0,2$

j) $\log 0,001$

k) $\log_{0,0625} 0,125$

l) $\log_{0,5625} 0,75$

7.10) Resolva as equações:

a) $\log_5 x = 0$

b) $\log_3 x = -2$

c) $\log_{\sqrt{3}} x = \frac{1}{2}$

d) $\log_2 (x + 3) = 1$

e) $\log_{\sqrt{11}} \left(x^2 - 1\right) = 2$

f) $\log_x 3 = 2$

g) $\log_x 2 = -2$

h) $\log_x 2\sqrt{3} = \frac{1}{2}$

7.11) Resolva as equações:

a) $\log_{2x} x = -2$

b) $\log_x 2x = \frac{1}{2}$

c) $\log_{x-3} 4x = 2$

d) $\log_{\sqrt{x-3}} \left(x^2 - 2\right) = 4$

7.12) Resolva as equações:

a) $3 \log_5 x = \log_5 x + 1$

b) $(\log_2 x)^2 - 7 \log_2 x + 10 = 0$

c) $2 (\log x)^2 - 5 \log x + 2 = 0$

7.13) Resolva as equações:

a) $\log_3 (4x - 3) = \log_3 (2x + 5)$

b) $\log (2x - 7) = \log (x - 9)$

c) $\log_5 (x^2 - x) = \log_5 (8x - 14)$

d) $\log_{12} (x^2 - 2x) = \log_{12} (10 - 5x)$

7.14) Calcule:

a) $13^{\log_{13} 5}$

b) $4^{\log_2 3}$

c) $7^{\log_{49} 3}$

d) $5^{2 - \log_5 3}$

e) $4^{\log_2 3 + \log_{16} 3}$

7.15) Calcule o valor de $y = \log_{11} \log_7 \log_2 128$.

7.16) Resolva as equações:

a) $\log_3 \log_2 \log_{10} x = 0$

b) $\log_{27} \log_2 \log_2 (x - 1) = \frac{1}{3}$

7.17) Sendo $\log_a 2 = p$ e $\log_a 3 = q$, calcule:

$$y = a^{\left[\log_a (\log_a 2) + \log_a \left(\log_a 3 + \frac{1}{\log_a 2}\right)\right]}$$

7.18) Sendo $\log_a b = p$ e $\log_b a = q$, mostre que $p \cdot q = 1$.

7.19) Resolva as equações:

a) $2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} = 14\sqrt{2}$

b) $5^{2x} - 4 \cdot 5^{x+1} = 5^3$

c) $3^{4\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{4x}} + 3 = 0$

7.20) Sendo dados $\log_2 5 = 2,322$, $\log 5 = 0,699$ e $\log_2 3 = 1,585$, resolva as equações:

a) $10^{3(x-1)} = 5$

b) $2^{6x+1} - 11 \cdot 2^{3x} + 5 = 0$

c) $2^{2(x+2)} - 8 \cdot 2^{x+2} + 15 = 0$

Capítulo 8

Propriedades dos logaritmos

Sejam **a**, **b** e **c** números reais positivos, onde $a \neq 1$; α e β são números reais quaisquer com $b \neq 0$.

8.1. PRIMEIRA PROPRIEDADE

$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

A demonstração dessa propriedade é bastante simples.

Indicando as expressões $\log_a (bc)$, $\log_a b$ e $\log_a c$, respectivamente por **x**, **y** e **z**, devemos provar que $x = y + z$. Temos as implicações:

$$\log_a(bc) = x \Rightarrow a^x = bc$$

$$\log_a b = y \Rightarrow a^y = b$$

$$\log_a c = z \Rightarrow a^z = c$$

Substituindo as duas últimas igualdades na primeira, obtemos

$$a^x = a^y \cdot a^z \text{ ou } a^x = a^{y+z}$$

e daí $x = y + z$

Exemplos

a) $\log_2 (35) = \log_2 (7 \times 5) = \log_2 7 + \log_2 5$

b) $\log 3 + \log 2 = \log (3 \times 2) = \log 6$

c) $\log_3 (18) = \log_3 (9 \times 2) = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$

d) $\log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \times 3) \log_6 36 = 2$

8.2. SEGUNDA PROPRIEDADE

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

De modo análogo ao que fizemos para demonstrar a primeira propriedade, indicamos as expressões $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$, $\log_a b$ e $\log_a c$, respectivamente por **x**, **y** e **z** e vamos provar que $x = y - z$. Temos as implicações:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = x \Rightarrow a^x = \frac{b}{c}$$

$$\log_a b = y \Rightarrow a^y = b$$

$$\log_a c = z \Rightarrow a^z = c$$

Substituindo as duas últimas na primeira, obtemos

$$a^x = \frac{a^y}{a^z} \text{ ou } a^x = a^{y-z}$$

e daí $x = y - z$

Exemplos

a) $\log_3\left(\frac{10}{27}\right) = \log_3 10 - \log_3 27 = \log_3 10 - 3$

b) $\log_2 18 - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{18}{3}\right) = \log_2 6$

c) $\log\left(\frac{m}{pq}\right) = \log m - \log.(pq) = \log m - (\log p + \log q) = \log m - \log p - \log q$

8.3. TERCEIRA PROPRIEDADE

$$\boxed{\log_a\left(b^\alpha\right) = \alpha \cdot \log_a b}$$

De fato, fazendo $\log_a(b^\alpha) = x$ e $\log_a b = y$, temos

$$a^x = b^\alpha \text{ e } a^y = b$$

Substituindo o valor de **b** da segunda na primeira, vem

$$a^x = \left(a^y\right)^\alpha \text{ ou } a^x = a^{\alpha y}$$

onde $x = \alpha y$, ou seja $\log_a(b^\alpha) = \alpha \cdot \log_a b$

Exemplos

a) $\log_7(2^5) = 5 \cdot \log_7 2$

b) $\frac{1}{3} \cdot \log_3 8 = \log_3\left(8^{\frac{1}{3}}\right) = \log_3 \sqrt[3]{8} = \log_3 2$

8.4. QUARTA PROPRIEDADE

$$\boxed{\log_{(a^\beta)} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b}$$

De fato, fazendo $\log_{(a^\beta)} b = x$ e $\log_a b = y$, temos

$$(a^\beta)^x = b \text{ e } a^y = b$$

e daí, $a^{\beta x} = a^y$

Assim, $\beta x = y$, onde $x = \frac{1}{\beta} \cdot y$, isto é,

$$\log_{(a^\beta)} b = \frac{1}{\beta} \cdot \log_a b$$

Exemplos

a) $\log_{27} x = \log_{(3^3)} x = \frac{1}{3}\log_3 x$

b) $\log_4 5 = \log_{(2^2)} 5 = \frac{1}{2} \cdot \log_2 5 = \log_2\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 \sqrt{5}$

8.5. CASOS PARTICULARES

1º) Inversão do logaritmando

Na terceira propriedade, na situação particular em que $\alpha = -1$, temos:

$$\log_a(b^{-1}) = -1 \cdot \log_a b$$

isto é,

$$\boxed{\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b}$$

ou seja, *invertendo-se o logaritmando, o logaritmo muda de sinal.*

2º) Inversão da base

Na quarta propriedade, se tivermos $\beta = -1$, obtemos

$$\log_{(a^{-1})} b = \frac{1}{(-1)} \cdot \log_a b$$

isto é,

$$\boxed{\log_{\left(\frac{1}{a}\right)} b = -\log_a b}$$

ou seja, *invertendo-se a base, o logaritmo muda de sinal.*

Observação

A expressão $-\log_a b$ é comumente chamada **cologaritmo de b na base a**, o que quer dizer que o cologaritmo é o *oposto* do logaritmo. Podemos, então, escrever:

$$\boxed{\text{colog}_a b = -\log_a b = \log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_{\left(\frac{1}{a}\right)} b}$$

3º) Logaritmo de uma raiz

Na terceira propriedade, colocando-se $\alpha = \frac{1}{n}$ (no caso em que **n** é inteiro e positivo), temos:

$$\log_a (b^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

isto é,

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

Não devemos nos esquecer de que **raiz** é também uma **potência**, onde o expoente é o *inverso* do índice do radical.

4º) Caso em que a base é uma raiz

Na quarta propriedade, colocando-se $\beta = \frac{1}{n}$ (no caso em que **n** é inteiro e positivo), temos:

$$\log_{(a^{\frac{1}{n}})} b = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \log_a b$$

isto é,

$$\log_{\sqrt[n]{a}} b = n \log_a b$$

Podemos observar, também, que

$$\log_a b^n = \log_{\sqrt[n]{a}} b$$

Exercícios Resolvidos

8.1) Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática, que:

$\log_a(b_1 b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \log_a b_3 + \ldots + \log_a b_n$, para todo $n \geq 2$.

(Generalização da Primeira Propriedade.)

Solução

Teorema 1 – Para $n = 2$, a igualdade dada se escreve:

$$\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$$

que á verdadeira, já que é a primeira propriedade dos logaritmos, demonstrada no item 8.1.

Teorema 2 – *Admitindo* que a igualdade dada é verdadeira para um valor $n = k$ ($k \geq 2$), vamos provar que é também verdadeira para $n = k + 1$. Em outras palavras, temos como *hipótese*:

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_k) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k$$

e como *tese*:

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_k b_{k+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

Somemos a ambos os membros da hipótese a expressão $\log_a b_{k+1}$:

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_k) + \log_a b_{k+1} = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

Como o primeiro membro dessa nova igualdade é uma soma de *dois* logaritmos de mesma base, podemos escrevê-lo como o logaritmo do produto; assim:

$$\log_a [(b_1 b_2 \ldots b_k) \cdot b_{k+1}] = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

ou seja:

$$\log_a (b_1 b_2 \ldots b_k b_{k+1}) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_k + \log_a b_{k+1}$$

que é a nossa tese.

Provamos, assim, que o logaritmo, numa certa base, do produto de n fatores, todos positivos, é igual à soma dos logaritmos de cada um dos fatores, na mesma base.

8.2) Escreva, na base 10, o desenvolvimento logarítmico da expressão:

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Solução

Basta escrever $\log S = \log\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

e aplicar as propriedades conhecidas:

$$\log S = \log\frac{4}{3} + \log\pi + \log r^3 = \log 4 - \log 3 + \log\pi + 3\log r$$

8.3) Determine a expressão E cujo logaritmo, na base 2 é:

$\log_2 E = 3 + 4\log_2 x + \log_4 y - 2\log_2 z$

Solução

Devemos inicialmente escrever o número 3 e o $\log_4 y$ como logaritmos de base 2:

$$3 = \log_2 2^3 \quad \text{e} \quad \log_4 y = \log_{(2^2)} y = \frac{1}{2}\log_2 y$$

Temos, então:

$$\log_2 E = \log_2 2^3 + 4 \cdot \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y - 2\log_2 z$$

Aplicando as propriedades vem:

$$\log_2 E = \log_2 8 + \log_2 x^4 + \log_2 y^{\frac{1}{2}} - \log_2 z^2$$

$$\log_2 E = \log_2\left(8x^4\sqrt{y}\right) - \log_2 z^2$$

$$\log_2 E = \log_2\left(\frac{\left(8x^4\sqrt{y}\right)}{z^2}\right)$$

Portanto, $E = \frac{(8x^4\sqrt{y})}{z^2}$.

8.4) Resolva a equação:

$$\log_3 (2x-1) - \log_3 (5x+3) = -1$$

Solução

Aplicando a segunda propriedade, escrevemos:

$$\log_3\left(\frac{2x-1}{5x+3}\right) = -1$$

onde:

$$3^{-1} = \frac{2x-1}{5x+3}, \text{ ou seja, } \frac{1}{3} = \frac{2x-1}{5x+3}$$

Resolvendo, obtemos x = 6, valor que satisfaz as condições de existência dos logaritmos apresentados na equação, como se pode facilmente verificar. Logo, S = {6}.

8.5) Dado $\log_3 5 = a$, determine $\log_{81} 125$.

Solução

Temos: $\log_{81} 125 = \log_{(3^4)}(5^3) = \frac{3}{4}\log_3 5 = \frac{3}{4}a$

8.6) Dado log 3 = 0,477, calcule log 9.000.

Solução

Como o logaritmo dado é de base 10, devemos escrever o número 9.000 como um *produto de potências* de bases 3 e 10, que são os elementos conhecidos no problema.
Então:

$9.000 = 9(1.000) = 3^2 \cdot 10^3$

Temos assim que:

$\log 9.000 = \log(3^2 \cdot 10^3) = \log(3^2) + \log(10^3) = 2 \cdot \log 3 + 3 =$
$= 2 \cdot 0,477 + 3 = 3,954$

8.7) Adotando $\log_3 2 = 0,63$ e $\log_3 11 = 2,18$ calcule $\log_3\left(\frac{1}{1936}\right)$.

Solução

Sabemos que:

$$\log_3\left(\frac{1}{1\,936}\right) = -\log_3 1\,936$$

Decompondo 1 936 em fatores primos, obtemos $1\,936 = 2^4 \cdot 11^2$ e assim:

$\log_3 1\,936 = \log_3 (2^4 \cdot 11^2) = \log_3 (2^4) + \log_3 (11^2) = 4 \log_3 2 + 2 \log_3 11 =$
$= 4 \cdot 0,63 + 2 \cdot 2,18 = 6,88$

Então, $\log_3\left(\frac{1}{1\,936}\right) = -6,88$

8.8) Sendo $\log(a+b) = p$ e $\log(a^2-b^2) = q$, calcule $\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$.

Solução

$$\log\left(\frac{a+b}{a-b}\right) = \log\left[\frac{a+b}{a-b}\cdot\frac{a+b}{a+b}\right] = \log\left[\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}\right] =$$

$$= \log(a+b)^2 - \log(a^2-b^2) = 2\cdot\log(a+b) - \log(a^2-b^2) = 2p - q$$

8.9) Resolva a equação $x^{\log_2 x} = 256\,x^2$.

Solução

Como ambos os membros da equação são positivos (note que a condição de existência do logaritmo exige x positivo), podemos escrever seus logaritmos na base 2:

$$\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = \log_2\left(256\,x^2\right)$$

As propriedades nos permitem escrever:

$$\log_2 x \cdot \log_2 x = \log_2 256 + \log_2 x^2$$

Temos, então

$$(\log_2 x)^2 = 8 + 2\log_2 x$$

Fazendo a substituição $\log_2 x = y$, a equação fica:

$$y^2 = 8 + 2y \text{ ou seja } y^2 - 2y - 8 = 0$$

cujas raízes são y = –2 ou y = 4
Voltando a $\log_2 x = y$, vem:

$$\log_2 x = -2 \text{ ou } \log_2 x = 4$$

e daí $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ ou $x = 2^4 = 16$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{4}; 16\right\}$

8.10) As raízes reais da equação em x: $x^2 - 2\alpha x - 2\alpha - 1 = 0$ existem e são log (ab) e $\log\left(\frac{a}{b}\right)$. Mostre, sem resolver a equação, que $b = (10a)^{\pm 1}$.

Solução

Das propriedades de soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau, temos:

$$\log(ab)+\log\left(\frac{a}{b}\right)=2\alpha \qquad (I)$$

$$\log(ab)\cdot\log\left(\frac{a}{b}\right)=-2\alpha-1 \quad (II)$$

Trabalhando com (I), vem:

$$\log a + \log b + \log a - \log b = 2\alpha$$

onde $2 \cdot \log a = 2\alpha$ e, portanto $\log a = \alpha$ ou seja, $a = 10^{\alpha}$ (III)

Trabalhando, agora, com (II), vem:

$$[\log a + \log b]\cdot[\log a - \log b] = -2\alpha - 1$$

isto é,

$$(\log a)^2 - (\log b)^2 = -2\alpha - 1$$

Como já sabemos que $\log a = \alpha$, tiramos:

$$(\log b)^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha+1)^2$$

e daí,

$$\log b = \pm(\alpha + 1)$$

Portanto,

$$b = 10^{\pm(\alpha+1)}$$

Escrevendo que $b = [10^{(\alpha+1)}]^{\pm1} = [10^1 \cdot 10^{\alpha}]^{\pm1}$

e aplicando a igualdade (III), obtemos, finalmente

$$b = (10 \cdot a)^{\pm1}$$

8.11) Resolva o sistema de equações:

$$\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 5\\ \log_2 x - \log_2 y = -1\end{cases}$$

Solução

A primeira equação se escreve.

$$\log^2(x \cdot y) = 5, \text{ onde } xy = 2^5 = 32 \quad (I)$$

A segunda se escreve:

$$\log_2\left(\frac{x}{y}\right) = -1, \text{ onde } \frac{x}{y} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \quad (II)$$

Isolando y em (II): $y = 2x$, e substituindo em (I), obtemos:

$$x \cdot (2x) = 32 \text{ ou } x^2 = 16$$

onde $x = 4$ ou $x = -4$. O resultado $x = -4$ não convém, pois não satisfaz as condições de existência dos logaritmos. Então, para $x = 4$, vem $y = 8$.

Logo, $S = \{(4; 8)\}$

Outro modo: Poderíamos, também, somar membro a membro as equações dadas, obtendo:

$$2\log_2^x = 4$$

onde $\log_2 x = 2$ e, então, $x = 4$.

Na 1ª equação, substituindo $\log_2 x$ por 2. temos:

$$2 + \log_2 y = 5$$

onde $\log_2 y = 3$ e, então, $y = 8$.

Finalmente, escrevemos $S = \{(4; 8)\}$

Exercícios Propostos

8.12) Escreva, na base 10, o desenvolvimento logarítmico de:

a) $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$

b) $E = a\sqrt{b\sqrt{c}}$, **a, b e c** reais positivos

c) $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, a_1 e **q** reais positivos

d) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$ e $(a_1 + a_n) \in \mathbb{R}_+^*$

e) $E = \frac{2^5 \cdot \sqrt{5}}{\pi \cdot 3^2 \cdot \sqrt[3]{7}}$

8.13) Determine a expressão E nos seguintes casos:

a) $\log E = \log 3 + \log 7 + 2 \log b$

b) $\log_2 E = \log_4 a + \log_8 b - 2 \log_2 c$

c) $\log_3 E = 2 + \log_3 5 - \log_9 a - \log_{27} b$

d) $\log E = 3 + \frac{1}{2}(\log a + \log b) - \frac{3}{4}\log(a + b)$

8.14) Resolva as equações:

a) $\log(x - 3) + \log(x + 2) = \log 42 - \log 3$

b) $2\log_2(x + 1) = \log_2(x + 2) + 1$

c) $\log_9(x - 1) = \log_3\left(\sqrt{10x - 4}\right) - \log_3(x + 2)$

d) $\log_5 x^2 + 3\log_{25} x^2 + 2\log_{625} x^2 = 9$

8.15) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases}\log_2 x + \log_2 y = 1\\ \log_3 x - 3\log_3 y = -\log_3 32\end{cases}$ b) $\begin{cases}\log\sqrt{x} - \log\sqrt{y} = \log 3\\ -x^2 + 9y^3 = 90y\end{cases}$

8.16) Sendo $\log_3 2 = a$, calcule:

a) $\log_{81} 64$

b) $\log_3 108$

c) $\log_9 \frac{64}{27}$

8.17) Sendo $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, calcule:

a) log5

b) log72

c) log 1200

d) $\dfrac{\log\sqrt{240}+\log\sqrt{27}}{\log 15}$

8.18) Sendo $\log_3 2 = 0{,}63$ e $\log_3 5 = 1{,}46$, calcule:

a) $\log_9 10$ c) $\log_3\sqrt{450}$

b) $\log_3 2{,}5$

8.19) Sendo log 432 = p e log 648 = q, calcule log 6.

8.20) Sendo $\log_2\left(\sqrt{17}-3\right)=a$, calcule $\log_2\left(\sqrt{17}+3\right)$.

8.21) Sendo $\log(a-b)=m$ e $\log\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=n$, calcule $\log\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$.

8.22) Resolva as equações:

a) $x^{\log_3 x}=9x$

b) $x^{\log x}=\dfrac{x^4}{1000}$

c) $[\log x]^{\log x}=x^2$

8.23) Resolva as equações seguintes, conhecendo-se log 2 = 0,301, log 3 = 0,477 e $\log_2 3 = 1{,}585$.

a) $10^{3x}=9$

b) $\left(\sqrt{10}\right)^x=5$

c) $2\cdot 100^x-15\cdot 10^x+18=0$

d) $(2^{x+1}-3)(2^x-27)(3\cdot 2^x-1)=0$

8.24) Mostre que, se três números positivos estão em progressão geométrica, então seus logaritmos de base a, na ordem correspondente, estão em progressão aritmética.

8.25) No exercício anterior, se **q** é a razão da PG e **r** é a razão da PA, qual é a relação entre esses números?

8.26) Calcule o número de termos de uma progressão geométrica em que $a_1 = 4$, $a_n = 13{,}5$ e $q = 1{,}5$.

8.27) Calcule a razão **q** de uma progressão geométrica em que $a_1 = \dfrac{1}{1\,024}$, $a_n = 1.024$ e o número de termos **n** é dado por $n = \log_2 q$.

8.28) As raízes reais da equação $ax^2-acx+b=0$ existem e são iguais a $(a\cdot\log_c a)$ e $(b\cdot\log_c b)$. Mostre, então, que $a^a\cdot b^b=c^c$.

8.29) As raízes da equação $x^2-sx+p=0$ são log a e log b; as raízes da equação $x^2-2Sx+P=0$ são log (ab) e $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$. Nessas condições, calcule p e P em função de s e S.

Capítulo 9

Logaritmos decimais

9.1. SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMAIS

O conjunto dos logaritmos, numa dada base **a**, de todos os números reais positivos, é o que chamamos de **Sistema de Logaritmos de base a**.

No caso particular – e mais usual – em que a = 10, temos o **Sistema de Logaritmos Decimais**.

Os logaritmos decimais são também conhecidos como *Logaritmos de Briggs*. Foi o inglês Henry Briggs (1561-1630) quem primeiro utilizou o número 10 para a construção de *tábuas de logaritmos**.

*A primeira de suas tabelas apresentava os valores dos logaritmos decimais dos inteiros de 1 a 1 000 (em *Logarithmorum chilias prima* – 1617). Em *Arithmetica Logarithmica* (1624), Briggs ampliou a tábua até 20 000 e acrescentou, também, os logaritmos dos números de 90 000 a 100 000. Nas duas obras os valores eram apresentados com *quatorze casas decimais*.

9.2. CARACTERÍSTICA E MANTISSA

Já sabemos que os símbolos log b e $\log_{10} b$ são equivalentes. Lembremos, também, que se log b = x então $10^x = b$ e que $\log 10^\alpha = \alpha$.

Desta última igualdade é imediata a conclusão de que log b só dará como resultado um *número inteiro* se o logaritmando **b** for uma *potência de 10 com expoente inteiro*. A tabela abaixo mostra alguns exemplos:

b	...	$0{,}01 = 10^{-2}$	$0{,}1 = 10^{-1}$	$1 = 10^0$	$10 = 10^1$	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	...
Log b	...	−2	−1	0	1	2	3	...

Assim, um número **b**, que não seja uma destas potências de 10, terá seu logaritmo decimal **não inteiro**.

Então, que tipo de número será, por exemplo, log 463?

Acompanhe com a tabela. Qualquer que seja o valor positivo de **b**, existem, sempre, duas potências de 10, inteiras e consecutivas, entre as quais **b** está situado. No caso sugerido, b = 463 está entre 10^2 e 10^3:

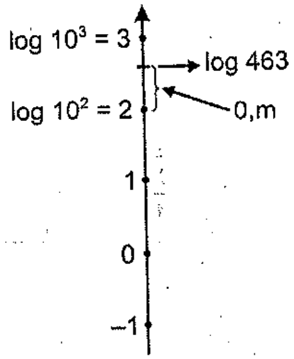
100 463 1000

$10^2 < 463 < 10^3$

Portanto, o valor de log b deve estar situado entre os valores dos logaritmos decimais dessas potências (eles nada mais são que os próprios expoentes). Vejamos:

$$10^2 < 463 < 10^3$$
$$\log 10^2 < \log 463 < \log 10^3$$
$$2 < \log 463 < 3$$

Observe a ilustração fornecida pela figura abaixo, na qual os **valores dos logaritmos** são colocados em um eixo.

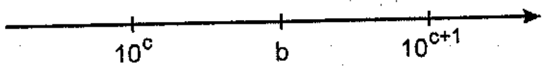


Temos, então, que log 463 é igual a "pouco mais" que dois, isto é, é igual à soma de uma parte inteira (2), com uma parcela decimal que representaremos por 0,m.

$$\log 463 = 2 + 0{,}m = 2{,}m$$

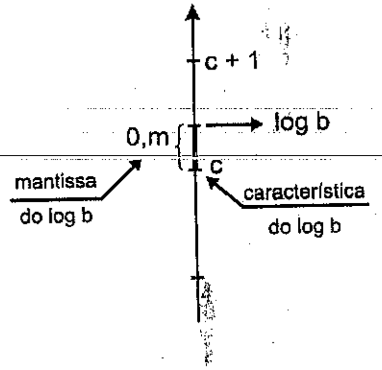
Passemos ao *caso geral*. Dado b > 0, existem as potências 10^c e 10^{c+1} com **c** inteiro, tais que

$$10^c \le b < 10^{c+1}$$



Consequentemente, o logaritmo decimal de **b** estará situado entre os logaritmos decimais destas potências:

$$\log 10^c \le \log b < \log 10^{c+1}$$



isto é,

$$c \le \log b < c + 1$$

o que indica que log b é igual à soma de um *número inteiro* c com uma parcela **0,m**, *não negativa e menor do que 1.*

$$\log b = c + 0{,}m$$

Sob essas condições, definimos:

O número c chama-se **característica** do log b
O número **0,m** chama-se **mantissa** do log b

Exemplos

a) com aproximação até a 4ª casa decimal, se log b = 4,5736, escrevemos

$$\log b = 4 + 0{,}5736$$

Então para log b, a característica é c = 4 e a mantissa é 0,m = 0,5736

b) com aproximação até a 7ª casa decimal, temos

$$\log 853 = 2{,}9309490 = 2 + 0{,}9309490$$

Então, para log 853, tem-se c = 2 e 0,m = 0,9309490
Insistimos, nesse ponto, que:

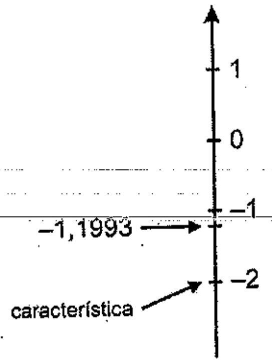
a característica é o maior número inteiro que não supera o valor do logaritmo

o que

a mantissa é sempre um número positivo (ou nulo) e menor do que 1

Fizemos essa repetição dos conceitos de **c** e **0,m** para prevenir um erro muito comum nos casos em que o logaritmo tem valor *negativo*. Vejamos os exemplos:

c) com aproximação de quatro casas decimais, temos log 0,0632 = –1,1993.



Um aluno apressado poderia responder que c = −1 e 0,m = 0,1993; isto é absolutamente falso, pois a característica, sendo o maior número inteiro que *não supera* o valor do logaritmo, não pode ser −1 e, sim, −2 (veja a figura acima). Além disso, como −1,1993 = = −1 − 0,1993, a mantissa dada pelo aluno é, na realidade, negativa, o que contraria definição. Para a característica, o valor correto é c = −2. Para obtermos o valor correto da mantissa, podemos escrever

$$\log 0{,}0632 = -1{,}1993 = -2 + 0{,}m$$

e daí tiramos

$$0{,}m = 2 - 1{,}1993$$

onde

$$0{,}m = 0{,}8007$$

Portanto, para log 0,0632, tem-se c = −2 e 0,m = 0,8007

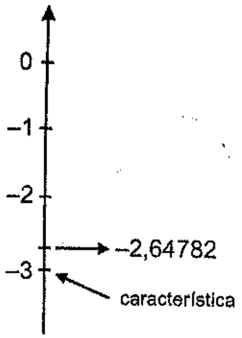
d) com aproximação de cinco casas decimais, temos log 0,00225 = −2,64782. Como o maior inteiro que não supera −2,64782 é −3, temos c = −3 e escrevemos

$$\log 0{,}00225 = -2{,}64782 = -3 + 0{,}m$$

Daí tiramos

$$0{,}m = 3 - 2{,}64782$$

onde 0,m = 0,35218



Portanto, para log 0,00225 tem-se c = −3 e 0,m = 0,35218

Observação

Uma *regra* para a obtenção da característica e da mantissa, *quando o logaritmo dado é negativo*, pode ser enunciada se retomarmos os dois últimos exemplos:

c) $\log 0{,}0632 = -1{,}1993$, onde $\begin{cases} c = -2 \\ 0{,}m = 0{,}8007 \end{cases}$

Fazemos

$$-1{,}1993 = -1 - 0{,}1993 = \underbrace{-1-1}_{c} + \underbrace{1 - 0{,}1993}_{0{,}m} = \underbrace{-2}_{c} + \underbrace{0{,}8007}_{0{,}m}$$

d) $\log 0{,}00225 = -2{,}64782$, onde $\begin{cases} c = -3 \\ 0{,}m = 0{,}35218 \end{cases}$

Fazemos

$$-2{,}64782 = -2 - 0{,}64782 = \underbrace{-2-1}_{c} + \underbrace{1 - 0{,}64782}_{0{,}m} = \underbrace{-3}_{c} + \underbrace{0{,}35218}_{0{,}m}$$

Então, se temos um *logaritmo negativo log b = −C,M*, fazemos

$$\log b = -C{,}M = -C - 0{,}M = \underbrace{-C-1}_{c} + \underbrace{1 - 0{,}M}_{0{,}m}$$

E, assim, sua característica **c** e sua mantissa **0,m** são

$$c = -C - 1$$
$$0{,}m = 1 - 0{,}M$$

Por exemplo, para log b = −4,5678, tem-se

$$c = -4 - 1 = -5$$
$$0{,}m = 1 - 0{,}5678 = 0{,}4322$$

9.3. NOTAÇÃO MISTA DOS LOGARITMOS NEGATIVOS

Nos **logaritmos negativos**, para que a leitura da característica e da mantissa possa ser feita sem qualquer cálculo, é conveniente o uso de uma *notação especial*, que explicaremos usando o exemplo d do item anterior, onde tínhamos

$$\log 0{,}00225 = -2{,}64782 = \underbrace{-3}_{c} + \underbrace{0{,}35218}_{0{,}m}$$

Escrevemos

$$\log 0{,}00225 = \bar{3}{,}35218$$

onde o sinal ⊖ sobre o número 3 significa que *apenas a parte inteira é negativa*, isto é

$$\bar{3}{,}35218 = -3 + 0{,}35218$$

Assim, a notação $\bar{c}{,}m$ significa

$$\bar{c}{,}m = -c + 0{,}m$$

Então, em $\log b = \bar{2}{,}7113$, por exemplo, temos c = −2 e 0,m = 0,7113.

Chamamos a atenção do leitor para a diferença entre, por exemplo, −5,3971 e $\bar{5}{,}3971$; note:

$$-5{,}3971 = -5 - 0{,}3971$$
$$\bar{5}{,}3971 = -5 + 0{,}3971$$

Exercícios Propostos

9.1) Complete as igualdades:

a) em log b = 0,2314: c = e 0,m =
b) em log b = 6,3112: c = e 0,m =
c) em log b = $\bar{1},2310$: c = e 0,m =
d) em log b = $\bar{7},1212$: c = e 0,m =
e) em log b = –0,3516: c = e 0,m =
f) em log b = –3,9899: c = e 0,m =

9.2) Efetue as operações indicadas, dando a resposta nas formas mista e comum, quando o resultado for negativo:

a) $\bar{2},23+\bar{1},46$
b) $\bar{3},42-\bar{5},68$
c) $3\times\bar{4},32$
d) $\dfrac{-4,6756}{\bar{3},6622}$

9.4. DETERMINAÇÃO DA CARACTERÍSTICA

Já sabemos que, para todo b > 0, tem-se log b = c + 0,m. Conhecendo-se o valor de **b**, a característica c pode ser determinada pelo mesmo processo que utilizamos para defini-la: "cercando" b com duas potências inteiras e consecutivas de 10.

Exemplos

a) se b = 862,13, então $10^2 < b < 10^3$; portanto, log b está entre 2 e 3. Assim, c = 2, e podemos escrever

$$\log 862,13 = 2 + 0,m$$

b) se b = 0,0128, então $10^{-2} < b < 10^{-1}$; portanto, log b está entre –2 e –1. Assim, c = –2, e podemos escrever

$$\log 0,0128 = -2 + 0,m$$

Regras Práticas

Apesar desse processo ser bastante simples, é possível estabelecer *regras práticas* para se obter **c** apenas pela *observação* do logaritmando **b**.

Acompanhe com o exemplo a): o número dado b = 862,13 é *maior do que 1* e apresenta *três algarismos antes da vírgula*. A característica de log 862,13 é c = 2. Aqui, a regra é a seguinte:

> Se b > 1, a característica de log b é obtida **subtraindo - se uma unidade do número de algarismos** que **b** apresenta **antes da vírgula**.

Acompanhe, agora, com o exemplo b): o número dado b = 0,0128 é *menor do que 1* e apresenta *dois zeros antes do primeiro algarismo não nulo*. A característica de log 0,0128 é c = –2. A regra, aqui, é a seguinte:

> Se b < 1, a característica de log b é igual ao **oposto do número de zeros** que **b** apresenta **antes do primeiro algarismo não nulo**.

Exemplos

c) a característica de log 25,3 é c = 1
d) a característica de log 7432,31 é c = 3
e) a característica de log 0,273 é c = –1
f) a característica de log 0,000531 é c = –4

Vamos, agora, justificar essas regras. Inicialmente, lembremos que (com p inteiro)

se $10^p \le b < 10^{p+1}$, então a característica de log b é c = p.

Para justificar a **primeira regra** (válida para b > 1), observemos que:

1º) se $10^0 \le b < 10^1$, então **c = 0**; mas todo número entre 1 e 10 tem **um algarismo** na sua parte inteira.
2º) se $10^1 \le b < 10^2$, então **c = 1**; mas todo número entre 10 e 100 tem **dois algarismos** na sua parte inteira.
3º) se $10^2 \le b < 10^3$, então **c = 2**; mas todo número entre 100 e 1 000 tem **três algarismos** na sua parte inteira.

De modo geral, se $10^n \le b < 10^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), então **c = n** e além disso **b** tem **n + 1 algarismos** na sua parte inteira

Isso mostra que relação existe entre a característica **c** e o número de algarismos da parte inteira de b > 1:

> Se [número de algarismos da parte inteira] = p então tem-se c = p – 1

Para justificar a **segunda regra** (válida para b < 1), observemos que:

1º) se $10^{-1} \le b < 10^0$, então **c = –1**; mas todo número entre 0,1 e 1 tem **um zero** antes do primeiro algarismo não nulo.
2º) se $10^{-2} \le b < 10^{-1}$, então **c = –2**; mas todo número entre 0,01 e 0,1 tem **dois zeros** antes do primeiro algarismo não nulo.

De modo geral, se $10^{-n} \le b < 10^{-n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$), então **c = –n** e, além disso, **b** tem **n zeros** antes do primeiro algarismo não nulo.

Isso mostra que relação existe entre a característica **c** e o número de zeros que precedem o primeiro algarismo não nulo de b < 1:

> Se [número de zeros que precedem o primeiro algarismo não nulo] = p então tem-se c = –p

9.5. PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DA MANTISSA

Se dois números positivos b_1 e b_2, em suas representações decimais, só diferem pela posição da vírgula, então seus logaritmos decimais têm a mesma mantissa.

Vejamos um exemplo.

Se $b_1 = 3{,}5732$ e $b_2 = 3573{,}2$, então $\log b_1$ e $\log b_2$ têm a mesma mantissa.

De fato, notando que $b_2 = 1\,000\, b_1$ temos $\log b_2 = \log (1\,000 b_1) = \log 1\,000 + \log b_1$, onde $\log b_2 = 3 + \log b_1$

Então, se $\log b_1 = c + 0{,}m$, vem que

$$\log b_2 = 3 + c + 0{,}m = (c + 3) + 0{,}m$$

ou seja log 3,5732 e log 3573,2 têm a mesma mantissa.

Vamos, então, demonstrar a propriedade para o caso geral.

Seja $\log b_1 = c + 0{,}m$, isto é, $\log b_1$ tem característica **c** e mantissa **0,m**.

Dizer que b_1 e b_2 *diferem apenas na posição da vírgula* é o mesmo que dizer que b_2 é igual a b_1 multiplicado por uma *potência inteira* de 10, isto é, existe um **inteiro n** tal que

$$b_2 = 10^n \cdot b_1$$

Temos, então

$$\log b_2 = \log (10^n\, b_1) = \log 10^n + \log b_1$$

ou seja, $\log b_2 = n + \log b_1$

como $\log b_1 = c + 0{,}m$, vem $\log b_2 = n + c + 0{,}m$

Como n e c são inteiros, $\log b_2$ tem característica n + c e **mantissa 0,m.**

Assim, $\log b_1$ e $\log b_2$ têm a mesma mantissa.

Exemplificando, mais uma vez:

Com aproximação até a 4ª casa decimal, a mantissa de log 837,56 é 0,9230. Assim, log 8,3756; log 0,83756; log 8375,6; log 8375600 e log 0,0083756 têm mantissa 0,9230; suas características, no entanto, são todas diferentes.

Observemos:

$$\log 837{,}56 = 2{,}9230$$
$$\log 8{,}3756 = 0{,}9230$$
$$\log 0{,}83756 = \bar{1}{,}9230$$
$$\log 8375{,}6 = 3{,}9230$$
$$\log 8375600 = 6{,}9230$$
$$\log 0{,}0083756 = \bar{3}{,}9230$$

9.6. USO DA TÁBUA DE LOGARITMOS

No final deste volume há uma tabela denominada **Tábua de Logaritmos. Os números ali existentes são, apenas, os valores das mantissas**, isto é, para um certo número **N**, a tábua fornece a *mantissa do log N*, com aproximação de quatro casas decimais. (As características são facilmente determinadas com as regras vistas anteriormente.)

Veja uma reprodução das linhas iniciais e finais da tábua.

Tábua de Logaritmos Decimais

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
⋮					⋮					
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Você notou que a tábua começa com N = 100 e termina com N = 999; no entanto, utilizando a *propriedade fundamental da mantissa*, é possível conhecer as mantissas dos logaritmos de números N que não constam da tabela. Por exemplo, para determinar a mantissa de log 12, lemos na tábua a de log 120; para determinar a mantissa de log 98,3 procuramos, na tábua, a de log 983.

São dois os problemas fundamentais que envolvem a tábua de logaritmos:

1º problema: *Como calcular o logaritmo decimal de um número dado.*

2º problema: *Como calcular um número, conhecendo o seu logaritmo decimal.*

Usaremos alguns exemplos para esclarecer as soluções desses problemas. Sua leitura deve ser acompanhada com uma consulta à tábua, sempre que esta for citada.

1º problema: Como calcular o logaritmo decimal de um número dado.

Exemplos

a) Calcule log 637.
A característica, pela regra prática, é c = 2. Na tábua, diante do número 637 (linha do 63 e coluna do 7), lê-se 8041, o que quer dizer que a mantissa é 0,m = 0,8041. Assim,

$$\log 637 = c + 0{,}m = 2 + 0{,}8041 = 2{,}8041$$

b) Calcule log 4,48.
A característica é c = 0. Para acharmos a mantissa, devemos procurar, na tábua, o número 448 (linha do 44 e coluna do 8), pois, pela propriedade fundamental da mantissa, esta é a mesma para os logaritmos de 448 e de 4,48. Obtemos, então, 0,m = 0,65 13. Assim,

$$\log 4{,}48 = c + 0{,}m = 0 + 0{,}6513 = 0{,}6513$$

c) Calcule log 44 800.
A característica é c = 4. A mantissa de log 44 800 é a mesma de log 448, já obtida no exemplo b): 0,m = 0,6513. Assim,

$$\log 44\,800 = c + 0{,}m = 4 + 0{,}6513 = 4{,}6513$$

d) Calcule log 0,00448.
A característica é c = −3. A mantissa (mais uma vez não levando em conta a posição da vírgula), é a mesma de log 448: 0,m = 0,6513. Assim,

$$\log 0{,}00448 = c + 0{,}m = -3 + 0{,}6513 = -2{,}3487$$

(poderíamos, também, responder na forma log 0,00448 = $\bar{3}{,}6513$).

e) Calcule log 84,642.
A característica é c = 1. Quanto à mantissa, mesmo não levando em consideração a posição da vírgula, não conseguimos obtê-la, pois o número 84642 excede a "capacidade" da nossa tabela, que só vai até 999. O processo que vamos descrever para contornar esse problema é conhecido como INTERPOLAÇÃO. Vamos calcular a mantissa correspondente ao número 846,42. Procuramos, na tábua, as mantissas correspondentes a 846 e 847; lemos então:

$$\begin{array}{|l|}\hline 846 \to 9274 \\ 847 \to 9279 \\ \hline\end{array}$$

Vê-se que o acréscimo de 1 unidade ao número 846 acarreta um aumento de 5 unidades no valor de **m**. Ora, o número 846,42 corresponde a 846 com um acréscimo de apenas 0,42. Com esses *acréscimos*, construímos a seguinte *regra de três*:

acrescentando a 846 a quantidade	o valor de m aumenta de
1	5
0,42	x

Daí vem que $\frac{1}{0{,}42} = \frac{5}{x}$, ou seja, x ≅ 2,10

Portanto, como x é o *acréscimo*, o valor de **m** procurado é

$$9274 + 2{,}10 = 9276{,}10 \cong 9276$$

ou seja, a nossa mantissa é 0,m = 0,9276.
Finalmente, temos

$$\log 84{,}642 = 1 + 0{,}9276 = 1{,}9276$$

2º problema: Como calcular um número, conhecendo o seu logaritmo decimal.

Exemplos

f) O Calcule b, sendo log b = 1,5263.
Temos que c = 1 e 0,m = 0,5263. Na tábua, localizamos 5263 que é o valor de **m** correspondente ao número 336 (linha do 33 e coluna do 6).

Falta, agora, colocar a vírgula, o que fazemos com base na característica: como **c = 1**, sabemos que o logaritmando **b** tem **dois** algarismos antes da vírgula. Logo,

$$b = 33{,}6$$

g) Calcule b, sendo log b = $\bar{3}{,}9595$.
Temos c = −3 e 0,m = 0,9595. Na tábua, para m = 9595, encontramos o número 911. Como **c = −3**, sabemos que o logaritmando **b** tem **três zeros** antes do primeiro algarismo não nulo. Logo,

$$b = 0{,}00911$$

h) Calcule b, sendo log b = −0,2834.
Conforme a regra vista no final do item 9.2, temos

$$c = -C - 1 = -0 - 1 = -1$$

$$0{,}m = 1 - 0{,}M = 1 - 0{,}2834 = 0{,}7166$$

Na tábua, não encontramos, para **m**, o valor 7166. Os valores imediatamente abaixo e acima de 7166 são 7160 e 7168, com as seguintes correspondências:

$$\begin{array}{|l|}\hline 7160 \to 520 \\ 7168 \to 521 \\ \hline\end{array}$$

É claro, então, que 7166 corresponde a um número entre 520 e 521. Vemos, no quadro acima, que um acréscimo de 8 unidades no valor de **m** acarreta um acréscimo de 1 unidade ao número correspondente.

Ora, m = 7166 corresponde a 7160 com um acréscimo de 6 unidades. Construímos, então, a *regra de três*:

Se m aumenta de	o número correspondente aumenta de
8	1
6	x

Daí vem que $\frac{8}{6} = \frac{1}{x}$, ou x = 0,75

Portanto, o número procurado é

$$520 + 0{,}75 = 520{,}75$$

faltando, agora, deslocar a vírgula para a posição correta. Como c = −1, temos, finalmente

$$b = 0{,}52075$$

9.7. CÁLCULO APROXIMADO DE EXPRESSÕES NUMÉRICAS, COM AUXÍLIO DE LOGARITMOS

Os logaritmos se prestam a uma grande variedade de aplicações práticas. Vejamos, através de exercícios, algumas delas.

9.3) Calcule $x = \sqrt[5]{(52,3)^3}$

Solução

Calculemos, inicialmente, log x

$$\log x = \log \sqrt[5]{(52,3)^3} = \frac{3}{5} \log 52,3$$

Com o auxílio da tábua, temos que log 52,3 = 1 + 0,7185 = 1,7185, onde

$$\log x = \frac{3}{5} \cdot 1,7185$$

ou seja,

$$\log x = 1,0311$$

Recaímos agora no problema de calcular o número x, conhecendo seu logaritmo decimal. Temos c = 1 e 0,m = 0,0311. Como não encontramos m = 0311 na tábua, dela tomamos

$$\boxed{\begin{array}{l} 0294 \to 107 \\ 0334 \to 108 \end{array}}$$

onde vemos que um acréscimo de 40 unidades no valor de **m** acarreta um acréscimo de uma unidade ao número correspondente; como 0311 é igual a 0294 com um acrescimo de 17 unidades, vem a *regra de três*:

Se m aumenta de	o número correspondente aumenta de
40	1
17	y

Daí $\frac{40}{17} = \frac{1}{y}$, ou seja, $y \cong 0,43$,

e o número procurado é 107 + 0,43 = 107,43. Como c = 1, x tem **dois** algarismos antes da vírgula. Logo

$$x = \sqrt[5]{(52,3)^3} = 10,743$$

9.4) Resolva a equação $2,72\, x^3 - \sqrt{1,8} = 0$

Solução

Isolando x, temos

$$x^3 = \frac{\sqrt{1,8}}{2,72} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{1,8}}{2,72}} = \frac{\sqrt[6]{1,8}}{\sqrt[3]{2,72}}$$

Tomando, agora, log x, vem:

$$\log x = \log\left(\frac{\sqrt[6]{1,8}}{\sqrt[3]{2,72}}\right) = \log \sqrt[6]{1,8} - \log \sqrt[3]{2,72} = \frac{1}{6} \log 1,8 - \frac{1}{3} \log 2,72$$

Com o auxílio da tábua, temos os valores
log 1,8 = 0 + 0,2553 = 0,2553
log 2,72 = 0 + 0,4346 = 0,4346
Então,

$$\log x = \frac{1}{6} \cdot 0,2553 - \frac{1}{3} \cdot 0,4346$$

ou seja, log x = −0,1023, onde

$$c = -0 - 1 = -1$$
$$0,m = 1 - 0,1023 = 0,8977$$

Como não encontramos m = 8977 na tábua, dela tomamos

$$\boxed{\begin{array}{l} 8976 \to 790 \\ 8982 \to 791 \end{array}}$$

e construímos a *regra de três*:

Se m aumenta de	o número correspondente aumenta de
6	1
1	y

Daí, $\frac{6}{1} = \frac{1}{y}$, ou seja, $y \cong 0,17$

e o número procurado é 790 + 0,17 = 790,17.

Como c = −1, x tem **um zero** antes do primeiro algarismo não nulo. Logo,

$$x = 0,79017$$

e o conjunto solução da equação é

$$S = \{0,79017\}$$

9.5) Quantos algarismos tem o número $b = 2^{45}$?

Solução

Temos

$$\log b = \log 2^{45} = 45 \cdot \log 2$$

Com o auxílio da tábua, escrevemos log 2 = 0,3010
Então,

$$\log b = 45 \cdot 0,3010 = 13,5450$$

Vemos que a característica de log b é c = 13; portanto, $b = 2^{45}$ tem **14 algarismos.**

Exercícios Propostos

9.6) Determine o logaritmo decimal de:
a) 1,11
b) 74,9
c) 2,35
d) 0,123
e) 0,00457
f) 0,0821

9.7) Calcule
a) log 73426
b) log 0,079481

9.8) Calcule b, sendo:
a) log b = 1,1818
b) log b = 3,9479
c) log b = $\bar{2}$,7649
d) log b = –3,1979

9.9) Calcule b, sendo
a) log b = 0,5151
b) log b = –1,3257

9.10) Calcule o valor aproximado de x, nos seguintes casos:
a) $x = \sqrt[6]{54,6}$
b) $(7,92)^2 \cdot x^3 - \sqrt[5]{64,9} = 0$

9.11) Determine o número de algarismos de
a) 2^{105}
b) 3^{60}

9.12) Quantos zeros iniciais tem a representação decimal de
a) 3^{-30}?
b) 2^{-44}?

Capítulo 10 Logaritmos neperianos – Uma breve história

10.1. LOGARITMOS NEPERIANOS

No capítulo anterior, demos atenção exclusiva aos logaritmos decimais, para os quais até publicamos uma tabela especial. Entretanto, nas aplicações dos logaritmos em problemas de nível superior, é de maior importância o Sistema de Logaritmos Neperianos.

Os **logaritmos neperianos** ou **logaritmos naturais** são os que têm, como base, o *número irracional e*, cujo valor aproximado é:

$$e \cong 2,71828182845916$$

O logaritmo de um número b > 0, **na base e**, pode evidentemente ser representado por $\log_e b$; no entanto, a notação usual é $\ell n\, b$, isto é,

$$\ell n\, b = \log_e b$$

Então, se por exemplo escrevermos ℓn **2**, podemos ler *logaritmo de 2 na base e*, ou *logaritmo neperiano de 2*, ou ainda, *logaritmo natural de 2*.

O nome **logaritmos naturais** deve-se ao fato de que muitos fenômenos da natureza podem ser descritos por leis matemáticas, em cuja expressão comparece o número e.

Exemplos

a) Para uma dada substância radiativa, a *massa* **m** que se desintegra em um intervalo de tempo **t** é dada por uma expressão do tipo:

$$m = A \cdot e^{\alpha t}$$

onde A e α são constantes características da substância considerada.

b) Um corpo que vibra, como uma mola ou um pêndulo, oscila com uma amplitude que decresce gradualmente, devido à viscosidade do meio. A *amplitude das oscilações* é dada em cada instante t pela expressão

$$A \cdot e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

onde γ é a frequência angular natural sem amortecimento e A é uma constante que depende das condições iniciais do movimento.

c) O *potencial elétrico* V produzido por um filamento reto e muito comprido, com uma carga λ por unidade de comprimento, é dada por

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ell n R$$

onde ϵ_0 é a chamada *permissividade do vácuo* e R é a distância do ponto considerado, até o filamento. Note-se a presença do número **e**, como base do logaritmo.

10.2. UMA BREVE HISTÓRIA

O nome **logaritmos neperianos** surgiu em reconhecimento ao trabalho do matemático escocês Neper.

John Neper (ou Napier) (1550–1617), é considerado o criador dos logaritmos, em cuja invenção trabalhou cerca de vinte anos, publicando, em 1614, o "*Mirifici Logarithmorum canonis descriptio*"[1] e, postumamente, em 1619, o "*Mirifici Logarithmorum canonis constructio*"[2].

Na primeira obra, Neper descreveu seu sistema de logaritmos e algumas aplicações; na segunda, fez a exposição dos métodos utilizados para construir suas tabelas.

Historicamente, é importante citar que Neper *não tinha o conceito de base*. Mas, interpretando sua obra em conceitos e palavras atuais, se dividirmos os números de suas tabelas por 10^7, temos uma tábua de logaritmos cuja **base é o número** $(0,9999999)^{10^7}$, que, com aproximação de sete casas decimais, é igual a $\frac{1}{e}$:

$$(0,9999999)^{10^7} \cong 0,3678794$$

$$\frac{1}{e} \cong \frac{1}{2,7182818} \cong 0,3678794$$

1. "Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos."
2. "A construção da maravilhosa regra dos logaritmos."

Um encontro importante

A publicação de Neper, de 1614, fez sucesso, e produziu admiradores. Entre eles, Henry Briggs (de quem falamos no capítulo anterior).

Em 1615, Briggs foi à Escócia encontrar-se com Neper, e estudaram possíveis modificações no método dos logaritmos, entre as quais, o uso do número 10 como o número que, modernamente, chamamos de base. Neper já havia pensado no problema – proposto por Briggs – e concordou. Mas, já não tinha condições para desenvolver a idéia (morreria dois anos depois). Coube, então, a Briggs, a construção da primeira tabela de logaritmos decimais.

10.3. MUDANÇA DE BASE

Conhecemos bem a tabela dos logaritmos decimais. Mas, uma pergunta surge naturalmente: como calcular os logaritmos neperianos, ou outros logaritmos que tenham bases diferentes de 10? Por exemplo, como calcular $\ell n3$ ou $\log_7 23$ ou $\log_\pi 8$?

É clara, portanto, a necessidade de uma *fórmula* especial que relacione *logaritmos de bases diferentes*. A fórmula é:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

e sua dedução é o assunto do nosso próximo capítulo.

Capítulo 11

Mudança de base

11.1. DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE MUDANÇA DE BASE

Sejam **a**, **b** e **c** números reais positivos, com **a** e **c** diferentes de 1.

Vamos tentar resolver a seguinte questão:

"Qual a relação entre $\log_a b$ e $\log_c b$?"

Representando $\log_a b$ e $\log_c b$ pelas letras x e y, temos:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b; \quad \log_c b = y \Rightarrow c^y = b$$

Obtemos, então, $a^x = c^y$, e daí podemos escrever:

$$\log_c a^x = \log_c c^y$$

Então, $x \log_c a = y$

ou ainda $x = \frac{y}{\log_c a}$

Como $x = \log_a b$ e $y = \log_c b$, obtemos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

que é a chamada **fórmula de mudança de base**.

Esta igualdade permite resolver o problema levantado ao final do capítulo anterior, de calcular logaritmos de bases diferentes de 10, transformando-os em logaritmos decimais.

Exemplos:

a) Calcule $\log_7 23$.

Podemos escrever:

$$\log_7 23 = \frac{\log_{10} 23}{\log_{10} 7}$$

Com o auxílio da tábua, obtemos:

$$\log 23 = 1,3617 \text{ e } \log 7 = 0,8451$$

Então,

$$\log_7 23 = \frac{1,3617}{0,8451} = 1,6113$$

b) Calcule $\ell n\ 3$.

Temos:

$$\ell n\ 3 = \log_e 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} e}$$

Com o auxílio da tábua, obtemos: $\log 3 = 0{,}4771$ e $\log_{10} e = \log 2{,}7182 = 0{,}4343$

Então,

$$\ell n\ 3 = \frac{0{,}4771}{0{,}4343} = 1{,}0985$$

É claro que a fórmula de mudança de base não tem seu uso limitado apenas à passagem para logaritmos decimais; ela pode ser utilizada para uma base qualquer, à conveniência do problema que se está resolvendo.

Exemplos

a) Calcule $\log_{14} 8$, sendo dado $\log_2 7 = 2{,}8074$.

Podemos escrever:

$$\log_{14} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 14} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2(2 \cdot 7)} = \frac{3}{\log_2 2 + \log_2 7} = \frac{3}{1 + 2{,}8074} =$$

$$= \frac{3}{3{,}8074} = 0{,}7879$$

b) Calcule $\log_2 0{,}75$, sendo dado $\log_3 2 = 0{,}6309$.

Escrevemos:

$$\log_2 0{,}75 = \frac{\log_3 0{,}75}{\log_3 2} = \frac{\log_3 \frac{3}{4}}{\log_3 2} = \frac{\log_3 3 - \log_3 4}{\log_3 2} = \frac{1 - 2\log_3 2}{\log_3 2} =$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot (0{,}6309)}{0{,}6309} = -0{,}4150$$

11.2. CONSEQUÊNCIAS

1º) **Inversão do logaritmo**

Se, na fórmula

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

fizermos c = b, obteremos:

$$\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$$

Portanto,

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

isto é, **a troca de posições entre a base e o logaritmando inverte o valor do logaritmo.**

Por exemplo, se $\log_a b = \frac{3}{4}$, então $\log_b a = \frac{3}{4}$

2º) **Produto de logaritmos**

A fórmula de mudança de base pode ser escrita

$$\boxed{\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b}$$

onde vemos que, ao **multiplicarmos** dois logaritmos nos quais **a base de um é igual ao logaritmando do outro**, ocorre a eliminação desse valor comum.

Exemplos

a) $\log_{(11)} 5 \cdot \log_3 (11) = \log_3 5$

b) $\log_5 (2) \cdot \log_{(2)} 7 \cdot \log_{13} 5 = \log_{(5)} 7 \cdot \log_{13} (5) = \log_{13} 7$

O exemplo b mostra que esta propriedade pode ser generalizada para o produto de mais de dois fatores; assim, por exemplo:

$$\boxed{\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c \cdots = \log_z y = \log_z a}$$

Exercícios Resolvidos

11.1) Sendo dados $\log_3 2 = a$ e $\log_7 3 = b$, calcule $x = \log_{42} 392$.

Solução

Em função dos dados do problema, o número 3 se mostra como o mais indicado para ser utilizado como base, já que está relacionado com os números 2 e 7, através dos logaritmos. Escrevemos, então:

$$x = \log_{42} 392 = \frac{\log_3 392}{\log_3 42}$$

A decomposição em fatores primos, nos dá $392 = 2^3 \cdot 7^2$ e $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;

portanto, $x = \dfrac{\log_3(2^3 \cdot 7^2)}{\log_3(2 \cdot 3 \cdot 7)} = \dfrac{3 \cdot \log_3 2 + 2 \cdot \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7}$.

Lembrando que, se $\log_7 3 = b$, então $\log_3 7 = \frac{1}{b}$, temos:

$$x = \frac{3 \cdot a + 2 \cdot \left(\frac{1}{b}\right)}{a + 1 + \frac{1}{b}} = \frac{3ab + 2}{ab + b + 1}$$

11.2) Resolva a equação $12^x - 101 = 0$.

Solução

Como $12^x = 101$, temos:

$$x = \log_{12} 101 = \frac{\log_{10} 101}{\log_{10} 12}$$

Com o auxílio da tábua, obtemos:

log 101 = 2,0043 e log 12 = 1,0792. Então,

$$x = \frac{2{,}0043}{1{,}0792} = 1{,}8572$$

Logo, S = {1,8572}

11.3) Resolva a equação $\log_5 x + \log_x 5 = \frac{10}{3}$.

Solução

Fazendo $\log_5 x = y$, temos que $\log_x 5 = \frac{1}{y}$ e a equação se escreve:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \text{ ou } 3y^2 - 10y + 3 = 0$$

Cujas raízes são y = 3 ou $y = \frac{1}{3}$.

Assim,

$\log_5 x = 3$, onde $x = 5^3 = 125$

ou $\log_5 x = \frac{1}{3}$, onde $x = 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$.

Logo, $S = \{\sqrt[3]{5}; 125\}$.

11.4) Prove que, para **a**, **b** e **c** reais positivos e diferentes de 1, se tem:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Solução

Fazendo $a^{\log_c b} = x$ e $b^{\log_c a} = y$, devemos provar que x = y.

De $a^{\log_c b} = x$, vem $\log_a x = \log_c b$ (I)

De $b^{\log_c a} = y$, vem $\log_a y = \log_a\left(b^{\log_c a}\right) = \log_c(a) \cdot \log_{(a)} b = \log_c b$ (II)

De (I) e (II), temos $\log_a x = \log_a y$

isto é, x = y.

11.5) Prove que:

$$(1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} c = \log_a c$$

Solução

$$1^\circ \text{ membro} = (1 - \log_a b) \cdot \log_{\frac{a}{b}} c = (1 - \log_a b) \cdot \frac{\log_a c}{\log_a (a/b)} =$$

$$= (1 - \log_a b) \cdot \frac{\log_a c}{\log_a a - \log_b a} = (1 - \log_a b) \frac{\log_a c}{1 - \log_a b} =$$

$$= \log_a c = 2^\circ \text{ membro}$$

Exercícios Propostos

11.6) Com o auxílio da tábua, calcule:

a) $\log_3 5$
b) $\log_7 11$
c) $\log_{42,5} 0{,}128$

11.7) Com o auxílio da tábua, resolva as equações:

a) $3^x = 5$
b) $2 \cdot 5^x - 3 = 0$
c) $2^{x+1} + 2^{x+3} = 18$
d) $25^x - 12 \cdot 5^x + 20 = 0$
e) $6 \cdot 49^x - 5 \cdot 7^x + 1 = 0$

11.8) Adotando os valores $\log e = \frac{43}{100}$, $\log \pi = \frac{49}{100}$ e $\log 7 = \frac{21}{25}$, calcule:

a) $\ell n\ \pi$
b) $\ell n\ 7$
c) $\log_7 e$
d) $\log_\pi 7$

11.9) Adotando $\log_2 3 = \frac{8}{5}$, calcule:

a) $\log_3 2$
b) $\log_3 6$
c) $\log_{1,5} 18$

11.10) Sendo $\log_2 3 = a$ e $\log_5 2 = b$, calcule em função de **a** e **b**:

a) log 6
b) $\log_{25} 120$
c) $\log_{40} 675$

11.11) Sendo $\log_3 2 = p$ e $\log_{11} 3 = q$, calcule em função de **p** e **q**:

a) $\log_{11} 4$
b) $\log_{44} 33$
c) $\log_{66} 1452$

11.12) Determine o valor das expressões:

a) $y = \log_7 5 \cdot \log_{12} 7 \cdot \log_{125} 12$
b) $y = \log_{b^4} a^3 \cdot \log_{a^3} b^2 \cdot \log_{b^2} a \cdot \log_a b$

11.13) Mostre que, se $\log_b a$, $\log_c b$, $\log_a c$ estão, nessa ordem, em progressão geométrica, então $b = c$.

11.14) As raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$ existem e são iguais a ℓnb e $\frac{1}{\ell n_c}$.

Mostre que $b = c^c$.

11.15) Sendo $\log_a m = 2$, $\log_b m = 3$ e $\log_c m = 5$, calcule $\log_{abc} m$.

11.16) Resolva as equações:

a) $\log_3 x + 6 \log_x 3 = 5$

b) $\log_a x + \log_x a = \frac{5}{2}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

c) $\log_a ax \cdot \log_x ax = 4$, com $a > 0$ e $a \neq 1$

11.17) Sendo $\log 2 \cdot \log 3 = 0{,}1436$, resolva a equação:

$$\log_2 x + \log_3 x = \log 36$$

11.18) Sendo $\ell n_5 \cdot \ell n7 = 3{,}1318$, resolva a equação:

$$\log_7 x - \log_5 x^2 = 3 \log_e 9{,}8$$

11.19) Se $\log_a x$, $\log_b x$, $\log_c x$, com $x \neq 1$, estão, nessa ordem, em progressão aritmética, mostre que $\log_a b + \log_c b = 2$.

11.20) Se $\log_a b = \log_b c$ e $\log_a c = \log_c x$, com $x \neq 1$, mostre que

$$(\log_x b)^4 = (\log_x a)^3$$

Vish

Quis economizar, se lascou.

Que nada!

Custo benefício

Exercícios Suplementares

III.1) Calcule o valor de $\log_{\frac{1}{2}} 32 + \log_{10} 0{,}001 - \log_{0,1} 10\sqrt{10}$

III.2) Sendo **p** e **q** números reais e positivos tais que:

$\log_3 \log_5 p = \log_5 \log_3 q = 0$

calcule $p + q$.

III.3) Um número x tem logaritmo igual a 4 na base a e tem logaritmo igual a 8 na base $\frac{a}{3}$. Calcule x e a.

III.4) Calcule $\log_{0,04} 125$.

III.5) Resolva a equação $\log_{25} \log_3 x = \frac{1}{2}$.

III.6) Escreva a expressão que dá o valor de **n** em função de **k**, sendo:

$$2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^7 \cdot \ldots \cdot 2^{2n-1} = k$$

III.7) Resolva o sistema $\begin{cases} 2^x = \frac{1}{2^{4+y}} \\ \log_2(2x + y) = 1 \end{cases}$

III.8) Resolva a equação $\log_4\left(\frac{1}{\log_x 4}\right) = \frac{1}{2}$.

III.9) Resolva a equação $\log_3 2 + \log_3 (x + 1) = 1$.

III.10) Sendo $\log_a b = 10$ e $\log_a c = 20$, calcule o valor de:

$\log_a \sqrt{bc} + \log_a \sqrt{b} \cdot c$

III.11) Resolva a equação $\log_8 x^{10} - 3 = 3 \log_8^2 x$. → enunciado errado

III.12) Sendo $\log 2 = 0{,}30103$ e $\log 3 = 0{,}47712$, dê o valor de $\log 7{,}2$.

III.13) Para todo $x > 0$ tem-se $\log_a x = \frac{5}{2} \log x$. Calcule o valor da base a.

III.14) Resolva o sistema $\begin{cases} 8^x = 2^{y+1} \\ \log_3 x = 1 + \log_3 y \end{cases}$

III.15) Resolva a equação $\log\sqrt{x} + \log_{100} x = 2$.

III.16) Escreva a expressão que dá o valor de x, sendo $\log_a x^m + \log_a x^n = p$.

III.17) Calcule x na equação: $\sum_{n=0}^{3} (-1)^n (n-1) \log \frac{n+1}{x} = \log \frac{3x}{4}$

III.18) Sendo $\log y = \bar{1},841116$, calcule $\log \frac{1}{y}$.

III.19) Sendo $\log a = \bar{2},12$ e $\log b = \bar{3},18$, calcule $\frac{\log a}{\log b}$.

III.20) Sendo $A = \bar{2},4112$, calcule 3A + 2.

III.21) Se $x = \log_a 25$ e $y = \log_a 5$, calcule $\frac{x}{y}$.

III.22) Sabendo-se que $\ell n\ 10 = 2{,}30$ e que $\log 71{,}2 = 1{,}85$, calcule $\ell n\ 71{,}2$.

III.23) O logaritmo de um número na base 16 é $\frac{2}{3}$. Qual é o logaritmo desse número na base $\frac{1}{4}$?

III.24) Calcule o valor de x na equação $8^x = 1{,}6$, sabendo-se que $\log_5 8 = 1{,}2920$.

III.25) Resolva a equação $\log_4 (x + 2) \cdot \log_x 2 = 1$.

III.26) Calcule **m**, sabendo-se que:

$$\log_a b = 7 - m \quad e \quad \log_b a = \frac{11}{2} - m$$

III.27) Sendo $\log a = p$, $\log b = q$, $\log c = r$ e $a^{b^x} = c$, mostre que $10^x = \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{q}}$.

III.28) O logaritmo de um certo número numa dada base é 3. A terça parte desse logaritmo, a base e o número formam, nessa ordem, uma PA. Qual é a base do logaritmo?

III.29) Se $y = 2^x$ e $x = \frac{\log_3 \log_2 3}{\log_3 2}$, calcule y.

III.30) Sendo $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$, mostre que $a^a \cdot b^b \cdot c^c = 1$.

III.31) Dada a equação $x^2 - px + B^m = 0$ e sendo **a** e **b** suas raízes reais, prove que:

$$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = mp$$

III.32) Sendo $x = \log_c ab$, $y = \log_b ac$ e $z = \log_a bc$, calcule

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}$$

III.33) Sendo $\log_{ab} a = n$, calcule em função de **n** o valor de $\log_{ab}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

III.34) Sabe-se que $\log_a b = A$ e $\log_q b = B$.
Sendo c o produto dos 10 primeiros termos de uma PG de 1º termo **a** e razão **q**, determine $\log_c b$ em função de A e B.

III.35) Prove que $\left(\frac{p}{q}\right)^{\log r} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\log p} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^{\log q} = 1$

III.36) Calcule, com o auxílio da tábua de logaritmos, o valor aproximado de cada uma das expressões indicadas:

a) $x = \sqrt[18]{28{,}3}$

b) $x = (12{,}7)^{1{,}4}$

c) $x = \sqrt[5]{39{,}6} + \sqrt[3]{78{,}2}$

III.37) Conhece-se a propriedade:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática, que:

$$\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n = \log_{a_0} a_n.$$

Para todo inteiro $n \geq 2$.

III.38) Resolva a equação $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.

III.39) Resolva a equação $3^{\log_x 3} \cdot x^{\log_3 x} = 9$.

III.40) Sejam **a**, **b**, **c** e **x** números positivos e diferentes de 1. Prove que se **a**, **b** e **c** estão, nessa ordem, em PG, então:

$$\frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x} = \frac{\log_a x}{\log_c x}$$

PARTE IV

Capítulo 12 – **Função exponencial - Função Logaritmo - Inequações**

Capítulo 13 – **Construção de gráficos**

Capítulo 14 – **Exponencial e logaritmo: funções inversas**

Capítulo

12

Função exponencial
Função logaritmo
Inequações

12.1. O CONCEITO DE FUNÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, diferentes do conjunto vazio, uma **função f de A em B** é uma correspondência que associa *a cada elemento de A um único elemento de B*.

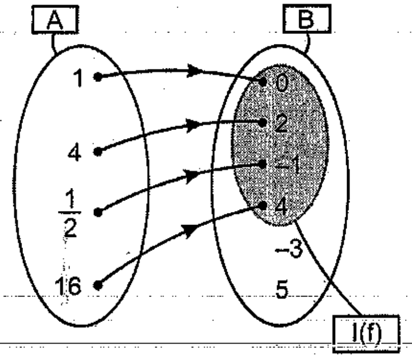
O conjunto A é denominado **domínio de** f; o conjunto B é denominado **contradomínio de f**; se **x** é um elemento qualquer de A, então, o único y de B, associado a x, é denominado **imagem de x pela função f** e é indicado por:

$$y = f(x)$$

O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A, é denominado **conjunto imagem de f** e é indicado por:

$$I(f)$$

Exemplo



A figura mostra uma função f de A em B, onde temos:

Domínio: $A = \left\{1; 4; \frac{1}{2}; 16\right\}$

Contradomínio: $B = \{0; 2; -1; 4; -3; 5\}$

Conjunto-imagem: $I(f) = \{0; 2; -1; 4\}$

12.2. FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

Uma função f, de A em B, diz-se **função real de variável real** se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

Exemplo

A função definida por $f(x) = \sqrt{x-5}$, tem para domínio A todo x real para o qual $x - 5 \geq 0$, isto é, $x \geq 5$. Então:

$$A = [5; +\infty[\subset \mathbb{R}$$

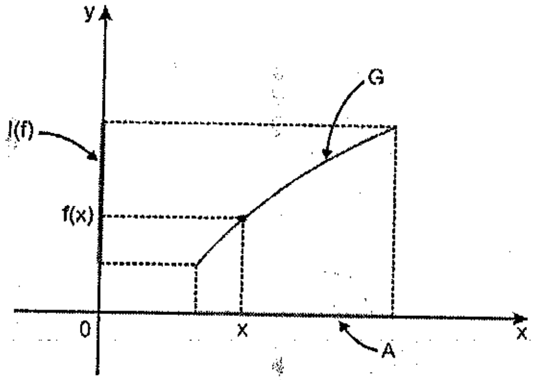
O contradomínio de $B = \mathbb{R}$

12.3. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

Considere uma função f, real de variável real:

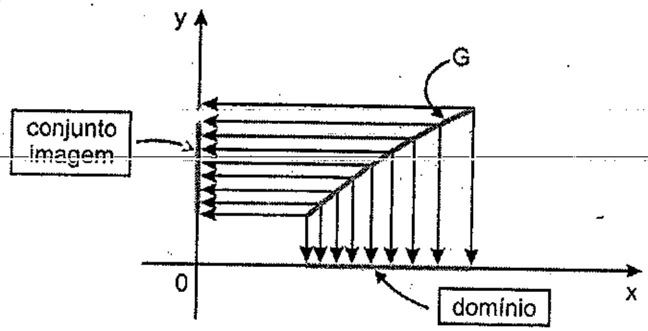
$$f: A \rightarrow B$$

Fixando um sistema de coordenadas x0y, o conjunto G de todos os pontos (x; f(x)), com $x \in A$, é o **gráfico de f.**



Observe que, conhecido o gráfico G de uma função f, o seu domínio pode ser obtido projetando-se G sobre 0x, na direção 0y; o conjunto imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre 0y, na direção 0x.

Assim:



12.4. INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES EXPONENCIAL E LOGARITMO

Nos capítulos anteriores estudamos a parte *operacional* das potências e dos logaritmos, onde aprendemos que, fixado como base um número real **a**, **positivo** e **diferente de 1**, temos:

1º) para cada **x** real, o número a^x existe e tem valor único;

2º) para cada **x** real positivo, o número $\log_a x$ existe e tem valor único.

Essas duas afirmações nos mostram a possibilidade de tratar as potências e os logaritmos sob o ponto de vista da teoria das funções, pois a idéia básica na definição de função é *a cada elemento x de um dado conjunto A corresponder um único elemento f(x) de um dado conjunto B.*

A partir disso surgem, então, as definições de **função exponencial** e **função logaritmo.**

12.5. FUNÇÃO EXPONENCIAL

Seja **a** um número real **positivo** e **diferente de 1**. Chama-se função **exponencial de base a** a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = a^x$$

O **domínio** da função exponencial é $\mathbb{R}$.

O **contradomínio** é também $\mathbb{R}$.

Exemplos

a) A função definida por $f(x) = 5^x$ é a *função exponencial de base 5.*

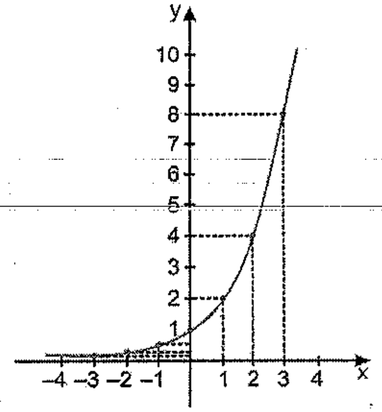
b) A função definida por $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ é a *função exponencial de base 0,2.*

12.6. GRÁFICOS DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Examinemos, inicialmente, dois exemplos:

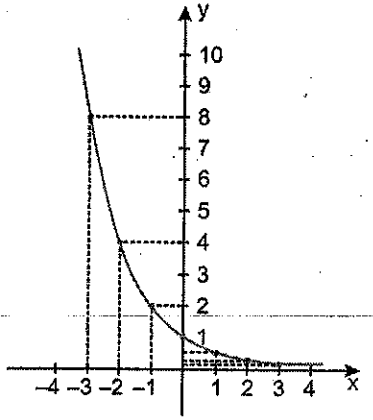
a) gráfico da função $f(x) = 2^x$

x	y
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



b) gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	y
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Observemos, nesses dois exemplos, que:

1º) os gráficos não têm ponto em comum com o eixo 0x e cortam o eixo 0y no ponto (0; 1);

2º) os gráficos estão *inteiramente* localizados "acima" do eixo 0x. O conjunto imagem dessas funções é $\mathbb{R}_+^*$.

Esses dois fatos são facilmente generalizados para a função exponencial de base a (pois, para todo a positivo e diferente de 1, temos $a^0 = 1$ e $a^x > 0$, qualquer x real):

O ponto (0; 1) pertence ao gráfico da função exponencial.
O conjunto imagem da função exponencial é

$$I(f) = \mathbb{R}_+^*$$

Devemos ainda notar (veja as definições do quadro abaixo) nesses exemplos que a função $f(x) = 2^x$ é **crescente em** $\mathbb{R}$, enquanto que $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é **decrescente em** $\mathbb{R}$; esses comportamentos opostos se devem ao fato de que as **potências de base maior que 1 crescem** com o aumento do expoente, ao passo que **as potências de base entre 0 e 1 decrescem** com o aumento do expoente; assim, ao fazermos um expoente x_1 "crescer" para um valor x_2, teremos:

Função crescente
Função descrescente

Sejam uma função f, de domínio A, e I um subconjunto de A ($I \subset A$)
f se diz **crescente em I** se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$:

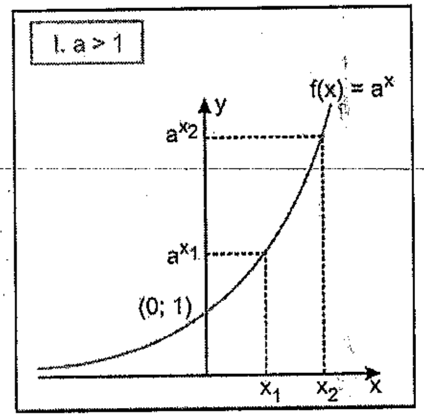
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

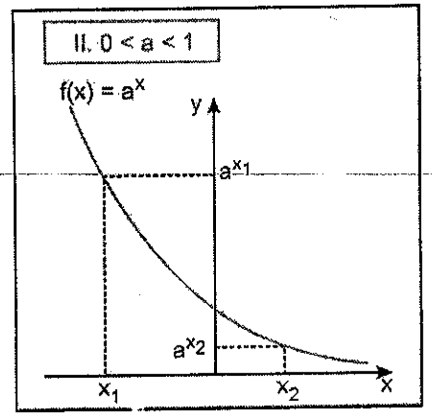
f se diz **descrente em I** se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in I$:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} 2^{x_1} < 2^{x_2} \text{ (por exemplo, } 2^3 < 2^5) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \left(\text{por exemplo, } \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) \end{cases}$$

Com isso, podemos resumir graficamente o comportamento da *função exponencial* $f(x) = a^x$:





Nesses gráficos confirmamos que, se a > 1, **f(x) = a^x é crescente** em $\mathbb{R}$ e, se 0 < a < 1, **f(x) = a^x é decrescente** em $\mathbb{R}$, ou seja:

$a > 1$	$x_1 < x_2$	$\Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
$0 < a < 1$	$x_1 < x_2$	$\Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

12.7. INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

A classificação das funções exponenciais em crescente ou decrescente por si só nos ensina a resolver *inequações exponenciais*, isto é, inequações em que a incógnita comparece no expoente.

Analisando o quadro acima, vemos que:

1º) *quando a base é maior que 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes.*

Exemplos

a) se $2^x < 2^5$, então $x < 5$

b) se $\left(\sqrt{5}\right)^x > \left(\sqrt{5}\right)^{-2}$, então $x > -2$

2º) *quando a base está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes.*

Exemplos

c) se $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^5$, então $x > 5$

d) se $\left(\frac{7}{10}\right)^x > \left(\frac{7}{10}\right)^\pi$, então $x < \pi$

Exercícios Resolvidos

12.1) Resolva a inequação $5^x < 25^{2x-1}$

Solução

Escrevemos $5^x < 5^{2(2x-1)}$; como a base é *maior que 1*, temos:

$$5^x < 5^{4x-2} \Rightarrow x < 4x-2 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\right\}$

12.2) Resolva a inequação $(0,73)^{2x} \geq \sqrt[3]{0,73}$

Solução

Escrevemos $(0,73)^{2x} \geq (0,73)^{\frac{1}{3}}$; como a base *está entre 0 e 1*, temos:

$$(0,73)^{2x} \geq (0,73)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 2x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \leq \frac{1}{6}$$

Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{1}{6}\right\}$

12.3) Resolva a inequação $125 < 5^x < 127$

Solução

Escrevemos $5^3 < 5^x < 5^{\log_5 127}$; como a base é *maior que 1*, vem:

$$3 < x < \log_5 127$$

Não dispondo da **Tábua de Logaritmos**, respondemos

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < \log_5 127\}$$

mas, com a fórmula de mudança de base e o *auxílio da Tábua* podemos calcular $\log_5 127$:

$$\log_5 127 = \frac{\log 127}{\log 5} = \frac{2,1038}{0,6990} = 3,0099$$

e responder que:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 3,0099\}$

12.4) Resolva a inequação $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 \geq 0$

Solução

Fazemos, nesse caso, uma *mudança de variável*

$$2^x = y$$

obtendo, assim, uma *inequação do 2º grau*

$$2y^2 - 5y + 2 \geq 0$$

Calculamos, então, as raízes e estudamos os sinais do trinômio $2y^2 - 5y + 2$:

Vemos que os valores que satisfazem são:

$$y \leq \frac{1}{2} \text{ ou } y \geq 2$$

como $y = 2^x$, vem

$$2^x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } 2^x \geq 2$$

e daí obtemos:

$$2^x \leq 2^{-1} \Rightarrow x \leq -1$$

ou

$$2^x \geq 2^1 \Rightarrow x \geq 1$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \vee x \geq 1\}$

12.5) Resolva a inequação $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 8 < 0$

Solução

Escrevemos, inicialmente:

$$3^{2x} - 2 \cdot 3 \cdot 3^x + 8 < 0$$

que é o mesmo que

$$3^{2x} - 6 \cdot 3^x + 8 < 0$$

Fazendo $3^x = y$, vem a inequação do 2º grau:

$$y^2 - 6y + 8 < 0$$

Calculando as raízes e estudando os sinais do trinômio, temos:

onde $2 < y < 4$
Como $y = 3^x$ vem

$$2 < 3^x < 4$$

e escrevemos:

$$3^{\log_3 2} < 3^x < 3^{\log_3 4}$$

Portanto, $\log_3 2 < x < 2\log_3 2$

Calculando $\log_3 2$ com o auxílio da Tábua:

$$\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3010}{0,4771} = 0,6309$$

Assim, $0,6309 < x < 2 \cdot 0,6309$ e $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0,6309 < x < 1,2618\}$

12.6) Sendo x um real tal que x > 1, resolva a inequação:

$$(x-1)^5 > (x-1)^{13}$$

Solução

Ao observarmos que

$$5 < 13 \text{ e } (x-1)^5 > (x-1)^{13}$$

lembramos que a relação de desigualdade entre os expoentes é o **contrário** da relação de desigualdade entre as potências **somente quando a base está entre 0 e 1** (item 12.5). Podemos, então, escrever:

$$0 < x - 1 < 1$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

12.7) Sendo **a** um número real positivo e diferente de 1, resolva a inequação:

$$a^{2x-1} < a^{x+6}$$

Solução

Como não sabemos se a base **a** é maior do que 1 ou está entre 0 e 1, devemos estudar ambas as possibilidades:

1) $\boxed{a > 1}$ Nesse caso, temos:

$a^{2x-1} < a^{x+6} \Rightarrow 2x - 1 < x + 6 \Rightarrow x < 7$

e $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7\}$

2) $\boxed{0 < a < 1}$ Nesse caso, temos:

$a^{2x-1} < a^{x+6} \Rightarrow 2x - 1 > x + 6 \Rightarrow x > 7$

e $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

Exercícios Propostos

12.8) Classifique as funções abaixo em crescentes ou decrescentes

a) $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

b) $f(x) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^{-x}$

c) $f(x) = \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right]^x$

d) $f(x) = \left(\log_3 \sqrt{13}\right)^x$

12.9) Resolva as inequações:

a) $3^{3x+2} < 3^{2x+3}$

b) $(0,3)^{x-1} < (0,3)^{2x}$

c) $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \sqrt[3]{4}$

d) $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2} \le \left(\frac{49}{25}\right)^{6-4x}$

e) $2^{\frac{x+1}{x-1}} \ge \sqrt{2}$

12.10) Resolva as inequações (utilize a Tábua de Logaritmos, se necessário)

a) $2^x \ge 5$

b) $27 < 9^x < 41$

c) $(0,13)^2 < 2^x < 130^{\frac{1}{2}}$

12.11) Determine o domínio das seguintes funções (utilize a Tábua, se necessário)

a) $f(x) = \sqrt{4^x - 5 \cdot 2^x + 4}$

b) $f(x) = \sqrt{-\left(5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5\right)}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3^{-2x} - 8 \cdot 3^{-x} + 15}}$

12.12) Resolva as inequações:

a) $(2x-3)^{10} > (2x-3)^6$, sendo $x > \frac{3}{2}$

b) $(x^2-8)^{13} \ge (x^2-8)^{17}$, sendo $x^2 - 8 > 0$

12.13) Sendo **a** um número real positivo e diferente de 1, resolva as inequações:

a) $a^{x^2} < a^9$

b) $3 \cdot a^{2x} - 10 \cdot a^x + 3 \le 0$

12.14) Sendo $x > 0$, resolva a inequação $x^{x^2} > x^{5x}$

12.15) Discuta, segundo os valores reais de a, as inequações

a) $2^x > \alpha$

b) $2^x < \alpha$

12.8. FUNÇÃO LOGARITMO

Seja a um número real **positivo** e **diferente de 1. Chama-se função logaritmo de base a** a função f, de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \log_a x$$

O **domínio** da função logaritmo é $\mathbb{R}_+^*$.

O **contradomínio** é $\mathbb{R}$.

Exemplos

a) A função definida por f(x) = log x é a *função logaritmo de base 10.*

b) A função definida por f(x) = $\log_{\frac{1}{3}} x$ é a *função logaritmo de base* $\frac{1}{3}$.

Exercícios Resolvidos

12.16) Determine o domínio da função f(x) = $\log_7 (2x-26)$

Solução

Para a existência do logaritmo, devemos ter logaritmando positivo, ou seja

$$2x - 26 > 0$$

onde x > 13

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 13\}$

12.17) Determine o domínio da função f(x) = $\log_{4-3x} 123$.

Solução

Para a existência do logaritmo, devemos ter a base positiva e diferente de 1, ou seja

$$4 - 3x > 0 \quad e \quad 4 - 3x \neq 1$$

onde $x < \frac{4}{3}$ e $x \neq 1$

Logo, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{4}{3} \text{ e } x \neq 1\right\}$

12.18) Determine o domínio da função

$$f(x) = \log_{x-2} (5x - x^2)$$

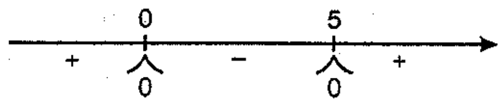
Solução

Nesse caso devemos impor as condições de existência para logaritmando e base, isto é, devemos ter, simultaneamente:

$$\begin{cases} 5x - x^2 > 0 & (I) \\ x - 2 > 0 & (II) \\ x - 2 \neq 1 & (III) \end{cases}$$

Resolvemos cada uma delas e fazemos a *interseção* dos resultados:

(I) $5x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 5x < 0$



Onde 0 < x < 5

(II) $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

(III) $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$

Fazendo a interseção das três condições obtemos

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5 \text{ e } x \neq 3\}$

Exercícios Propostos

12.19) Determine o domínio das seguintes funções:

a) f(x) = log (3x − 1)

b) f(x) = $\log_3 x^2$

c) f(x) = $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(3+x)$

d) f(x) = $\log_{\frac{1}{2}}[(x+2)(3+x)]$

e) f(x) = $\dfrac{\log_3 (x+2)}{\log_5 (3-x)}$

f) f(x) = log (5 − 25^x)

12.20) Determine o domínio das seguintes funções:

a) f(x) = $\log_{2x+5} 5$

b) f(x) = $\log_{x^2-1} x$

c) f(x) = $\log_{3x-4} (x^2 - 9)$

d) f(x) = $\log_{12-x^2} (2x-6)$

e) f(x) = $\log_{x^2-2} (3 - x^2)$

12.9. INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Para aprendermos as *regras* de resolução de inequações que envolvem logaritmos, lembremos inicialmente a definição

$$a^x = X \iff x = \log_a X$$

Do estudo da função exponencial, temos as equivalências:

I. a > 1 $\quad x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$

II. 0 < a < 1 $\quad x_1 < x_2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$

Representando a^{x_1} e a^{x_2}, respectivamente, por X_1 e X_2, temos as equivalências

$$a^{x_1} = X_1 \Leftrightarrow x_1 = \log_a X_1$$
$$a^{x_2} = X_2 \Leftrightarrow x_2 = \log_a X_2$$

Fazendo essas substituições em I e II, obtemos:

I. $a > 1 \Rightarrow \log_a X_1 < \log_a X_2 \Leftrightarrow X_1 < X_2$

II. $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a X_1 < \log_a X_2 \Leftrightarrow X_1 > X_2$

A observação desse último quadro nos mostra que:

1º) *quando a base é maior que 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se mantém entre os logaritmandos.*

2º) *quando a base está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre os logaritmos se inverte entre os logaritmandos.*

Notamos, então, que essas *regras* são basicamente as mesmas das inequações exponenciais. No entanto, é muito importante lembrar que a exponencial, tendo domínio $\mathbb{R}$, *não exige condição de existência*, o que já não ocorre com a função logaritmo, cujo domínio é $\mathbb{R}_+^*$. Assim, é fundamental que nas resoluções de inequações logarítmicas o ponto de partida seja a determinação dessas condições.

Exercícios Resolvidos

12.21) Resolva a inequação $\log_5 (2x - 3) < \log_5 7$

Solução

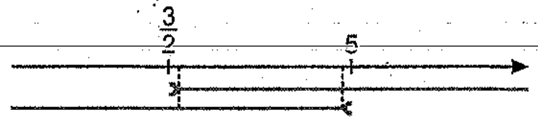
Estabelecemos, inicialmente, a *condição de existência*:

$2x - 3 > 0$, onde $x > \frac{3}{2}$ (I)

Observando, agora, que a base é **maior que 1**, temos as implicações:

$\log_5 (2x-3) < \log_5 7 \Rightarrow 2x - 3 < 7 \Rightarrow x < 5$ (II)

Comparando as condições (I) e (II), vem:



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 5 \right\}$$

12.22) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{3}} (8 - 2x) \geq 3$.

Solução

Temos a *condição de existência* $8 - 2x > 0$, onde $x < 4$ (I)

Escrevendo o número 3 como $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3$, e observando que a base está entre 0 e 1, vem:

$\log_{\frac{1}{3}} (8-2x) \geq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \Rightarrow 8 - 2x \geq \frac{1}{27} \Rightarrow x \leq \frac{215}{54}$ (II)

Das condições (I) e (II) temos

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{215}{54} \right\}$$

12.23) Resolva a inequação $\log_{12} (x - 1) + \log_{12} (x - 2) \leq 1$

Solução

As condições de existência são:

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

prevalecendo, portanto, $x > 2$ (I)

Para podermos, agora, resolver a inequação, transformamos o primeiro membro num só logaritmo e o número 1 em $\log_{12} 12$. Então:

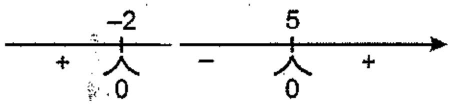
$$\log_{12} \left[(x-1)\cdot(x-2)\right] \leq \log_{12} 12$$

Como a base é **maior que 1**, vem

$$(x-1)(x-2) \leq 12$$

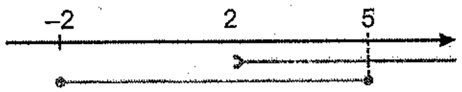
e daí $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

Calculando as raízes e estudando os sinais, temos



$-2 \leq x \leq 5$ (II)

De (I) e (II):



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$

12.24) Resolva a inequação $\log_{x+4} 3 > \log_{x+4} 7$

Solução

Neste caso, basta observarmos que

$$3 < 7 \text{ e } \log_{x+4} 3 > \log_{x+4} 7$$

e lembrarmos que a relação de desigualdade entre os logaritmandos é *contrária* à relação de desigualdade entre os logaritmos *somente quando a base está entre 0 e 1.*

Assim, escrevemos

$$0 < x + 4 < 1$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3\}$

(Note-se que, ao impormos $0 < x + 4 < 1$, automaticamente está garantida a condição de existência da base: positiva e diferente de 1.)

12.25) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 8 - 7\log_x \frac{1}{2}$.

Solução

As condições de existência são $x > 0$ e $x \neq 1$ (I)

Fazendo a mudança de variável $\log_{\frac{1}{2}} x = y$,

temos que $\log_x \frac{1}{2} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} = \frac{1}{y}$,

e a inequação fica:

$$y \geq 8 - \frac{7}{y}$$

que é o mesmo que

$$\frac{y^2 - 8y + 7}{y} \geq 0$$

Calculando as raízes do numerador A e do denominador B e estudando seus sinais:

y	−∞	0	1	7	+∞
A	++++	++	⌀ −−−−−−−−	⌀ ++++	
B	−−−−	⌀ ++	+++++++	++++	
$\frac{A}{B}$	−−−−	+++	⌀ −−−−−−−−	⌀ ++++	

Então, $0 < y \leq 1$ ou $y \geq 7$

Como $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, temos

$$0 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq 1 \quad \text{ou} \quad \log_{\frac{1}{2}} x \geq 7$$

e escrevemos

$$\log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

Como a base está entre 0 e 1:

$1 > x \geq \frac{1}{2}$ ou $x \leq \frac{1}{128}$ (II).

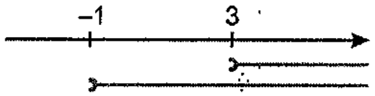
Das condições (I) e (II), vem

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{128} \vee \frac{1}{2} \leq x < 1\right\}$

12.26) Resolva a inequação, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$: $\log_a (2x - 6) < \log_a (x + 1)$

Solução

As condições de existência são:



$$\begin{cases} 2x - 6 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$

prevalecendo $x > 3$ (I)

Como não sabemos se a base a é maior que 1 ou está entre 0 e 1, devemos examinar ambas as possibilidades:

1ª) $a > 1$ Nesse caso, temos:

$\log_a (2x - 6) < \log_a (x + 1) \Rightarrow 2x - 6 < x + 1 \Rightarrow x < 7$ (II)

Das condições (I) e (II):

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 7\}$

2ª) $0 < a < 1$ Nesse caso, temos:

$\log_a (2x - 6) < \log_a (x + 1) \Rightarrow 2x - 6 > x + 1 \Rightarrow x > 7$ (III)

Das condições (I) e (III):

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

12.27) Determine o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (\log_3 x)}$$

Solução

Para obtermos o domínio dessa função, devemos resolver a inequação

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \geq 0$$

Condições de existência:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x > 0 \Rightarrow \log_3 x > \log_3 1 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

prevalecendo $x > 1$ (I)
Para resolvermos, agora, a inequação, escrevemos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) \geq \log_{\frac{1}{2}} 1$$

e tiramos

$$\log_3 x \leq 1$$

que é o mesmo que

$$\log_3 x \leq \log_3 3$$

e daí $x \leq 3$ (II)
De (I) e (II), vem
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$

12.28) Resolva a inequação

$$3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+8)} > \frac{1}{3}$$

Solução

Condição de existência: $x^2 - 5x + 8 > 0$
Como $\Delta = -7 < 0$, o trinômio é *positivo para todo x real.*
Escrevemos agora

$$3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+8)} > 3^{-1}$$

Como a **base das potências** é maior que 1, tiramos

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 8) > -1$$

isto é o mesmo que

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 8) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

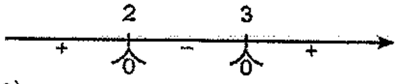
Como a **base dos logaritmos** está entre 0 e 1, vem

$$x^2 - 5x + 8 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

isto é,

$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Finalmente, temos



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

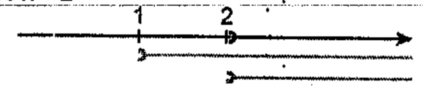
12.29) Resolva a inequação (onde $x > 0$ e $x \neq 1$): $x^{\log_2 x} > x$

Solução

Devemos examinar duas possibilidades: $x > 1$ ou $0 < x < 1$.

1ª) $x > 1$ Nesse caso, temos:

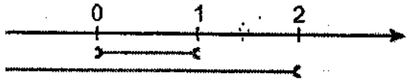
$x^{\log_2 x} > x^1 \Rightarrow \log_2 x > 1$; isto é o mesmo que $\log_2 x > \log_2 2$;
portanto, temos $x > 2$



Logo, $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

2ª) $0 < x < 1$ Nesse caso, temos:

$x^{\log_2 x} > x^1 \Rightarrow \log_2 x < 1$; isto é o mesmo que $\log_2 x < \log_2 2$;
portanto temos $x < 2$



Logo, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

Finalmente, $S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

Outro modo. Podemos resolver essa inequação tomando o logaritmo de ambos os membros na base 2; como essa base é maior que 1, a desigualdade mantém o seu sentido. Assim:

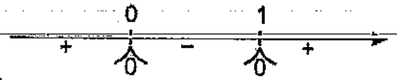
$$x^{\log_2 x} > x \Rightarrow \log_2\left(x^{\log_2 x}\right) > \log_2 x$$

e agora, escrevemos

$$\log_2 x \cdot \log_2 x > \log_2 x$$

Fazendo a mudança de variável $\log_2 x = y$, vem a inequação

$$y^2 - y > 0$$



e daí, $y < 0$ ou $y > 1$
Como $y = \log_2 x$

$$\log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x > 1$$

e daí:

$$\log_2 x < \log_2 1 \text{ ou } \log_2 x > \log_2 2$$

onde $x < 1$ ou $x > 2$
Levando em conta a condição de existência $x > 0$, vem, finalmente

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \vee x > 2\}$$

Exercícios Propostos

12.30) Dê o valor verdadeiro (V) ou falso (F) às sentenças:

a) $\log_2 27 > \log_2 19$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 27 > \log_{\frac{1}{2}} 19$

c) $\log_{0,7} \pi > \log_{0,7} \sqrt{10}$

d) $\log_5 x > \log_5 7 \Leftrightarrow x > 7$

e) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 7 \Leftrightarrow x < 7$

f) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 7 \Leftrightarrow x < 7$

12.31) Resolva as inequações:

a) $\log_2 (x-3) > \log_2 7$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (2x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}} (x+3)$

c) $\log_3(x^2-4x) < \log_{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{5}\right)$

d) $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-13\right) \geq -1$

e) $\log_3 (x+1)^2 < 2$

12.32) Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{\log(x-3)}$

b) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} x + 3}$

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{5}}\left[\log_3\left(x^2-3\right)\right]$

d) $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \log_2 (2-x)$

e) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} \log_4 x^2}$

12.33) Resolva as inequações:

a) $\log(x+2) + \log(x+3) > \log 12$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (x+2) - \log_{\frac{1}{2}} (x+3) \leq -1$

c) $\log_5 x \cdot \log_5 x^2 - 18 > 0$

d) $\left(\log_{\sqrt{2}} x\right)^2 - 4\log_2 x - 24 \leq 0$

12.34) Resolva as inequações

a) $\log_{\frac{1}{3}} x - 3\log_x 3 + 4 > 0$

b) $\log_2 (x-1) \leq 3 + 10 \cdot \log_{x-1} 2$

12.35) Resolva as inequações:

a) $\log_{x^2-8} 11 < \log_{x^2-8} 21$

b) $\log_{x^2-2} 23 \leq \log_{x^2-2} 13$

12.36) Sendo a um número real positivo e diferente de 1, resolva:

a) $\log_a (3x-5) > 0$

b) $\log_a (3x-2) \geq \log_a (3-2x)$

12.37) Resolva as inequações:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+4\right) < \frac{1}{25}$

b) $x^{\log_{\frac{1}{10}}(x-2)} > \frac{1}{x}$

c) $x^{\log_3 x} > x^2$

d) $x^{\log_3 x} \geq 27x^2$

12.38) Sendo $x > 0$, $x \neq 1$, $a > 0$ e $a \neq 1$, resolva a inequação em x

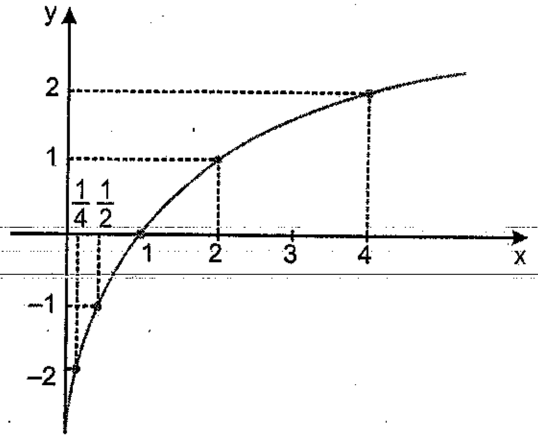
$$x^{\log_a x} \leq a$$

12.10. GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARITMO

Examinemos, inicialmente, dois exemplos:

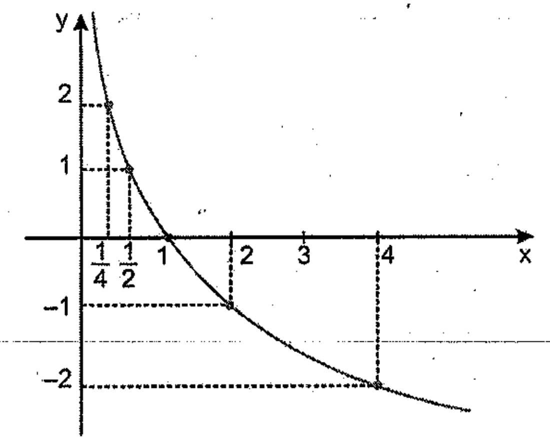
a) gráfico da função f(x) $\log_2 x$

x	y
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2



b) gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2



Observemos, nesses dois exemplos, que:

1º) os gráficos não têm ponto em comum com o eixo 0y e cortam o eixo 0x no ponto (1; 0)

2º) os gráficos estão *inteiramente* localizados "à direita" do eixo 0y; vemos que as funções podem assumir um valor real qualquer. O conjunto imagem dessas funções é $\mathbb{R}$.

Esses dois fatos são facilmente generalizados para a função logaritmo de base a (pois, para todo a positivo e diferente de 1, temos $\log_a 1 = 0$, e sabemos que $\log_a x$ pode assumir qualquer valor real):

O ponto (1; 0) pertence ao gráfico da função logaritmo.
O conjunto imagem da função logaritmo é

$$I(f) = \mathbb{R}$$

Notamos, agora, no gráfico de $f(x) = 2^x$ a confirmação da equivalência vista em 6.9.

$$a > 1: \; x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

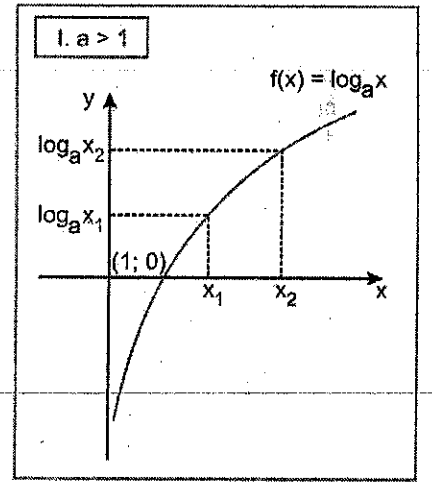
Verificamos, então, que a **função logaritmo de base maior que 1 é crescente.**

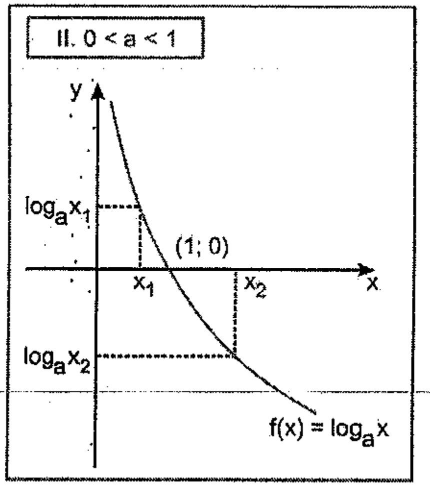
Da mesma forma, o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nos confirma que

$$0 < a < 1: \; x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

e, portanto, a **função logaritmo de base entre 0 e 1 é decrescente.**

Com isto, podemos resumir graficamente o comportamento da *função logaritmo* $f(x) = \log_a x$:





Exercícios Propostas

12.39) Classifique as funções abaixo em crescente ou decrescente:

a) $f(x) = \log_{\pi} x$

b) $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} x$

c) $f(x) = \log_{(0,8)^2} x$

d) $f(x) = \ell n\, x$

12.40) Construa os gráficos das funções:

a) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

b) $f(x) = 3^{-x}$

c) $f(x) = \log_3 x$

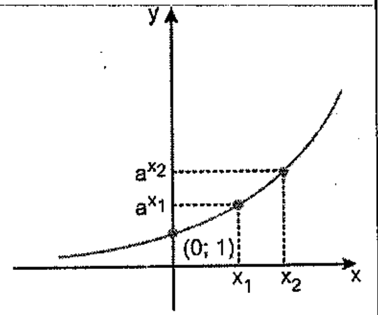
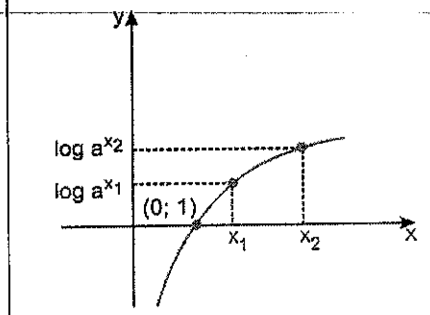
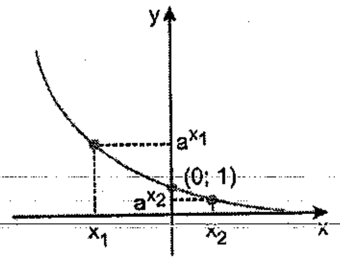
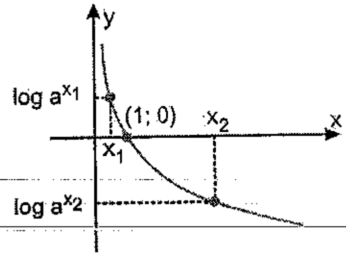
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Capítulo 13

Construção de gráficos

13.1. UM RESUMO

Vamos, inicialmente, fazer uma revisão dos conceitos fundamentais que envolvem as funções *exponencial e logaritmo*, através do seguinte resumo:

	FUNÇÃO EXPONENCIAL $f(x) = a^x$	FUNÇÃO LOGARITMO $f(x) = \log_a x$
$a > 1$	 $D(f) = \mathbb{R}$ $I(f) = \mathbb{R}_+^*$ f é crescente em $\mathbb{R}$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$	 $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ $I(f) = \mathbb{R}$ f é crescente em $\mathbb{R}_+^*$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$
$0 < a < 1$	 $D(f) = \mathbb{R}$ $I(f) = \mathbb{R}_+^*$ f é decrescente em $\mathbb{R}$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$	 $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ $I(f) = \mathbb{R}$ f é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$ $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

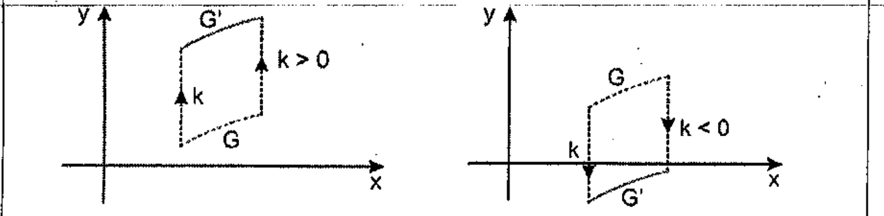
13.2. CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

De modo geral, a construção do gráfico de uma função definida por $y = f(x)$ pode ser feita através de uma *tabela* na qual são atribuídos alguns valores particulares a x e determinados os correspondentes valores de **y**. No entanto, conhecidos os gráficos fundamentais das funções exponencial e logaritmo, com algumas *regras* de **transformações no gráfico de uma função**, podemos, a partir daqueles, construir os gráficos de muitas outras funções.

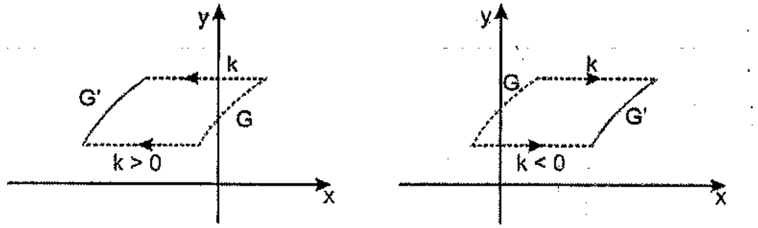
Vamos enunciar algumas dessas regras.

Seja G o gráfico da função definida por $y = f(x)$ e seja $k \neq 0$ uma constante real.

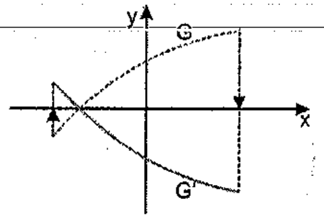
1ª) O gráfico G' da função $y = f(x) + k$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Oy *"para cima", se k é positivo, ou "para baixo", se k é negativo.*



2ª) O gráfico G' da função $y = f(x + k)$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma *translação de k unidades*, na direção Ox, *"para a esquerda", se k é positivo, ou "para a direita", se k é negativo.*

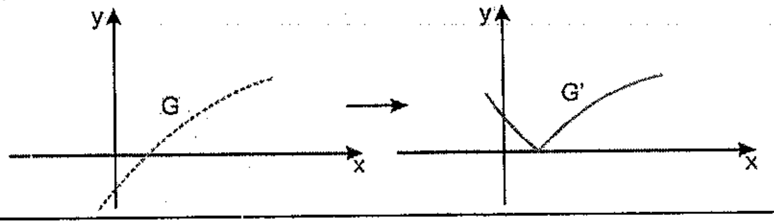


3ª) O gráfico G' da função $y = -f(x)$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma *reflexão em relação ao eixo Ox.*



Nota: de modo análogo, o gráfico G' da função $y = f(-x)$ pode ser obtido fazendo-se G sofrer uma *reflexão em relação ao eixo Oy.*

4ª) O gráfico G' da função $y = |f(x)|$ pode ser obtido a partir de G, fazendo *a parte que está abaixo do eixo Ox sofrer uma reflexão em relação a Ox.*

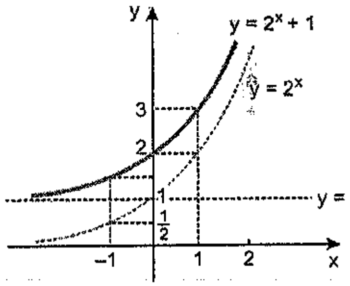


Exercícios Resolvidos

13.1) Esboce o gráfico da função $f(x) = 2^x + 1$.

Solução

Basta construirmos o gráfico de 2^x e, pela *1ª regra de transformação*, deslocá-lo 1 unidade "para cima".

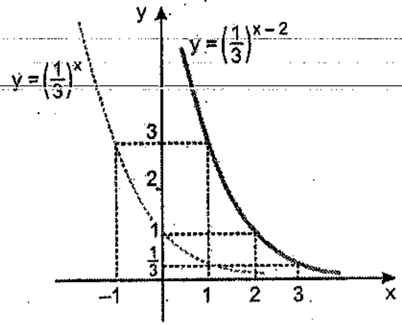


Note que $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$

13.2) Esboce o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$.

Solução

Esboçaremos, primeiramente, o gráfico de $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e, em seguida, usando a *2ª regra de transformação*, deslocaremos esse gráfico 2 unidades para a direita.

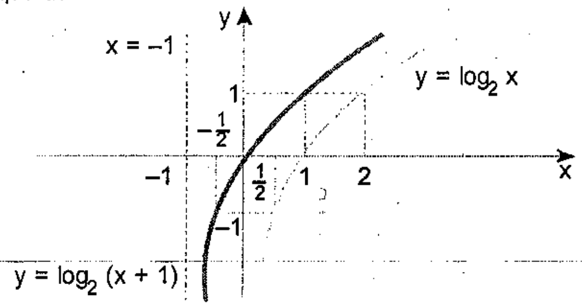


Note que $I(f) = \mathbb{R}_+^*$

13.3) Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_2 (x + 1)$.

Solução

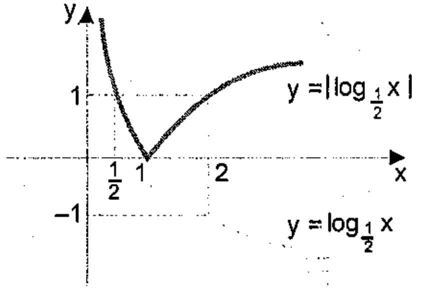
Notemos inicialmente que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$
Esboçamos, a seguir, o gráfico de $\log_2 x$ e, depois, deslocamos 1 unidade para a esquerda.



13.4) Esboce o gráfico da função $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$.

Solução

Esboçaremos, inicialmente, o gráfico de $\log_{\frac{1}{2}} x$; em seguida, pela *4ª regra* enunciada, faremos a parte do gráfico que se encontra abaixo do eixo Ox sofrer uma reflexão em torno desse eixo.



13.5) Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_3 |x|$

Solução

Notemos que $D(f) = \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
Utilizando a definição de módulo, escrevemos

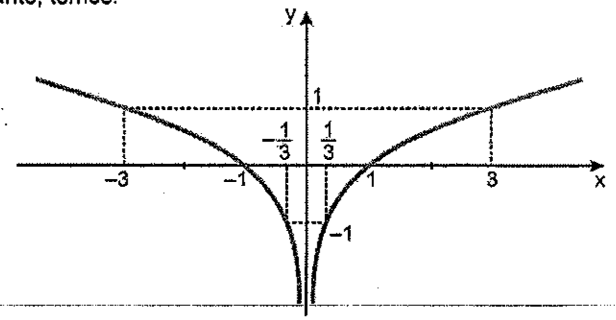
$$f(x) = \log_3 |x| = \begin{cases} \log_3 x, & \text{se } x > 0 \\ \log_3 (-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A observação desse quadro nos leva às seguintes conclusões:

1º) Nos pontos correspondentes a $x > 0$, temos o próprio gráfico de $\log_3 x$.

2º) Nos pontos correspondentes a $x < 0$, devemos construir o gráfico de $\log_3 (-x)$; para isso, a observação feita na *3ª regra* nos diz que basta fazermos o gráfico de $\log_3 x$ sofrer uma reflexão em relação ao eixo Oy.

Portanto, temos:



Exercícios Propostos

13.6) Esboce os gráficos das funções:
a) $f(x) = 2^{x+1}$
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$
c) $f(x) = \log_2 x + 1$
d) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$

13.7) Esboce os gráficos das funções:
a) $f(x) = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$
b) $f(x) = -|\log_2 x|$
c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$

13.8) Determine o conjunto imagem das funções:
a) $f(x) = 2^x - 2$
b) $f(x) = 3^x + \pi$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x - \sqrt{5}$

13.9) Esboce o gráfico da função: $f(x) = \left|\log_2 |x|\right|$

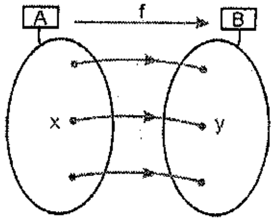
13.10) Esboce o gráfico da função: $f(x) = \left|\log_{\frac{1}{2}} (x - 1)\right| + 1$

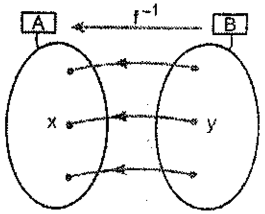
Capítulo 14

Exponencial e logaritmo: funções inversas

14.1. O CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA

Uma função f, de A em B, define uma correspondência que, a cada x em A associa um único y em B. Se f é tal que, *a cada* $y \in B$ *existe em correspondência um único* $x \in A$, isto é, se *todo* elemento de B é imagem de *um só* elemento de A, f se diz uma função **bijetora**. Pode-se, nessas condições, definir uma *função de B em A*, indicada por f^{-1}, para a qual, se $(x; y) \in f$, então $(y; x) \in f^{-1}$





A função f^{-1}, de B em A, é chamada **inversa de f.**
Note-se que:

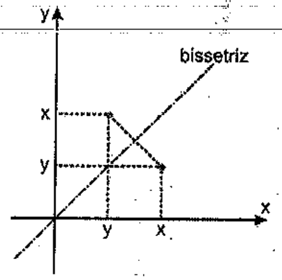
1º) só existe f^{-1} se f é bijetora

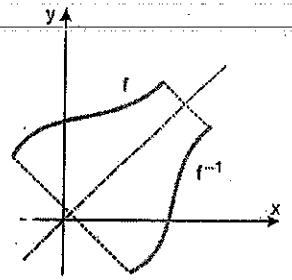
2º) se f é bijetora, seu conjunto imagem é o próprio contradomínio

3º) $D(f) = I(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = I(f)$

4º) Se o ponto de coordenadas (x; y) pertence ao gráfico de f, o ponto de coordenadas (y; x) pertence ao gráfico de f^{-1}. Como (x; y) e (y; x) são pontos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, conclui-se que:

Os gráficos da função f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.





Lembremos, agora, o processo de cálculo da expressão que define a função inversa.

Seja a função f, *invertível*, definida pela fórmula:

$$y = f(x)$$

Para se obter a expressão que define f^{-1},

1°) isola-se x no primeiro membro da fórmula;

2°) troca-se a letra x pela letra y e a letra y pela letra x.

Exemplo

Calculemos a expressão que define a função inversa de f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

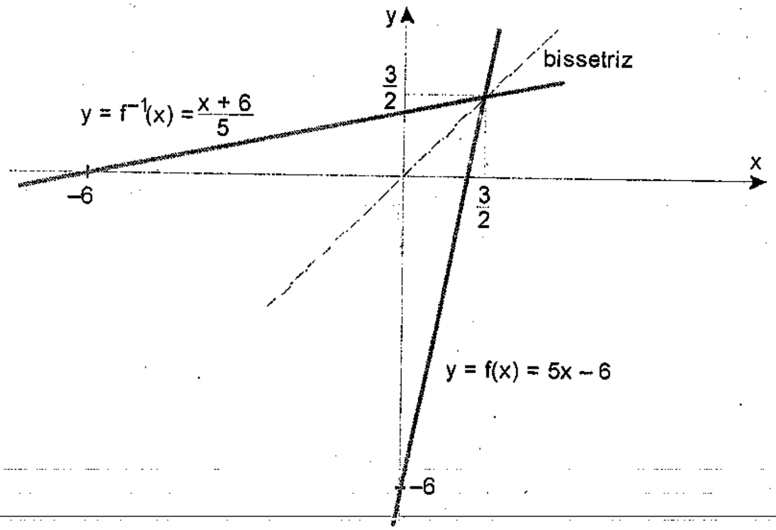
$$y = f(x) = 5x - 6$$

1°) Isolamos x: $y = 5x - 6 \Rightarrow 5x = y + 6 \Rightarrow x = \frac{y+6}{5}$

2°) (troca das letras): $y = \frac{x+6}{5}$

Então, a função f^{-1} de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é definida por

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x+6}{5}$$



14.2. LOGARITMO E EXPONENCIAL: FUNÇÕES INVERSAS

Consideremos as definições:

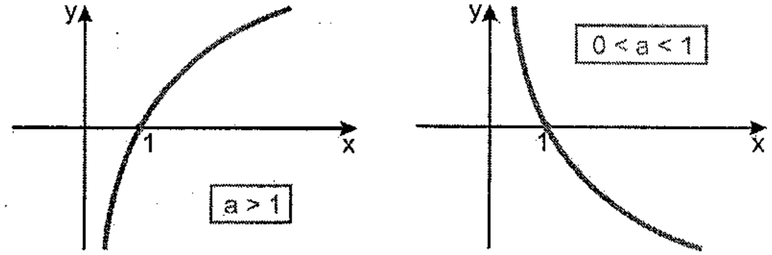
1°) *Função exponencial*:

$$f, \text{ de } \mathbb{R} \text{ em } \mathbb{R}_+^*, \text{ definida por } y = f(x) = a^x$$

2°) *Função logaritmo*:

$$f, \text{ de } \mathbb{R}_+^* \text{ em } \mathbb{R}, \text{ definida por } y = f(x) = \log_a x$$

Analisando os gráficos da função logaritmo



notamos que $f(x) = \log_a x$ é bijetora e, portanto, invertível. Vamos calcular sua inversa.

1°) (isolar x) temos $y = \log_a x$; da definição de logaritmo, vem

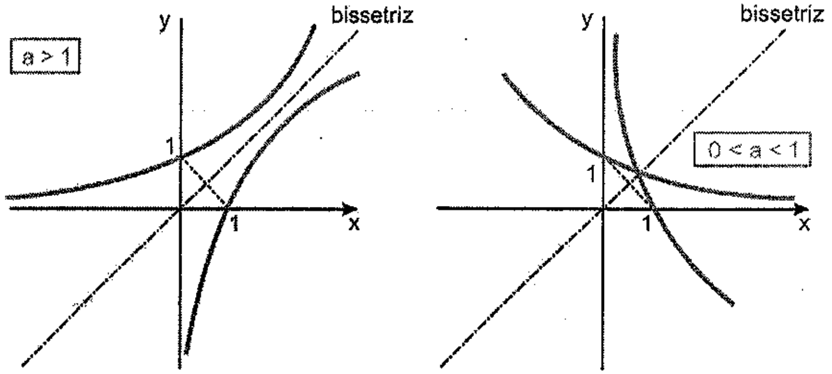
$$x = a^y$$

2°) (troca das letras): $y = a^x$

Então, temos que **a função inversa da função logaritmo de base a é a função exponencial de base a**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$ dada por

$$f^{-1}(x) = a^x$$

Podemos observar os gráficos:



Exemplos

a) A expressão que define a inversa da função dada por $y = f(x) = \log_5 x$ é $y = f^{-1}(x) = 5^x$

b) A inversa de $y = f(x) = \left(\frac{13}{5}\right)^x$ é $y = f^{-1}(x) = \log_{\frac{13}{5}} x$.

Exercícios Resolvidos

14.1) Determine a expressão que define a inversa da função $y = f(x) = \log_3 (x - 2)$.

Solução

1º) isolamos x: $y = \log_3 (x-2) \Rightarrow 3^y = x - 2$ onde $x = 3^y + 2$

2º) trocamos as letras: $y = 3^x + 2$

Então, $y = f^{-1}(x) = 3^x + 2$.

14.2) Determine a expressão que define a inversa da função $y = f(x) = 2^{x-1}$.

Solução

1º) $y = 2^{x-1} \Rightarrow x - 1 = \log_2 y$

onde $x = 1 + \log_2 y$

2º) (troca das letras): $y = 1 + \log_2 x = f^{-1}(x)$

14.3) Determine a expressão que define a inversa da função: $f(x) = 3^x - 3^{-x}$

Solução

Temos $y = 3^x - 3^{-x}$ e, nesse caso, não conseguimos isolar x de modo imediato, como fizemos no exercício anterior. Fazemos, então, o seguinte: Primeiramente, *a mudança de variável* $3^x = \alpha$ (note que devemos ter, necessariamente, $\alpha > 0$). Resulta

$$y = \alpha - \frac{1}{\alpha}$$

que podemos escrever $\alpha^2 - y\alpha - 1 = 0$. Resolvendo essa equação do segundo grau em α:

$\Delta = y^2 + 4$ (é positivo para todo $y \in \mathbb{R}$)

$$\alpha = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$$

Obtemos dois valores de α, em função de y:

$$\alpha_1 = \frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2} \quad e \quad \alpha_2 = \frac{y - \sqrt{y^2+4}}{2}$$

Como $4 > 0$, tem-se

$$y^2 + 4 > y^2$$

onde:

$$\sqrt{y^2+4} > |y|$$

isto é,

$$\sqrt{y^2+4} > y \text{ e } \sqrt{y^2+4} > -y$$

onde:

$$y - \sqrt{y^2+4} < 0 \text{ e } y + \sqrt{y^2+4} > 0$$

Como vemos no quadro acima, temos:

$$\alpha_1 > 0 \text{ e } \alpha_2 < 0$$

Portanto, somente α_1 é conveniente no exercício.

Logo, $\alpha = 3^x = \dfrac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}$

Podemos, agora, *isolar* x; pela definição de logaritmo:

$$x = \log_3\left(\frac{y + \sqrt{y^2+4}}{2}\right)$$

Finalmente, trocando as letras, vem:

$$y = f^{-1}(x) = \log_3\left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Exercícios Propostos

14.4) Determine a expressão que define a inversa de cada função abaixo:

a) $f(x) = \log_5 (x + 2)$

b) $f(x) = \log_5 x + 2$

c) $f(x) = 3^{2x+3}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 5$

14.5) Determine a expressão que define a inversa de cada função abaixo:

a) $f(x) = 3 - \log(x + 1)$

b) $f(x) = 2^{x-5} + 7$

14.6) Determine a expressão que define a inversa de $f(x) = \log_3 (2^x)$.

14.7) Determine as expressões que definem as inversas das funções definidas por:

a) $f(x) = 5^x - 2 \cdot 5^{-x}$

b) $f(x) = 4^x - 4^{-x+2}$

14.8) Determine a expressão que define a inversa da função definida por:

$$f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$$

Exercícios Suplementares

IV.1) Sendo a > 0 e a ≠ 1, diga em que condições a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^{-x}$ é *crescente*.

IV.2) Sendo a > 0 e a ≠ 1, resolva a inequação: $a^{x^3-1} \leq a^{x^2-1}$

IV.3) Resolva a inequação $\frac{e^x - 1}{1 - x^2} < 0$.

IV.4) Resolva a inequação (com x > 0 e x ≠ 1): $x^{x^2-5x+6} > x^2$

IV.5) A função f: $\mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = log |x| é crescente ou decrescente?

IV.6) Dê o domínio da função definida por $y = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 243}}$.

IV.7) Dê o domínio da função definida por $y = \log\left(\frac{2^x - 1}{2 - x}\right)$.

IV.8) Determine o domínio da função definida por $y = \log_x (x^2 - 2x - 15)$.

IV.9) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 \left(x^2 - 5\right) > 0$.

IV.10) Resolva a inequação $|\log(x^2 - 6x + 9)| > \log (x^2 - 6x + 9)$.

IV.11) Resolva a inequação $\log_{|x|} \sqrt{5} - \log_{|x|} 5 > 0$.

IV.12) Dê o domínio da função definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{4}} x$.

IV.13) Dê o domínio da função definida por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4x^2 - 16x + 15}$.

IV.14) Para que valores de **a** a equação $x^2 - \log a = 0$ admite raiz real?

IV.15) Determine a condição que deve obedecer **a** para que a equação $x^2 - 2x + \log a = 0$ admita duas raízes reais e distintas.

IV.16) Que relação deve existir entre **a** e **m** para que a equação em x

$$x^2 + 2x - \log_a (m + 1) = 0$$

tenha duas raízes reais e distintas?

IV.17) Sendo a > 1 e 0 < b < 1, resolva o sistema de inequações em x:

$$\begin{cases} \log_a \log_b x < 0 \\ \log_b \log_a x > 0 \end{cases}$$

IV.18) Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{se } x \geq 0 \\ 2^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

IV.19) Esboce o gráfico e dê o conjunto imagem da função definida por

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (1 - x)$$

IV.20) A função f é definida pela equação

$$e^{2x} - 2e^x \cdot f(x) - 1 = 0$$

Determine a expressão que define a inversa de f.

IV.21) Dê a expressão que define a inversa da função definida por

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

IV.22) Dê o domínio da função definida por $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \log_3 |x - 3|}$.

IV.23) Resolva a inequação: $\log_3 \log_{x^2} \log_{x^2} x^4 > 0$

IV.24) Resolva a inequação: $x^{\left(2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2\right)} > \frac{1}{x}$.

IV.25) Sendo a > 1, resolva a inequação: $\frac{1}{\log_a x} > 1$

IV.26) Sendo 0 < a < 1, resolva a inequação: $\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1$.

IV.27) Sendo 0 < k < 1, resolva a inequação: $\log_{kx} x + \log_x (kx^2) > 0$.

IV.28) Simplifique a expressão:

$$y = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1$$

IV.29) Prove que, para a > 1, tem-se: $\log_{10} a + \log_a 10 \geq 2$.

IV.30) Mostre que $\frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_6 5} < 2$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Capítulo 1

1.4) a) -27 c) 27 e) -81
b) -27 d) 81 f) -81

1.5) a) 1 c) 1 e) 1
b) -1 d) 0 f) 1

1.6) a) positivo
b) n par: positivo; n ímpar: negativo
c) n = 0: positivo; n > 0: zero
d) positivo

1.7) n ímpar: -1; n par: zero

1.8) -13

1.10) a) $-\frac{1}{27}$ c) $\frac{1}{27}$ e) $\frac{8}{125}$
b) $-\frac{1}{27}$ d) $\frac{125}{8}$ f) $\frac{125}{8}$

1.11) a) -1 b) $\frac{1}{6}$

1.12) ab

1.13) Eleve $x + x^{-1} = m$ ao quadrado: $m^2 - 2$

1.19) a) $\frac{b^4}{a}$ c) $\frac{81a^4b^2}{7}$ e) $a + b$
b) 1 d) $8a^3$ f) $\frac{b+a}{b-a}$

1.20) a) m^2n^3 c) $\frac{m^5}{n}$ e) $\frac{1}{mn}$
b) $\frac{n}{m}$ d) $\frac{m^2}{n^2}$ f) $\frac{n^4}{m^6}$

1.21) $\frac{4c^8}{b^8}$

1.22) -10^4

1.23) b) $P = 10^{16} \cdot (10^{16} - 1)$; 16 zeros

1.26) a) F c) V e) V
b) V d) V f) F

1.28) $x \geq -1$: $y = x + 1$; $x \leq -1$: $y = -(x + 1)$

1.35) 0

1.36) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$

1.37) $\sqrt[6]{27}$; $\sqrt[6]{36}$; $\sqrt[6]{30}$

1.38) $\sqrt[8]{72} < \sqrt[4]{12} < \sqrt{6}$

1.39) a) $2 + \sqrt{10} - 2\sqrt{5}$
b) $\sqrt[12]{128}$
c) $\sqrt[6]{\frac{4}{9}}$
d) -1
e) 0

1.40) a) $\frac{5\sqrt{6}}{8}$
b) $\frac{\sqrt[5]{2401}}{7}$
c) $\frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}$
d) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2$
e) $\sqrt{2\left(2 + \sqrt{2}\right)} - 2$

1.42) $\frac{1 + \sqrt[3]{45} - \sqrt[3]{75}}{4}$; note que $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

1.43) a) 18 c) 325
b) 322 d) 5 778

1.44) a) 4
b) -2; observe que $\Delta < 0$

1.45) a) racionalize

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{f(1)} = \sqrt{2} - \sqrt{1} \\ \frac{1}{f(2)} = \sqrt{3} - \sqrt{2} \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \text{some!}$$

b)

1.52) a) 32
b) 125
c) 100

1.53) a) −15 b) 74

1.54) 300

1.55) a) $a^{-\frac{7}{4}}$
b) $a^{\frac{7}{12}}$
c) $a^{\frac{7}{2}}$

1.56) 1

1.57) a) $a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}$ b) $a^{\frac{1}{3}}$

1.58) $\frac{8}{1-x^2}$

1.59) 3

1.60) a) $x-1$
b) $\frac{2ab(a+b)}{(a-b)^2}$
c) $\sqrt[3]{\frac{a}{x^2b}}$

1.61) $y = x^{\frac{1}{2}}$; 0,06

1.62) a) $(3^2)^x = 3^3 \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^3 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
b) $\frac{2}{5}$
c) 3
d) −4
e) −2
f) 3

1.63) a) 0 c) $27^{\sqrt{6}}$
b) 1 d) $3^{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

1.64) 4,729

Capítulo 2

2.13) $x_n = 2^{n-1}$

2.14) Válida para n = 1 e n ≥ 5; neste caso (n ≥ 5) demonstrar pela Indução Matemática.

2.15) **Teorema 2**
Hipótese: $(1 + a)^k \geq 1 + ka$
Tese: $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$
Multiplicando ambos os membros da desigualdade da hipótese por 1 + a (note que 1 + a > 0, pois a > −1), obtemos:
$(1 + a)^k \cdot (1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a)$
$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + a + ka + \underbrace{ka^2}_{\text{positivo}} > 1 + (1 + k)a$

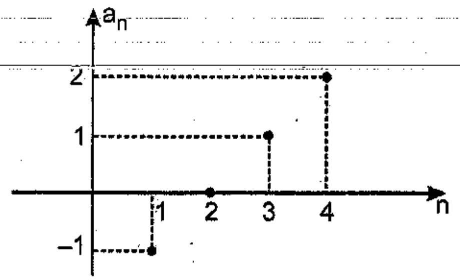
Capítulo 3

3.10) a) (3; 6; 9; 12; 15; ...)
b) (1; 3; 5; 7; 9;...)
c) (3; 5; 7; 9; 11; ...)
d) (2; 4; 6; 8; 10; ...)
e) (8; 10; 12; 14; 16; ...)
f) $\left(\frac{3}{7}; \frac{7}{12}; \frac{11}{17}; \frac{15}{22}; \frac{19}{27}; \ldots\right)$

3.11) a) (−2; −4; −10; −28; −82; −244; ...)
b) (−1; 5; 3; 13; 19; 45; ...)
c) (1; 3; 6; 10; 15; 21; ...)

3.12) a) $\frac{11}{4}$
b) $\frac{3k+8}{4}$
c) $\frac{3k-2}{2}$

3.13)



3.14) $b_n = 16n + 30$

3.15) a) $b_n = 4n^2 + 16n + 16$
b) $c_n = 8n + 20$

3.16) a) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \ldots\right)$
b) a = 1 e b = –1
c) $S_n = \frac{n}{n+1}$

3.17) a) $a_n = 2n + 2$
b) $a_n = 2n + 8$
c) $a_n = 2n + 1$
d) $a_n = 2n + 7$
e) $a_n = \frac{2n+5}{2n+2}$
f) $a_n = n^{n+1}$

3.18) a) $c_n = 6n + 3$
b) (9; 15; 21; 27;...)

3.23) a) 5(1) + 5(2) + 5(3) + 5(4)
b) $3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8$
c) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{5}\right)^6 + \left(\frac{1}{5}\right)^7 + \left(\frac{1}{5}\right)^8 + \left(\frac{1}{5}\right)^9 + \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$

3.24) a) 15
b) 22

3.25) a) $8 \cdot 8^2 \cdot 8^3$
b) $\left(\frac{12}{4}\right)\left(\frac{16}{5}\right)\left(\frac{20}{6}\right)\left(\frac{24}{7}\right)$

3.26) a) $\sum_{i=1}^{6} 4i$
b) $\sum_{i=1}^{4} (4i - 1)$
c) $\prod_{i=1}^{6} \frac{i}{2^i}$

Capítulo 4

4.19) a) –53
b) $\frac{25}{3}$
c) $\frac{-1593}{4}$
d) $-14 + 27\sqrt{2}$

4.20) $a_1 = 1$; r = 4

4.21) $\frac{203\sqrt{3} + 391}{5}$

4.22) 5

4.23) $-\frac{1}{2}$

4.24) $r = \frac{1}{5}$; n = 5

4.25) $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{3}$

4.26) 5

4.27) –4

4.28) $a_1 = p + q - 1$; $a_{p+q} = 0$

4.29) 2 132

4.30) (a_n) é PA de razão r e assim: $a_n = rn + k$ onde k é constante.
$a_{n+1} = r(n + 1) + k$
$b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 = [r(n + 1) + k]^2 - [rn + k]^2$
$b_n = (2r^2)n + (r^2 + 2rk)$
Como $2r^2$ e $r^2 + 2rk$ são constantes, (b_n) é uma PA de razão $2r^2$.

4.31) a) Racionalizando cada termo do 1º membro obtemos:
$$\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\underbrace{a_2 - a_1}_{r}} + \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{\underbrace{a_3 - a_2}_{r}} + \ldots + \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{\underbrace{a_n - a_{n-1}}_{r}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{r} =$$
$$= \frac{a_n - a_1}{r\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}\right)} = \frac{(n-1)r}{r\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}\right)} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$$
b) Observando que $\frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right)$ temos:

$$+\begin{cases} \dfrac{1}{a_1a_2} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{a_2}\right) \\ \dfrac{1}{a_2a_3} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{a_3}\right) \\ \dfrac{1}{a_3a_4} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_3} - \dfrac{1}{a_4}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{a_{n-1}\cdot a_n} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{a_{n-1}} - \dfrac{1}{a_n}\right) \end{cases}$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots+\frac{1}{a_{n-1}\cdot a_n}=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)=$$

$$=\frac{a_n-a_1}{r\,a_1a_n}=\frac{a_1+(n-1)r-a_1}{r\,a_1a_n}=\frac{(n-1)r}{r\,a_1a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

4.32) a) (5; 9; 13; 17; 21; ...)
b) (3; 5; 7; 9; 11; ...)
c) $a_{b_n} = a_{2n+1} = 4(2n+1)+1 = 8n+4+1 = 8n+5$, portanto $r = 8$
d) (13; 21; 29; 37; ...)

4.33) $r = \frac{6}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$

4.34) 20

4.35) 0

4.36) $\frac{pA - qB}{p - q}$

4.37) $\frac{1}{15}$

4.38) $r = 2$

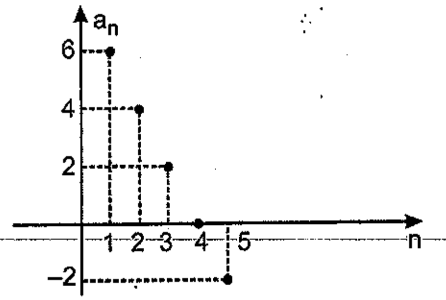
4.39) $n > 64$

4.40) $a_n = \frac{n^2 + 5n - 8}{n}$

4.41) –530

4.42) **Teorema 1**: Para n = 1 temos: $a_1 = a_1 + (1 - 1)r$, que é uma sentença verdadeira
Teorema 2: Suponhamos que a sentença seja válida para n = k:
$$a_k = a_1 + (k - 1)r$$
$$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k-1)r + r = a_1 + kr = a_1 + [(k + 1) - 1]r$$

4.43)



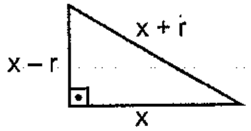
4.50) (2; 5; 8) ou (8; 5; 2)

4.51) x = 1 ou x = 6

4.52) (–10; –2; 6; 14) ou (14; 6; –2; –10)

4.53) (–1; 7; 15)

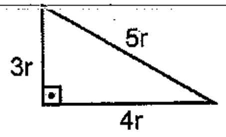
4.54)



$(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2$
$x^2 + 2rx + r^2 = x^2 - 2rx + r^2 + x^2$
$4rx = x^2$
Como $x \neq 0$ vem: $x = 4r$

$$\begin{cases} x + r = 4r + r = 5r \\ x - r = 4r - r = 3r \end{cases}$$

Portanto:



4.55) (16; 40; 56)

4.56) (a; b; c) é PA $\Rightarrow$ a + c = 2b

$abc^2 + a^2bc = abc(c + a) = abc(2b) = 2ab^2c$

onde $ab^2c = \frac{abc^2 + a^2bc}{2}$

4.57) (–4; –1; 2; 5) ou (5; 2; –1; –4)

4.72) 26

4.73) 3000

4.74) –162

4.75) 1660

4.76) 1200

4.77) 780

4.78) 249 912

4.79) 135 110

4.80) 30

4.81) –3

4.82) $S_n = \frac{11}{12}n^2 - \frac{1}{4}n$

4.83) (1; –5; –11; ...)

4.84) a) (–1; 0; 2; 4; ...)
b) não

4.85) 21

4.86) n > 206

4.87) –592

4.88) 4186

4.89) $y_n = \frac{7n^2 + 7n + 8}{2}$

4.90) $\frac{18n^2 + 432}{n}$

4.94) a) 465
b) 650
c) 3 025

4.95) a) 11 895
b) 10368

4.96) a) 3 080
b) $\frac{4}{3}n^3 + 2n^2 - \frac{1}{3}n$
c) $\frac{1}{4}n^4 + \frac{3}{2}n^3 + \frac{11}{4}n^2 + \frac{3}{2}n$

4.97) 19 900

Capítulo 5

5.3) a) $\frac{40}{7}$
b) 8

5.4) $\frac{6}{213}$

5.5) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{9}; \frac{1}{12}; \frac{1}{15}; \frac{1}{18}; \frac{1}{21}; \frac{1}{24}\right)$

5.6) $(x^2; y^2; z^2)$ é PA $\Leftrightarrow 2y^2 = x^2 + z^2$

(y + z; z + x; x + y) é PH $\Leftrightarrow z + x = \frac{2(y+z)(x+y)}{(y+z)+(x+y)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z + x = \frac{2yx + 2y^2 + 2xz + 2yz}{2y + x + z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z + x)(2y + x + z) = 2yx + 2y^2 + 2xz + 2yz \Leftrightarrow x^2 + z^2 = 2y^2$

Como $x^2 + z^2 = 2y^2$ é verdade, então (y + z; z + x; x + y) é PH.

Capítulo 6

6.14) a) 2^{n-6}
b) 16

6.15) $\frac{3}{2}$

6.16) 7

6.17) 72

6.18) $a_1 = \frac{5}{2}$; $q = 2$

6.19) $\frac{-243}{16}x$

6.20) a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

6.21) 864 000, 00

6.22) $b_n = \frac{1}{16}\cdot 64^n$: é uma PG de razão 64.

6.23) $c_n = \frac{5}{16}\cdot 8^n$: é um PG de razão 8.

6.24) $\sqrt{AB}$

6.33) a) ± 18 b) $\pm 4\sqrt{18} = \pm 12\sqrt{2}$

6.34) 10

6.35) (3; −21; 147)

6.36) $\left(\frac{1}{2}; 1; 2\right)$ ou $\left(2; 1; \frac{1}{2}\right)$

6.37) 8; 14 ou 8; $\frac{16}{5}$

6.38) $x = 0$

6.39) (1; 2; 4; 8; 16) ou (16; 8; 4; 2; 1)

6.40) $1 < q < 3$

6.41) $(a + b + c)(a - b + c) = (a + aq + aq^2)(a - aq + aq^2) =$
$= a^2(1 + q + q^2)(1 - q + q^2) = a^2(1 + q^2 + q^4) = a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = a^2 + b^2 + c^2$

6.49) -2^{231}

6.50) $\frac{-21}{2}$

6.51) $\frac{59049}{3} = 19683$

6.52) $a = 1$

6.53) $\frac{93}{2}$ ou $\frac{211}{8}$

6.54) $2^n - 1$

6.55) $\frac{3A}{2A+1}$

6.56) $\frac{2017}{1024}$

6.57) 6

6.65) $\frac{240}{7}$

6.66) 3

6.67) $\left(\frac{a+1}{a}\right)^2$

6.68) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6.69) $\frac{2}{5}$

6.70) $\frac{3x-x^2}{2(1-x)}$

6.71) $a_1 = 30$; $q = \frac{2}{3}$

6.72) 60

6.73) 120

6.74) $a^2 \cdot b^{\frac{5}{3}}$

6.75) 1

6.78) $\frac{(2n-1)3^n+1}{4}$

6.79) $\frac{x}{(1-x)^2}$

6.80) 3

Capítulo 7

7.9) a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) – 5
d) – 5
e) $\frac{2}{3}$
f) $\frac{4}{3}$
g) $\frac{2}{5}$
h) $\frac{3}{4}$
i) 1
j) –3
k) $\frac{3}{4}$
l) $\frac{1}{2}$

7.10) a) {1}
b) $\left\{\frac{1}{9}\right\}$
c) $\left\{\sqrt[4]{3}\right\}$
d) {–1}
e) $\{-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$
f) $\{\sqrt{3}\}$
g) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$
h) {12}

7.11) a) $\left\{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right\}$
b) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$
c) {9}
d) ∅

7.12) a) $\{\sqrt{5}\}$
b) {4; 32}
c) $\{\sqrt{10}; 100\}$

7.13) a) {4}
b) ∅
c) {2; 7}
d) {–5}

7.14) a) 5
b) 9
c) $\sqrt{3}$
d) $\frac{25}{3}$
e) $9\sqrt{3}$

7.15) y = 0

7.16) a) {100}
b) {257}

7.17) y = pq + 1

7.18) De $\log_a b = p$, vem $a^p = b$
De $\log_b a = q$, vem $b^q = a$
Substituindo o valor de **b** da primeira na segunda, temos:
$(a^p)^q = a$ ou seja $a^{pq} = a^1$
Logo, pq = 1

7.19) a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) {2}
c) $\left\{\frac{1}{4}; 0\right\}$

7.20) a) {1,233 }
b) $\left\{-\frac{1}{3}; 0{,}774\right\}$
c) {–0, 415; 0,322 }

Capítulo 8

8.12) a) $\log a_n = \log 3 + (n-1)\log 5$
b) $\log E = \log a + \frac{1}{2}\log b + \frac{1}{4}\log c$
c) $\log P_n = n \log a_1 + \frac{n(n-1)}{2}\log q$
d) $\log S_n = \log(a_1 + a_n) + \log n - \log 2$
e) $\log E = 5\log 2 + \frac{1}{2}\log 5 - \log \pi - 2\log 3 - \frac{1}{3}\log 7$

8.13) a) $E = 21\,b^2$

b) $E = \dfrac{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}}{c^2}$

c) $E = \dfrac{4^5}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}}$

d) $E = \dfrac{1000\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{(a+b)^3}}$

8.14) a) {5}
b) $\{\sqrt{3}\}$
c) {2}
d) $\{-5\sqrt{5};\ 5\sqrt{5}\}$

8.15) a) $\left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 2\sqrt{2}\right)\right\}$
b) {(90; 10)}

8.16) a) $\dfrac{3a}{2}$
b) $2a + 3$
c) $\dfrac{3(2a-1)}{2}$

8.17) a) 0,699
b) 1,857
c) 3,079
d) 1,620

8.18) a) 1,05
b) 0,83
c) 2,78

8.19) $\dfrac{p+q}{7}$

8.20) $3 - a$

8.21) $m - n$

8.22) a) $\left\{\dfrac{1}{3};\ 9\right\}$
b) {10; 1 000}
c) $\{1;\ 10^{100}\}$

8.23) a) {0,318}
b) {1,398}
c) {0,176; 0,778}
d) {–1,585; 0,585; 4,755}

8.24) Se $\dfrac{b}{q}$, b, bq estão, nessa ordem, em PG, devemos mostrar que

$$\log_a\left(\frac{b}{q}\right),\ \log_a b,\ \log_a (bq)$$

estão, nessa ordem, em PA; para isso basta calcularmos as diferenças:

1ª) $\log_a b - \log_a\left(\dfrac{b}{q}\right) = \log_a b - (\log_a b - \log_a q) = \log_a q$

2ª) $\log_a (bq) - \log_a b = \log_a b + \log_a q - \log_a b = \log_a q$

Portanto, temos: $\log_a b - \log_a\left(\dfrac{b}{q}\right) = \log_a (bq) - \log_a b$ ou seja, $\log_a\left(\dfrac{b}{q}\right)$, $\log_a b$, $\log_a (bq)$ estão em PA

8.25) $q = a^r$

8.26) $n = 4$

8.27) $q = 32$

8.28) A soma das raízes é

$$a \log_c a + b \log_c b = \frac{ac}{a} = c$$

Então, $\log_c a^a + \log_c b^b = c$ $\quad \log_c (a^a b^b) = c$

onde $a^a b^b = c^c$

8.29) $p = S(s - S)$; $P = s(2S - s)$

Capítulo 9

9.1) a) 0 e 0,2314
b) 6 e 0,3112
c) –1 e 0,2310
d) –7 e 0,1212
e) –1 e 0,6484
f) –4 e 0,0101

9.2) a) $-2{,}31 = \bar{3}{,}69$
b) 1,74
c) $-11{,}04 = \overline{12}{,}96$
d) 2

9.6) a) 2,0453
b) 1,8745
c) 0,3711
d) $\bar{1}{,}0899 = -0{,}9101$
e) $\bar{3}{,}6599 = -2{,}3401$
f) $\bar{2}{,}9143 = -1{,}0857$

9.7) a) 4,8658
b) $-1{,}0997 = \bar{2}{,}9003$

9.8) a) 15,2
b) 8 870
c) 0,0582
d) 0,000634

9.9) a) 3,274 b) 0,04724

9.10) a) $x = 1{,}947$ b) 0,3324

9.11) a) 32 b) 29

9.12) a) 15 b) 14

Capítulo 11

11.6) a) 1,4650 b) 1,2323 c) −0,5483

11.7) a) {1,4650}
b) {0,2519}
c) {0,8480}
d) {0,4307; 1,4307}
e) {−0,5646; −0,3562}

11.8) a) $\frac{49}{43}$ c) $\frac{43}{84}$
b) $\frac{84}{43}$ d) $\frac{12}{7}$

11.9) a) $\frac{5}{8}$
b) $\frac{13}{8}$
c) 7

11.10) a) $\frac{b(a+1)}{b+1}$
b) $\frac{ab+3b+1}{2}$
c) $\frac{3ab+2}{3b+1}$

11.11) a) 2pq
b) $\frac{q+1}{2pq+1}$
c) $\frac{2pq+q+2}{pq+q+1}$

11.12) a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{4}$

11.13) Como, numa PG, o termo médio é a média geométrica dos extremos, temos:

$$(\log_c b)^2 = \log_b (a) \cdot \log_{(a)} c = \log_b c$$

ou seja

$$(\log_c b)^2 = \frac{1}{\log_c b}$$

e daí

$(\log_c b)^3 = 1$ onde $\log_c b = 1$

Portanto, $b = c$

11.14) O produto das raízes é $\ell n\, b \cdot \frac{1}{\ell n\, c} = c$, onde

$\ell n\, b = c\, \ell n\, c = \ell n\, c^c$ e então $b = c^c$.

11.15) $\frac{30}{31}$

11.16) a) {9; 27}
b) $\left(\sqrt{a};\ a^2\right)$
c) {a}

11.17) $\{10^{0,2872}\}$

11.18) $\left\{\frac{1}{e^{9,3954}}\right\}$

11.19) Como, numa PA, o termo médio é a média aritmética dos extremos, temos:

$$2 \log_b x = \log_a x + \log_c x$$

Multiplicando ambos os membros por $\log_x b$, vem:

$2 \log_b (x) \cdot \log_{(x)} b = \log_a (x) \cdot \log_{(x)} b + \log_c (x) \cdot \log_{(x)} b$

onde $2 = \log_a b + \log_c b$

11.20) Escrevendo as duas igualdades na base x, vem:

$$\frac{\log_x b}{\log_x a} = \frac{\log_x c}{\log_x b} \quad e \quad \frac{\log_x c}{\log_x a} = \frac{1}{\log_x c}$$

Da primeira, obtemos:

$$\log_x c = \frac{(\log_x b)^2}{\log_x a}$$

que, substituído na segunda, traz:

$$\frac{(\log_x b)^2}{\log_x a \cdot \log_x a} = \frac{\log_x a}{(\log_x b)^2}$$

Onde, finalmente:

$$(\log_x b)^4 = (\log_x a)^3$$

Capítulo 12

12.8) a) crescente
b) crescente
c) decrescente
d) crescente

12.9) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{2}{9}\right\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 6\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x > 1\}$

12.10) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2,322\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1,5 < x < 1,6902\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5,888 < x < 3,511\}$

12.11) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1,465 \text{ ou } x > -1\}$

12.12) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2\sqrt{2} \text{ ou } 2\sqrt{2} < x \leq 3\}$

12.13) a) Se $a > 1$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$
Se $0 < a < 1$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$
b) Se $a > 1$, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid -\log_a 3 \leq x \leq \log_a 3\}$
Se $0 < a < 1$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_a 3 \leq x \leq -\log_a 3\}$

12.14) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

12.15) a) Se $\alpha \leq 0$, $S = \mathbb{R}$
Se $\alpha > 0$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_2 \alpha\}$
b) Se $\alpha \leq 0$, $S = \varnothing$
Se $\alpha > 0$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_2 \alpha\}$

12.19) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{3}\right\}$

b) $\mathbb{R}^*$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > -2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$
f) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

12.20) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{5}{2} \text{ e } x \neq -2\right\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ e } x \neq \sqrt{2}\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 2\sqrt{3} \text{ e } x \neq \sqrt{11}\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$

12.30) a) V
b) F
c) V
d) V
e) V
f) F

12.31) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 10\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leq 4\right\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 0 \text{ ou } 4 < x < 9\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -\sqrt{13} \text{ ou } \sqrt{13} < x \leq 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 2 \text{ ou } x \neq -1\}$

12.32) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 8\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} \leq x < 2\}$

12.33) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $\varnothing$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{125} \text{ ou } x > 125\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} \leq x \leq 8\right\}$

12.34) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } 3 < x < 27\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \le \frac{5}{4} \text{ ou } 2 < x \le 33\right\}$

12.35) a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 3\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} < x < \sqrt{3}\}$

12.36) a) Se $a > 1$, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Se $0 < a < 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} < x < 2\right\}$

b) Se $a > 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < \frac{3}{2}\right\}$

Se $0 < a < 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x \le 1\right\}$

12.37) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} < x < \frac{7}{3} \text{ e } x \ne 2\right\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 12\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 9\}$

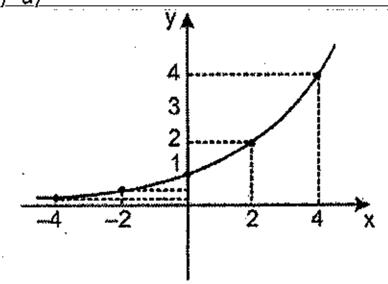
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le \frac{1}{3} \text{ ou } x \ge 27\right\}$

12.38) Se $a > 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{a} \le x \le a \text{ e } x \ne 1\right\}$

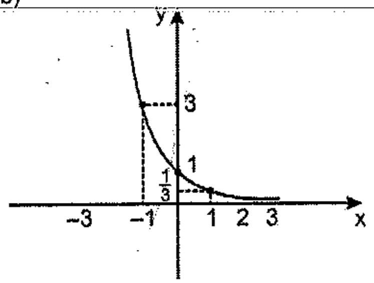
Se $0 < a < 1$, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \le a \text{ ou } x \ge \frac{1}{a}\right\}$

12.39) a) crescente
b) decrescente
c) decrescente
d) crescente

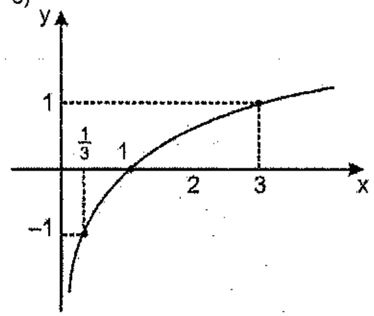
12.40) a)



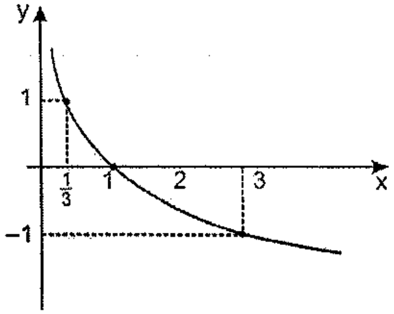
b)



c)

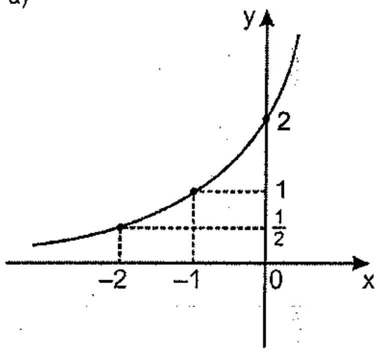


d)

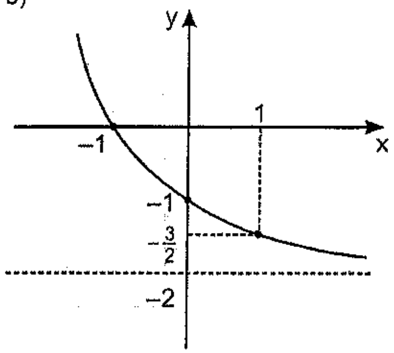


Capítulo 13

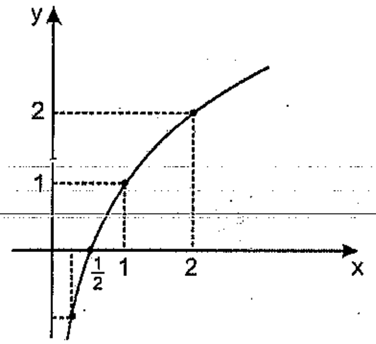
13.6) a)



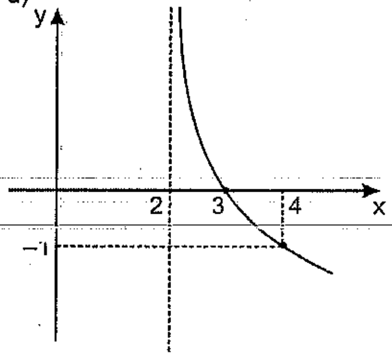
b)



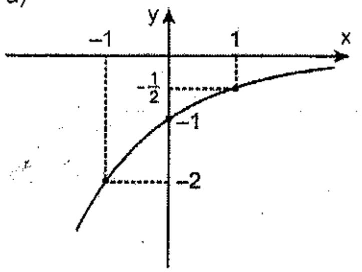
c)



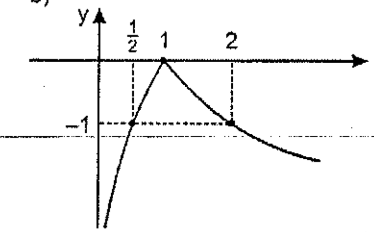
d)



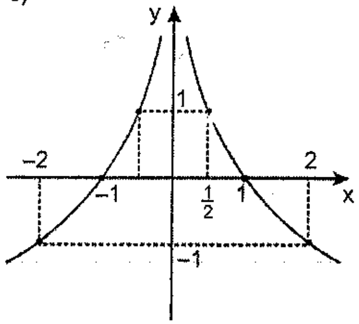
13.7) a)



b)



c)

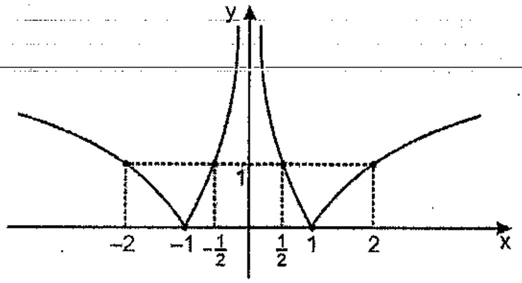


13.8) a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$

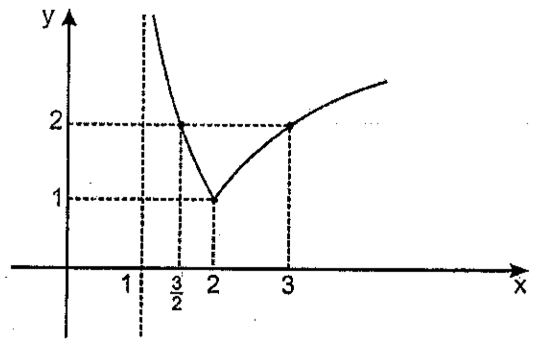
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > \pi\}$

c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y > -\sqrt{5}\}$

13.9)



13.10)



Capítulo 14

14.4) a) $f^{-1}(x) = 5^x - 2$

b) $f^{-1}(x) = 5^{x-2}$

c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log_3 x - \frac{3}{2}$

d) $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+5)$

14.5) a) $f^{-1}(x) = 10^{3-x} - 1$

b) $f^{-1}(x) = \log_2(x-7) + 5$

14.6) $f^{-1}(x) = \log_2(3^x)$

14.7) a) $f^{-1}(x) = \log_5\left(\frac{x+\sqrt{x^2+8}}{2}\right)$

b) $f^{-1}(x) = \log_4\left(\frac{x+\sqrt{x^2+64}}{2}\right)$

14.8) $f^{-1}(x) = \log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

Parte I

I.1) $\left(\frac{a}{b}\right)^{mn}$

I.2) Observe que $2b = a + c$ e $y^2 = zx$

I.3) a) $\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2}$

I.4) $x \le -1$: $y = -2$; $-1 \le x \le 1$: $y = 2x$; $x \ge 1$; $y = 2$

I.5) Lembre que: $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$; $\frac{\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}{7}$

I.6) Racionalize o numerador da fração obtida.

I.7) $\left.\begin{array}{l} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 : \text{ e multiplique por } \alpha^n \\ a\beta^2 + b\beta + c = 0 : \text{ e multiplique por } \beta^n \end{array}\right\} \text{some}$

I.8) Use a inequação $\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

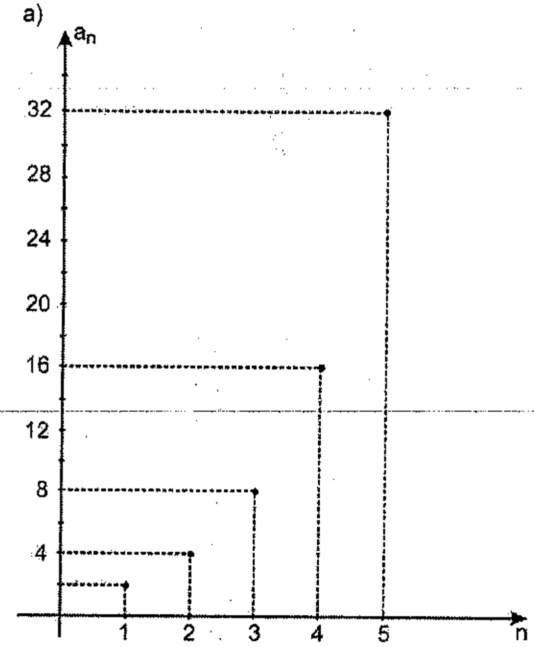
I.10) **Teorema 1**: Uma reta no plano divide-o em 2 partes, portanto não mais que 2^1.
Teorema 2: Suponhamos que não se pode dividir o plano em mais do que 2^k partes, tendo-se k retas. Vamos provar que, ao acrescentarmos uma nova reta, o número de partes não ultrapassará 2^{k+1}.
Estando as **k** retas no plano, uma nova reta irá cortar as regiões já existentes. O número de regiões cortadas não é superior a 2^k. Se de fato fossem cortadas 2^k regiões, o número total passaria a ser o dobro. Isto quer dizer que com k + 1 retas obteremos *no máximo* $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ partes.

I.12) n > 9: a propriedade é válida.

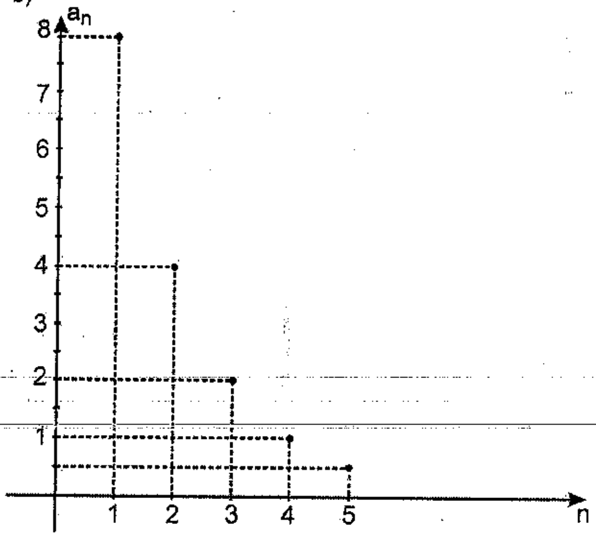
Parte II

II.1) $\frac{2}{15} - \frac{1}{4(2n+3)} - \frac{1}{4(2n+5)}$

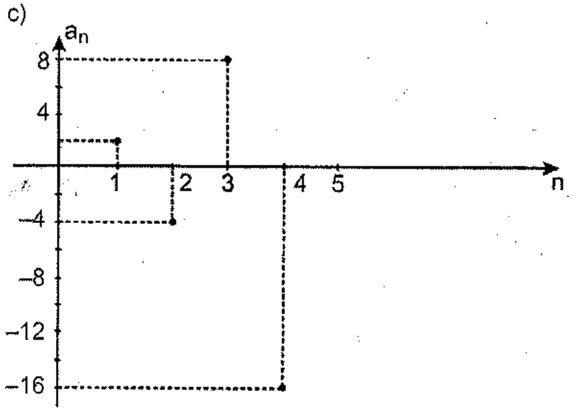
II.2) a)



b)



c)



II.3) (a; b; c) é PA $\Rightarrow$ a + c = 2b

$(a^2 + ab + b^2;\ c^2 + ac + a^2;\ b^2 + bc + c^2)$ é PA $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2(c^2 + ac + a^2) = (a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2)\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 2c^2 + 2ac + 2a^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 + ab + bc\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ c^2 + a^2 + 2ac = ab + bc + 2b^2\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ (a + c)^2 = (a + c)b + 2b^2\ \Leftrightarrow$

Lembrando que a + c = 2b temos:

$(a + c)^2 = (a + c)b + 2b^2\ \Leftrightarrow\ (2b)^2 = (2b)b + 2b^2\ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ 4b^2 = 4b^2$

Como esta última sentença é verdadeira, a sequência é uma PA.

II.4) (1; 2; 3) ou (3; 2; 1)

II.5) (−5; −2; 1; 4; 7) ou (7; 4; 1; −2; −5)

II.6) $a_1 = \frac{11}{2}$ e $r = \frac{1}{4}$ ou $a_1 = \frac{3}{2}$ e $r = \frac{11}{12}$

II.7) 115 600

II.8) 0

II.9) 29

II.10) 16(a + 15b)

II.11) (10; 7; 4; 1)

II.12) $a_1 = 8$ e $q = \frac{5}{2}$ ou $a_1 = -\frac{56}{3}$ e $q = -\frac{5}{2}$

II.13) (1; 3; 9) ou (9; 3; 1)

II.14) $9\left(3+2\sqrt{2}\right)$

II.15) 185 044

II.16) 6

II.17) a) $a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \frac{1}{6};\ a_3 = \frac{1}{18}$

b) $a_n = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{4}$

II.18) 3 248

II.19) 3 500

II.20) a) 16

b) $\frac{64}{15}\left(16^{10}-1\right)$

II.21) a) $\frac{4}{9}$

b) $\frac{25}{99}$

c) $\frac{125}{999}$

Parte III

III.1) $-\frac{13}{2}$

III.2) 8

III.3) x = 6 581, a = 9

III.4) $-\frac{3}{2}$

III.5) S = {243}

III.6) $n = \sqrt{\log_2 k}$

III.7) S = {(6; −10)}

III.8) $S = \{16\}$

III.9) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

III.10) 40

III.11) $S = \{2;\ 512\}$

III.12) 0,85733

III.13) $\sqrt[5]{100}$

III.14) $S = \left\{\left(\frac{3}{8}; \frac{1}{8}\right)\right\}$

III.15) $S = \{100\}$

III.16) $x = a^{\frac{p}{m+n}}$

III.17) $x = 4$

III.18) 0,158884

III.19) 0,67

III.20) −2,7664

III.21) 2

III.22) 4,26

III.23) $-\frac{4}{3}$

III.24) $x = 0{,}226$

III.25) $S = \{2\}$

III.26) $m = 5$ ou $m = \frac{15}{2}$

III.27) De $a^{b^x} = c$ vem $b^x = \log_a c = \frac{\log c}{\log a} = \frac{r}{p}$

Onde

$$x = \log_b\left(\frac{r}{p}\right) = \frac{\log\left(\frac{r}{p}\right)}{\log b} = \frac{1}{q}\log\left(\frac{r}{p}\right) = \log\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{q}}$$

então $10^x = \left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{q}}$

III.28) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

III.29) $y = \log_2 3$

III.30) Façamos $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = t$

Então temos

$\log a = t\,(b-c)$

$\log b = t\,(c-a)$

$\log c = t\,(a-b)$

ou ainda:

$a \log a = ta\,(b-c)$

$b \log b = tb\,(c-a)$

$c \log c = tc\,(a-b)$

Somando, temos:

$a \log a + b \log b + c \log c = 0$

ou seja $\log a^a + \log b^b + \log c^c = 0$

e finalmente $a^a \cdot b^b \cdot c^c = 1$.

III.31) Temos $a + b = p$ (I) e $ab = B^m$ (II)

De (II) tiramos:

$\log_B a + \log_B b = m$ (III)

Vamos multiplicar membro a membro as igualdades (I) e (III):

$$(a+b)(\log_B a + \log_B b) = mp$$

onde $a \log_B a + b \log_B b + b \log_B a + a \log_B b = mp$

e finalmente

$\log_B a^a + \log_B b^b + \log_B a^b + \log_B b^a = mp$

III.32) 1

III.33) $\frac{5n-3}{6}$

III.34) $\frac{AB}{10B + 45A}$

III.35) Seja

$$A = \left(\frac{p}{q}\right)^{\log r} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\log p} \cdot \left(\frac{r}{p}\right)^{\log q}$$

Vamos calcular log A e mostrar que log A = 0:

$$\log A = \log r \cdot \log\frac{p}{q} + \log p \cdot \log\frac{q}{r} + \log q \cdot \log\frac{r}{p} =$$

$$= \log r \cdot (\log p - \log q) + \log p \cdot (\log q - \log r) + \log q \cdot (\log r - \log p) =$$

$$= \log r \cdot \log p - \log r \cdot \log q + \log p \cdot \log q - \log p \cdot \log r +$$

$$+ \log q \cdot \log r - \log q \cdot \log p = 0$$

De log A = 0 vem imediatamente A = 1.

III.36) a) 1,204
b) 35,1
c) 6,364

III.37) Para n = 2 temos $\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 = \log_{a_0} a_2$ (trata-se da propriedade conhecida).

Vamos admitir *por hipótese* que

$$\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n = \log_{a_0} a_n$$

e vamos provar *como tese* que

$$\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} a_{n+1} = \log_{a_0} a_{n+1}$$

Para isso, basta multiplicar ambos os membros da expressão da hipótese por

$\log_{a_n} a_{n+1}$:

$$\log_{a_0} a_1 \cdot \log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \ldots \cdot \log_{a_{n-1}} a_n \cdot \log_{a_n} a_{n+1} =$$

$$= \log_{a_0} a_n \cdot \log_{a_n} a_{n+1} = \log_{a_0} a_{n+1}$$

Nesta última passagem foi aplicada novamente a propriedade conhecida, que vale para o caso de um produto de dois logaritmos.

III.38) $S = \{2^{-\sqrt{2}};\ 2^{\sqrt{2}}\}$

III.39) $S = \left\{3;\ 3^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}};\ 3^{-\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right\}$

III.40) Vamos simplificar a expressão:

$$A = \frac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x}$$

Temos:

$$A = \frac{\dfrac{1}{\log_x a} - \dfrac{1}{\log_x b}}{\dfrac{1}{\log_x b} - \dfrac{1}{\log_x c}} = \frac{\dfrac{\log_x b - \log_x a}{\log_x a \cdot \log_x b}}{\dfrac{\log_x c - \log_x b}{\log_x b \cdot \log_x c}} = \frac{\dfrac{\log_x\left(\frac{b}{a}\right)}{\log_x a}}{\dfrac{\log_x\left(\frac{c}{b}\right)}{\log_x c}}$$

Mas estando **a**, **b** e **c** em PG, tem-se $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$.

Assim:

$$A = \frac{\dfrac{1}{\log_x a}}{\dfrac{1}{\log_x c}} = \frac{\log_a x}{\log_c x}$$

Parte IV

IV.1) $0 < a < 1$

IV.2) Se a > 1; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
Se 0 < a < 1; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ ou } x = 0\}$

IV.3) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

IV.4) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

IV.5) decrescente

IV.6) $]-\infty; -5[$

IV.7) $]0; 2[$

IV.8) $]5; +\infty[$

IV.9) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -\sqrt{6} \text{ ou } \sqrt{6} < x < 3\}$

IV.10) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4 \text{ e } x \neq 3\}$

IV.11) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ e } x \neq 0\}$

IV.12) $]\frac{1}{4}; 1[$

IV.13) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$

IV.14) $a \geq 1$

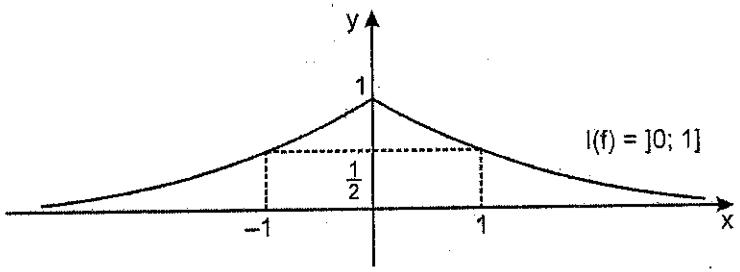
IV.15) $0 < a < 10$

IV.16) Se $a > 1$, deve-se ter $m + 1 > \frac{1}{a}$

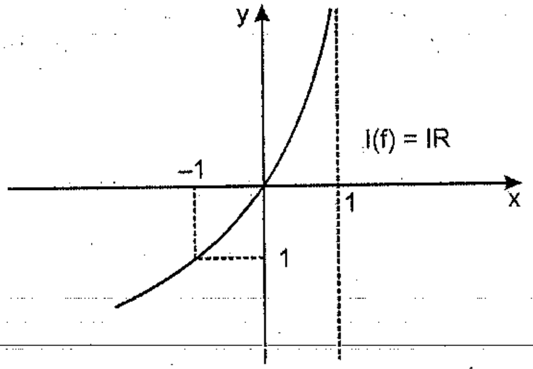
Se $0 < a < 1$, deve-se ter $0 < m + 1 < \frac{1}{a}$

IV.17) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid b < x < a \text{ e } x \neq 1\}$

IV.18)



IV.19)



IV.20) $f^{-1}(x) = \ell n\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

IV.21) $f^{-1}(x) = \ell n \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$

IV.22) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } 4 < x < 6\}$

IV.23) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < -1 \text{ ou } 1 < x < \sqrt{2}\}$

IV.24) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 1 < x < 2\right\}$

IV.25) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < a\}$

IV.26) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < a \text{ ou } 1 < x < \frac{1}{a}\right\}$

IV.27) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > \frac{1}{k}\right\}$

IV.28) $y = \log_a b$

IV.29) Façamos $\log_{10} a = y$. Como $a > 1$, tem-se $y > 0$.
Partindo de $(y - 1)^2 \geq 0$ escrevemos:

$$y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Rightarrow y^2 + 1 \geq 2y$$

e, como $y > 0$, vem:

$$\frac{y^2 + 1}{y} \geq 2 \Rightarrow y + \frac{1}{y} \geq 2$$

ou seja, $\log_{10} a + \log_a 10 \geq 2$

IV.30) Como $24 < 25$, temos $\log_5 24 < \log_5 25$
onde $\log_5 3 + \log_5 8 < 2$ e então:

$$\frac{1}{\log_3 5} + \frac{1}{\log_8 5} < 2$$

TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1881	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4041	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	2010
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

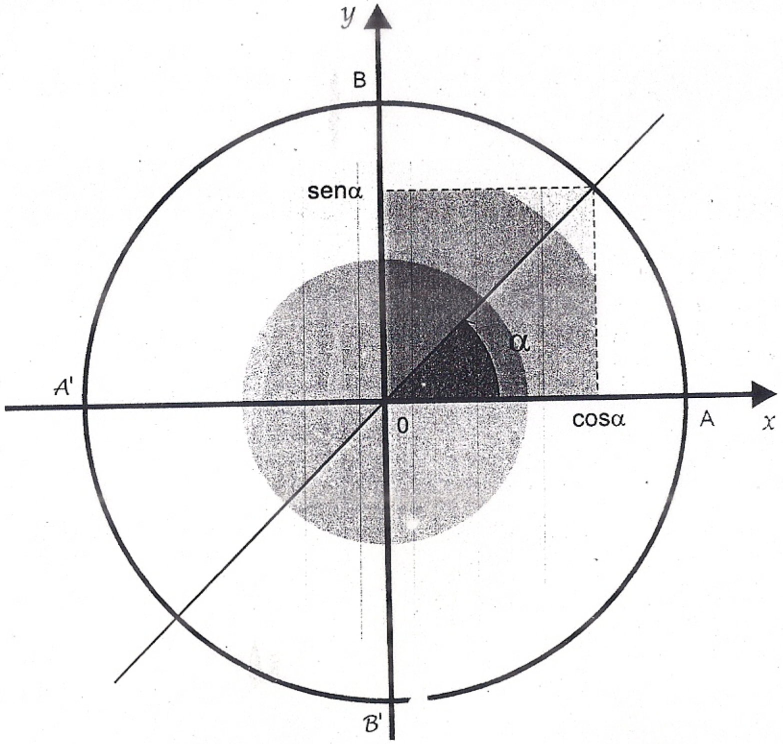
TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8249	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

TÁBUA DE LOGARITMOS DECIMAIS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8696	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9286
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9972	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9821	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

NOÇÕES DE MATEMÁTICA



VOLUME 3

Trigonometria

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

TRIGONOMETRIA

Noções de Matemática

VOLUME 3

Capa:
Annysteyne Maia Chaves

CIP – Brasil. Catalogação-na-Fonte.
Câmara Brasileira do Livro, SP

T747
Trigonometria: 2º grau / Aref Antar Neto.
(et al.) Fortaleza: Ed. Vestseller, 2009.
(Noções de matemática; v.3)

1. Trigonometria (2º grau) I. Antar Neto, Aref, 1949 – II. Série.

78-1488
17. CDD – 514
18. – 516.24

Índices para catálogo sistemático:
1. Trigonometria 514.7 (17.) 516.24 (18.)

Editora VestSeller

www.VestSeller.com.br

Índice

Parte I

Capítulo 1. **Medidas de arcos e ângulos** 11

1.1 — Arcos de circunferência 11
1.2 — Medida de um arco 12
1.3 — Ângulos 13
1.4 — Medida de um ângulo 13
1.5 — Unidades usuais de medida 14
1.6 — O número □: uma razão geométrica 15
1.7 — Arco de uma volta 16
1.8 — Comprimento de um arco 16
1.9 — Conversão de unidades 17

Capítulo 2. **Razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente** 21

2.1 — Relações métricas no triângulo retângulo 21
2.2 — Razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente 22
2.3 — Aplicação importante: ângulos notáveis 24
2.4 — Primeiras relações fundamentais 27
Exercícios Suplementares 31

Parte II

Capítulo 3. **Circunferência trigonométrica** 35

3.1 — Segmento orientado 35
3.2 — Eixo 35
3.3 — Medida algébrica de um segmento orientado 36
3.4 — Relação de Chasles 36
3.5 — Sistema de abscissas 37
3.6 — Sistema cartesiano ortogonal 38
3.7 — Arco orientado 40
3.8 — Circunferência trigonométrica 40
3.9 — Medida algébrica de um arco orientado 41
3.10 — Ângulos 42
3.11 — Arcos ou ângulos com mais de um volta 42
3.12 — Algumas expressões importantes 45
3.13 — Arcos côngruos 46
3.14 — Expressões do tipo $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ 48

Capítulo 4. **Seno e cosseno** 57

4.1 — Seno e cosseno 57
4.2 — Variação e sinais do seno e do cosseno 59
4.3 — Relação $sen 2\pi + cos 2\pi = 1$ 60
4.4 — Alguns valores particulares 61
4.5 — Senos dos arcos de medidas $\frac{\pi}{n}$ 63

Capítulo 5. **Tangente e cotangente** 69

5.1 — Tangente 69
5.2 — Variação e sinais da tangente 71
5.3 — Cotangente 75
5.4 — Variação e sinais da cotangente 77

Capítulo 6. **Secante e cossecante** 85

6.1 — Secante e cossecante 85
6.2 — Variação e sinais da secante e da cossecante 86
6.3 — Resumos 87

Capítulo 7. **Redução ao 1º quadrante** 93

Capítulo 8. **Equações simples** 97

8.1 — Introdução 97
8.2 — Conjunto-universal e conjunto-solução 97
8.3 — Equação do tipo cos x = a 97
8.4 — Notação arc cos a 99
8.5 — Conjunto-universo $U = \mathbb{R}$ 101
8.6 — Equação do tipo sen x = a 103
8.7 — Notação arc sen a 105
8.8 — Equação do tipo tg x = a 108
8.9 — Notação arc tg a 109
8.10 — Notação arc cotg a. Equação do tipo cotg x = a 112
8.11 — Resumo das notações novas 115
Exercícios Suplementares 117

Parte III

Capítulo 9. **Primeiras fórmulas trigonométricas** 123

9.1 — Introdução 123
9.2 — Mudança de sinal do arco (ou ângulo) 123
9.3 — Cosseno da soma e cosseno da diferença 124
9.4 — Arcos (ou ângulos) complementares 126
9.5 — Seno da soma e seno da diferença 130
9.6 — Tangente da soma e tangente da diferença 132
9.7 — Resumo 134
9.8 — Simplificação de expressões trigonométricas dos arcos da forma $k\pi \pm x$ 137
9.9 — Simplificação de expressões trigonométricas dos arcos da forma $\frac{k\pi}{2} \pm x$, k ímpar 141

Capítulo 10. **Fórmulas de arco dobro, arco triplo e arco metade** 147

10.1 — Introdução 147
10.2 — Arco dobro 147
10.3 — Arco triplo 151
10.4 — Arco metade 152
10.5 — Fórmulas auxiliares: sen a, cos a e tg a em função de $tg \frac{a}{2}$ 154
10.6 — Resumo 156

Capítulo 11. **Transformação em produto** 159

11.1 — Introdução 159
11.2 — Transformação de sen $p \pm$ sen q e cos $p \pm$ cos q 159
11.3 — Transformação de sen $p \pm$ cos q 162
11.4 — Transformação de tg $p \pm$ tg q 162
11.5 — Fórmulas de reversão: transformação de produtos em somas ou diferenças 163
11.6 — Resumo 165
Exercícios Suplementares 167

Parte IV

Capítulo 12. **Equações trigonométricas** 171

12.1 — Finalidade deste capítulo 171
12.2 — Equações clássicas 180
12.3 — 1ª equação clássica 180
12.4 — 2ª equação clássica 186
12.5 — 3ª equação clássica 188
12.6 — Equações que envolvem as relações inversas 192

Capítulo 13. **Inequações trigonométricas** 199

13.1 — Inequação do tipo cos x < a 199
13.2 — Inequação do tipo cos x > a 200
13.3 — Inequações dos tipos sen x < a e sen x > a 202
13.4 — Inequações dos tipos tg x < a e tg x > a 205
Exercícios Suplementares 210

Parte V

Capítulo 14. **Resolução de triângulos** 215

14.1 — Introdução 215
14.2 — Lei dos senos 215
14.3 — Lei dos cossenos 218
14.4 — Área do triângulo 221
14.5 — Resumo 223
Exercícios Suplementares 233

Parte VI

Capítulo 15. **Funções trigonométricas** 237

15.1 — Introdução 237
15.2 — O conceito de função 237
15.3 — Função real de variável real 238
15.4 — Gráfico de uma função real de variável real 238
15.5 — A correspondência entre um número real e um ponto da Circunferência trigonométrica 239
15.6 — Função seno 241
15.7 — Definição de função periódica 242
15.8 — Gráfico da função seno 242
15.9 — Definição de função limitada 243
15.10— Função cosseno 244
15.11— Gráfico da função cosseno 244
15.12— Função tangente 245
15.13— Gráfico da função tangente 246
15.14— Função cotangente 248
15.15— Gráfico da função cotangente 249
15.16— Função secante 250
15.17— Gráfico da função secante 250
15.18— Função cossecante 252
15.19— Gráfico da função cossecante 252
15.20— Definição de função par e função ímpar 253
15.21— Paridade das funções trigonométricas 253
15.22— Resumo 254

Capítulo 16. **Cálculo de períodos e construção de gráficos** 261

16.1 — Introdução 261
16.2 — Cálculo do período de funções da forma y = m + nf(ax + b) 261
16.3 — Cálculo do período de somas e produtos de duas funções periódicas 263
16.4 — Construção de gráficos 266

Capítulo 17. **Funções trigonométricas inversas** 275

17.1 — O conceito de função inversa 275
17.2 — Introdução às funções trigonométricas inversas 276
17.3 — A inversa do seno: função arco-seno 277
17.4 — A inversa do cosseno: função arco-cosseno 277
17.5 — A inversa da tangente: função arco-tangente 280
17.6 — A inversa da cotangente: função arco-cotangente 281

Exercícios Suplementares 283
Respostas dos exercícios propostos 285
Respostas dos exercícios suplementares 313
Tabela de razões trigonométricas 324

PARTE I

Capítulo 1 – **Medidas de arcos e ângulos**

Capítulo 2 – **Razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente**

Capítulo 1

Medidas de arcos e ângulos

1.1. ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

Se dois pontos, A e B, são tomados sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes, denominadas **arcos de circunferência** ou, simplesmente, **arcos** (fig. 1.1). A e B são as *extremidades* desses arcos.

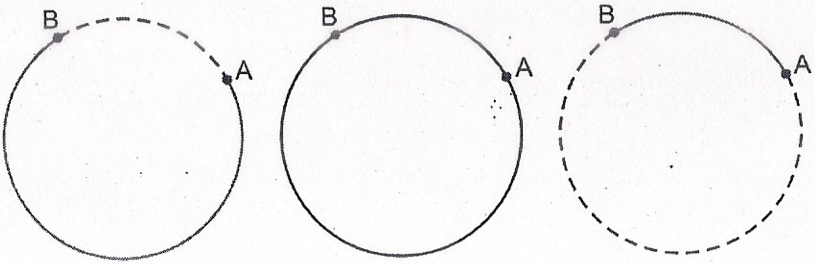
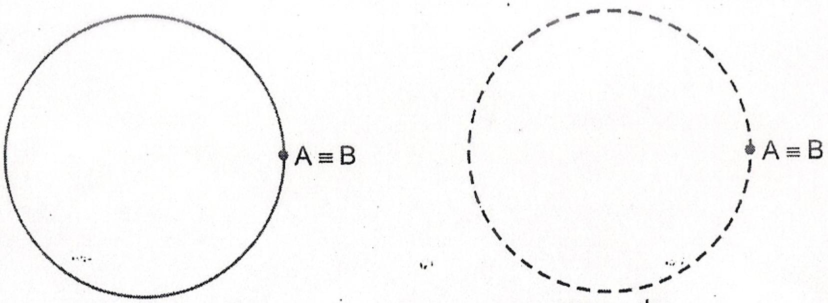


Fig. 1.1

Se A e B coincidem, um dos arcos fica reduzido a um ponto; o outro é a própria circunferência; são chamados, respectivamente, **arco nulo e arco de uma volta** (fig. 1.2).



arco de uma volta — arco nulo

Fig. 1.2

1.2. MEDIDA DE UM ARCO

Fixando-se sobre uma circunferência um arco $\overset{\frown}{PQ}$ não nulo, **medida de um arco $\overset{\frown}{AB}$** da mesma circunferência é a **razão entre os comprimentos de $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{PQ}$**. Em termos mais simples, é o *número de vezes que o arco $\overset{\frown}{PQ}$ "cabe" no arco $\overset{\frown}{AB}$* (fig. 1.3). O arco $\overset{\frown}{PQ}$ é a *unidade de medida*.

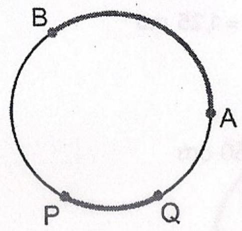


Fig. 1.3

$$\text{med.}\overset{\frown}{AB} = \frac{\text{comprimento de }\overset{\frown}{AB}}{\text{comprimento de }\overset{\frown}{PQ}}$$

Exercícios Resolvidos

1.1) Numa circunferência, adotou-se como unidade um arco de comprimento 0,5 cm. Calcule nessa unidade, a medida de um arco $\overset{\frown}{AB}$ cujo comprimento é 4 cm.

Solução

$$\text{med.}\overset{\frown}{AB} = \frac{\text{comprimento de }\overset{\frown}{AB}}{\text{comprimento da unidade}}$$

Assim:

$$\text{med.}\overset{\frown}{AB} = \frac{4}{0{,}5} = 8$$

1.2) A unidade de medida de arcos de uma circunferência tem comprimento 1,5 cm. Um arco $\overset{\frown}{AB}$ dessa circunferência tem medida 3 unidades. Determine o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$.

Solução

$$\text{med.}\overset{\frown}{AB} = \frac{\text{comprimento de }\overset{\frown}{AB}}{\text{comprimento da unidade}}$$

Assim:

$$3 = \frac{\text{compr. de }\overset{\frown}{AB}}{1{,}5}$$

Logo, comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ = 4,5cm

1.3. ÂNGULOS

O plano determinado por duas semi-retas Oa e Ob, de origem comum **O** (fig.1.4), está dividido em duas regiões (ambas *contendo* as semi-retas) denominadas **ângulos. O** é o **vértice** desses ângulos; Oa e Ob são seus **lados**.

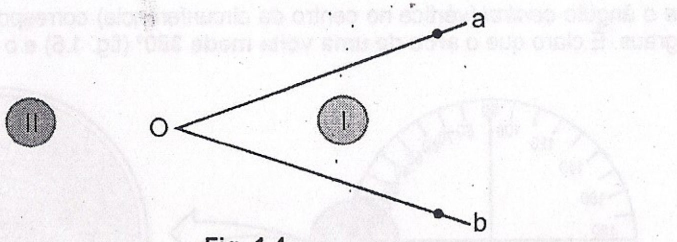


Fig. 1.4

Na fig. 1.4, o ângulo (I) é denominado **convexo** e o ângulo (II), **côncavo**. Ambos são indicados pela notação $a\hat{O}b$.

1.4. MEDIDA DE UM ÂNGULO

Dado um ângulo $a\hat{O}b$, constrói-se, com centro no ponto O, uma circunferência de raio qualquer; assim, os lados do ângulo determinam, na circunferência, um arco $\overset{\frown}{AB}$. Adotando-se como unidade um arco $\overset{\frown}{PQ}$ da circunferência (fig.1.5); convenciona-se, então, que a **medida do ângulo $a\hat{O}b$ é a mesma do arco $\overset{\frown}{AB}$** em relação à unidade escolhida.

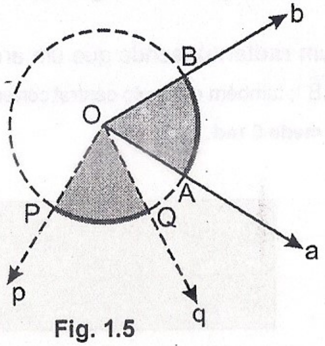


Fig. 1.5

$$\text{med.}\,a\hat{O}b = \text{med.}\overset{\frown}{AB}$$

A convenção feita equivale a adotar, como unitário, o ângulo $p\hat{O}q$, correspondente ao arco unidade $\overset{\frown}{PQ}$.

Fica assim estabelecido que as unidades de medida para arcos e para ângulos podem receber as *mesmas* denominações.

1.5. UNIDADES USUAIS DE MEDIDA

1) **GRAU** – é um arco unitário $\widehat{PQ}$ igual a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência (fig. 1.6).

Assim, o arco $\widehat{PQ}$ tem **medida 1º (um grau)** sendo que um arco $\widehat{AB}$ terá **medida G graus** se o arco $\widehat{PQ}$ "couber G vezes em $\widehat{AB}$"; também é verdadeiro dizer que o ângulo *central* (vértice no centro da circunferência) correspondente a $\widehat{AB}$ medirá G graus. É claro que o **arco de uma volta mede 360º** (fig. 1.6) e o **arco nulo, 0º**

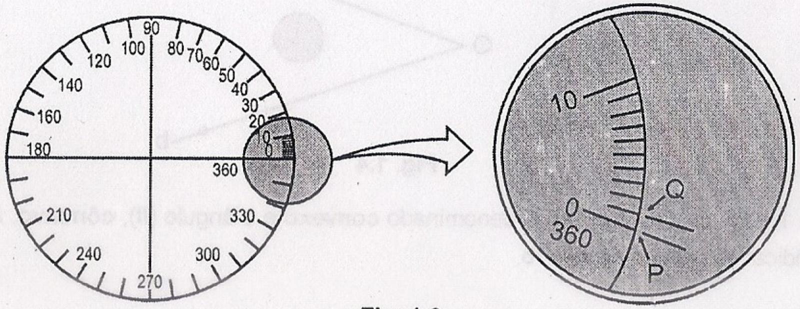


Fig. 1.6

Subdivisões do grau – grau admite como subdivisões o *minuto* (') e o *segundo* ("), de forma que

1º = 60'
1' = 60''
1º = 60' = 3600''

2) **RADIANO** – é um arco unitário $\widehat{PQ}$ cujo comprimento é igual ao comprimento do raio da circunferência.

Assim o arco $\widehat{PQ}$ tem **medida 1 rad (um radiano)**, sendo que um arco $\widehat{AB}$ terá **medida α rad** se o arco $\widehat{PQ}$ "couber α vezes em $\widehat{AB}$"; também o ângulo central correspondente a $\widehat{AB}$ medirá α rad (fig. 1.7). É claro que o **arco nulo mede 0 rad.**

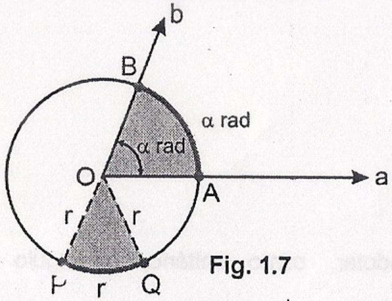


Fig. 1.7

compr. de $\widehat{PQ}$ = r
med. $\widehat{PQ}$ = 1 rad
med. $\widehat{AB}$ = med. $a\hat{O}b$ = α rad

Exercícios Resolvidos

1.3) Determine a medida α, em rad, de um arco de comprimento 15 cm, em uma circunferência de raio 12 cm.

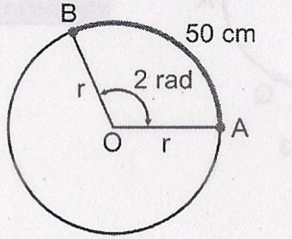
Solução

$$\text{med.(em rad)} = \frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}}$$

Assim:

$$\alpha = \frac{15}{12} \text{ e, portanto } \alpha = 1{,}25 \text{ rad}$$

1.4) Calcule o comprimento do raio na figura:



Solução

$$\text{med. } A\hat{O}B = \text{med. } \widehat{AB} = \frac{\text{comprimento de } \widehat{AB}}{\text{comprimento do raio}}$$

Assim:

$$2 = \frac{50}{r}; \text{ logo, } r = 25\text{cm}$$

1.6. O NÚMERO π: UMA RAZÃO GEOMÉTRICA

Um problema que interessou matemáticos de todas as idades da civilização foi o cálculo da razão entre o comprimento (C) e o diâmetro (2r) de uma circunferência.

O leitor já deve saber que, qualquer que seja a circunferência, a razão $\dfrac{C}{2r}$ é constante, dando o número irracional representado por π; disso resulta a conhecida expressão do comprimento da circunferência em função do raio:

$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow \boxed{C = 2\pi r}$$

Utilizando áreas ou perímetros de polígonos regulares inscritos ou circunscritos à circunferência, matemáticos egípcios (cerca de 1800 a.C.), babilônios, gregos chegaram a valores com aproximação apreciável do que hoje representamos por π. Arquimedes, por exemplo (nascido por volta de 287 a.C.), "cercou" o valor de π fazendo a razão entre os perímetros dos polígonos regulares inscritos e circunscritos à circunferência, "começando com o hexágono regular e dobrando, sucessivamente, o número de lados, até chegar a 96 lados"*.

É interessante comparar algumas aproximações de π obtidas por matemáticos da Antiguidade com uma aproximação atual com, digamos, 7 casas decimais:

	$\frac{C}{2r}$	expressão decimal
Egípcios	$\frac{19}{6}$	3,1666667
Babilônios	$\frac{25}{8}$	3,1250000
Gregos (Arquimedes)	$\frac{223}{71} < \frac{C}{2r} < \frac{22}{7}$	Entre 3,1408451 e 3,1428571
	π	3,1415927

*Ver Carl B. Boyer, **A History of Mathematics** (New York, John Wiley & Sons, 1968).

1.7. ARCO DE UMA VOLTA

Se $\overset{\frown}{AB}$ é o **arco de uma volta**, sua medida, em radianos, é 2π.
De fato, como

$$\text{med. } \overset{\frown}{AB} = \frac{\text{comprimento de } \overset{\frown}{AB}}{\text{comprimento da unidade}}$$

e compr. $\overset{\frown}{AB}$ = compr. circunferência = C = $2\pi r$, vem:

$$\text{med. } \overset{\frown}{AB} \text{ (em rad)} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Então: med. arco de 1 volta = 2π rad e, portanto,

$$2\pi \text{ rad} = 360°$$

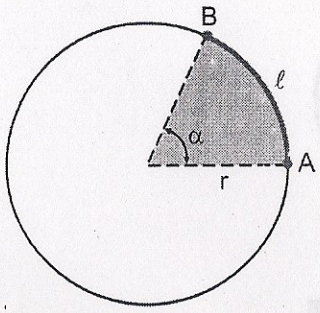
Notas: 1ª) É costume omitir-se o símbolo rad; portanto, se for dito que um arco **mede 2**, fica subentendido que sua medida é **2 radianos.**

2ª) Para a maioria das aplicações que desenvolveremos, será plenamente satisfatória a aproximação $\pi = 3,14$.

1.8. COMPRIMENTO DE UM ARCO

Problema: Se α é a **medida em radianos** de um arco $\overset{\frown}{AB}$ de uma circunferência de raio r, qual o comprimento ℓ desse arco?

Solução



$$\text{med. } \overset{\frown}{AB} \text{(em rad)} = \frac{\text{comprimento de } \overset{\frown}{AB}}{\text{comprimento do raio}}$$

então: $\alpha = \frac{\ell}{r}$, donde

$$\ell = \alpha \cdot r$$

Assim, pode-se enunciar que:

O comprimento de um arco é igual ao produto do raio da circunferência pela medida, em radianos, do ângulo central correspondente.

1.9. CONVERSÃO DE UNIDADES

Se a medida de um arco $\overset{\frown}{AB}$ em radianos e graus, fornece, respectivamente, os números α e G (α radianos e G graus), a relação entre tais números é obtida pela proporção indicada por:

2π **rad** correspondem a **360 graus**
α **rad** correspondem a **G graus**

tem-se, então, que $\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{G}{360}$, ou ainda :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{G}{180}$$

Essa relação permite a mudança de medidas de arcos (e ângulos) de graus para radianos, ou o inverso, de radianos para graus; os exemplos a seguir esclarecem:

a) Se um arco mede 120°, fazemos G = 120; então:

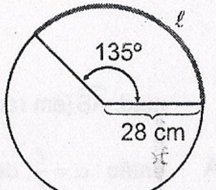
$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{120}{180}$, donde $\alpha = \frac{2\pi}{3}$. Assim, $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad

b) Se um arco mede $\frac{2\pi}{9}$ rad, fazemos $\alpha = \frac{2\pi}{9}$; então:

$\frac{\frac{2\pi}{9}}{\pi} = \frac{G}{180}$, donde G = 40. Assim, $\frac{2\pi}{9}$ rad = 40°

Exercícios Resolvidos

1.5) Determine o comprimento ℓ do arco da figura.



Solução

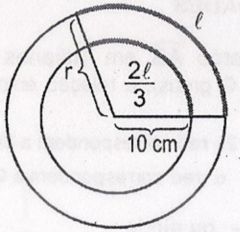
Convertamos, inicialmente, 135° para α rad:

$$\frac{\alpha}{\pi}=\frac{135}{180}\Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{3\pi}{4}}$$

como $\ell=\alpha\cdot r$, vem $\ell=\frac{3\pi}{4}\cdot 28=21\pi\,\text{cm}$.

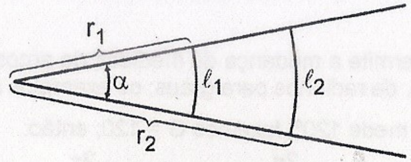
Adotando a aproximação $\pi = 3{,}14$, obtemos $\ell \cong 66\text{cm}$

1.6) Determine o valor de r na figura.



Solução

Se α é a medida em radianos de um ângulo central como na figura abaixo



temos: $\ell_1=\alpha r_1$ e $\ell_2=\alpha r_2$ ou seja: $\boxed{\alpha=\frac{\ell_1}{r_1}=\frac{\ell_2}{r_2}}$

Portanto, no caso da figura dada, temos:

$$\frac{\frac{2\ell}{3}}{10}=\frac{\ell}{r},\ \text{donde}\ r=15\ \text{cm}$$

1.7) Calcule a medida em graus do arco de medida 1 rad.

Solução

Em $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{G}{180}$ fazemos $\alpha=1$; temos, então:

$\frac{1}{\pi}=\frac{G}{180}$ donde $G=\frac{180}{\pi}$;

adotando $\pi=3{,}14$, vem $G=\frac{180}{3{,}14}$

```
graus     18000 | 314
           2300 |__________
            102   57° 19' 29"
           x 60
          -----
minutos    6120
           2980
            154
           x 60
          -----
segundos   9240
           2960
            134
```

Para a aproximação adotada, obtemos que 1 rad = 57° 19′ 29″

Exercícios Propostos

1.8) Numa circunferência adotou-se, como unidade de medida, um arco de comprimento 0,2 cm. Nessa unidade, o arco $\widehat{AB}$ mede 4,5 unidades. Qual é o comprimento do arco $\widehat{AB}$?

1.9) O arco $\widehat{AB}$ de uma circunferência tem comprimento igual a 10 cm e a sua medida é 2,5 unidades. Qual é o comprimento da unidade de medida?

1.10) Adotou-se numa circunferência uma unidade de medida cujo comprimento é igual ao do diâmetro. Nessa unidade, qual é a medida da circunferência?

1.11) Numa circunferência de raio **r**, o arco $\widehat{AB}$, de comprimento 5 cm, mede 2 rad. Em outra circunferência, de raio **R**, o arco $\widehat{CD}$, de comprimento 5 cm, mede 3 rad. Determine a razão $\frac{r}{R}$.

1.12) O arco $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência de raio r mede π rad. O arco $\overset{\frown}{CD}$ da circunferência de raio 2r mede tambem π rad. Determine a razão entre os comprimentos dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$, isto é, calcule a razão $\dfrac{\text{compr. } \overset{\frown}{AB}}{\text{compr. } \overset{\frown}{CD}}$.

1.13) Calcule as medidas em radianos dos arcos de medidas 15°, 18°, 20° e 50°.

1.14) Converta em radianos a medida do arco de 15° 19′, adotando a aproximação π = 3,14.

Capítulo **2**

Razões trigonométricas no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente

2.1. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

São conhecidas da Geometria as relações entre os elementos métricos de um triângulo retângulo; é, no entanto, conveniente uma recordação de tais propriedades.

Consideremos um triângulo retângulo ABC, onde a *hipotenusa* $\overline{BC}$ e os *catetos* $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ tem medidas **a**, **b** e **c**, respectivamente (fig.2.1). A *altura relativa à hipotenusa*, $\overline{AH}$, tem medida **h** e determina os segmentos $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$, de medidas **n** e **m**, que são as *projeções ortogonais* dos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa (é claro que n + m = a).

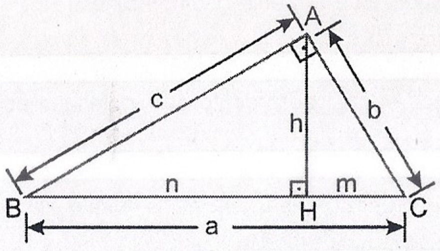


Fig. 2.1

Os triângulos ABC, HBA e HAC são semelhantes conforme mostra a fig. 2.2:

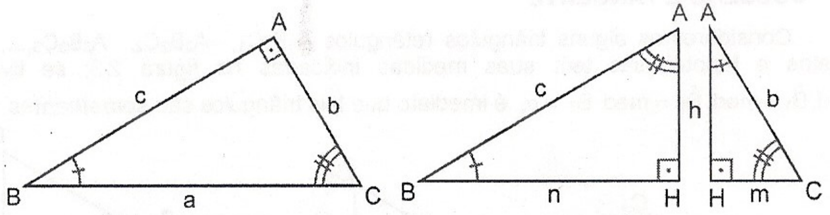


Fig. 2.2

Podemos, então, escrever as seguintes proporcionalidades entre os lados homólogos:

1) $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$, donde $\boxed{b^2 = am}$

2) $\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$, donde $\boxed{c^2 = an}$

3) $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$, donde $\boxed{h^2 = mn}$

4) $\frac{b}{a} = \frac{h}{c}$, donde $\boxed{bc = ah}$

5) Somando membro a membro as relações obtidas em 1 e 2, vem: $b^2 + c^2 = am + an \Rightarrow b^2 + c^2 = a\underbrace{(m+n)}_{a}$

e portanto:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

que é o conhecido **Teorema de Pitágoras**.

Podemos, então, enunciar que para qualquer **triângulo retângulo**:

Cada cateto é **média** geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela.

A altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. (Pitágoras)

2.2. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO: SENO, COSSENO E TANGENTE

Consideremos alguns triângulos retângulos $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$,..., cujos catetos e hipotenusas tem suas medidas indicadas na figura 2.3; se tivermos med. $\hat{B}_1$ = med. $\hat{B}_2$ = med. $\hat{B}_3 = \alpha$, é imediato que tais triângulos são ***semelhantes***.

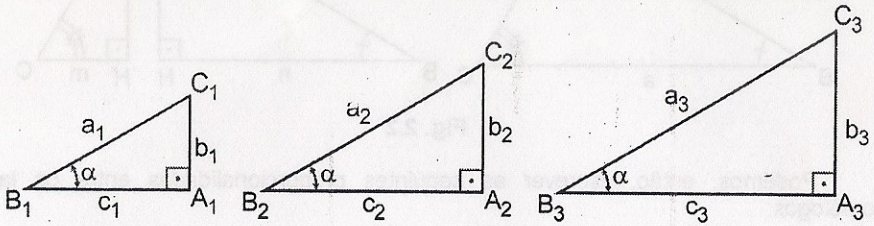


Fig. 2,3

Dessa semelhança podemos extrair determinadas **razões** que, como veremos, estarão diretamente relacionadas com α, que é a medida de um dos ângulos agudos dos triângulos. Assim, temos:

1) $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \text{constante}$

Essa constante independe de **qual** dos triângulos retângulos estamos considerando. É uma característica do **ângulo agudo** oposto aos catetos b_1, b_2, b_3. Podemos concluir que, em **qualquer triângulo retângulo**, a razão entre o cateto oposto a um ângulo e a hipotenusa será uma constante que depende, não do "tamanho" do triângulo, mas da **medida** do ângulo considerado; a essa **razão** (constante) damos o nome de **seno do ângulo agudo** e, no caso do ângulo de medida α, indicamos por sen α.

2) $\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3} = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \text{constante}$

Pelas mesmas considerações feitas no 1, concluímos que, em **qualquer triângulo retângulo**, a razão entre o cateto oposto a um ângulo agudo e a hipotenusa é uma constante que depende da **medida** do ângulo considerado; a essa razão damos o nome de cosseno do ângulo agudo e indicamos por cos α.

3) $\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \text{constante}$

Analogamente aos dois casos anteriores, vemos que a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente a um ângulo agudo, em **qualquer triângulo retângulo**, é constante; a essa razão damos o nome de **tangente do ângulo agudo** e indicamos por **tg** α

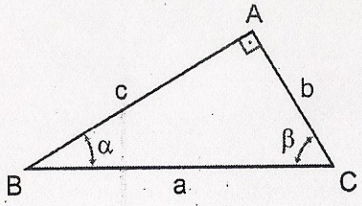
Temos assim definidas as chamadas **razões trigonométricas no triângulo retângulo**. Podemos, então, enunciar que:

Seno de um ângulo agudo é a razão entre o **cateto oposto** e a **hipotenusa**.

Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o **cateto adjacente** e a **hipotenusa**.

Tangente de um ângulo agudo é a razão entre o **cateto oposto** e o **cateto adjacente**.

Em resumo, para um triângulo retângulo ABC (fig. 2.4), temos:



sen $\alpha = \frac{b}{a}$	cos $\alpha = \frac{c}{a}$	tg $\alpha = \frac{b}{c}$

sen $\beta = \frac{c}{a}$	cos $\beta = \frac{b}{a}$	tg $\beta = \frac{c}{b}$

2.3. APLICAÇÃO IMPORTANTE: ÂNGULOS NOTÁVEIS

Problema: Construir uma tabela com os valores de senos, cossenos e tangentes dos ângulos de medidas 30º, 45º, 60º.

Solução

a) Consideremos um *triângulo retângulo isósceles* ABC (fig. 2.5), cuja hipotenusa mede **a** e cujos catetos medem **b**.
Pelo Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + b^2 = 2b^2; \text{ logo, } a = b\sqrt{2}$$

Tomando as razões trigonométrica para o ângulo $\hat{B}$, temos:

$$\text{sen } 45° = \frac{b}{a} = \frac{b}{b\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ logo, sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{b}{a} = \text{sen } 45°; \text{ logo, } \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{b}{b}; \text{ logo, tg } 45° = 1$$

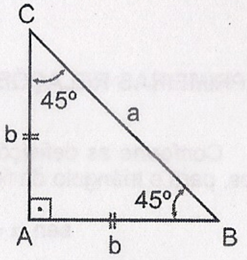


Fig. 2.5

b) Consideremos, agora, um *triângulo equilátero* MNP (fig. 2.6) cujo lado mede **a** e cuja altura mede **h**.

Como o triângulo MHN é retângulo, pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ logo, } h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Para o ângulo de medida 30º, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a}; \text{ logo, sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{h}{a} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{a}; \text{ logo, } \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{h} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \text{ logo, tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

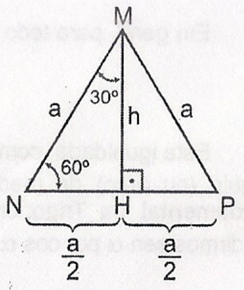


Fig. 2.6

Para o ângulo de medida 60°, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{h}{a} = \cos 30°; \text{ logo, sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)}{a} = \text{sen } 30°; \text{ logo, } \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)}; \text{ logo, tg } 60° = \sqrt{3}$$

Podemos, assim, construir a seguinte tabela (*) que será de grande utilidade no estudo da Trigonometria:

	30º	45º	60º
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercícios Resolvidos

2.1) Determine os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 e um dos ângulos mede 60°.

Solução

No triângulo da figura 2.7, temos:

$$\text{sen } 60° = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{6}; \text{ logo, } b = 3\sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{c}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{c}{6}; \text{ logo, } c = 3$$

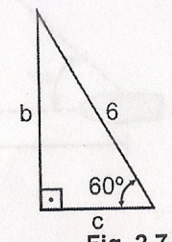


Fig. 2.7

2.2) Determine os ângulos agudos de um triângulo retângulo para o qual a razão entre a soma dos catetos e o cateto menor $\sqrt{3}+1$.

Solução

Sendo **b** e **c**, com b > c, as medidas dos catetos (fig. 2.8), temos que $\frac{b+c}{c} = \sqrt{3}+1$ então: $\frac{b}{c}+\frac{c}{c} = \sqrt{3}+1$ ou $\frac{b}{c} = \sqrt{3}$;

como $\frac{b}{c} = \text{tg}\ \alpha$, vem $\text{tg}\ \alpha = \sqrt{3}$ e, portanto, $\alpha = 60°$

Sendo $\beta = 90° - \alpha$, $\beta = 30°$.

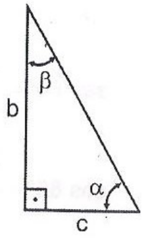


Fig. 2.8

(*) No final deste volume, encontra-se uma tabela com os valores de senos, cossenos e tangentes de ângulos com medidas variando de grau em grau. Tais valores são dados com aproximação até a 4ª casa decimal. Por exemplo, $\text{sen}\ 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cong 0,7071$.

2.3) Um observador, a bordo de um barco em movimento retilíneo, mede, num certo instante, o ângulo definido pela trajetória do barco e uma linha imaginária que o liga a um farol. Algum tempo depois, faz uma nova medida. Sabendo que as medidas obtidas foram, respectivamente, 45° e 80° e que entre os instantes de cada medida a menor distância que o barco esteve do farol foi de 1000 metros, calcule, com aproximação de 1 metro:

a) a distância percorrida pelo barco entre os instantes das duas medidas:
b) as distâncias entre o barco e o farol nos instantes das primeira e segunda medidas.

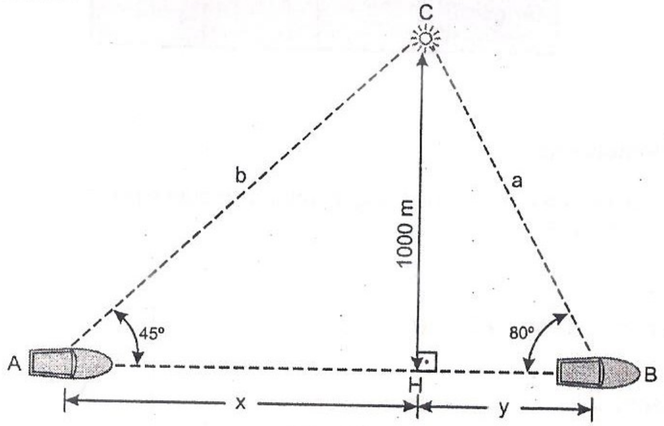


Fig. 2.9

Solução

Na figura 2.9, temos:

a) o triângulo retângulo AHC é *isósceles*; logo, x = 1000 m;

no triângulo BHC: $\text{tg}\ 80° = \frac{1000}{y}$, donde $y = \frac{1000}{\text{tg}\ 80°} = \frac{1000}{5,6713} \cong 176,3$; como a aproximação exigida é de 1 m, temos y = 176 m. Assim, o percurso do barco foi de x + y = 1176m.

b) no triângulo AHC: $\text{sen}\ 45° = \frac{1000}{b}$, donde $b = \frac{1000}{\text{sen}\ 45°} = \frac{1000}{0,7071} \cong 1414,2$

no triângulo BHC: $\text{sen}\ 80° = \frac{1000}{a}$, donde $a = \frac{1000}{\text{sen}\ 80°} = \frac{1000}{0,9848} \cong 1015,4$

Assim, as distâncias do farol ao barco, nos instantes das medidas, foram, respectivamente, 1414 m e 1015 m.

2.4. PRIMEIRAS RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

Conforme as definições das razões trigonométricas, temos, para o triângulo da figura 2.10:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{b}{a} \quad \text{e} \quad \cos\ \alpha = \frac{c}{a}$$

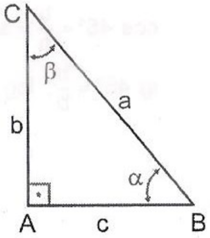


Fig. 2.10

Elevando ao quadrado, membro a membro, as duas igualdades, encontramos:

$$\text{sen}^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} \quad \text{e} \quad \cos^2\alpha = \frac{c^2}{a^2}$$

Somando então essas duas últimas igualdades, obtemos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2}$$

e, finalmente, $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Da mesma forma, para o ângulo de medida β, encontraríamos:

$$\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

Em geral, para todo ângulo agudo de medida α, tem-se:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Esta igualdade, como veremos em capítulo posterior, será generalizada para todo ângulo (ou arco) de medida α; tal igualdade é conhecida como **primeira relação fundamental** da Trigonometria. Outra relação, também **fundamental**, é obtida se dividirmos sen α por cos α; assim:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\ \alpha$$

logo, podemos escrever:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Podemos, como *exemplo*, verificar as relações acima com os valores da tabela para os ângulos notáveis:

a) $\operatorname{sen}^2 30° + \cos^2 30° = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

b) $\frac{\operatorname{sen} 60°}{\cos 60°} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°$

c) $\frac{\operatorname{sen} 45°}{\cos 45°} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = 1 = \operatorname{tg} 45°$

Exercícios Resolvidos

2.4) Calcule $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{tg}\alpha$ Sabendo que a é um ângulo agudo e que $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

Solução

1º) como $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, temos:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

Assim, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

2º) como $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, temos:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 2\sqrt{2}$$

2.5) Sendo $\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = m$ e α um ângulo agudo, determine o produto $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$.

Solução

Elevando ambos os membros da igualdade dada ao quadrado, temos:

$(\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = m^2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = m^2$;

mas, $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; então:

$1 - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = m^2 \Rightarrow 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 1 - m^2$ e, finalmente

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1 - m^2}{2}$$

2.6) Prove que:

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha\right)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)\cdot\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right) = 1$$

Solução

Vamos partir do *primeiro membro* da igualdade, lembrando que $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$;

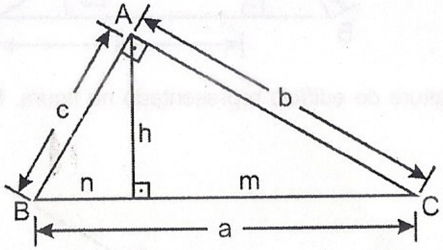
$$\boxed{1^\circ m} = \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)\left(\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{\cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha} = 1 = \boxed{2^\circ m}$$

Exercícios Propostos

2.7) Num triângulo retângulo, um dos catetos mede 5 e a altura relativa à hipotenusa mede 3. Determine as medidas do outro cateto, da hipotenusa e dos segmentos que a altura determina sobre a hipotenusa.

2.8) No triângulo da figura são dados m = 3 e n = 1

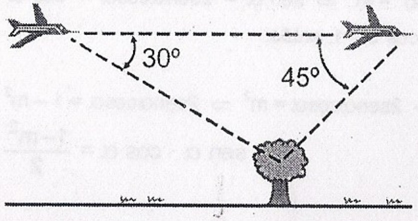


Calcule a, b, c e h

2.9) Com referência à figura do exercício anterior, sendo dados m = 5 e h = $\sqrt{5}$, determine as medidas dos demais segmentos indicados.

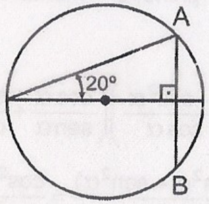
2.10) Ainda com referência à figura do exercício 2.8, sendo dados b = 2 e n = 3, calcule as medidas dos demais segmentos indicados.

2.11) Voando a uma altitude de 1000 metros, o piloto mede, em dois instantes diferentes, os ângulos segundo os quais ele avista uma árvore, como indica a figura.

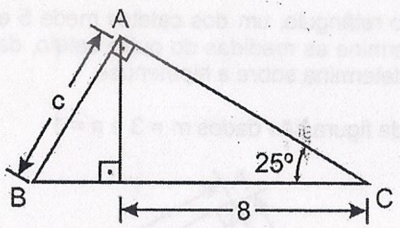


Qual é a distância percorrida pelo avião entre os dois instantes considerados? Utilizar os valores tg 30º = 0,58 e tg 45º = 1,00.

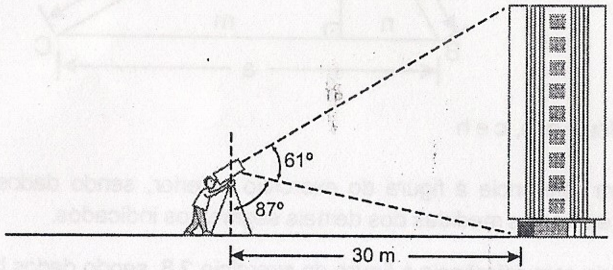
2.12) Sendo 4 cm o raio da circunferência da figura, calcule o comprimento da corda $\overline{AB}$. Dados: sen 20º = 0,34 e cos 20º = 0,94.



2.13) Calcule a medida c do lado $\overline{AB}$ do triângulo retângulo dado na figura abaixo. Dados: sen 25º = 0,42; cos 25º = 0,91; tg 25º = 0,47.



2.14) Calcule a altura do edifício representado na figura. São dados: tg 87º = 19,1; tg 58º = 1,6



2.15) Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{7}$, calcule cos α e tg α.

2.16) Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que tg α = 3, calcule sen α e cos α.

2.17) Prove que

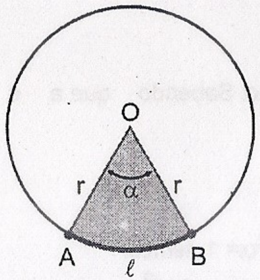
$$\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \frac{1+\operatorname{sen}\alpha}{1-\operatorname{sen}\alpha}$$

2.18) Simplifique a expressão

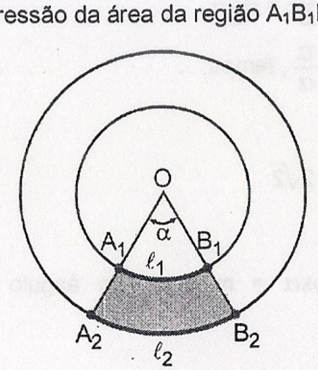
$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x - \operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x + \operatorname{sen}^2 x$$

Exercícios Suplementares

I.1) A parte assinalada na figura é um *setor circular*, cuja área é dada pela expressão $S = \dfrac{\ell \cdot r}{2}$, onde ℓ é o comprimento do arco $\widehat{AB}$ e r é o comprimento do raio da circunferência.



Considere, agora, a segunda figura, onde α é a medida, em radianos, do ângulo $A_2\hat{O}B_2$ e não são conhecidos os raios das circunferências. Escreva, em função de α, ℓ_1 e ℓ_2, a expressão da área da região $A_1B_1B_2A_2$.



I.2) Se, na segunda figura do exercício anterior, tivermos que a área de $A_1B_1B_2A_2$ vale $\frac{5\pi}{6}\text{cm}^2$ e $\ell_2 + \ell_1 = \frac{5\pi}{3}$ cm, determine o valor de $\overline{OA_2} - \overline{OA_1}$.

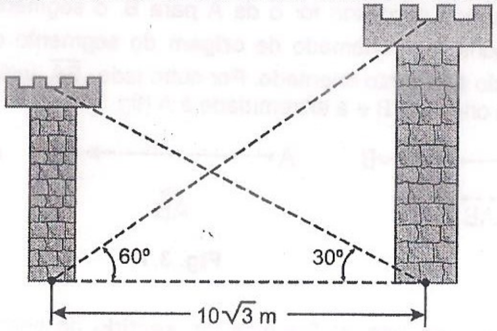
I.3) Resolva o sistema

$$\begin{cases} a + 2b = \frac{7\pi}{3} \\ 2a + 3b = \frac{23\pi}{6} \end{cases}$$

dando a resposta em graus.

I.4) Defina uma unidade de medida para arcos (e ângulos), dando-lhe o nome de Grado, de modo que o arco de meia volta tenha medida 200 grados. Se um arco $\overset{\frown}{AB}$ tem medida α radianos e x grados, determine a relação entre α e x.

I.5) Na figura ao lado, determine as alturas das torres e a distância entre seus topos.



I.6) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 10 m e a mediana relativa a um dos catetos mede 8 m. Utilizando a tabela do final do livro, determine aproximadamente as medidas dos ângulos agudos do triângulo.

I.7) Um triângulo retângulo tem um dos catetos medindo **a** e hipotenusa de medida **3a**. Calcule o quadrado da soma dos senos dos ângulos agudos desse triângulo.

I.8) Sendo α a medida de um ângulo agudo tal que tg $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, calcule $\text{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$.

I.9) Seja α um ângulo agudo tal que sen α + cos α = m. Calcule, então,

a) $\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

b) $\text{tg}\,\alpha + \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$

I.10) Sendo **a** um número real diferente de 2, calcule o valor da expressão
$y = a(\text{sen}^4x + \cos^4x) + 2a\,\text{sen}^2x \cdot \cos^2x - 2\text{sen}^4x - 4\cos^2x + 2\cos^4x$

PARTE II

Capítulo 3 – **Circunferência trigonométrica**
Capítulo 4 – **Seno e cosseno**
Capítulo 5 – **Tangente e cotangente**
Capítulo 6 – **Secante e cossecante**
Capítulo 7 – **Redução ao 1º quadrante**
Capítulo 8 – **Equação simples**

Capítulo 3

Circunferência trigonométrica

3.1. SEGMENTO ORIENTADO

Sobre um segmento de reta $\overline{AB}$ podemos fixar dois *sentidos de percurso*: um de A para B e o outro de B para A.

Quando sobre o segmento $\overline{AB}$ fixamos um dos sentidos de percurso, construímos um novo objeto matemático: o **segmento orientado.**

Se o sentido escolhido for o de A para B, o segmento orientado será indicado com $\overrightarrow{AB}$; o ponto A é chamado de **origem** do segmento orientado e o ponto **B**, de **extremidade** do segmento orientado. Por outro lado, $\overrightarrow{BA}$ indicará o segmento orientado de B para A: a origem é B e a extremidade é A (fig. 3.1).

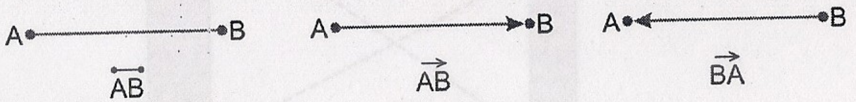


Fig. 3.1

3.2. EIXO

Se sobre uma reta (**r**) fixarmos um **sentido** de percurso, obteremos uma **reta orientada**; o sentido adotado é, convencionalmente, chamado de *positivo* (fig. 3.2) e o sentido oposto, de *negativo*.

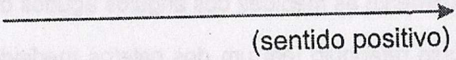


Fig. 3.2

Se, em seguida, sobre a reta orientada fixarmos um **ponto O** e um **segmento unitário** $\overline{OU}$, obteremos o que se denomina um **eixo.** O ponto O recebe o nome de **origem do eixo**; qualquer segmento $\overline{AB}$ do eixo terá sua medida dada em relação a $\overline{OU}$, isto é, a med. $\overline{AB}$ será expressa pelo número de vezes que $\overline{OU}$ "cabe" em $\overline{AB}$. A figura 3.3 mostra um eixo e um segmento $\overline{AB}$ de medida 3.

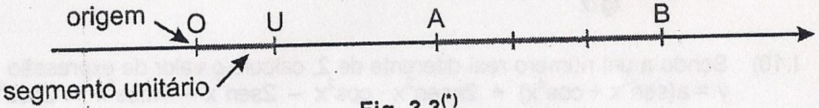
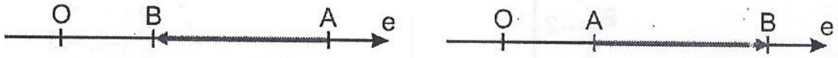


Fig. 3.3(*)

(*) Para maior clareza dos desenhos, omitiremos, na *figura* de um eixo, o segmento unitário $\overline{OU}$, apresentando apenas a reta orientada e a origem O.

3.3. MEDIDA ALGÉBRICA DE UM SEGMENTO ORIENTADO

Se $\overline{AB}$ é um *segmento orientado de um eixo* e, então **medida algébrica de** $\overline{AB}$ é o número real $\overline{AB}$ dado por +med. $\overline{AB}$ ou –med. $\overline{AB}$, conforme o sentido de $\overline{AB}$ concordar ou discordar do sentido de **e** (fig. 3.4).



$\overline{AB} = -\text{med.}\overleftrightarrow{AB}$ $\qquad$ $\overline{AB} = +\text{med.}\overleftrightarrow{AB}$

Fig. 3.4

Como exemplos, na figura 3.3 temos $\overline{AB} = +3$ e $\overline{BA} = -3$

Observações

1ª) Se A ≡ B, temos o *segmento nulo*, cuja medida algébrica é $\overline{AB} = \overline{BA} = 0$

2ª) É imediato que, em qualquer situação, $\overline{AB} = -\overline{BA}$ ou $\overline{AB} + \overline{BA} = 0$

3.4. RELAÇÃO DE CHASLES

Para três pontos, A, B e C, dispostos arbitrariamente sobre um eixo e, vale a relação:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$$

A prova dessa relação deve ser feita para cada um dos seis casos possíveis (fig. 3.5) de disposição dos três pontos sobre **e**. Vamos fazer, como exemplo, a demonstração do caso (V); as demais se efetivam de modo análogo.

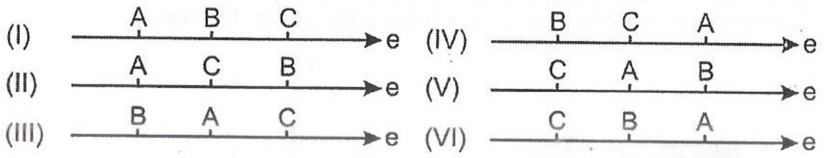


Fig. 3.5

Observa-se, em (V), que os segmentos $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ são tais que med. $\overline{CA}$ + med. $\overline{AB}$ = med. $\overline{CB}$ (1)

Como os segmentos orientados $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ tem o sentido do eixo **e**, suas medidas são iguais às suas medidas algébricas (todas positivas). Pode-se, então, escrever a relação (1)

$$\overline{CA} + \overline{AB} = \overline{CB}$$

ou

$$\overline{CA} + \overline{AB} - \overline{CB} = 0$$

Mas tem-se que: $-\overline{CB} = \overline{BC}$; portanto $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$

3.5. SISTEMA DE ABSCISSAS

Se sobre um eixo **e** (origem 0) quisermos localizar um ponto **P**, devemos conhecer a que "distância" ele se encontra da origem (med. $\overline{OP}$) e se, a partir dessa origem, ele se acha a caminho do sentido positivo ou do sentido negativo de **e**. Esses elementos nada mais descrevem do que a medida algébrica do segmento orientado $\overline{OP}$. Assim, a posição de qualquer ponto P de um eixo estará determinada pela medida algébrica do segmento $\overline{OP}$, que se denomina **abscissa de P (x_P):**

$$\boxed{x_P = \overline{OP}}$$

Portanto, um eixo **e** define um *sistema de abscissas* que a cada *ponto* associa um *número real* e reciprocamente. A figura 3.6 mostra alguns exemplos. Para os pontos A, B, C, D e O, temos:

$$OA = x_A = -2;\ \overline{OB} = x_B = \sqrt{3};\ \overline{OC} = x_C = 4;\ \overline{OD} = x_D = -\frac{7}{2};\ x_O = 0$$

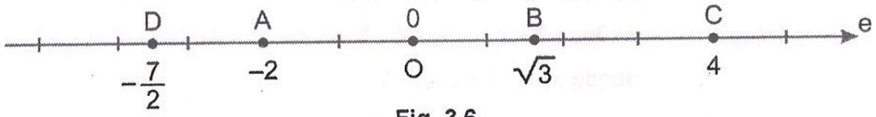


Fig. 3.6

É possível, agora, expressar a medida algébrica de um segmento orientado $\overline{AB}$ através das abscissas de sua origem A e de sua extremidade B. Sendo x_A e x_B essas abscissas (fig. 3.7), a relação de Chasles permite escrever:

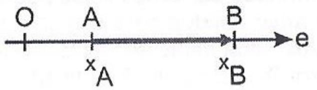


Fig. 3.7

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BO} = 0$$

como $\overline{OA} = x_A$ e $\overline{BO} = -\overline{OB} = -x_B$, vem:

$$x_A + \overline{AB} - x_B = 0$$

donde, finalmente

$$\boxed{\overline{AB} = x_B - x_A}$$

Enunciamos, assim, que:

> a medida algébrica de um segmento orientado é igual à diferença entre a abscissa da extremidade e a abscissa da origem do segmento.

Exercícios Resolvidos

3.1) Determine a abscissa do ponto P de modo que a medida algébrica de $\overline{PM}$ seja –5, dado que $x_M = -1$.

Solução

Como $\overline{PM} = x_M - x_P$, temos:

$-5 = -1 - x_P$ donde $x_P = 4$

3.2) Os pontos A, B e C estão sobre o mesmo eixo e tem abscissas, respectivamente, iguais a –1, 2 e –3. Calcule a abscissa do ponto P para o qual $\overline{AP}\cdot\overline{AB} + \overline{BP}\cdot\overline{CP} + \overline{AC} = 0$

Solução

$\overline{AP}\cdot\overline{AB} = (x_P - x_A)(x_B - x_A) = (x_P + 1)(2 + 1) = 3x_P + 3$

$\overline{BP}\cdot\overline{CP} = (x_P - x_B)(x_P - x_C) = (x_P - 2)(x_P + 3) = x_{P2} + x_P - 6$

$\overline{AC} = x_C - x_A = -3 + 1 = -2$

Então

$$\overline{AP}\cdot\overline{AB} + \overline{BP}\cdot\overline{CP} + \overline{AC} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x_P + 3 + x_{p2} + x_P - 6 - 2 = 0 \Rightarrow x_P^2 + 4x_P - 5 = 0$$

donde $x_P = -5$ ou $x_P = 1$

3.6. SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

Consideremos dois eixos perpendiculares Ox e Oy, cuja origem é a interseção O, que tenham a mesma unidade de medida (fig. 3.8). A localização de um ponto P qualquer do plano determinado por esses eixos pode ser feita através da associação do ponto a *dois números reais* obtidos pelo seguinte processo: conduzimos por P retas perpendiculares aos eixos: uma delas encontra o eixo Ox no ponto P_1, de abscissa x_p e a outra encontra o eixo Oy no ponto P_2, de abscissa y_p. Obtemos, assim, um **par ordenado** (x_p, y_p). Os números x_p e y_p chamam-se **coordenadas de P**, sendo que x_p é chamado **abscissa** e y_p é chamado **ordenada**. O *sistema de coordenadas* estabelecido por esse processo denomina-se **sistema cartesiano ortogonal**.

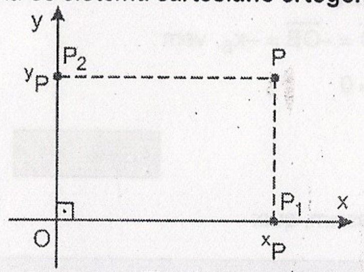
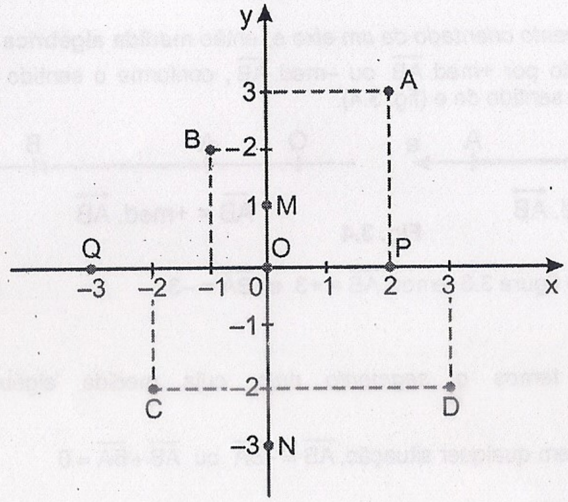


Fig. 3.8

A figura 3.9 mostra alguns pontos do plano cartesiano com suas respectivas coordenadas. É importante observar que os pontos pertencentes ao eixo Ox possuem ordenada y = 0, enquanto que os pontos pertencentes ao eixo Oy possuem abscissa x = 0.



A (2; 3)
B (–1; 2)
C (–2; –2)
D (3; –2)
P (2; 0)
Q (–3; 0)
M (0; 1)
N (0; –3)
O (0; 0)

Fig. 3.9

Quadrantes – Os dois eixos do sistema dividem o plano em quatro regiões, denominadas **quadrantes** e numeradas conforme figura 3.10. Convenciona-se que os pontos situados sobre os eixos não pertencem a nenhum dos quadrantes. É imediata a relação entre cada quadrante e os sinais das coordenadas dos pontos; assim, um ponto do primeiro quadrante tem suas duas coordenadas *positivas* e um ponto do segundo quadrante tem *abscissa negativa* e *ordenada positiva*. Em resumo:

1º quadrante (+; +)
2º quadrante (–; +)
3º quadrante (–; –)
4º quadrante (+; –)

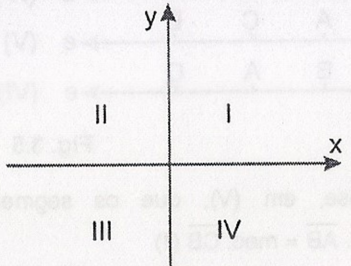


Fig. 3.10

3.7. ARCO ORIENTADO

Um arco de circunferência $\overset{\frown}{AP}$ admite dois sentidos de percurso: de A para P ou de P para A; escolhido um desses sentidos, tem-se um **arco orientado**. Se o sentido adotado for de A para P, o ponto A é chamado **origem** e P, **extremidade**; nesse caso, o arco será indicado por $\overrightarrow{AP}$. Assim, $\overrightarrow{PA}$ indicará o arco orientado de **P** para **A** (origem **P** e extremidade **A**) (fig. 3.11).

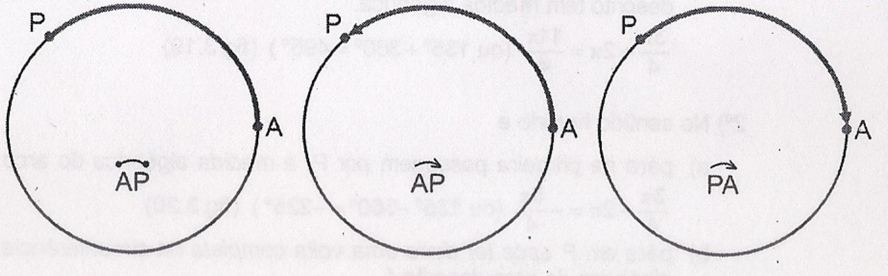


Fig. 3.11

Em qualquer dos casos, a medida é a mesma de $\overset{\frown}{AP}$ que, como já vimos, é indicada por med. $\overset{\frown}{AP}$, dada em graus ou radianos.

3.8. CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Num sistema cartesiano ortogonal, consideremos o ponto A do eixo Ox, de abscissa igual a 1 (fig. 3.12). Construímos, então, com centro na origem O do sistema, uma circunferência que passa por A e tem, por isso, raio unitário (fig. 3.13). Vamos convencionar que o ponto A será a **origem** dos arcos orientados dessa circunferência, isto é, que para percorrer estes arcos, A será sempre o *ponto de partida*. Vamos também adotar o **sentido anti-horário** como **sentido positivo** de percurso. Assim, a essa circunferência (de raio unitário, origem no ponto A, dotada de um sentido positivo), damos o nome de **ciclo trigonométrico** ou **circunferência trigonométrica**.

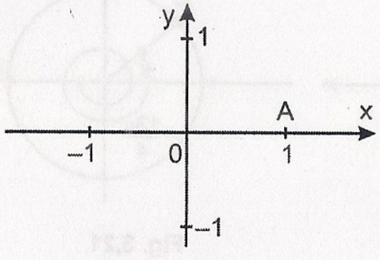


Fig. 3.12

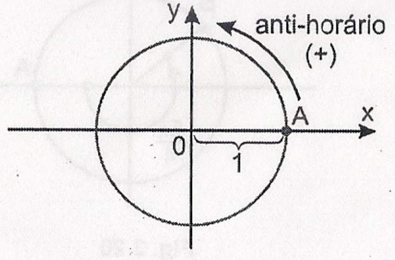


Fig. 3.13

3.9. MEDIDA ALGÉBRICA DE UM ARCO ORIENTADO

Se $\overrightarrow{AP}$ é um *arco orientado da circunferência trigonométrica* e sua medida, em graus ou radianos, é med. $\overset{\frown}{AP}$, **medida algébrica de AP** é o número real $\overrightarrow{AP}$ dado por +med. $\overset{\frown}{AP}$ ou –med. $\overset{\frown}{AP}$, respectivamente quando o sentido de **AP** for anti-horário ou horário (fig. 3.14).

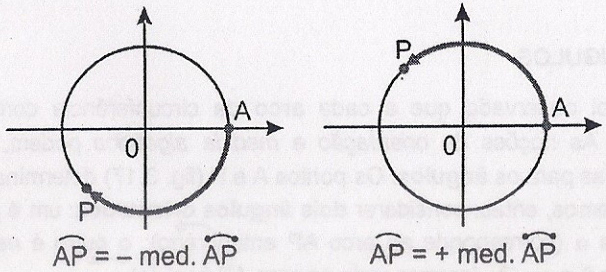


Fig. 3.14

É importante notar que, com extremidades num *mesmo* ponto P, existem dois arcos orientados AP, com medidas e sentidos diferentes (fig. 3.15). Se indicarmos por α a medida algébrica do arco AP de sentido anti-horário e por β a do arco AP de sentido horário, com α e β em radianos, teremos: β = –(2π – α) ou

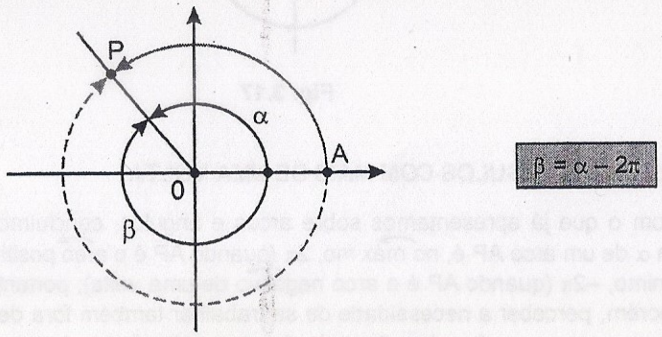
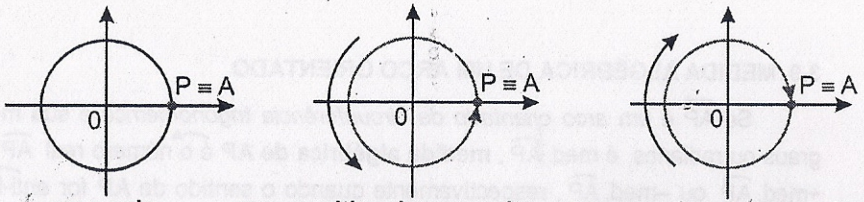


Fig. 3.15

Como exemplo (acompanhando na figura 3.15), se $\alpha = \frac{2\pi}{3}(120°)$, então $\beta = \frac{2\pi}{3} - 2\pi$, isto é $\beta = -\frac{4\pi}{3}(-240°)$. Portanto, é a **medida algébrica** que estabelece a distinção entre os dois arcos AP, já que ambos tem as *mesmas* origem e extremidade.

No *caso particular* em que P coincide com A, podemos distinguir **três arcos**: o **arco nulo**, o **arco positivo de uma volta** e o **arco negativo de uma volta** (fig. 3.16); suas medidas algébricas são, respectivamente, zero, +2π (+360°) e –2π (–360°).



arco nulo **arco positivo de uma volta** **arco negativo de uma volta**

Fig. 3.16

3.10. ÂNGULOS

Foi observado que a cada **arco** da circunferência corresponde um **ângulo central**. As noções de *orientação* e *medida algébrica* podem, por essa razão, ser estendidas para os **ângulos**. Os pontos A e P (fig. 3.17) determinam as semi-retas Ox e Op; podemos, então, considerar **dois ângulos orientados**: um é *positivo* e tem medida algébrica α (corresponde ao arco $\overrightarrow{AP}$ anti-horário); o outro é *negativo* e tem medida algébrica $\beta = \alpha - 2\pi$ (corresponde ao arco $\overrightarrow{AP}$ horário).

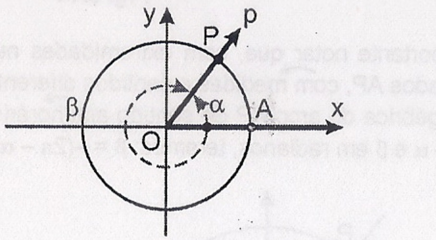


Fig. 3.17

3.11. ARCOS OU ÂNGULOS COM MAIS DE UMA VOLTA

Com o que já apresentamos sobre arcos e ângulos, concluímos que a medida algébrica α de um arco $\overrightarrow{AP}$ é, no máximo, 2π (quando $\overrightarrow{AP}$ é o arco positivo de uma volta) e, no mínimo, -2π (quando $\overrightarrow{AP}$ é o arco negativo de uma volta); portanto, $-2\pi \le \alpha \le 2\pi$. É fácil, porém, perceber a necessidade de se trabalhar também fora dessa faixa, isto é, trabalhar com arcos ou ângulos de mais de uma volta: basta levarmos em conta as aplicações da Geometria e da Trigonometria. Um móvel, dando várias voltas em uma pista circular e parando num certo ponto, que distância percorreu? Qual o número de rotações que um motor imprime em uma hélice após determinado tempo de funcionamento? Essas perguntas tem, para resposta, a "medida do arco" descrito pelo móvel e o "número de voltas" que uma extremidade da hélice tinha dado. Isso pressupõe a existência e o conhecimento de medidas para **arcos de mais de uma volta**. Para melhor entendermos o fato, vamos exemplificar:

O ponto **P** (fig. 3.18) é extremidade do arco $\overrightarrow{AP}$, $\widehat{AP} = \frac{3\pi}{4}$. Um móvel que parta de A e percorra a circunferência parando em P pode fazer os seguintes percursos:

1º) No sentido anti-horário e

a) pára na primeira passagem por P; o arco descrito tem medida algébrica $\frac{3\pi}{4}(135°)$

b) pára em P *após ter dado uma volta completa* na circunferência; o arco descrito tem medida algébrica.

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \text{ (ou } 135° + 360° = 495°\text{) (fig. 3.19)}$$

2º) No sentido horário e

a) pára na primeira passagem por P; a medida algébrica do arco descrito é

$$\frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4} \text{ (ou } 135° - 360° = -225°\text{) (fig. 3.20)}$$

b) pára em P *após ter dado uma volta completa* na circunferência; a medida algébrica do arco descrito é

$$\left(\frac{3\pi}{4} - 2\pi\right) - 2\pi = \frac{3\pi}{4} - 4\pi = -\frac{13\pi}{4} \text{ (ou } -585°\text{) (fig. 3.21)}$$

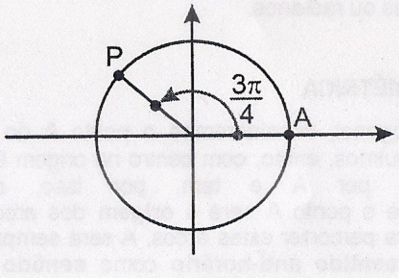


Fig. 3.18

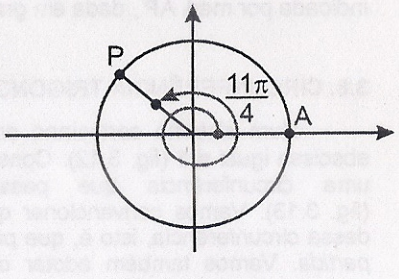


Fig. 3.19

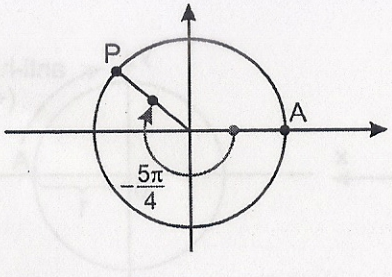


Fig. 3.20

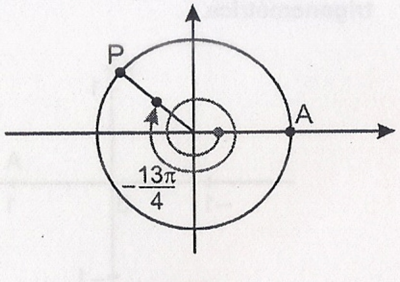


Fig. 3.21

Dessa forma pode ser obtida uma *infinidade* de outros arcos, dando-se várias voltas no sentido positivo ou no sentido negativo. Temos, então, uma **forma generalizada** de encarar o **conceito de arco** e, consequentemente, de medida algébrica; claro que essas idéias se aplicam também aos **ângulos** correspondentes.

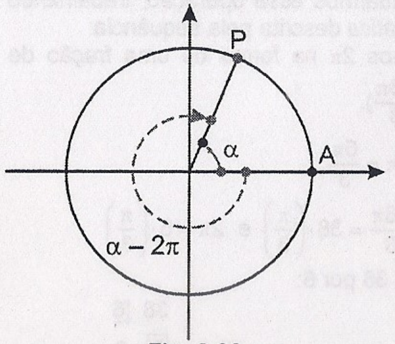


Fig. 3.22

Por tudo isso é possível escrever a seguinte conclusão: um ponto P da circunferência trigonométrica (fig. 3.22) é extremidade de uma coleção de arcos positivos de medidas α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, $\alpha + 6\pi$, ..., e de uma **coleção de arcos negativos**, de medidas $\alpha - 2\pi$, $\alpha - 4\pi$, $\alpha - 6\pi$, $\alpha - 8\pi$, ... Essas duas coleções determinam o **conjunto das medidas dos infinitos arcos com extremidade em P**. Cada um desses arcos tem medida algébrica igual à soma de α com um múltiplo positivo ou negativo de 2π. Pode-se, então, representar genericamente as medidas pela expressão $\alpha + k \cdot 2\pi$ ou

$$\boxed{\alpha + 2k\pi}$$

onde k é uma **variável inteira**, isto é, um símbolo que pode assumir qualquer um dos valores do conjunto

$$\mathbb{Z} = \{...; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$$

Nota: na *família* de arcos de extremidade **P**, o arco de medida α é chamado de **primeira determinação positiva** se $0 < \alpha \leq 2\pi$. Por exemplo, na figura 3.23, os arcos da "família" tem suas medidas dadas pela expressão $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ e o arco de medida $\frac{7\pi}{6}$ é a **primeira determinação positiva** dessa família. De modo geral, ao escrevermos a expressão $\alpha + 2k\pi$ para representar os arcos (suas medidas) de extremidade **P**, procuramos utilizar, como α, a medida da primeira determinação positiva. Não sendo esse um procedimento obrigatório, é possível, então, escrever expressões *diferentes* que representem a *mesma* família. Assim, a expressão $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, por exemplo, representa a mesma família que $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, pois tanto $-\frac{5\pi}{6}$ como $\frac{7\pi}{6}$ são medidas de arcos com extremidades no ponto **P** da figura 3.23. Diremos, então, que *expressões que representem a mesma família* de arcos são **expressões equivalentes**.

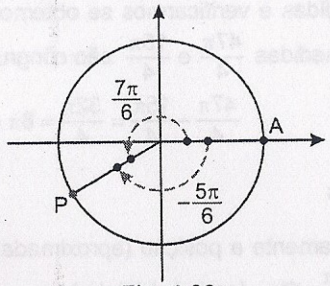


Fig. 3.23

3.12. ALGUMAS EXPRESSÕES IMPORTANTES

Pelo uso que terão ao longo da Trigonometria, devemos conhecer as expressões dos arcos com extremidades nas interseções da circunferência trigonométrica com os eixos cartesianos. A figura 3.24 mostra os pontos A, B, A' e B' e a tabela a seguir fornece as expressões (subentende-se, sempre, que $k \in \mathbb{Z}$).

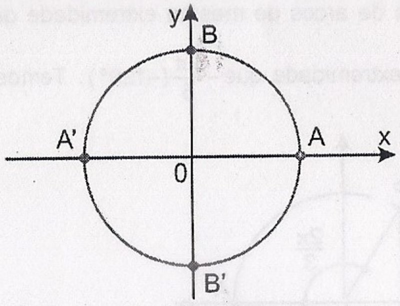


Fig. 3.24

Extremidades	Expressão
A	$2k\pi$
B	$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$
A'	$\pi + 2k\pi$
B'	$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

3.13. ARCOS CÔNGRUOS

Como vimos, a expressão $\alpha + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) representa as medidas dos arcos com extremidade num mesmo ponto P. A arcos de **mesma extremidade** damos o nome de **ARCOS CÔNGRUOS**. Assim, **todos** os arcos de uma mesma família representada pela expressão $\alpha + 2k\pi$ são côngruos. Se atribuirmos a **k** os valores inteiros k_1 e k_2, obteremos as medidas **x** e **y** de dois arcos côngruos:

$x = \alpha + 2k_1\pi$ e $y = \alpha + 2k_2\pi$. Observemos que:

$$x - y = (\alpha + 2k_1\pi) - (\alpha + 2k_2\pi) = 2k_1\pi - 2k_2\pi$$

$$\text{ou } x - y = (k_1 - k_2) \cdot 2\pi$$

Como a diferença entre números inteiros $(k_1 - k_2)$ é um inteiro **n**, escrevemos:

$$\boxed{x - y = n \cdot 2\pi}$$

Podemos, então, enunciar que:

A diferença entre as medidas de dois arcos côngruos é um múltiplo de 2π.

o que nos dá um **critério de reconhecimento** de arcos côngruos: basta efetuarmos a diferença entre as medidas e verificarmos se obtemos ou não um múltiplo de 2π. Por exemplo, os arcos de medidas $\frac{47\pi}{4}$ e $\frac{15\pi}{4}$ são côngruos, pois:

$$\frac{47\pi}{4} - \frac{15\pi}{4} = \frac{32\pi}{4} = 8\pi = 4 \cdot (2\pi)$$

Exercícios Resolvidos

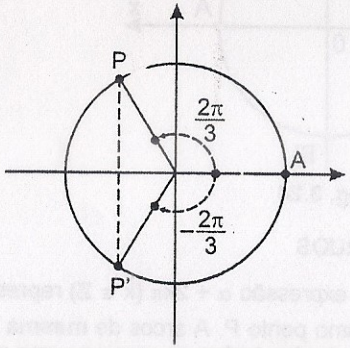
3.3) Determine graficamente a posição (aproximada) das extremidades dos arcos de medidas $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (onde k é inteiro).

Solução

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ pode ser escrita:

$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

A primeira representa a família de arcos de mesma extremidade que $\frac{2\pi}{3}$ e a segunda, a família de mesma extremidade que $-\frac{2\pi}{3}(-120°)$. Temos, então, os pontos P e P' da figura.



3.4) Calcule a primeira determinação positiva do conjunto de arcos de mesma extremidade que o arco de medida 2715°.

Solução

"Retirando" o número inteiro de voltas (isto é, os múltiplos de 360°) que há em 2715°, obteremos α, $0° < \alpha \leq 360°$. Para isso basta dividirmos 2715° por 360°: α será o resto da divisão. Assim:

2715°	360°
[195°]	7
α	

portanto, a 1ª determinação positiva é o arco de medida 195°.

3.5) Em que quadrante se encontra a extremidade do arco de medida $\frac{38\pi}{3}$?

Solução

Seguindo a idéia do exercício anterior, devemos "retirar" de $\frac{38\pi}{3}$ os múltiplos de 2π. Para efetuarmos essa operação, trabalhando em radianos, podemos utilizar uma *regra prática* descrita pela sequência:

- escrevemos 2π na forma de uma fração de denominador 3 (o mesmo da fração $\frac{38\pi}{3}$).

  Temos $2\pi = \frac{6\pi}{3}$.

  Assim, $\frac{38\pi}{3} = 38 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $2\pi = 6 \cdot \left(\frac{\pi}{3}\right)$

- dividimos 38 por 6:

38	6
[2]	6

- o **resto** 2, multiplicado por $\frac{\pi}{3}$, dá o valor de α.

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Logo, como $\frac{38\pi}{3}$ tem a mesma extremidade que $\frac{2\pi}{3}(120°)$ (que é a medida da primeira determinação), $\frac{38\pi}{3}$ é um arco do 2º quadrante.

3.6) Calcule a primeira determinação positiva da família de arcos de mesma extremidade que $-\frac{23\pi}{5}$.

Solução

Como vimos no exercício anterior, escrevemos:

$$\frac{23\pi}{5} = 23 \cdot \left(\frac{\pi}{5}\right) \text{ e } 2\pi = 10 \cdot \left(\frac{\pi}{5}\right)$$

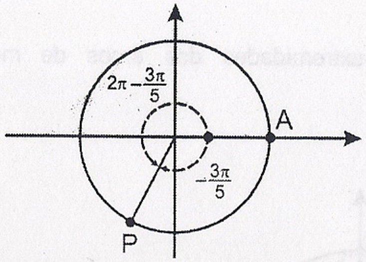
dividindo 23 por 10:

23	10
[3]	2

então: $\alpha' = \frac{3\pi}{5}$

O leitor percebeu que usamos a regra prática descrita no exercício 3.5 *omitindo* o sinal –; como a medida fornecida é negativa, o que fizemos foi retirar as voltas inteiras *negativas*; portanto, obtivemos um arco de medida $-\frac{3\pi}{5}$.

Para a obtenção da primeira determinação positiva basta fazermos agora (veja a figura):



$$2\pi-\frac{3\pi}{5}=\frac{7\pi}{5}$$

Logo, a primeira determinação positiva tem medida $\frac{7\pi}{5}$.

3.7) Verifique se os arcos de medidas $-\frac{13\pi}{7}$ e $-\frac{34\pi}{7}$ são côngruos.

Solução

efetuando a diferença, temos:

$-\frac{13\pi}{7}-\left(-\frac{34\pi}{7}\right)=\frac{21\pi}{7}=3\pi=\frac{3}{2}\cdot 2\pi$ (não é múltiplo de 2π). Logo, os arcos **não** são côngruos.

3.14. EXPRESSÕES DO TIPO $\alpha+\frac{2k\pi}{n}$

Vamos considerar uma família de arcos cujas extremidades se distribuem na circunferência trigonométrica de modo a dividi-la, sempre, em *partes iguais*. A figura 3.25 mostra um exemplo: os pontos P, A' e P' secionam a circunferência em 3 partes iguais (sendo, portanto, vértices de um **triângulo equilátero**). Os arcos $\widehat{PA'}$, $\widehat{A'P'}$, e $\widehat{P'P}$ são iguais e tem medida $\frac{2\pi}{3}$; o arco AP é tal que $\widehat{AP}=\frac{\pi}{3}$.

Vamos escrever as medidas de alguns arcos cujas extremidades são, P, A' ou P':

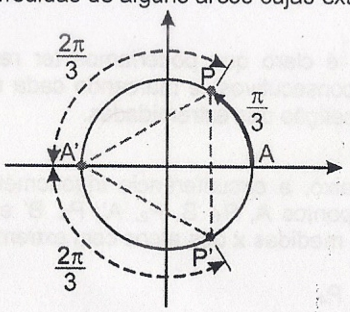


Fig. 3.25

$$\underbrace{\frac{\pi}{3}}_{P};\ \underbrace{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=\pi}_{A'};\ \underbrace{\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}}_{P'};\ \underbrace{\frac{\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=\frac{7\pi}{3}}_{P};\ \ldots$$

$$\underbrace{\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}}_{P'};\ \underbrace{\frac{\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=-\pi}_{A'};\ \underbrace{\frac{\pi}{3}-\frac{6\pi}{3}=-\frac{5\pi}{3}}_{P};\ \ldots$$

Não é difícil notar que qualquer dos arcos dessa família terá medida igual à soma de $\frac{\pi}{3}$ com um múltiplo de $\frac{2\pi}{3}$. Se chamarmos, então, de **x** a medida de um arco qualquer dessa família, podemos escrever que $x=\frac{\pi}{3}+k\cdot\frac{2\pi}{3}$ ou

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$$

onde k representa um número inteiro (positivo, negativo ou zero), isto é, $k\in\mathbb{Z}$.

Se invertermos agora o processo, isto é, partindo de uma expressão como $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}$, onde $k\in\mathbb{Z}$, ao atribuirmos a k os valores 0; ±1; ±2;..., obteremos medidas de arcos cujas extremidades coincidem com os pontos P, A' ou P'.

Vamos examinar um outro exemplo: os arcos de medidas $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Dando a **k** alguns valores, obtemos os arcos de medidas x, que marcamos na figura 3.26:

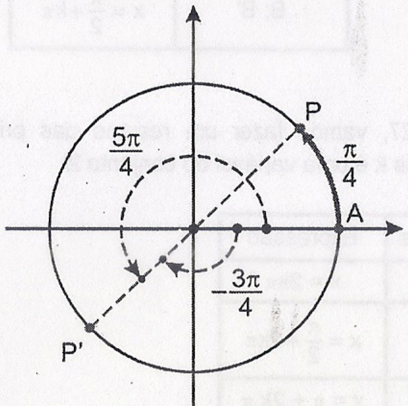


Fig. 3.26

k	x	Extremidade
0	$\frac{\pi}{4}$	P
1	$\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{5\pi}{4}$	P'
2	$\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{9\pi}{4}$	P
−1	$\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}$	P'
−2	$\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$	P

É evidente que qualquer outro valor inteiro de k resultará para x a medida de um arco com extremidade P ou P'; devemos notar que a expressão $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, que pode ser escrita $x=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{2}$, representa arcos com extremidades ***diametralmente opostas*** (dividindo, portanto, a circunferência em duas partes iguais).

Podemos, então, estender as conclusões a expressões do tipo $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$, onde α é uma **constante real**, **n** é uma **constante natural positiva**, isto é, $n \in \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; 4; ...\}$ e k é um número inteiro qualquer, isto é, uma variável do conjunto $\mathbb{Z}$. Obedecidas essas condições, podemos enunciar a seguinte **propriedade**:

> As extremidades dos arcos cujas medidas algébricas são da forma $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$ ocupam **n** pontos distintos na circunferência trigonométrica e, se $n \geq 3$, esses pontos são vértices de um **polígono regular**, de **n** lados, inscrito na circunferência.

É imediato que, para n = 1, temos uma família de arcos de *mesma* extremidade (côngruos) e, para n = 2, temos *duas* extremidades *diametralmente opostas*. Em particular, nesse último caso (n = 2), é fundamental conhecer as expressões que fornecem extremidades nas duas interseções de cada eixo cartesiano com a circunferência. A figura 3.27 e a tabela a seguir mostram as extremidades e as expressões ($k \in \mathbb{Z}$):

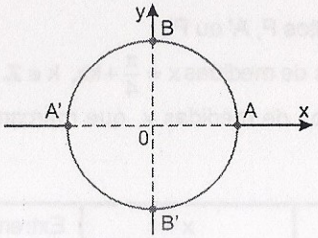


Fig. 3.27

Extremidades	Expressão
A; A'	$x = k\pi$
B; B'	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

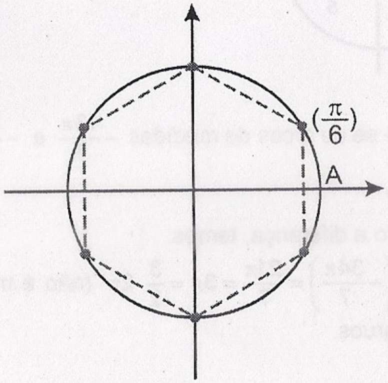
Considerando, ainda, a figura 3.27, vamos fazer um resumo das principais expressões, reafirmando que em todas elas k é uma variável do conjunto $\mathbb{Z}$.

Extremidades	Expressão
A	$x = 2k\pi$
B	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
A'	$x = \pi + 2k\pi$
B'	$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$
A, A'	$x = k\pi$
B, B'	$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
A, A', B, B'	$x = \frac{k\pi}{2}$

Exercícios Resolvidos

3.8) Marcar, no ciclo trigonométrico as extremidades dos arcos de medidas $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Solução



Escrevendo a expressão na forma $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$, temos:

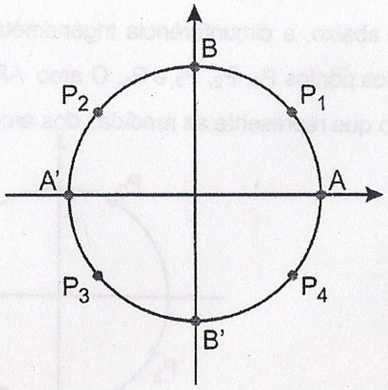
$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}$$

Então, se n = 6, as extremidades dos arcos serão vértices de um **hexágono regular** e, se $\alpha = \frac{\pi}{6}$ (30º), um dos vértices está a $\frac{\pi}{6}$ da origem A. Os demais estarão separados entre si de um arco de $\frac{\pi}{3}$ (60º).

Observação: é claro que poderíamos ter resolvido esse problema atribuindo valores a k (consecutivos) e marcando cada um dos arcos obtidos, até que se iniciasse a repetição das extremidades.

3.9) Na figura abaixo, a circunferência trigonométrica está dividida em oito partes iguais pelos pontos A, P_1, B, P_2, A', P_3, B' e P_4. Escreva uma expressão que represente as medidas **x** dos arcos com extremidades em:

a) P_1, P_3
b) P_1, P_2, P_3, P_4
c) A, B, A', B'
d) A, P_1, B, P_2, A', P_3, B', P_4



Solução

Como a circunferência está dividida em oito partes iguais, os pontos estão separados por arcos de medida $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ (45º). Usando a expressão geral $x = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$ temos com $k \in \mathbb{Z}$:

a) P_1; P_3: dois pontos **diametralmente opostos**; portanto, n = 2; usaremos, para α, o arco $\overset{\frown}{AP_1}$, onde $\overset{\frown}{AP_1} = \frac{\pi}{4}$; logo: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) P_1; P_2; P_3; P_4: quatro pontos separados por arcos de medidas $\frac{\pi}{2}$ (90º); portanto, são vértices de um **quadrado**. Assim, n = 4 e usaremos $\alpha = \overset{\frown}{AP_1} = \frac{\pi}{4}$; logo: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

c) A, B, A', B': também vértices de um **quadrado**; então, n = 4 e usaremos, para α, o arco nulo ($\alpha = 0$); logo, $x = 0 + \frac{2k\pi}{4} = \frac{k\pi}{2}$

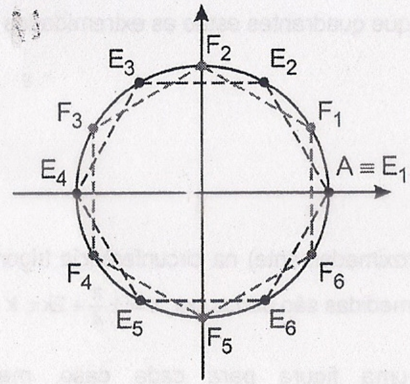
d) A, P_1, B, P_2, A', P_3, B', P_4: vértices de um octógono **regular**; portanto n = 8, e usaremos $\alpha = 0$; logo, $x = 0 + \frac{2k\pi}{8} = \frac{k\pi}{4}$

Observação: as expressões que compõem as respostas desse exercício **não são únicas**, pois o α utilizado poderia ser *qualquer* arco com extremidade num dos pontos solicitados. Por exemplo, no item b, se utilizássemos $\alpha = \overset{\frown}{AP_2} = \frac{3\pi}{4}$, viria $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ que é **equivalente** a $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. O critério (não obrigatório) adotado usualmente é atribuir a α a medida do **menor arco não negativo** com extremidade em um dos pontos dados.

3.10) Dados os conjuntos $E = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $F = \left\{x \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, determine $E \cup F$.

Solução

Se representarmos por E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6 as extremidades dos arcos da família $\frac{k\pi}{3}$ e por F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 e F_6 as extremidades dos arcos da família $\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, marcando-os na circunferência, temos a figura:



Como o arco $\overset{\frown}{AF_1}$ tem medida $\frac{\pi}{6}$ e $\overset{\frown}{AE_2}$ tem medida $\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$, vemos que a circunferência ficou dividida em 12 partes iguais.

Assim, podemos escrever a expressão dos arcos com extremidades nesses pontos:

$x = \alpha + \frac{2k\pi}{n} = 0 + \frac{2k\pi}{12} = \frac{k\pi}{6}$. Portanto, temos que $E \cup F = \left\{x \mid x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Exercícios Propostos

3.11) Sendo A e B pontos de um eixo, determine a abscissa de A nos seguintes casos:

a) $x_B = 4$ e $\overline{AB} = -1$

b) $x_B = -5$ e $\overline{AB} = \frac{3}{2}$

3.12) A, B e C são pontos do mesmo eixo, tais que $x_A = -3$, $x_B = 2$ e $x_C = -1$. Determine a abscissa x de um ponto P desse eixo tal que:

a) $\overline{AP} + \overline{AC} + \overline{BP} = 0$

b) $\overline{AP} - \overline{PB} = 6$

3.13) Marque (aproximadamente) na circunferência trigonométrica as extremidades dos arcos de medidas algébricas $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$, 135°, 210°, $-\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{4\pi}{3}$.

3.14) Calcule a primeira determinação positiva dos arcos de mesma extremidade que:

a) $\frac{43\pi}{6}$
b) 1418°
c) $-\frac{35\pi}{2}$
d) –1070°

3.15) Indique em que quadrantes estão as extremidades dos arcos de medidas:

a) $-\frac{11\pi}{6}$
b) –2000°
c) 820°
d) $\frac{31\pi}{4}$

3.16) Marque (aproximadamente) na circunferência trigonométrica as extremidades dos arcos cujas medidas são dadas por $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

3.17) Utilizando uma figura para cada caso, marque, aproximadamente, as extremidades dos arcos de medidas dadas por ($k \in \mathbb{Z}$):

a) $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

b) $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

c) $x = \frac{2k\pi}{3}$

d) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}$

e) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$

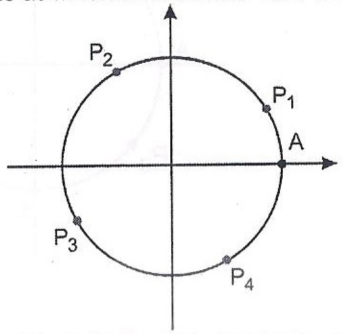
3.18) Dados os conjuntos $E = \left\{x \middle| x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ e $F = \left\{x \middle| x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, determine $E \cup F$.

3.19) Dados os conjuntos $E = \left\{x \middle| x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $F = \left\{x \middle| x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $G = \left\{x \mid x = \frac{2k\pi}{3}\right\}$, determine:

a) $E \cap F$

b) $E \cap G \cap F$
c) $F - E$

3.20) Na figura abaixo, a circunferência trigonométrica está dividida em quatro partes iguais pelos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4. O arco $\overset{\frown}{AP_1}$ é tal que $\widehat{AP_1} = \frac{\pi}{5}$. Escreva uma expressão que represente as medidas dos arcos com extremidades em:



a) P_1, P_3
b) P_2, P_4
c) P_1, P_2, P_3, P_4

3.21) Quantos pontos distintos da circunferência trigonométrica servem de extremidades para os arcos cujas medidas algébricas são dadas pela expressão

$$x = (-1)^k\,\alpha + k\pi,$$

onde $0 < \alpha \le 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$?

Capítulo 4

Seno e cosseno

A finalidade deste capítulo é estender as noções de **seno** e **cosseno** aos casos de ângulos ou arcos quaisquer, isto é, aos ângulos e arcos *trigonométricos*. Assim, aqueles conceitos definidos anteriormente, através dos lados de um triângulo retângulo, passarão a ser meros casos particulares.

4.1. SENO E COSSENO

Recordemos inicialmente que um ponto **P** qualquer assinalado na circunferência trigonométrica (fig. 4.1) determina uma família de arcos côngruos (ou de ângulos côngruos) cujas **medidas algébricas** são dadas pela expressão:

$$\alpha + 2k\pi \quad \text{(k inteiro)}$$

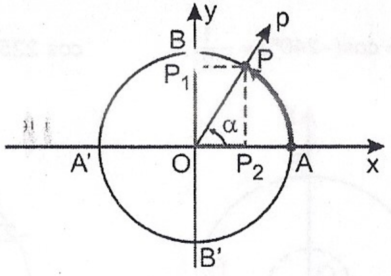


Fig. 4.1

No sistema cartesiano de eixos Ox e Oy, o ponto **P** tem a sua **abscissa** (que é igual à medida algébrica $\overline{OP_2}$) e a sua **ordenada** (que é igual à medida algébrica $\overline{OP_1}$). Com estas considerações estabelecemos as seguintes definições:

I) A **ordenada** $y_p = \overline{OP_1}$, de **P**, chama-se **seno** do arco $\overset{\frown}{AP}$ (ou do ângulo $x\hat{O}P$).

II) A **abscissa** $x_p = \overline{OP_2}$, de **P**, chama-se **cosseno** do arco $\overset{\frown}{AP}$ (ou do ângulo $x\hat{O}P$).

Esses valores podem ser indicados de várias formas equivalentes:

$\text{sen}\ \overset{\frown}{AP} = \text{sen}\ x\hat{O}P = \text{sen}(\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\ \alpha$

$\cos \overset{\frown}{AP} = \cos\ x\hat{O}P = \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$

Observe que as definições acima são aplicáveis a qualquer ponto da circunferência trigonométrica. Na figura inicial colocamos o ponto no 1º quadrante. Nas figuras abaixo estão ilustradas outras situações:

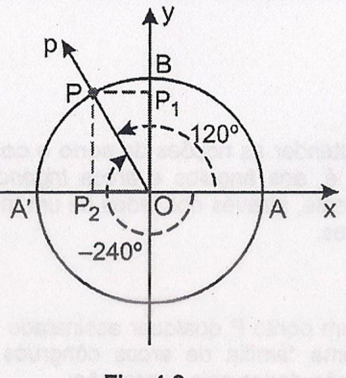


Fig. 4.2

Ângulos de 2º quadrante

$$\text{sen}\ 120° = \text{sen}(-240°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120° = \cos(-240°) = -\frac{1}{2}$$

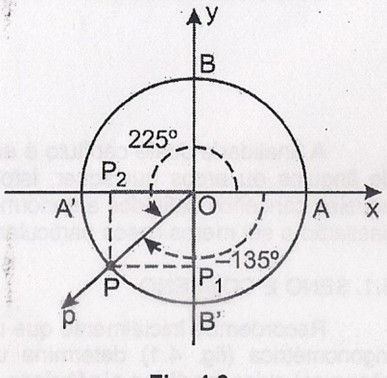


Fig. 4.3

Ângulos de 3º quadrante

$$\text{sen}\ 225° = \text{sen}(-135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225° = \cos(-135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

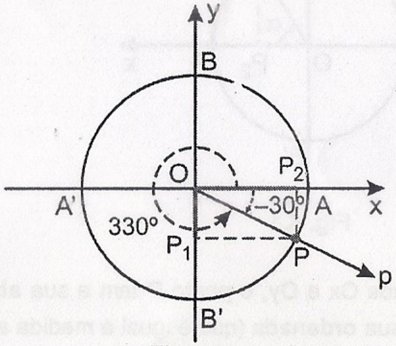


Fig. 4.4

Ângulos de 4º quadrante

$$\text{sen}\ 330° = \text{sen}(-30°) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 330° = \cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

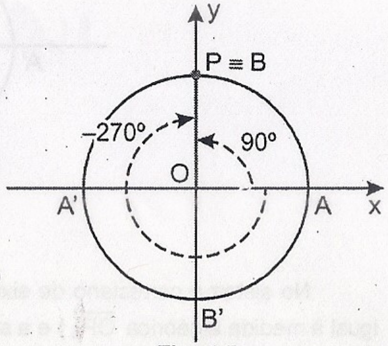


Fig. 4.5

Caso P ≡ B

$$\text{sen}\ 90° = \text{sen}(-270°) = 1$$

$$\cos 90° = \cos(-270°) = 0$$

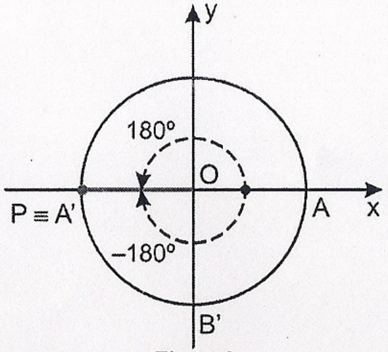


Fig. 4.6

Caso P ≡ A'

$\text{sen}\ 180° = \text{sen}(-180°) = 0$

$\cos 180° = \cos(-180°) = -1$

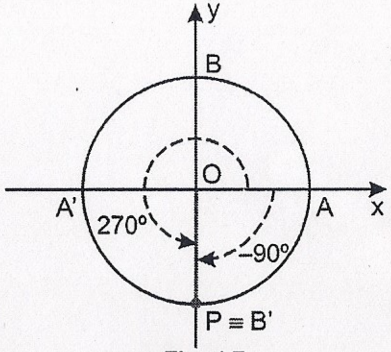


Fig. 4.7

Caso P ≡ B'

$\text{sen}\ 270° = \text{sen}(-90°) = -1$

$\cos 270° = \cos(-90°) = 0$

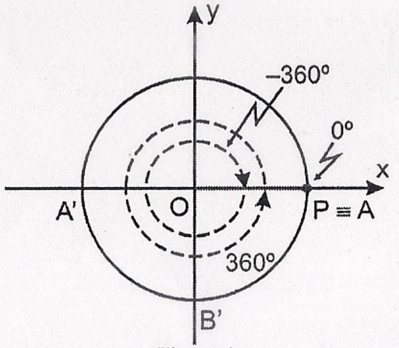


Fig. 4.8

Caso P ≡ A

$\text{sen}\ 0° = \text{sen}\ 360° = \text{sen}(-360°) = 0$

$\cos 0° = \cos 360° = \cos(-360°) = 1$

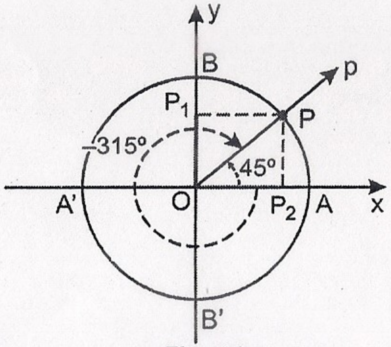


Fig. 4.9

Ângulos do 1º quadrante

$$\text{sen}\ 45° = \text{sen}(-315°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \cos(-315°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4.2. VARIAÇÃO E SINAIS DO SENO E DO COSSENO

Dois resultados são evidentes. Em primeiro lugar, é imediato que o **máximo valor** assumido pelo seno ou pelo cosseno de qualquer ângulo é 1 e o **mínimo valor** é –1. Temos assim:

$$-1 \le \text{sen}\ \alpha \le 1$$
$$-1 \le \cos \alpha \le 1$$

Em segundo lugar, se não nos esquecemos de que cos α e sen α são exatamente as *coordenadas* do ponto **P**, isto é, **P** (cos α; sen α), então é fácil perceber

que os **sinais** do seno e do cosseno dependem do *quadrante* em que esteja o ponto P considerado. O esquema abaixo (fig. 4.10) resume as diversas possibilidades.

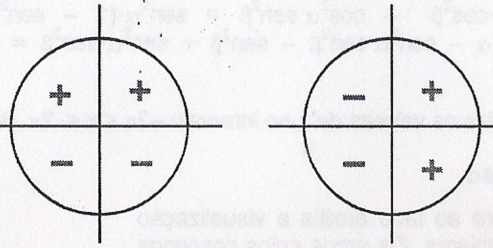


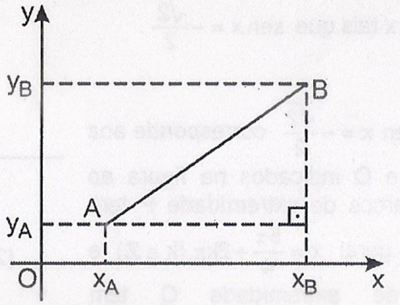
Fig. 4.10

4.3. RELAÇÃO $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

Noções básicas de Geometria Analítica: distância entre dois pontos.

A distância entre dois pontos A e B é indicada pelo símbolo δ_{AB}. Se os pontos tem coordenadas cartesianas (x_A; y_A) e (x_B; y_B), a distância entre eles é dada pela *fórmula*

$$\delta_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Podemos demonstrar facilmente que a ***primeira relação fundamental***, já conhecida, vale ainda após a generalização que fizemos.

Para isso, basta observar que a distância do ponto P ao centro O da circunferência trigonométrica é igual a 1.

Escrevemos $\delta_{OP} = 1$. Mas as coordenadas cartesianas desses pontos são **P** (cos α; sen α) e O (0; 0). Assim, escrevemos

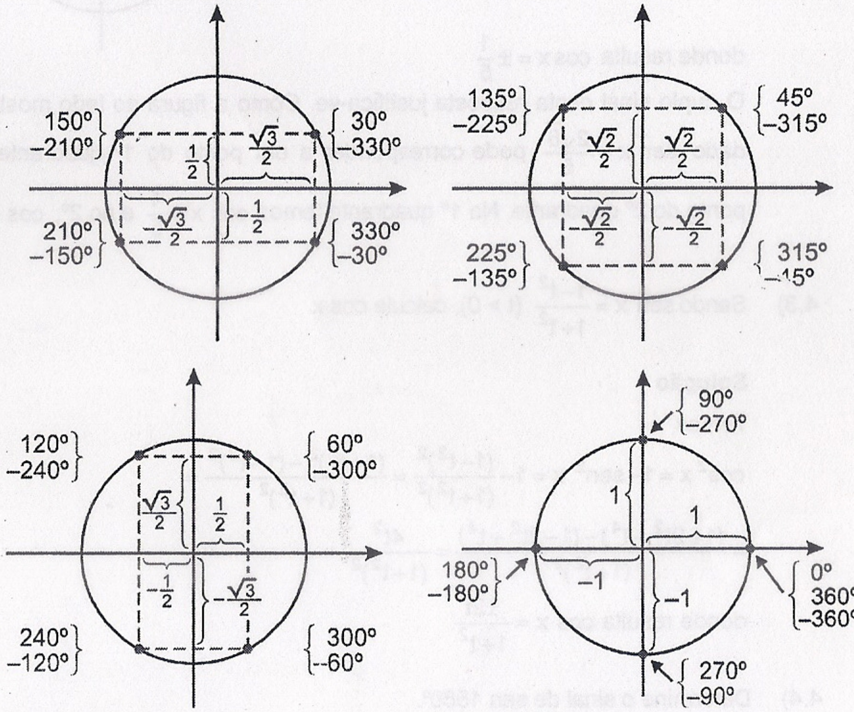
$$\delta_{OP} = \sqrt{(\cos\alpha - 0)^2 + (\text{sen}\,\alpha - 0)^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}.$$

Então, é imediato que

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

4.4. ALGUNS VALORES PARTICULARES

Já foram certamente memorizados os valores do seno e do cosseno para 30º, 45º e 60º. Muitos outros valores podem ser obtidos a partir destes, de forma rápida e simples, aproveitando-se a colocação simétrica que as extremidades de certos arcos apresentam na circunferência trigonométrica. Basta examinar com atenção as figuras abaixo.



Exercícios Resolvidos

4.1) Determine o valor de sen 4170º.

Solução

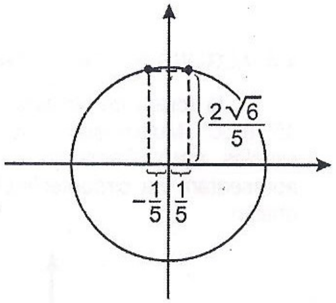
Dividindo 4170 por 360, encontramos

```
4170 |360
 570   11
 210
```

isto é, $4170 = 360 \cdot 11 + 210$. Isto significa que os arcos de medidas 4170º e 210º são *côngruos*. Sendo assim, temos

$$\text{sen}\,4170^\circ = \text{sen}\,210^\circ = -\frac{1}{2}$$

4.2) Sendo $\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, calcule cos x.



Solução

Temos:

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{24}{25} = \frac{1}{25}$$

donde resulta $\cos x = \pm\frac{1}{5}$

O duplo sinal desta resposta justifica-se. Como a figura ao lado mostra, o valor dado $\operatorname{sen} x = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ pode corresponder a um ponto do 1° quadrante ou a um ponto do 2° quadrante. No 1° quadrante temos $\cos x = \frac{1}{5}$ e no 2°, $\cos x = -\frac{1}{5}$.

4.3) Sendo $\operatorname{sen} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (t > 0), calcule cos x.

Solução

Temos

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2 - (1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+2t^2+t^4)-(1-2t^2+t^4)}{(1+t^2)^2} = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$$

donde resulta $\cos x = \frac{\pm 2t}{1+t^2}$

4.4) Determine o sinal de sen 1580°.

Solução

Temos
1580 = 360·4 + 140

1580	360
140	4

logo 1580° e 140° são medidas de arcos côngruos. Assim, sen 1580° = sen 140°. Como 140° é do 2° quadrante, o seu seno é **positivo**.

4.5) Prove que $\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$

Solução

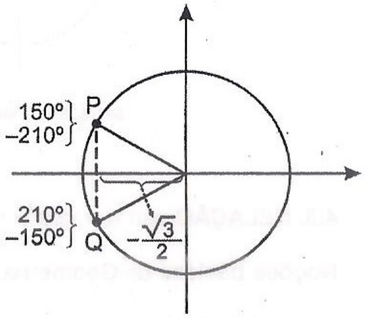
Vamos desenvolver o 1° membro lembrando que $\cos^2\beta = 1 - \operatorname{sen}^2\beta$ e $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$.

$\operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}^2\alpha \cdot (1 - \operatorname{sen}^2\beta) - (1 - \operatorname{sen}^2\alpha) \cdot \operatorname{sen}^2\beta =$
$= \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$.

4.6) Dê todos os valores de x no intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$ tais que $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução

A figura ao lado auxilia a visualização do problema. Os arcos cujos cossenos valem $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ tem extremidades no ponto P (2° quadrante) ou no ponto Q (3° quadrante) e correspondem aos valores em graus indicados. Essas medidas, expressas em radianos, são a resposta procurada.



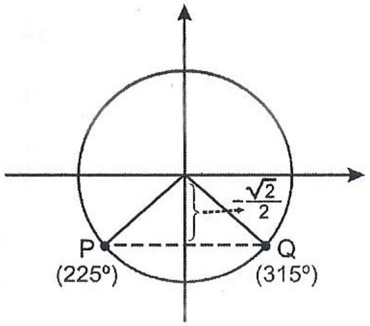
Temos

então $x = -\frac{7\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$.

4.7) Dê a expressão geral de todos os valores de x tais que $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solução

O valor $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ corresponde aos pontos P e Q indicados na figura ao lado. Os arcos de extremidade P tem expressão geral $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ e aqueles de extremidade Q tem expressão geral $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

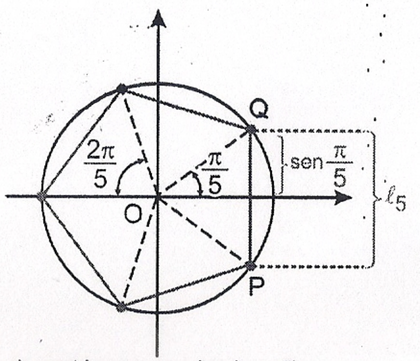


4.5. SENOS DOS ARCOS DE MEDIDAS

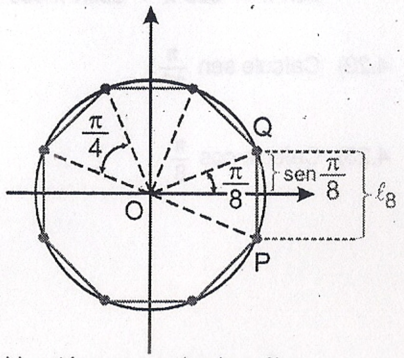
Vamos examinar um processo para o cálculo dos senos de arcos cujas medidas são da forma $\frac{\pi}{n}$ (com n ≥ 3, inteiro). Incluem-se nestes casos $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{10}$ etc.

Primeiramente, observemos que, se dividirmos a circunferência em **n** partes iguais (n ≥ 3), dois pontos de divisão P e Q sucessivos determinam a corda $\overline{PQ}$, que é o

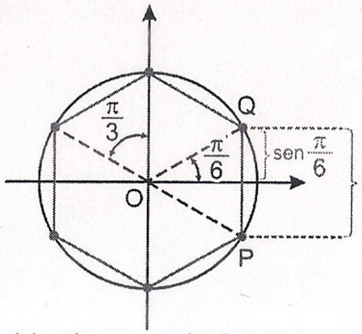
lado do polígono regular inscrito de **n** lados. Sua medida é indicada por ℓ_n. A figura 4.11 dá alguns exemplos.



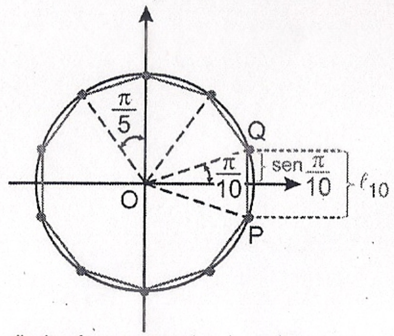
a) pentágono regular (n = 5)



b) octógono regular (n = 8)



c) hexágono regular (n = 6)



d) decágono regular (n = 10)

Fig. 4.11

O ângulo $P\widehat{O}Q$ é a enésima parte da circunferência e mede, portanto, $\frac{2\pi}{n}$ (fig. 4.12). Se os pontos P e Q são marcados de modo que a corda $\overline{PQ}$ seja perpendicular ao eixo Ox_1. então o arco $\overset{\frown}{AQ}$ tem medida $\frac{\pi}{n}$ e resulta

$$\text{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{\ell_n}{2}$$

(n ≥ 3, inteiro)

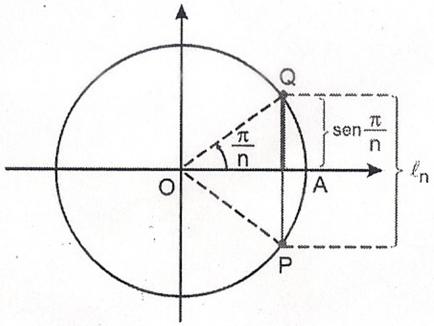


Fig. 4.12

Da Geometria conhecem-se as expressões dos lados dos polígonos regulares em função do raio da circunferência circunscrita. Temos, por exemplo:

$\ell_3 = r\sqrt{3}$ (triângulo equilátero)

$\ell_4 = r\sqrt{2}$ (quadrado)

$\ell_6 = r$ (hexágono regular)

$\ell_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (octógono regular)

$\ell_{10} = r\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (decágono regular)

Lembrando que a circunferência trigonométrica tem raio r = 1, obtemos os valores:

$$\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\ell_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\ell_4}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\ell_6}{2} = \frac{1}{2}$$

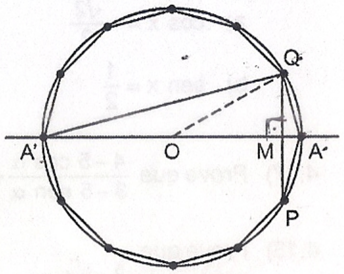
$$\text{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\ell_8}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\ell_{10}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Exercício Resolvido

4.8) Calcule sen $\frac{\pi}{12}$.

Solução



Vamos determinar inicialmente a expressão de ℓ_{12} em função do raio da circunferência circunscrita. A figura acima representa um dodecágono regular inscrito na circunferência de raio r. Observe que a medida do segmento $\overline{PQ}$ é ℓ_6 = r. No triângulo retângulo AA'Q podemos escrever $\overline{AQ}^2 = \overline{A'A}\cdot\overline{MA}$ onde $\overline{AQ} = \ell_{12}$, $\overline{A'A} = 2r$ e $\overline{MA} = r - \overline{OM}$.

Assim,

$$\ell_{12}^2 = 2(r - \overline{OM})$$

Mas no triângulo retângulo OMQ temos $\overline{OM}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{MQ}^2$, isto é,

$$\overline{OM}^2 = r^2 - \left(\frac{\ell_6}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$$

Então, $\ell_{12}^2 = 2r\left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = r^2(2-\sqrt{3})$

e finalmente, $\ell_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Pondo r = 1, obtemos

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{12} = \frac{\ell_{12}}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Exercícios Propostos

4.9) Dê o sinal de cos (– 2187º).

4.10) Dê o sinal de sen (– 3295º).

4.11) Determine o valor de cos 3465°.

4.12) Determine o valor de sen 4290º.

4.13) Dê o valor de sen 793º (utilizando a tabela que se encontra no final deste volume).

4.14) Sendo $\text{sen}\ x = \frac{\sqrt{1-m^2}}{2}$, determine cos x.

4.15) Sendo $\sqrt{2}\cdot\text{sen}\ x + \cos x = \sqrt{2}$, calcule sen x e cos x.

4.16) Dê a expressão geral de todos os valores de x tais que

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$

4.17) Prove que $\frac{4-5\cos\alpha}{3-5\,\text{sen}\,\alpha} + \frac{3+5\,\text{sen}\,\alpha}{4+5\cos\alpha} = 0$

4.18) Prove que
$\cos^3\alpha - \text{sen}^3\alpha = (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)\,(1 + \text{sen}\,\alpha\cdot\cos\alpha)$

4.19) Prove que
$(1 + \text{sen}\,x + \cos x)^2 = 2(1 + \text{sen}\,x)\,(1 + \cos x)$

4.20) Prove que
$\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta - \text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta = 1$

4.21) Simplifique a expressão
$\text{sen}^6x + \cos^6x + 3\text{sen}^2x\cdot\cos^2x$

4.22) Calcule sen $\frac{\pi}{16}$

4.23) Calcule cos $\frac{\pi}{8}$

Capítulo
5

Tangente e cotangente

Como já foi feito para o seno e o cosseno, estenderemos neste capítulo a noção de **tangente** aos ângulos e arcos ***trigonométricos***. Definiremos também uma nova razão trigonométrica: a **cotangente**.

5.1. TANGENTE

Na figura 5.1 está representada uma circunferência trigonométrica. Pelo ponto A foi construído um novo **eixo** At, paralelo ao eixo Oy; esse novo eixo será chamado **eixo das tangentes**. Quando um ponto **P** qualquer é marcado sobre a circunferência, podemos traçar a reta $\overline{OP}$, que encontra o eixo das tangentes no ponto T. A medida algébrica do segmento orientado $\overline{AT}$ é exatamente a ordenada do ponto T, isto é, $y_T = \overline{AT}$. Define-se:

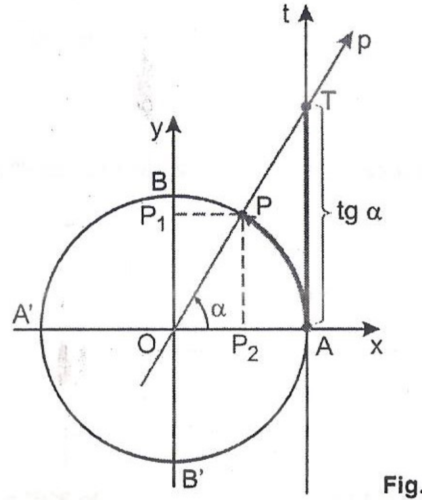


Fig. 5.1

A **ordenada** $y_T = \overline{AT}$ chama-se **tangente** do arco $\overset{\frown}{AP}$ (ou do ângulo $x\hat{O}p$).

Indicamos:

$\text{tg}\,\overset{\frown}{AP} = \text{tg}\,x\hat{O}p = \text{tg}(\alpha + 2k\pi) = \text{tg}\,\alpha.$

Observemos que a noção de *tangente*, definida desta forma, coincide com aquela que já conhecíamos. Basta vermos o triângulo retângulo OAT da figura 5.1, onde temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}$$

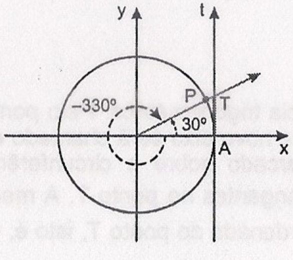
Por outro lado, para o triângulo OP_2P também podemos escrever

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\overline{P_2P}}{\overline{OP_2}} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$

o que mostra que a conhecida relação fundamental $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ continua valendo.

Para ilustrar melhor a nova definição, examine as figuras abaixo, onde são representadas várias situações diferentes do ponto P sobre a circunferência.

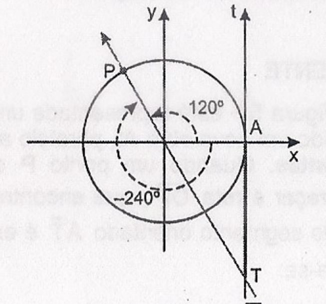
1ª) ângulos de 1º quadrante



$\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}(-330°)$

Fig. 5.2.

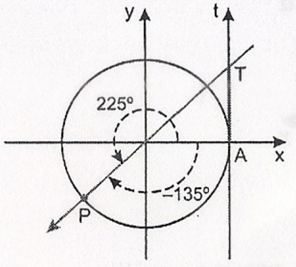
2ª) ângulos de 2º quadrante



$\text{tg } 120° = -\sqrt{3} = \text{tg}(-240°)$

Fig. 5.3

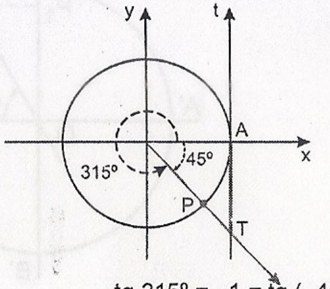
3ª) ângulos de 3º quadrante



$\text{tg } 225° = 1 = \text{tg } (-135°)$

Fig. 5.4

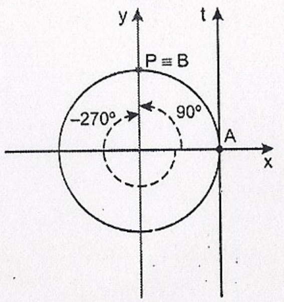
4ª) ângulos de 4º quadrante



$\text{tg } 315° = -1 = \text{tg } (-45°)$

Fig. 5.5

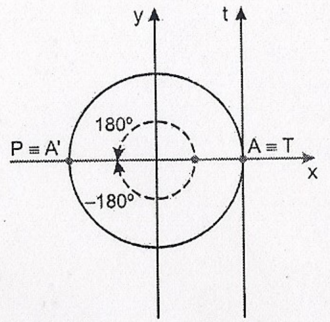
5ª) ângulo reto ($P \equiv B$)



tg 90º e tg (−270º) não existem

Fig. 5.6

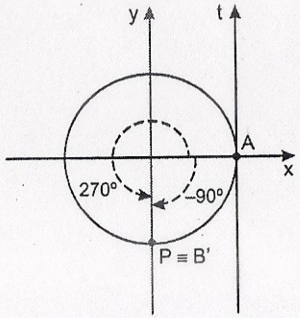
6ª) caso $P \equiv A'$



tg 180º = 0 = tg (−180º)

Fig. 5.7

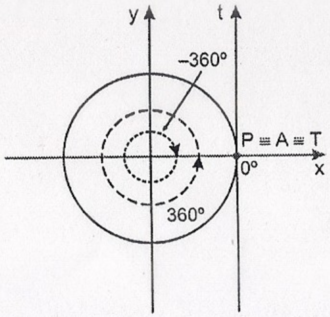
7ª) caso $P \equiv B'$



tg (−90º) e tg 270º não existem

Fig. 5.8

8ª) caso $P \equiv A$



tg 0º = tg 360º = tg (−360º) = 0

Fig. 5.9

5.2. VARIAÇÃO E SINAIS DA TANGENTE

Os exemplos examinados mostram algumas propriedades da tangente:

I) Enquanto **P** percorre a circunferência, passando de quadrante a quadrante até dar a volta toda, o ponto T vai ocupando *todos os pontos do eixo At*. Isto significa que tg α pode atingir ***qualquer valor real***, isto é, não está limitada a variar dentro de um intervalo, como acontece com sen α e cos α.

II) Os *sinais* de tg α variam nos diversos quadrantes, conforme o esquema abaixo (fig. 5.10)

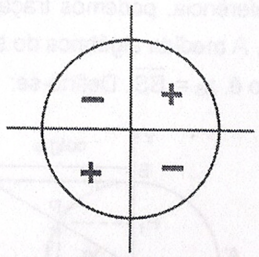


Fig. 5.10 - sinais da tangente

III) Outra observação importantíssima é a seguinte: nos casos particulares em que P ≡ B ou P ≡ B' (ver figs. 5.6 e 5.8), a reta $\overline{OP}$ torna-se *paralela ao eixo das tangentes* e, assim, não existe o ponto T. Dizemos, por esta razão, que os arcos ou ângulos de medidas 90º, 270º, – 270º, – 90º, bem como todos os seus côngruos, *não possuem tangente*. Em outras palavras:

$$\text{não existem} \begin{cases} tg\left(\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) \\ tg\left(\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right) \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Exercícios Resolvidos

5.1) Determine o sinal de tg 1197º

Solução

Como 1197 = 360·3 + 117

1197	360
117	3

resulta que os arcos de medidas 1197º e 117º são côngruos; logo tg 1197º = tg 117º. Como 117º é do 2º quadrante, sua tangente é **negativa**.

5.2) Sendo sen α = –0,79, calcule cos α e tg α.

Solução

Temos $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - (-0{,}79)^2 \cong 0{,}38$ donde

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{0{,}38} \cong \pm 0{,}62$$

Para calcular tg α, escrevemos

$$tg\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}79}{\pm 0{,}62} \cong \mp 1{,}27$$

Note que o *duplo sinal* no cosseno é ±, enquanto que, para a tangente, escrevemos ∓. Este exemplo mostra que, na resposta, quando cos α é positivo,

tg α é negativa e também ao contrário: se cos α é negativo, deve-se ter tg α positiva. São, portanto, *duas soluções*:

a) cos α = – 0,62 e tg α = + 1,27

b) cos α = + 0,62 e tg α = – 1,27

Nas figuras abaixo estas soluções estão representadas.

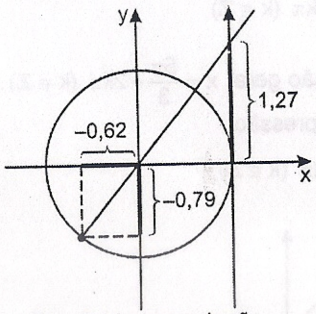


Fig. 5.11 – na solução a) arco é do 3º quadrante.

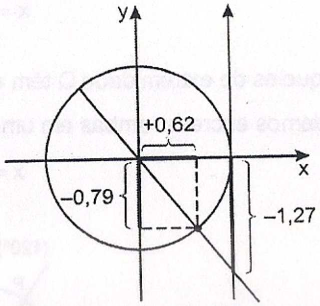
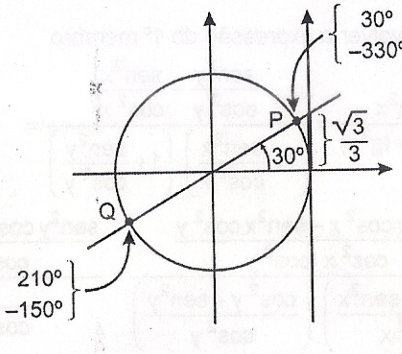


Fig. 5.12 – na solução b) o arco é do 4º quadrante.

5.3) Dê todos os valores de x no intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$ para os quais se tem $tg\,x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Solução

A figura ao lado auxilia a visualização do problema. Os arcos cujas tangentes valem $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ tem extremidades no ponto P (1º quadrante) ou no ponto Q (3º quadrante) e correspondem aos valores em graus indicados. Essas medidas, expressas em radianos, são a resposta procurada:



$$x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{11\pi}{6}$$

5.4) Dê a expressão geral de todos os valores de x tais que $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Solução

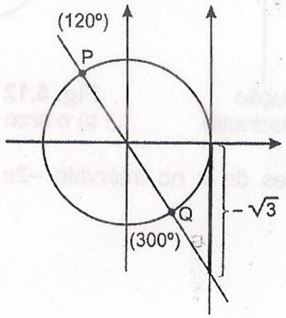
O valor $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ corresponde aos pontos P e Q, indicados na figura ao lado. Os arcos de extremidade P têm expressão geral

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

e aqueles de extremidade Q têm expressão geral $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Podemos escrever ambas em uma só expressão:

$$x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



5.5) Prove que

$$\frac{\operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 y)} = \cos^2 x - \cos^2 y$$

Solução

Vamos desenvolver a expressão do 1º membro.

$$\frac{\operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}^2 y)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y} - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{\left(1+\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(1+\frac{\operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 y \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}}{\left(\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)\cdot\left(\frac{\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y}{\cos^2 y}\right)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}^2 y \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}}{\frac{1}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}}$$

$= \operatorname{sen}^2 y \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 y =$
$= (1 - \cos^2 y)\cdot \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)\cdot \cos^2 y =$
$= \cos^2 x - \cos^2 x \cdot \cos^2 y - \cos^2 y + \cos^2 x \cdot \cos^2 y =$
$= \cos^2 x - \cos^2 y.$

5.3. COTANGENTE

Tomemos um novo **eixo Bs**, paralelo ao eixo Ox, como indica a figura 5.13. Esse novo eixo será chamado **eixo das cotangentes**. Quando um ponto P qualquer é marcado sobre a circunferência, podemos traçar a reta $\overline{OP}$, que encontra o eixo das cotangentes no ponto S. A medida algébrica do segmento orientado $\overline{BS}$ é exatamente a abscissa do ponto S, isto é, $x_S = \overline{BS}$. Define-se:

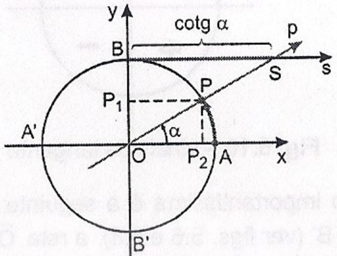


Fig. 5.13

> A abscissa $x_S = \overline{BS}$ chama-se **cotangente** do arco AP (ou do ângulo $x\hat{O}p$).

Indicamos: $\operatorname{cotg} \overset{\frown}{AP} = \operatorname{cotg} x\hat{O}p = \operatorname{cotg}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{cotg} \alpha$.

Observando que os triângulos OBS e OP_2P *são semelhantes*, podemos escrever a proporção

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{P_2P}}$$ donde resulta (lembrando que $\overline{OB} = 1$):

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

e ainda, consequentemente: $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

São estas duas novas *relações fundamentais*.

Resumo das relações fundamentais vistas até agora

1º) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

2º) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

3º) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

4º) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Exercícios Resolvidos

5.6) Simplifique a expressão
$y = (1 - \text{sen}^2\alpha)\,(1 + \text{cotg}^2\alpha)$

Solução

Lembrando que $1 - \text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$ e que $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$, escrevemos:

$$y = (1-\text{sen}^2\alpha)(1+\text{cotg}^2\alpha) = \cos^2\alpha\cdot\left(1+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}\right) = \cos^2\alpha\cdot\left(\frac{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \text{cotg}^2\,\alpha$$

5.7) Demonstre a identidade
$$\frac{\text{tg } x + \text{tg } y}{\text{cotg } x + \text{cotg } y} = \text{tg } x\cdot\text{tg } y$$

Solução

Vamos desenvolver a expressão do 1º membro:

$$\frac{\text{tg } x+\text{tg } y}{\text{cotg } x+\text{cotg } y} = \frac{\text{tg } x+\text{tg } y}{\left(\dfrac{1}{\text{tg } x}+\dfrac{1}{\text{tg } y}\right)} = \frac{\text{tg } x+\text{tg } y}{\left(\dfrac{\text{tg } x+\text{tg } y}{\text{tg } x\cdot\text{tg } y}\right)} = (\text{tg } x+\text{tg } y)\cdot\frac{\text{tg } x\cdot\text{tg } y}{\text{tg } x+\text{tg } y} =$$

$$= \text{tg}\,x\cdot\text{tg}\,y$$

5.8) Sendo cotg x = m, escreva em função de m a expressão $y = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$.

Solução

Em 1º lugar, partindo da identidade $\text{cotg } x = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$, escrevemos $\dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = m^2$

donde $\dfrac{1-\text{sen}^2x}{\text{sen}^2x} = m^2$. Desta última igualdade resulta $\text{sen}^2x = \dfrac{1}{1+m^2}$. Além disso, temos $\cos^2x = 1 - \text{sen}^2x = 1 - \dfrac{1}{1+m^2} = \dfrac{m^2}{1+m^2}$

Sendo assim, a expressão dada fica:

$$y = \cos^2x - \text{sen}^2x = \frac{m^2}{1+m^2} - \frac{1}{1+m^2}$$

isto é, $y = \dfrac{m^2-1}{m^2+1}$

5.9) Simplifique $y = \dfrac{\text{cotg}^2 a}{1+\text{cotg}^2 a} - \dfrac{1}{1+\text{tg}^2 a}$

Solução

Escrevemos

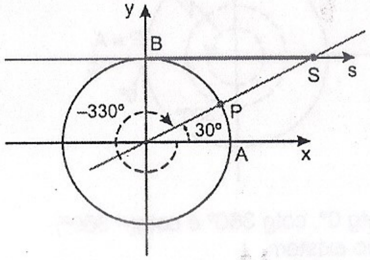
$$y = \frac{\text{cotg}^2a}{1+\text{cotg}^2a} - \frac{1}{1+\text{tg}^2a} = \frac{\dfrac{1}{\text{tg}^2a}}{1+\dfrac{1}{\text{tg}^2a}} - \frac{1}{1+\text{tg}^2a} = \frac{\dfrac{1}{\text{tg}^2a}}{\dfrac{1+\text{tg}^2a}{\text{tg}^2a}} - \frac{1}{1+\text{tg}^2a} =$$

$$= \frac{1}{1+\text{tg}^2a} - \frac{1}{1+\text{tg}^2a} = 0$$

5.4. VARIAÇÃO E SINAIS DA COTANGENTE

Examinemos algumas situações que ilustram a definição de cotangente, através das figuras abaixo:

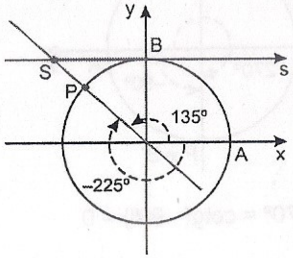
1) ângulos de 1º quadrante



$\text{cotg } 30° = \text{cotg}(-330°) = \sqrt{3}$

Fig. 5.14

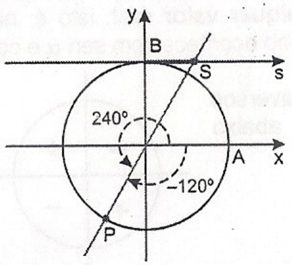
2) ângulos de 2º quadrante



$\text{cotg } 135° = \text{cotg}(-225°) = -1$

Fig. 5.15

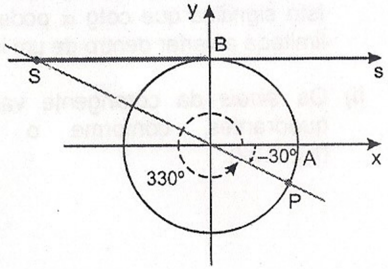
3) ângulos de 3º quadrante



$\text{cotg } 240° = \text{cotg}(-120°) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Fig. 5.16

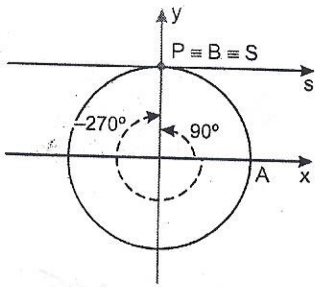
4) ângulos de 4º quadrante



$\text{cotg } 330° = \text{cotg}(-30°) = -\sqrt{3}$

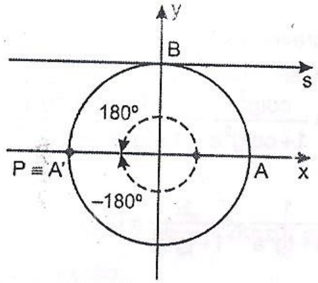
Fig. 5.17

5) Caso $P \equiv B$



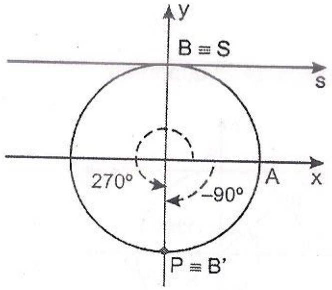
$\text{cotg } 90° = \text{cotg}(-270°) = 0$
Fig. 5.18

6) Caso $P \equiv A'$



cotg 180° e cotg(– 180°) não existem
Fig. 5.19

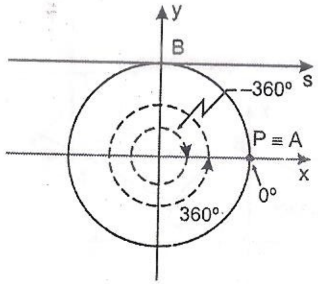
7) Caso $P \equiv B'$



$\text{cotg } 270° = \text{cotg}(-90°) = 0$

Fig. 5.20

8) Caso $P \equiv A$



cotg 0°, cotg 360° e cotg(– 360°) não existem
Fig. 5.21

Dos exemplos examinados acima já podemos extrair algumas propriedades da cotangente:

I) Enquanto P percorre a circunferência, passando de quadrante a quadrante até dar a volta completa, o ponto S vai ocupando *todos os pontos do eixo Bs*. Isto significa que cotg α pode atingir **qualquer valor real**, isto é, não está limitada a variar dentro de um intervalo, como acontece com sen α e cos α.

II) Os *sinais* da cotangente variam nos diversos quadrantes, conforme o esquema abaixo (fig. 5.22).

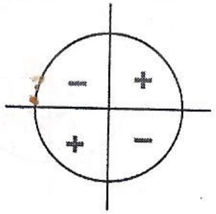


Fig. 5.22 sinais da cotangente

III) Nos casos particulares em que $P \equiv A$ ou $P \equiv A'$, a reta $\overline{OP}$ torna-se *paralela ao eixo das cotangentes* e, assim, não existe o ponto S. Dizemos, por essa razão, que os arcos ou ângulos de medidas 0°, 180°, –180°, 360°, –360°, bem como todos os seus côngruos, *não possuem cotangente.* Em outras palavras:

$$\text{não existem } \begin{cases} \text{cotg } (2k\pi) \\ \text{cotg } (\pi + 2k\pi) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Exercícios Resolvidos

5.10) Determine o sinal de cotg 882°.

Solução

Como $882 = 360 \cdot 2 + 162$

882	360
162	2

resulta que os arcos de medidas 882° e 162° são côngruos, logo cotg 882° = cotg 162°. Como 162° é do 2° quadrante, sua cotangente é **negativa**.

5.11) Sendo cos α = –0,41, calcule sen α, tg α e cotg α.

Solução

Temos $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (-0{,}41)^2 \cong 0{,}83$ donde $\text{sen } \alpha = \pm 0{,}91$
Para calcular tg α escrevemos

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\,\alpha} = \dfrac{\pm 0{,}91}{-0{,}41} \cong \mp 2{,}22$ e para calcular cotg α escrevemos

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{-0{,}41}{\pm 0{,}91} \cong \mp 0{,}45$$

O problema tem, portanto, duas soluções que estão ilustradas nas figuras seguintes:

a) sen α = +0,91, tg α = –2,22, cotg α = –0,45
b) sen α = –0,91, tg α = +2,22, cotg α = +0,45

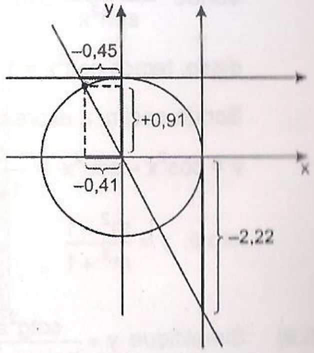


Fig. 5.23 – Na solução a) o arco é do 2° quadrante

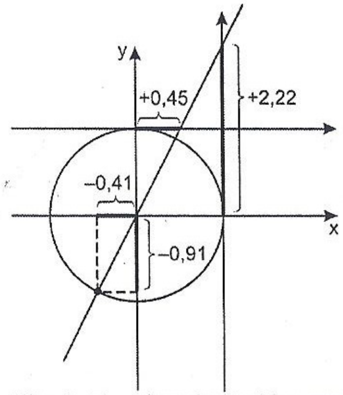
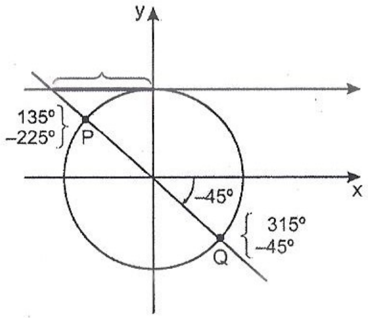


Fig. 5.24 – Na solução b) o arco é do 3º quadrante.

5.12) Dê todos os valores de x no intervalo $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ para os quais se tem cotg x = –1.

Solução

A figura abaixo auxilia a visualização do problema. Os arcos cujas cotangentes valem –1 tem extremidades no ponto P (2º quadrante) ou no ponto Q (4º quadrante) e correspondem aos valores em graus indicados. Essas medidas, expressas em radianos, são a resposta procurada:



$$x = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{4}.$$

5.13) Dê a expressão geral de todos os valores de x tais que cotg x = $-\sqrt{3}$

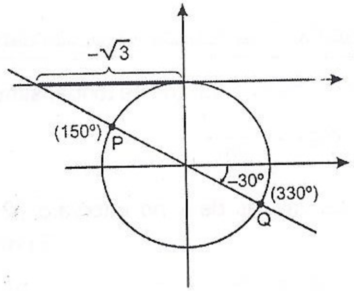
Solução

O valor cotg x = $-\sqrt{3}$ corresponde aos pontos P e Q, indicados na figura abaixo. Os arcos de extremidade P tem expressão geral

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

e aqueles de extremidade Q tem expressão geral $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Podemos escrever ambas em uma só expressão: $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$



Exercícios Propostos

5.14) Determine o sinal de:

a) tg 932°

b) cotg(–1267°)

c) tg 1398°

d) $\text{cotg}\,\frac{65\pi}{14}$

e) $\text{tg}\left(-\frac{29\pi}{5}\right)$

f) $\text{cotg}\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

5.15) Sendo sen x = $\frac{3}{10}$, calcule cos x, tg x e cotg x.

5.16) Sendo cos x = –0,80, calcule sen x, tg x e cotg x.

5.17) Sendo tg x = $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, calcule cotg x, sen x e cos x.

5.18) Sendo cotg x = 2,00, calcule tg x, sen x e cos x.

5.19) Sendo sen x = $\frac{t^2-1}{t^2+1}$ $(t > 0)$, calcule cos x, tg x e cotg x.

5.20) No exercício anterior, determine os quadrantes em que podem estar os arcos de medida x nos casos.

a) $t = \frac{1}{2}$

b) $t = 3$

c) $t = -2$

5.21) Sendo cotg x = m, calcule cos x.

5.22) Se $\operatorname{tg} x = \dfrac{2\sqrt{p}}{1-p}$, calcule cos x.

5.23) Dado que $3\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2$, calcule tg x e cotg x.

5.24) Dado que $(a-1)\operatorname{sen}^2 x + (a+1)\cos^2 x = a$, calcule tg x e cotg x.

5.25) Determine os valores de m para que se tenha, simultaneamente:

$$\operatorname{tg} x = \frac{2m-3}{m} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{2m-1}{3m}$$

5.26) Determine todos os valores de x no intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$, que satisfazem a condição:

a) $\operatorname{tg} x = -1$

b) $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

d) $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$

e) $\operatorname{tg} x = 0$

5.27) Determine todos os valores de x no intervalo $-\pi \le x \le \pi$ que satisfazem a condição:

a) $\operatorname{cotg} x = -1$

b) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\operatorname{cotg} x = -\sqrt{3}$

d) $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\operatorname{cotg} x = 0$

5.28) Dê a expressão geral de todos os valores de x tais que:

a) $\operatorname{tg} x = 0$

b) $\operatorname{cotg} x = -1$

c) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

d) $\operatorname{cotg} x = 0$

e) $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\operatorname{tg}^2 x = 1$

g) $\operatorname{cotg}^2 x = 3$

h) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + 2 = 0$

5.29) Sendo A e B arcos de 1º quadrante, tais que $\dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{\cos A}{\cos B} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$, determine tg A e tg B.

5.30) Simplifique cada uma das expressões dadas abaixo:

a) $y = \operatorname{cotg}^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha \cdot \cos\alpha$

b) $y = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$

c) $y = \dfrac{\cos\alpha(1+\operatorname{sen}\alpha)}{1+\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}$

d) $y = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$

e) $y = (1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{cotg}^2\alpha)(1-\cos^2\alpha)$

f) $y = \dfrac{1+\operatorname{cotg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$

g) $y = 2\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha(\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)$

h) $y = \dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

i) $y = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2} + \dfrac{\operatorname{cotg}\alpha}{(1+\operatorname{cotg}^2\alpha)^2}$

5.31) Prove as identidades seguintes:

a) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha)\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 1$

b) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = 2\cos^2\alpha - 1$

c) $[(\operatorname{cotg}\alpha + \cos\alpha)^2 - (\operatorname{cotg}\alpha - \cos\alpha)^2]^2 = 16(\operatorname{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha)$

Capítulo 6

Secante e cossecante

6.1. SECANTE E COSSECANTE

Sendo α a medida de um arco trigonométrico qualquer, podemos definir as noções de **secante** e **cossecante** da seguinte maneira:

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \quad (\text{se } \cos \alpha \neq 0)$$

$$\text{cossec}\, \alpha = \frac{1}{\text{sen}\, \alpha} \quad (\text{se } \text{sen}\, \alpha \neq 0)$$

Estas duas novas razões trigonométricas admitem também uma *representação geométrica*, como acontece com as demais. Na figura 6.1 está representado o ponto P, extremidade do arco de medida α. Por P conduz-se a reta **u**, tangenciando a circunferência. Esta reta determina os pontos V (sobre o eixo Ox) e W (sobre o eixo Oy). As medidas algébricas $\overline{OV}$ e $\overline{OW}$ são, respectivamente, a abscissa de V e a ordenada de W. Temos

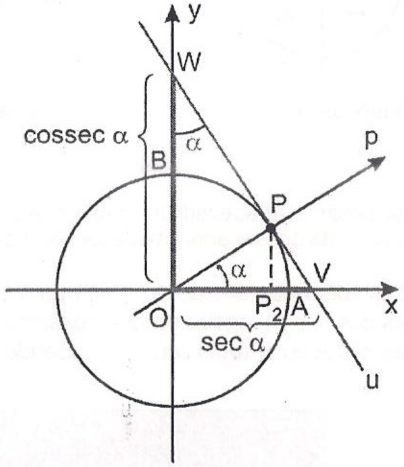


Fig. 6.1

$$\sec \alpha = \overline{OV} \quad \text{e} \quad \text{cossec}\, \alpha = \overline{OW}$$

Para confirmar este fato, basta ver os triângulos retângulos:

a) $\Delta OPV \sim \Delta OP_2P$

$$\frac{\overline{OV}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OP_2}}, \text{ donde } \overline{OV} = \frac{1}{\overline{OP_2}} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

e assim, $\overline{OV} = \sec\alpha$.

b) $\Delta OPW \sim \Delta OP_2P$

$$\frac{\overline{OW}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{P_2P}}, \text{ donde } \overline{OW} = \frac{1}{\overline{P_2P}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

e, assim, $\overline{OW} = \operatorname{cossec}\alpha$

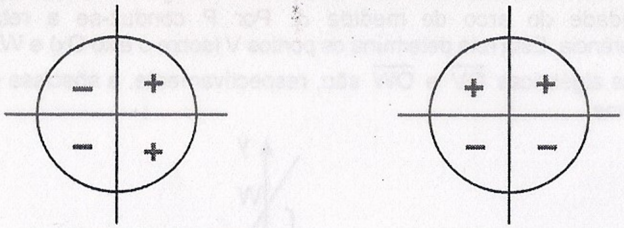
6.2 VARIAÇÃO E SINAIS DA SECANTE E DA COSSECANTE

Algumas propriedades da secante e da cossecante podem ser observadas.

I) Como os pontos V e W sempre se situam no exterior da circunferência, as suas distâncias ao centro nunca são menores do que o raio. Assim, temos

$\sec\alpha \le -1$ ou $\sec\alpha \ge 1$
$\operatorname{cossec}\alpha \le -1$ ou $\operatorname{cossec}\alpha \ge 1$

II) Os *sinais* de sec α e cossec α variam nos diversos quadrantes conforme os esquemas abaixo:



sinais da secante   sinais da cossecante

Fig. 6.2

Os sinais da secante obedecem ao mesmo esquema dos sinais do cosseno, enquanto que os da cossecante obedecem aos do seno.

III) Observa-se também que *sec α não existe* para os arcos de extremidades em B ou B' (pois cos α = 0), enquanto que *cossec α não existe* para os arcos de extremidades em A ou A' (pois sen α = 0). Sendo assim,

$$\text{não existem} \begin{cases} \sec\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ \operatorname{cossec}(k\pi) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

IV) Valem as seguintes relações:

$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$
$\operatorname{cossec}^2\alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha$

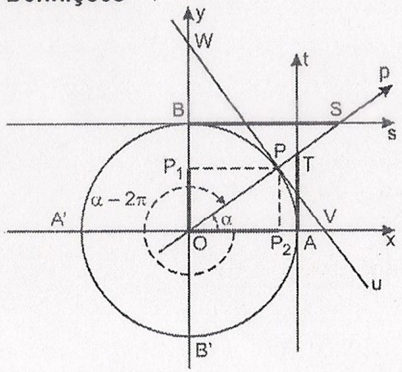
Para deduzi-las, procedemos assim:

a) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$

b) $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \operatorname{cossec}^2\alpha$

6.3. RESUMOS

1) Definições

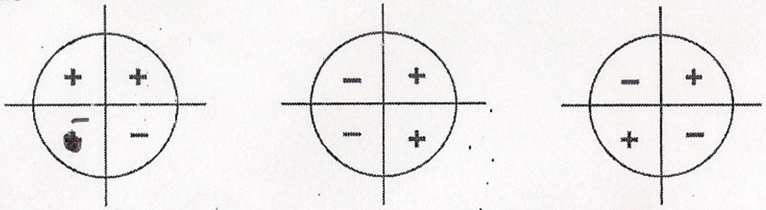


$\operatorname{sen}\alpha = y_P = \overline{OP_1}$
$\cos\alpha = x_P = \overline{OP_2}$
$\operatorname{tg}\alpha = y_T = \overline{AT}$
$\operatorname{cotg}\alpha = x_S = \overline{BS}$
$\sec\alpha = x_V = \overline{OV}$
$\operatorname{cossec}\alpha = y_W = \overline{OW}$

2) Variação

a) $-1 \le \operatorname{sen}\alpha \le 1$
b) $-1 \le \cos\alpha \le 1$
c) tg α e cotg α assumem qualquer valor real
d) $\sec\alpha \le -1$ ou $\sec\alpha \ge 1$
e) $\operatorname{cossec}\alpha \le -1$ ou $\operatorname{cossec}\alpha \ge 1$

3) Sinais



seno e cossecante   cosseno e secante   tangente e cotangente

4) Relações fundamentais

1) $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$	5) $\sec\,\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$
2) $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$	6) $\text{cossec}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\,\alpha}$
3) $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}$	7) $\sec^2\alpha = 1 + \text{tg}^2\alpha$
4) $\text{cotg}\,\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\,\alpha}$	8) $\text{cossec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha$

5) Condições de existência

$\left.\begin{matrix}\text{sen}\,\alpha\\ \cos\alpha\end{matrix}\right\}$ existem para qualquer arco

$\left.\begin{matrix}\text{tg}\,\alpha\\ \sec\alpha\end{matrix}\right\}$ não existem para $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

$\left.\begin{matrix}\text{cotg}\,\alpha\\ \text{cossec}\,\alpha\end{matrix}\right\}$ não existem para $\alpha = k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

6) Alguns valores particulares

		sen	cos	tg	cotg	sec	cossec		
	0°	0	1	0	não existe	1	não existe	0	
–330°	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$
–315°	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{4}$
–300°	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$
–270°	90°	1	0	não existe	0	não existe	1	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$
–240°	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$
–225°	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	–1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$
–210°	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$
–180°	180°	0	–1	0	não existe	–1	não existe	π	$-\pi$
–150°	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	–2	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$
–135°	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$
–120°	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	–2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$
–90°	270°	–1	0	não existe	0	não existe	–1	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
–60°	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
–45°	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	–1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$
–30°	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	–2	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$
	360°	0	1	0	não existe	1	não existe	2π	

Exercícios Resolvidos

6.1) Sendo cotg $\alpha = -0{,}60$, calcule tg α, cossec α, sen α, cos α e sec α.

Solução

Começamos escrevendo

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{\text{cotg}\,\alpha} = \frac{1}{-0{,}60} \cong -1{,}67$$

Em seguida, como $\text{cossec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha$,
temos $\text{cossec}^2\alpha = 1 + (-0{,}60)^2 \cong 1{,}36$ donde cossec $\alpha = \pm\, 1{,}17$
Daí vem, imediatamente:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\text{cossec}\,\alpha} = \frac{1}{\pm 1{,}17} = \pm 0{,}85$$

Para calcular cos α, podemos escrever $\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cotg}\,\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \text{sen}\,\alpha \cdot \text{cotg}\,\alpha$

donde $\cos\alpha = (\pm 0{,}85)\cdot(-0{,}60) \cong \mp\, 0{,}51$
e, sendo assim,

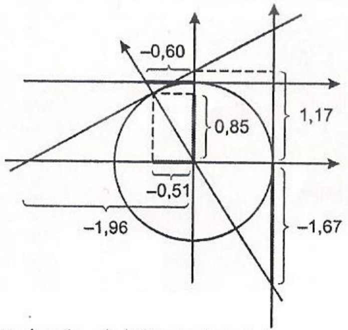
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mp 0{,}51} \cong \mp 1{,}96$$

Temos, portanto, *duas soluções*:

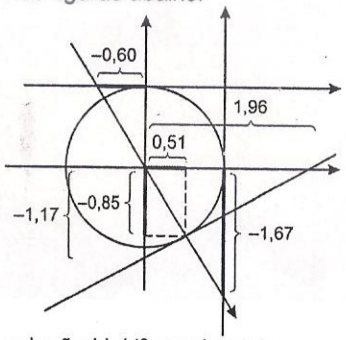
a) sen $\alpha = +0{,}85$
cos $\alpha = -0{,}51$
tg $\alpha = -1{,}67$
cotg $\alpha = -0{,}60$
sec $\alpha = -1{,}96$
cossec $\alpha = +1{,}17$

b) sen $\alpha = -0{,}85$
cos $\alpha = +0{,}51$
tg $\alpha = -1{,}67$
cotg $\alpha = -0{,}60$
sec $\alpha = +1{,}96$
cossec $\alpha = -1{,}17$

Estas duas soluções estão ilustradas nas figuras abaixo:



solução a) (2º quadrante)



solução b) (4º quadrante)

6.2) Prove que
$\text{cossec}^4\alpha - \text{cossec}^2\alpha = \text{cotg}^4\alpha + \text{cotg}^2\alpha$

Solução

Lembrando que $\text{cossec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha$, podemos escrever
$\text{cossec}^4\alpha - \text{cossec}^2\alpha = \text{cossec}^2\alpha\cdot[\text{cossec}^2\alpha - 1] =$
$= (1 + \text{cotg}^2\alpha)\,[(1 + \text{cotg}^2\alpha) - 1] =$
$= (1 + \text{cotg}^2\alpha)\cdot\text{cotg}^2\alpha = \text{cotg}^4\alpha + \text{cotg}^2\alpha$

6.3) Prove que

$$\frac{\sec x + \text{tg}\,x}{\text{cossec}\,x + \text{cotg}\,x} - \frac{\sec x - \text{tg}\,x}{\text{cossec}\,x - \text{cotg}\,x} = 2(\sec x - \text{cossec}\,x)$$

Solução

Partindo da expressão do 1º membro:

$$\frac{\sec x + \text{tg}\,x}{\text{cossec}\,x + \text{cotg}\,x} - \frac{\sec x - \text{tg}\,x}{\text{cossec}\,x - \text{cotg}\,x} =$$

$$= \frac{(\sec x + \text{tg}\,x)(\text{cossec}\,x - \text{cotg}\,x) - (\sec x - \text{tg}\,x)(\text{cossec}\,x + \text{cotg}\,x)}{(\text{cossec}\,x + \text{cotg}\,x)(\text{cossec}\,x - \text{cotg}\,x)}$$

O denominador desta fração é igual a

$$\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x = (1 + \text{cotg}^2 x) - \text{cotg}^2 x = 1$$

Podemos então desenvolver o numerador:
$\sec x\cdot\text{cossec}\,x - \sec x\cdot\text{cotg}\,x + \text{tg}\,x\cdot\text{cossec}\,x - \text{tg}\,x\cdot\text{cotg}\,x - \sec x\cdot\text{cossec}\,x - \sec x\cdot\text{cotg}\,x + \text{tg}\,x\cdot\text{cosssec}\,x + \text{tg}\,x\cdot\text{cotg}\,x = 2(\text{tg}\,x\cdot\text{cossec}\,x - \sec x\cdot\text{cotg}\,x) =$

$$= 2\cdot\left[\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\text{sen}\,x} - \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right] = 2\left[\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\text{sen}\,x}\right] = 2(\sec x - \text{cossec}\,x)$$

6.4) Sendo $\sec\alpha - \text{tg}\,\alpha = a$ $(a \neq 0)$, calcule sen α

Solução

Podemos escrever $\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = a$

donde $a\cdot\cos\alpha = 1 - \text{sen}\,\alpha$
Elevando ao quadrado, resulta

$$a^2\cos^2\alpha = (1 - \text{sen}\,\alpha)^2$$

isto é, $a^2(1 - \text{sen}^2\alpha) = (1 - \text{sen}\,\alpha)^2$
ou $a^2(1 - \text{sen}\,\alpha)\,(1 + \text{sen}\,\alpha) - (1 - \text{sen}\,\alpha)^2 = 0$
e $(1 - \text{sen}\,\alpha)\,[a^2(1 + \text{sen}\,\alpha) - (1 - \text{sen}\,\alpha)] = 0$

Há dois casos a considerar:

1) $1 - \text{sen}\,\alpha = 0$, donde sen $\alpha = 1$. Esta resposta é *inaceitável*, pois teríamos cos $\alpha = 0$ e assim não existiriam sec α e tg α.
2) $a^2(1 + \text{sen}\,\alpha) - (1 - \text{sen}\,\alpha) = 0$

Desta equação tiramos

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

Exercícios Propostos

6.5) Dado sen x = –0,60, calcule as demais razões trigonométricas de x.

6.6) Dado $\text{tg}\ x = \frac{\sqrt{7}}{3}$, calcule as demais razões trigonométricas de x.

6.7) Dado $\sec x = -\frac{5}{2}$, calcule as demais razões trigonométricas de x.

6.8) Dado $\sec x = \sqrt{t^2+1}\ (t \neq 0)$, calcule as demais razões trigonométricas de x.

6.9) Sendo cossec x = m, calcule tg x.

6.10) Determine os valores de p para os quais é possível a igualdade $\sec x = 2p^2 - 1$.

6.11) Determine **m** para que se tenha, simultaneamente: tg x = 3m + 3 e sec x = m + 2.

6.12) Sendo **m** e **n** números positivos tais que $\text{cossec}\ x = \frac{m+n}{\sqrt{m(m+n)}}$, determine tg x.

6.13) Simplifique as expressões:

a) $y = \frac{1+\text{sen}\ \alpha}{\sec\ \alpha + \text{tg}\ \alpha}$

b) $y = (\sec^4\alpha - \sec^2\alpha)\cdot\cos^4\alpha$

c) $y = \frac{\text{cossec}\ \alpha - \text{cotg}\ \alpha}{\text{cossec}\ \alpha + \text{cotg}\ \alpha} + \frac{\text{cossec}\ \alpha + \text{cotg}\ \alpha}{\text{cossec}\ \alpha - \text{cotg}\ \alpha}$

d) y = (1 – cos α) (cosssec α + cotg α)

6.14) Prove cada uma das identidades seguintes:

a) $(1-\text{cotg}\ x)^2 + (1-\text{tg}\ x)^2 = (\sec x - \text{cossec}\ x)^2$

b) $\frac{\sec x - \text{cossec}\ x}{\text{tg}\ x + \text{cotg}\ x} = \frac{\text{tg}\ x - \text{cotg}\ x}{\sec x + \text{cossec}\ x}$

Capítulo 7

Redução ao 1º quadrante

No final deste volume temos uma tabela de senos, cossenos, tangentes e cotangentes com as medidas dos ângulos (ou arcos) variando desde 0º até 90º. Como poderíamos utilizá-la em casos como 129º, 258º, 334º, – 3427º etc.?

Em casos como estes, fazemos uma simplificação especial, chamada **redução ao primeiro quadrante**, que aproveita as simetrias apresentadas pelas extremidades dos arcos trigonométricos. Inicialmente, examinemos um exemplo para depois enunciarmos a regra geral.

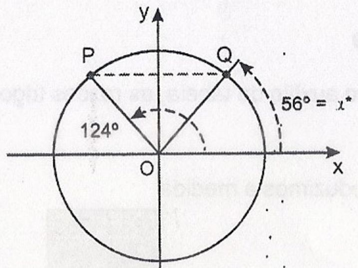
Exemplo

Desejamos determinar as razões trigonométricas de α = – 3116º. Dividimos 3116 por 360 e descobrimos que –3116º é *côngruo* a –236º. A este valor somamos 360º, para obtermos a primeira determinação positiva:

–236 + 360º = 124º (2º quadrante).

Observe agora a figura abaixo. Se conduzimos pela extremidade P do arco de 124º uma reta paralela ao eixo Ox, obtemos o ponto Q do 1º quadrante correspondente ao arco de medida α* = 56º.

3116	360
236	8



Este novo arco tem (como é fácil perceber) as mesmas razões trigonométricas dos arcos de 124º e –3116º consideradas *em valor absoluto*. Na tabela encontramos

sen 56º = 0,8290
cos 56º = 0,5592
tg 56º = 1,483
cotg 56º = 0,6745

e calculamos também

sec 56º = 1,788
cossec 56º = 1,206

Finalmente, lembrando que no 2º quadrante somente o seno e a cossecante são positivos, obtemos o resultado:

sen (–3116º) = +0,8290	cotg (–3116º) = –0,6745
cos (–3116º) = –0,5592	sec (–3116º) = –1,788
tg (–3116º) = –1,483	cossec(–3116º) = +1,206

Regra geral

Dado um arco de medida α (de qualquer quadrante), podemos sempre determinar um arco de medida $\alpha*$ entre 0º e 90º que tem **as mesmas razões trigonométricas do arco dado, em valor absoluto** (isto é, com exceção do *sinal*, que pode não ser o mesmo). Se α_1 indica a primeira determinação positiva correspondente à medida dada, então o valor de α^* pode ser encontrado conforme a tabela seguinte, ilustrada claramente através das figuras.

Se α_1 está no	α^* vale
2º quadrante	$180^\circ - \alpha_1$
3º quadrante	$\alpha_1 - 180^\circ$
4º quadrante	$360^\circ - \alpha_1$

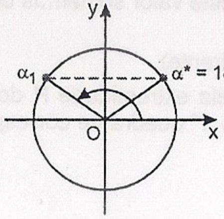


Fig. 7.1

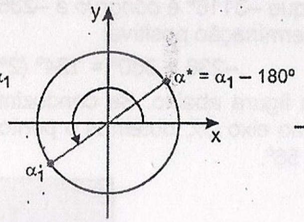


Fig. 7.2

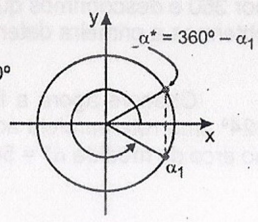


Fig. 7.3

Exercícios Resolvidos

7.1) Determine, com o auxílio da tabela, as razões trigonométricas de α = 1833º.

Solução

Primeiramente reduzimos a medida

1833	360
33	5

α = 1833º à sua primeira determinação positiva, que é α_1 = 33º. Como se trata de um arco do 1º quadrante, basta consultar a tabela:

sen 1833º = sen 33º = 0,5446
cos 1833º = cos 33º = 0,8387
tg 1833º = tg 33º = 0,6494
cotg 1833º = cotg 33º = 1,540

e, em seguida, calculamos

$$\sec 1833^\circ = \frac{1}{\cos 1833^\circ} = 1{,}192$$

$$\text{cossec } 1833^\circ = \frac{1}{\text{sen } 1833^\circ} = 1{,}836$$

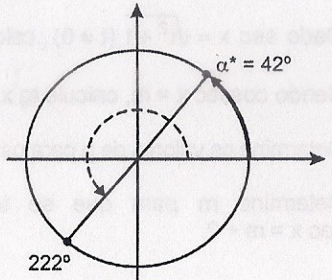
7.2) Determine, com o auxílio da tabela, as razões trigonométricas de α = –1218º.

Solução

1218	360
138	3

A primeira determinação *negativa* correspondente a α = –1218º é –138º. Somando 360º, obtemos a primeira determinação positiva: α_1 = 222º. Trata-se de um arco do 3º quadrante, logo α^* = 222º – 180º = 42º. Na tabela encontramos

sen 42º = 0,6691
cos 42º = 0,7431
tg 42º = 0,9004
cotg 42º = 1,111



e calculamos

sec 42º = 1,346
cossec 42º = 1,495

Finalmente, lembrando que no 3º quadrante somente a tangente e a cotangente são positivas, escrevemos

sen (–1218º) = –0,6691	cotg (–1218º) = +1,111
cos (–1218º) = –0,7431	sec (–1218º) = –1,346
tg (–1218º) = +0,9004	cossec (–1218º) = –1,495

Exercícios Propostos

7.3) Utilizando a redução ao 1º quadrante e os valores da tabela, calcule:

a) sen 115º
b) cos 263º
c) tg 321º
d) cotg 376º
e) sec 506º
f) cossec 584º
g) sen (–4329º)
h) cos 5230º
i) tg (–208º)

7.4) Calcule sen A + cos A + tg A, sendo

a) $A = \frac{323\pi}{45}$

b) $A = \frac{-323\pi}{45}$

Capítulo

8

Equações simples

8.1. INTRODUÇÃO

Trataremos neste capítulo de alguns tipos simples de *equações* trigonométricas. São consideradas **equações trigonométricas** aquelas nas quais a incógnita figura submetida a seno, cosseno, tangente etc. Por exemplo:

$$2\text{sen } x + 3\cos x = 5$$

$$\text{tg } x - \text{sen } 3x = \frac{1}{2}$$

$$4\sec\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2 x = 2$$

A variedade dessas equações é imensa. Começaremos examinando os tipos fundamentais, cuja resolução pode ser sistematizada. No capítulo 12 serão vistos outros tipos que exigem a aplicação de recursos mais potentes, como as **fórmulas trigonométricas**. Não há, infelizmente, uma teoria ou uma regra que se aplique a qualquer tipo de equação trigonométrica.

8.2. CONJUNTO–UNIVERSO E CONJUNTO–SOLUÇÃO

Resolver uma equação em um conjunto-universo U significa determinar todos os valores de **x pertencentes ao conjunto U** que, colocados no lugar da incógnita, transformam a equação numa sentença verdadeira. Por exemplo, se desejamos resolver a equação $x^2 = 16$ no conjunto-universo U = [0; 10], dos valores x = ±4 deve ser escolhido apenas o positivo, que pertence a U. Assim, o conjunto-solução é S = {4}. Se desejamos resolver a equação no conjunto-umverso U = $\mathbb{R}$, então o conjunto-solução é S = {–4; 4}.

8.3. EQUAÇÃO DO TIPO cos x = a

Considere o seguinte **problema**:

Resolva a equação cos x = a No conjunto-universo U = [0, 2π]

Devemos determinar todos os valores de **x** pertencentes ao intervalo $0 \le x \le 2\pi$ para os quais se tem cos x = a. Levando-se em conta que $-1 \le \cos x \le 1$, temos vários casos a considerar:

1°) **a < –1 ou a > 1**. A equação é impossível e tem-se S = ϕ

2°) **a = –1**. Para que se tenha cos x = –1, o arco de medida x deve ter extremidade em A' (como na figura 8.1). É imediato, neste caso, que

$$S = \{\pi\}$$

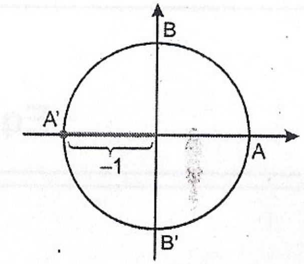


Fig. 8.1

3º) **a = +1**. Para que se tenha cos x = +1, o arco de medida x deve ter extremidade em A (como na figura 8.2).

É imediato, neste caso, que

$$S = \{0;\ 2\pi\}$$

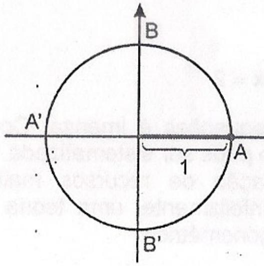
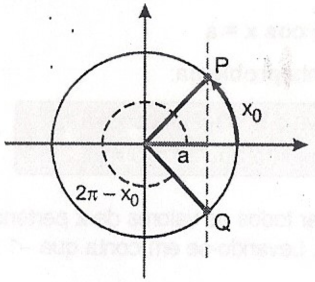


Fig. 8.2

4º) **–1 < a < 1**. Imagine que é assinalado no eixo das abscissas o ponto de abscissa a. A reta conduzida por esse ponto, paralela ao eixo das ordenadas, determina os pontos P e Q, extremidades dos arcos que constituem a resposta do problema. Observando a figura 8.3, indiquemos por x_0 a medida daquele arco correspondente ao ponto P. Temos $0 < x_0 < \pi$. O arco de extremidade Q tem medida igual a $2\pi - x_0$. Sendo assim, o conjunto-solução fica $S = \{x_0;\ 2\pi - x_0\}$



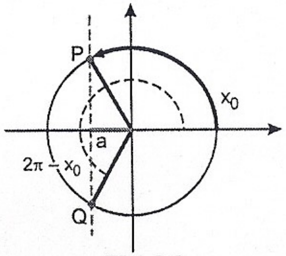


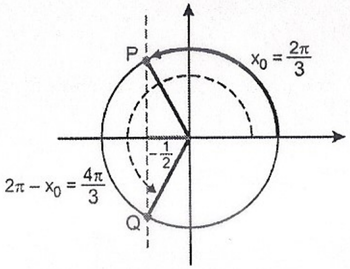
Fig. 8.3

Exemplo

Seja resolver a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$, no conjunto-universo U = [0; 2π]. O valor $\cos x = -\frac{1}{2}$ corresponde aos pontos P e Q. Para o primeiro, temos $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ e para o segundo, $2\pi - x_0 = \frac{4\pi}{3}$.

Assim,

$$S = \left\{\frac{2\pi}{3};\ \frac{4\pi}{3}\right\}$$



8.4. NOTAÇÃO arc cos a

Tomemos a equação cos x = a, para $-1 \le a \le 1$. Dos pontos P e Q obtidos, seja P aquele que se situa **no 1º ou no 2º quadrante**. O valor x_0 correspondente é tal que $0 \le x_0 \le \pi$. A este número x_0 dá-se o nome de **arco-cosseno a** e indica-se

$$x_0 = \text{arc cos a}$$

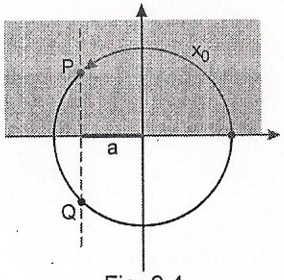


Fig. 8.4

Assim, de todos os números reais **x** para os quais se tem cos x = a, a **notação** arc cos a indica *apenas aquele que se encontra no intervalo* [0; π]. Por exemplo, a condição $\cos x = -\frac{1}{2}$ é satisfeita para $x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$ ou $x = -\frac{4\pi}{3}$ ou $x = \frac{8\pi}{3}$ etc.

Entretanto, apenas o valor $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ pode ser representado por essa nova notação:

$$\text{arc cos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

Em resumo:

A condição	equivale a
arc cos a = x com $-1 \le a \le 1$	cos x = a e $0 \le x \le \pi$

A notação arc cos a facilita escrever as respostas das equações do tipo visto acima: o conjunto-solução da equação cos x = a (com $-1 \le a \le 1$) no conjunto-universo U = [0; 2π] é

$$S = \{\text{arc cos } a;\ 2\pi - \text{arc cos } a\}$$

Exercícios Resolvidos

8.1) Resolva a equação $\cos x = \frac{1}{3}$ no conjunto-universo U = [0; 2π].

Solução

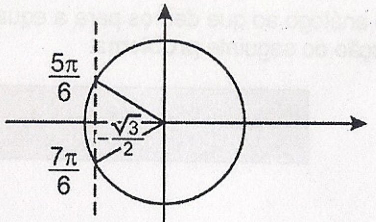
Basta escrever o conjunto-solução $S = \left\{\text{arc cos}\frac{1}{3};\ 2\pi - \text{arc cos}\frac{1}{3}\right\}$

8.2) Resolva a equação $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, no conjunto-universo U = [0; 2π].

Solução

Temos $\text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ e $2\pi - \text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

Assim, $S = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$



8.3) Resolva a equação $\cos x = \frac{1}{1+m^2}$ no conjunto-universo U = [0; 2π].

Solução

Observando que $0 < \frac{1}{1+m^2} < 1$, basta escrever

$$S = \left\{\text{arc cos}\frac{1}{1+m^2};\ 2\pi - \text{arc cos}\frac{1}{1+m^2}\right\}$$

8.4) Resolva a equação $\cos x = 2 \text{ sen } \frac{\pi}{6}$ no conjunto-universo U = [0; 2π]

Solução

Temos $\cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$. Como arc cos 1 = 0, resulta que

x = 0 ou x = 2π − 0 = 2π e assim S = {0; 2π}

8.5) Sendo α = arc cos a ($-1 \le a \le 1$), calcule sen α.

Solução

A condição α = arc cos a, com $-1 \le a \le 1$, equivale a cos α = a, com $0 \le \alpha \le \pi$. De cos α = a obtemos $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - a^2$.

e então sen $\alpha = \pm\sqrt{1-a^2}$

Entretanto, como $0 \le \alpha \le \pi$, resulta que sen α **não é negativo** e assim:

$$\text{sen } \alpha = +\sqrt{1-a^2}$$

8.5. CONJUNTO-UNIVERSO U = ℝ

Considere o seguinte **problema**:

Resolva a equação cos x = a no conjunto-universo U = ℝ.

A equação somente é possível se $-1 \le a \le 1$. Nesse caso, assinalados os pontos P e Q, que correspondem ao valor cos x = a, não devemos limitar a resposta aos valores x_0 e $2\pi - x_0$ mas, ao contrário, é preciso considerar **todos** os arcos que tem extremidades em P ou Q. Assim, escrevemos para o ponto P: $x = x_0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) e para o ponto Q: $x = -x_0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) onde x_0 = arc cos a. O conjunto-solução pode ser escrito.

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \text{ arc cos } a + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$$

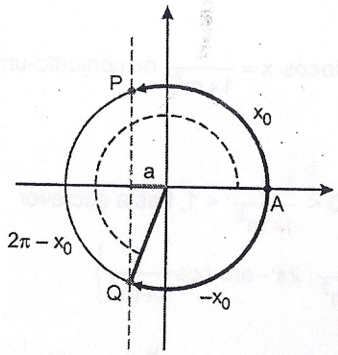
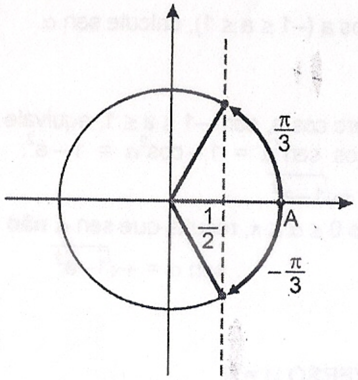


Fig. 8.5

Exemplo

Seja resolver a equação $\cos x = \frac{1}{2}$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

Como $x_0 = \text{arc cos } \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, basta escrever $S = \{x \in \mathbb{R} |\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$



Exercícios Resolvidos

8.6) Resolva a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

Solução

Como $\text{arc cos}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, basta escrever

$S = \{x \in \mathbb{R} |\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$

8.7) Resolva a equação $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

Solução

Como $\text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, temos

$3x + \frac{\pi}{2} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

donde resulta

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{6} \pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

8.8) Resolva a equação $\cos 2x = \frac{1}{3}$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

Solução

Devemos ter $2x = \pm \text{ arc cos } \frac{1}{3} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ e assim

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{1}{2}\text{arc cos}\frac{1}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

Exercícios Propostos

8.9) Resolva cada uma das equações dadas abaixo no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos x = -\frac{1}{3}$

c) $\cos 3x = \frac{1}{3}$

8.10) Resolva as equações do exercício anterior no conjunto-universo $U = [0; 2\pi]$.

8.11) Sendo $x = \text{arc cos } \frac{3}{5}$, calcule cotg x.

8.12) Calcule $y = \text{cotg (arc cos a)}$, sendo $-1 < a < 1$.

8.6. EQUAÇÃO DO TIPO sen x = a

Um tratamento análogo ao que demos para a equação do tipo cos x = a pode ser utilizado para a resolução do seguinte **problema**:

> Resolva a equação sen x = a no conjunto-universo U.

Lembrando que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, é claro que a equação só é possível se $-1 \leq a \leq 1$. Se o ponto de ordenada a é assinalado no eixo das ordenadas, então a reta conduzida por esse ponto, paralela ao eixo das abscissas, determina os pontos P e Q sobre a circunferência trigonométrica (conforme a figura 8.6). Indiquemos por x_0 a medida do arco correspondente ao ponto **P**, tal que $-\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \frac{\pi}{2}$. Os arcos de extremidade em P tem medidas iguais a $x_0 + 2k\pi$ e aqueles de extremidade em Q tem medidas iguais a $\pi - x_0 + 2k\pi$. Se o conjunto-universo é $U = \mathbb{R}$, o conjunto-solução fica

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - x_0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$$

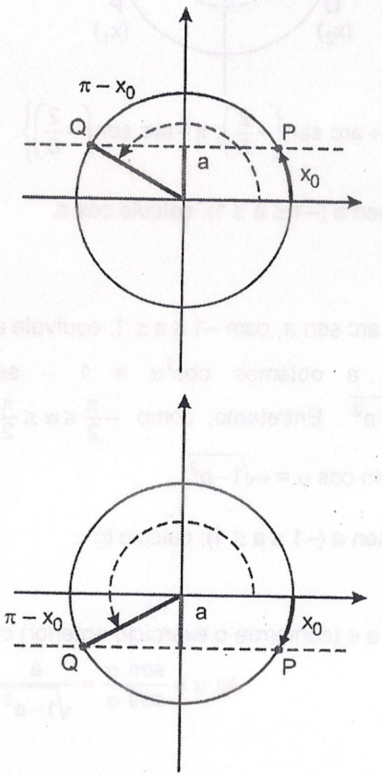


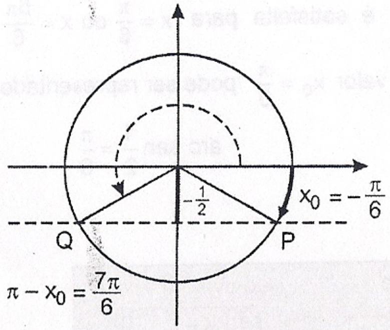
Fig. 8.6

Exemplo

Seja resolver a equação $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ no conjunto-solução $U = \mathbb{R}$.

O valor $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ corresponde aos pontos P e Q. Para o primeiro, temos $x_0 = -\frac{\pi}{6}$ e para o segundo, $\pi - x_0 = \frac{7\pi}{6}$. Assim,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$



Caso o conjunto-universo seja $U = [-2\pi; 2\pi]$, obtemos

$$S = \left\{-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}\right\}$$

8.7. NOTAÇÃO arc sen a

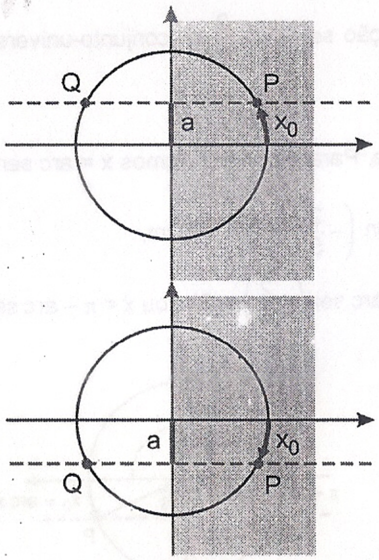


Fig. 8.7

Consideremos a equação $\operatorname{sen} x = a$, para $-1 \leq a \leq 1$. Dos pontos P e Q obtidos, seja P aquele que se situa **no 1º ou no 4º quadrante**. O valor x_0 correspondente é tal que $-\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \frac{\pi}{2}$. A este número x_0 dá-se o nome de **arco-seno a** e indica-se **x_0 = arc sen a**.

Assim, de todos os números reais **x** para os quais se tem sen x = a, a **notação** arc sen a indica *apenas aquele que se encontra no intervalo* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Por exemplo, a condição $\text{sen } x = \frac{1}{2}$ é satisfeita para $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{7\pi}{6}$ ou $x = \frac{13\pi}{6}$ etc.

Entretanto, apenas o valor $x_0 = \frac{\pi}{6}$ pode ser representado por essa nova notação:

$$\text{arc sen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

Em resumo:

A condição	equivale a
$\text{arc sen } a = x$ com $-1 \le a \le 1$	$\text{sen } x = a$ e $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

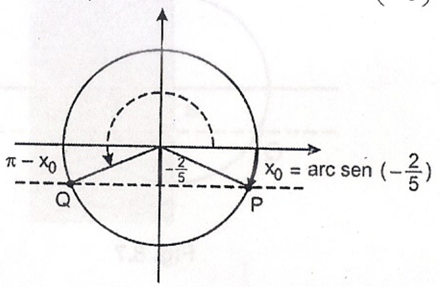
Exercícios Resolvidos

8.13) Resolva a equação $\text{sen } x = -\frac{2}{5}$ no conjunto-universo U = ℝ.

Solução

Observe a figura. Para o ponto P, temos $x = \text{arc sen}\left(-\frac{2}{5}\right) + 2k\pi$ e para o ponto Q, $x = \pi - \text{arc sen}\left(-\frac{2}{5}\right) + 2k\pi$. Assim,

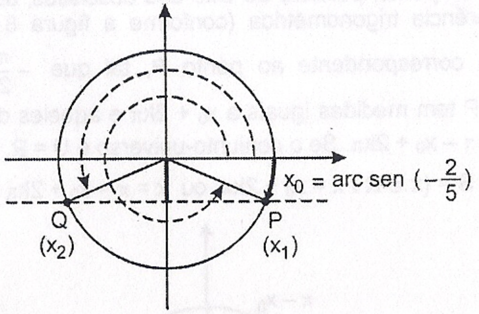
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arc sen}\left(-\frac{2}{5}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arc sen}\left(-\frac{2}{5}\right) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$$



8.14) Resolva a equação $\text{sen } x = -\frac{2}{5}$ no conjunto-universo U = [0; 2π].

Solução

Observe a figura. Para o ponto P, temos $x_1 = 2\pi + \text{arc sen}\left(-\frac{2}{5}\right)$ e para o ponto Q, $x_2 = \pi - \text{arc sen}\left(-\frac{2}{5}\right)$.



Assim, $S = \left\{2\pi + \text{arc sen}\left(-\frac{2}{5}\right); \pi - \text{arc sen}\left(-\frac{2}{5}\right)\right\}$.

8.15) Sendo α = arc sen a (–1 ≤ a ≤ 1), calcule cos a.

Solução

A condição α = arc sen a, com $-1 \le a \le 1$, equivale a sen α = a, com $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. De sen α = a obtemos $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - a^2$ e então $\cos \alpha = \pm\sqrt{1-a^2}$. Entretanto, como $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, resulta que cos α **não é negativo** e assim $\cos \alpha = +\sqrt{1-a^2}$.

8.16) Sendo α = arc sen a (–1 ≤ a ≤ 1), calcule tg α

Solução

Temos sen α = a e (conforme o exercício anterior) $\cos \alpha = +\sqrt{1-a^2}$. Assim,

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$$

Exercícios Propostos

8.17) Resolva cada uma das equações dadas abaixo no conjunto-universo U = ℝ.

a) $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{5}$

d) $\operatorname{sen}(2x+4) = \frac{1}{3}$

8.18) Resolva as equações do exercício anterior no conjunto-universo U = [0; 2π]

8.19) Sendo $x = \operatorname{arc\,sen} \frac{12}{13}$, calcule tg x.

8.8. EQUAÇÃO DO TIPO tg x = a

Vamos examinar o seguinte **problema**:

> Resolva a equação tg x = a
> no conjunto-universo U

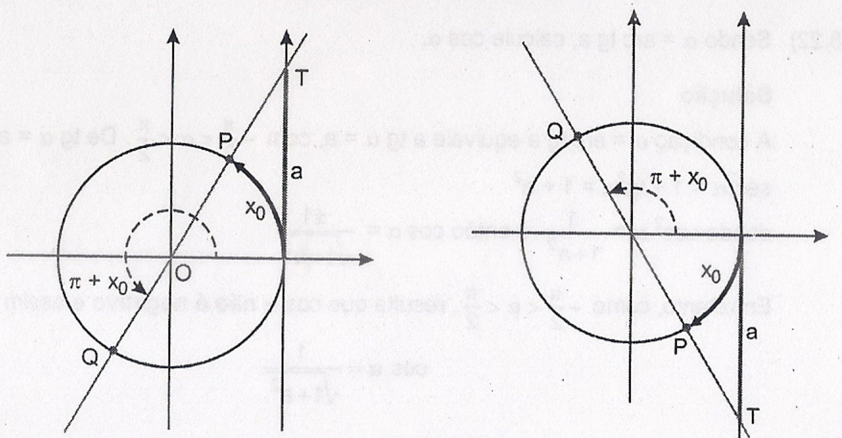
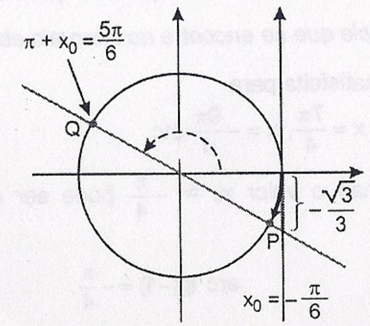


Fig. 8.8

Esta equação admite solução qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, pois tg x pode assumir qualquer valor real. Se o ponto T (1; a) é assinalado no eixo das tangentes então a reta $\overleftrightarrow{OT}$ determina os pontos P e Q sobre a circunferência trigonométrica (conforme as figuras). Indiquemos por x_0 a medida do arco correspondente ao ponto P, tal que $-\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2}$. Os arcos de extremidade **P** tem medidas iguais a $x_0 + 2k\pi$ e aqueles de extremidade Q tem medidas iguais a $\pi + x_0 + 2k\pi$. As duas expressões podem ser resumidas em uma só, escrevendo-se $x_0 + k\pi$. Assim, se o conjunto-universo é $U = \mathbb{R}$, o conjunto-solução fica

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$$

Exemplo



Seja resolver a equação $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$. O valor $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ corresponde aos pontos P e Q. Para P, temos $x_0 = -\frac{\pi}{6}$ e para Q, $\pi + x_0 = \frac{5\pi}{6}$. Assim,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

É claro que este mesmo conjunto-solução poderia ser escrito também nas formas

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ (x \in \mathbb{Z})\right\}$$

$$\text{ou } S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \ (x \in \mathbb{Z})\right\}$$

todas equivalentes.

8.9. NOTAÇÃO arc tg a

Considere a equação tg x = a. Dos pontos P e Q obtidos, seja P aquele que se situa **no 1º ou no 4º quadrante**. O valor x_0 correspondente é tal que $-\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2}$.

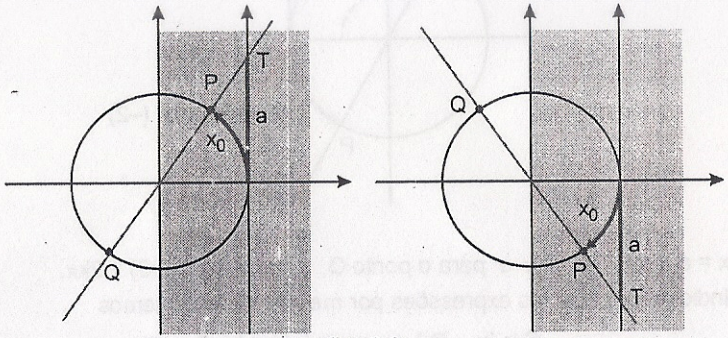


fig. 8.9

A este número x_0 dá-se o nome de ***arco-tangente a*** e indica-se x_0 **= arc tg a**.

Assim, de todos os números reais x para os quais se tem tg x = a, a **notação** arc tg a indica *apenas aquele que se encontra no intervalo aberto* $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Por exemplo, a condição tg x = –1 é satisfeita para

$$x = \frac{3\pi}{4},\ x = -\frac{\pi}{4},\ x = \frac{7\pi}{4},\ x = -\frac{9\pi}{4} \text{ etc.}$$

Entretanto, apenas o valor $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ pode ser representado por essa nova notação:

$$\text{arc tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Em resumo:

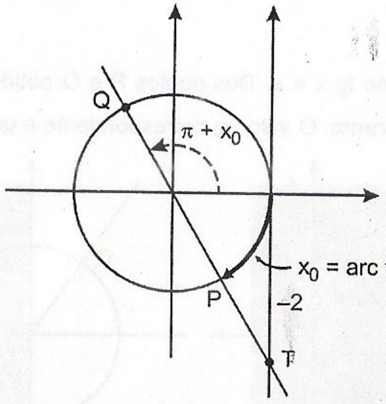
A condição	equivale a
arc tg a = x	tg x = a e $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Exercícios Resolvidos

8.20) Resolva a equação tg x = – 2 no conjunto-universo U = ℝ.

Solução

Observe a figura. Para o ponto P, temos



x = arc tg(–2) + 2kπ e para o ponto Q, x = π + arc tg(–2) + 2kπ.

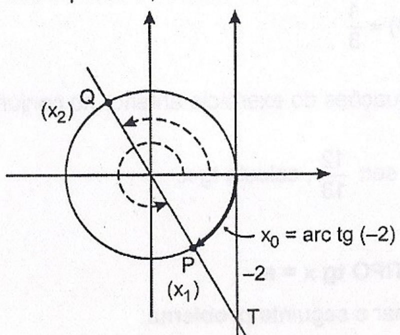
Indicando ambas as expressões por meio de uma só, temos

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arc tg}(-2) + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$$

8.21) Resolva a equação tg x = –2 no conjunto-universo U = [0; 2π].

Solução

Observe a figura. Para o ponto P, temos



$x_1 = 2\pi + \text{arc tg}(-2)$ e para o ponto Q, $x_2 = \pi + \text{arc tg}(-2)$.

Assim,

$$S = \{2\pi + \text{arc tg}(-2);\ \pi + \text{arc tg}(-2)\}$$

8.22) Sendo α = arc tg a, calcule cos α.

Solução

A condição α = arc tg a equivale a tg α = a, com $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. De tg α = a tiramos

$\sec^2\alpha = 1 + tg^2\alpha = 1 + a^2$

donde $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+a^2}$ e então $\cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+a^2}}$

Entretanto, como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, resulta que cos α **não é negativo** e assim

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

8.23) Resolva a equação $tg^2x + tg\,x - 2 = 0$ no conjunto-universo U = [0; 2π].

Solução

Pondo tg x = y, a equação fica $y^2 + y - 2 = 0$ donde se obtem os valores y = 1 e y = –2. Há, portanto, 2 casos: tg x = 1 ou tg x = –2, ilustrados na figura. Há 4 valores de x que satisfazem, correspondentes aos pontos P, Q, R e S. Temos

para P: $x = \frac{\pi}{4}$

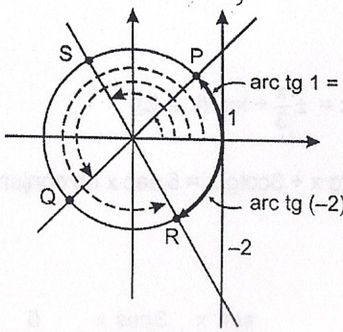
para Q: $x = \frac{5\pi}{4}$

para R: x = 2π + arc tg(–2)

para S: x = π + arc tg(–2)

e assim:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ 2\pi + \text{arc tg}(-2);\ \pi + \text{arc tg}(-2) \right\}$$



8.10. NOTAÇÃO arc cotg a. EQUAÇÃO DO TIPO cotg x = a

Consideremos a equação cotg x = a em um conjunto-universo U. Se o ponto S (a; 1) é assinalado sobre o eixo das cotangentes, então a reta $\overline{OS}$ determina os pontos P e Q sobre a circunferência trigonométrica (conforme as figuras). O ponto P é aquele que se situa **no 1º ou 2º quadrante**. Seja x_0 a medida do arco correspondente ao ponto P, tal que $0 < x_0 < \pi$. A este número x_0 dá-se o nome de ***arco-cotangente a*** e indica-se x_0 = **arc cotg a** .

Por exemplo, tem-se

$$\text{arc cotg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{arc cotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

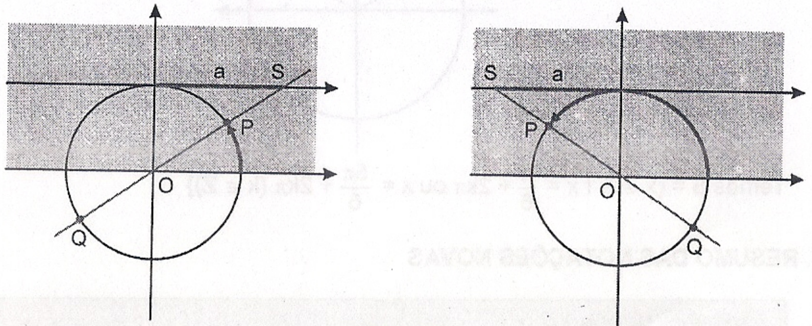


Fig. 8.10

Em resumo:

A condição	equivale a
arc cotg a = x	cotg x = a e 0 < x < π

Sendo assim, se o conjunto-universo da equação cotg x = a é U = ℝ, o conjunto-solução pode sempre ser escrito

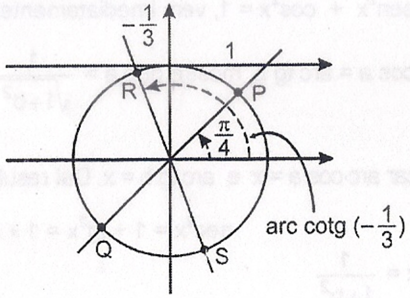
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arc cotg } a + k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})\}$$

Exercícios Resolvidos

8.24) Resolva a equação $3\text{cotg}^2x - 2\text{cotg } x - 1 = 0$ no conjunto-universo U = ℝ.

Solução

Pondo cotg x = y, a equação fica $3y^2 - 2y - 1 = 0$ donde se obtem os valores y = 1 e $y = -\frac{1}{3}$, ilustrados na figura.



Como arc cotg 1 = $\frac{\pi}{4}$, podemos escrever

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ \text{ ou } \ x = \text{arc cotg}\left(-\frac{1}{3}\right) + k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

8.25) Resolva a equação $3\text{cotg}^2x - 2\text{cotg } x - 1 = 0$ no conjunto-universo U = ℝ.

Solução

Baseando-nos na figura do exercício anterior, temos

para P: $x = \frac{\pi}{4}$

para Q: $x = \frac{5\pi}{4}$

para R: $x = \text{arc cotg}\left(-\frac{1}{3}\right)$

para S: $x = \pi + \text{arc cotg}\left(-\frac{1}{3}\right)$

Assim:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \text{arc cotg}\left(-\frac{1}{3}\right);\ \pi + \text{arc cotg}\left(-\frac{1}{3}\right) \right\}$$

8.26) Sendo α = arc cotg a, calcule sen α.

Solução

A condição α = arc cotg a equivale a cotg α = a, com $0 < \alpha < \pi$. De cotg α = a tiramos $\text{cossec}^2\alpha = 1 + \text{cotg}^2\alpha = 1 + a^2$

donde $\text{sen}^2\alpha = \dfrac{1}{1+a^2}$ e então $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+a^2}}$

Entretanto, como $0 < \alpha < \pi$, resulta que sen α é positivo e assim

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

8.27) Sendo arc sen a = arc cos b, mostre que $a^2 + b^2 = 1$.

Solução

Vamos indicar arc sen a = x e arc cos b = x. Daí resulta que sen x = a e cos x = b. Como $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$, vem imediatamente $a^2 + b^2 = 1$.

8.28) Sendo arc cos a = arc tg b, mostre que $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+b^2}}$

Solução

Vamos indicar arc cos a = x e arc tg b = x. Daí resulta que cos x = a e tg x = b. Então

$$\sec^2x = 1 + \text{tg}^2x = 1 + b^2$$

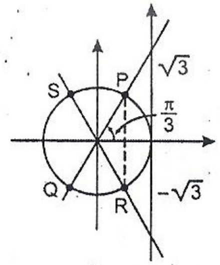
isto é, $\cos^2x = \dfrac{1}{1+b^2}$

Obtemos a igualdade $a^2 = \dfrac{1}{1+b^2}$, donde $a = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1+b^2}}$. Entretanto, devemos ter *simultaneamente* $0 \leq x \leq \pi$ e $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, isto é, devemos ter $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$. Isto indica que cos x = a é **positivo**, ou seja:

$$a = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

8.29) Resolva a equação 3cotg x = tg x no conjunto-universo U = ℝ.

Solução



Podemos escrever $\dfrac{3}{\text{tg}\,x} = \text{tg}\,x$, ou seja, $\text{tg}^2x = 3$, donde $\text{tg}\,x = \pm\sqrt{3}$. A figura ilustra a situação. Para os pontos P e Q, temos $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$ e para os pontos R e S, $x = -\dfrac{\pi}{3} + k\pi$.

Assim, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\}$

8.30) Resolva a equação tg x + 3cotg x = 5 sec x no conjunto-universo U = ℝ.

Solução

Temos

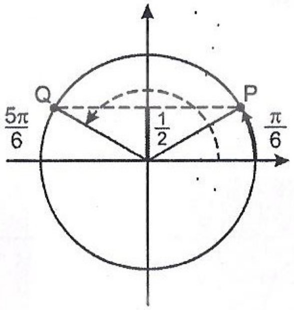
$$\frac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \frac{3\cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{5}{\cos x}$$

Multiplicando-se por sen x·cos x, vem

$$\text{sen}^2x + 3\cos^2x = 5\text{sen}\,x$$

donde $\text{sen}^2x + 3(1 - \text{sen}^2x) = 5\text{sen}\,x$, ou seja, $2\text{sen}^2x + 5\text{sen}\,x - 3 = 0$.

Trata-se de uma equação do 2º grau, cujas raízes são $\dfrac{1}{2}$ e -3. É claro que somente o valor sen x = $\dfrac{1}{2}$ é possível. A figura ilustra a situação.



Temos $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})\}$

8.11. RESUMO DAS NOTAÇÕES NOVAS

A condição	Equivale a
1) arc sen a = α com $-1 \leq a \leq 1$	sen α = a e $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$
2) arc cos a = α com $-1 \leq a \leq 1$	cos α = a e $0 \leq \alpha \leq \pi$

3) $\text{arc tg } a = \alpha$	$\text{tg } \alpha = a$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
4) $\text{arc cotg } a = \alpha$	$\text{cotg } \alpha = a$ e $0 < \alpha < \pi$

Exercícios Propostos

8.31) Dê o valor de:

a) $\text{arc sen} \frac{1}{2}$

b) $\text{arc sen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) arc cos (–1)

d) $\text{arc cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

e) $\text{arc tg}\left(-\sqrt{3}\right)$

f) arc tg (–1)

g) $\text{arc cotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

h) arc cotg (–1)

8.32) Resolva as equações abaixo no conjunto-universo U = ℝ.

a) $\text{tg } x = -\sqrt{3}$

b) $\text{cotg } x = -1$

c) $\text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{tg } x = 2$

8.33) Resolva as equações dadas no exercício anterior, considerando U = [0; 2π]

8.34) Resolva a equação $\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -3$ no conjunto-universo U = [–π; π]

8.35) Sendo $x = \text{arc tg } \frac{63}{16}$, calcule sen x

8.36) Sendo $\text{arc cotg } \frac{1-\mu^2}{2\mu} = x \ (0 < \mu < 1)$, calcule cos x.

8.37) Sendo arc sen a = arc cotg b mostre que $a = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$

8.38) Calcule **a**, sendo $\text{arc sen } a = \text{arc cos} \frac{\sqrt{2}}{4} a$.

8.39) Calcule **a**, sendo arc cotg 2a = arc cotg 3a.

8.40) Calcule y = sen (arc tg a).

8.41) Resolva as equações abaixo no conjunto-universo U = ℝ.

a) $3\text{sen}^2 x + 5\text{sen } x - 2 = 0$

b) $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$

c) $\text{tg}^3 x - 3\text{tg } x = 0$

d) $2\cos^2 x + 3\text{sen } x - 3 = 0$

8.42) Resolva as equações abaixo no conjunto-universo U = ℝ.

a) $3\sec x = 4\cos x$

b) $2\text{sen } x = \text{cossec } x$

c) $3\text{cotg } x = \text{tg } x$

d) $\sec x + 2\text{tg } x = 2\text{sen}^2 x \cdot \sec x + 2\cos x$

e) $\text{cossec}^2 x + 5 - 3\sqrt{3}\,\text{cotg } x = 0$

f) $\sec^2 x + \text{tg}^2 x = \frac{5}{3}$

g) $\text{tg}^2 x(3 - 2\sec x) = 3(\sec x - 1)$

h) $\frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = 2 - \text{cotg } x$

i) $\text{tg } x + \text{cotg } x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Exercícios Suplementares

II.1) Utilizando a tabela, dê o valor de:

a) sen 3973°

b) cos 415°

c) tg 3297°

d) $\text{cotg} \frac{11\pi}{2}$

e) $\sec \frac{142\pi}{3}$

f) $\text{cossec} \frac{19\pi}{3}$

II.2) Calcule sen x e cos x, sendo:
$8\text{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 5\text{sen } x + 1$

II.3) Calcule sen x e cos x, sendo $\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{2\sqrt{5}}{9}$

II.4) Calcule sen x e cos x, sendo:
$2(\text{sen}^3x + \cos^3x) = \text{sen } x + \cos x$

II.5) Calcule sen x e cos x, sendo:
$\text{sen } x + a\cos x = a$

II.6) Calcule sen x e cos x, sendo
$(m + 1)\text{sen } x + (m - 1)\cos x = m + 1 \ (m \neq \pm 1)$

II.7) Prove que $2\cos^2\theta - 1 = \frac{1 - \text{tg}^2\theta}{1 + \text{tg}^2\theta}$

II.8) Prove que:
$1 + (1 + 2\text{tg}^2x)\text{sen}^2x = 2\text{tg}^2x + \cos^2x$

II.9) Sendo $\cos\alpha + \cos\beta = a$ e $\text{sen }\alpha + \text{sen }\beta = b$, calcule
$\cos\alpha\cdot\cos\beta + \text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\beta$.

II.10) Prove que:
$$\frac{4 + 4\ \text{tg } x + \text{cotg } x}{4\ \text{tg } x - \text{cotg } x} = \frac{2\ \text{sen } x + \cos x}{2\ \text{sen } x - \cos x}$$

II.11) Prove que $\frac{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}{\sqrt{2} - \sec x} = \cos^2 x\left(\sqrt{2} + \sec x\right)$

II.12) Sendo $\text{tg } \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, simplifique:
$y = \text{sen } \alpha(1 + \text{tg } \alpha) + \cos\alpha(1 + \text{cotg } \alpha) - \sec\alpha$

II.13) Simplifique:
$y = \text{cotg}^2x(\text{tg } x - \text{sen } x)(\sec x + 1)$

II.14) Simplifique $y = \sqrt{\frac{1}{1 + \cos\alpha} + \frac{1}{1 - \cos\alpha}}$
sendo α de 1º quadrante.

II.15) Simplifique $y = \frac{(\text{tg } x + \text{cotg } x)^2}{\sec^2 x \cdot \text{cossec}^2 x}$

II.16) Sendo $\text{sen } x = \sqrt{\frac{a}{a+b}}$ e $\cos x > 0$, calcule as demais razões trigonométricas de x.

II.17) Sendo $\cos x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ com $a > b > 0$ e $\text{sen } x > 0$, calcule as demais razões trigonométricas de x.

II.18) Sendo $\text{tg } x = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$, com $a > b > 0$ e $\cos x < 0$, calcule as demais razões trigonométricas de x.

II.19) Sendo $\text{cotg } x = \frac{m - n}{2\sqrt{mn}}$, com $m > n > 0$ e $\text{sen } x > 0$, calcule as demais razões trigonométricas de x.

II.20) Sendo $\text{cotg } \alpha + \text{cossec } \alpha = m \ (m \neq 0)$, calcule cos α.

II.21) Determine **m** para que se tenha simultaneamente $\text{sen } x = \frac{m - 3}{5}$ e $\cos x = \frac{2m + 4}{5}$.

II.22) Determine **m** para que se tenha simultaneamente $\text{cotg } x = \sqrt{3}\,m + 1$ e $\text{cossec } x = 2m + \sqrt{2}$.

II.23) Sendo sen x + cos x = a, calcule $\text{sen}^3x + \cos^3x$.

II.24) Sendo sen x + cos x = a, calcule $\text{tg}^3x + \text{cotg}^3x$.

II.25) Prove que:
$\text{tg}^2\theta\cdot\sec\theta + \text{sen}^2\theta(\sec\theta + \cos\theta) = \sec^3\theta - \cos^3\theta$

II.26) Utilizando redução ao 1º quadrante, calcule sen A + cos 2A + tg 3 A, sendo
$A = \frac{535\pi}{12}$

II.27) Resolva a equação $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, no conjunto-universo $U = [-\pi; \pi]$

II.28) Resolva a equação tg 3x = −1, no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

II.29) Sendo $x = \text{arc sen } \frac{1}{5}$, calcule tg x.

II.30) Sendo $x = \text{arc tg } \frac{1}{2}$, calcule sen x.

II.31) Resolva a equação
$\text{arc sen}\left(\sqrt{3}x - 1\right) = \text{arc cos } x$

II.32) Resolva a equação

$$\text{arc cos}\frac{2\sqrt{13}}{13} = \text{arc tg}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

II.33) Calcule $y = \text{sen}(\text{arc tg } 2)$

II.34) Calcule $y = \sec(\text{arc cotg } a)$

II.35) Resolva a equação $\text{tg } x + 3 \text{ cotg } x = 4$ no conjunto-universo $U = [0; 2\pi]$.

II.36) Resolva a equação $\text{tg}^2 x = 2\sec x - 1$ no conjunto-universo $U = [-\pi; \pi]$.

II.37) Resolva a equação $8\cos^2 x + \sec x = 0$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

II.38) Resolva a equação $4\text{sen } x \cos x + \sqrt{3} = 0$ no conjunto-universo $U = [0; 2\pi]$.

II.39) Resolva a equação $\sec^2 x + \text{cossec}^2 x = 4$ no conjunto-universo $U = [0; 2\pi]$.

II.40) Resolva a equação $\dfrac{2}{\cos^2 x} + \dfrac{3}{\text{cotg}^2 x} = 7$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

PARTE III

Capítulo 9 – **Primeiras fórmulas trigonométricas**
Capítulo 10 – **Arco dobro, arco triplo e arco metade**
Capítulo 11 – **Transformação em produto**

Capítulo 9

Primeiras fórmulas trigonométricas

9.1. INTRODUÇÃO

As **relações fundamentais** estudadas até agora são igualdades que envolvem as razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente etc.) de **um mesmo arco** (ou ângulo) de medida α. Daqui por diante, apresentaremos as fórmulas que relacionam as razões trigonométricas de *arcos com medidas diferentes*, ou seja, vamos estudar como ficam afetados os valores de seno, cosseno etc. ao fazermos determinadas alterações nas medidas dos arcos (ou dos ângulos).

9.2 - MUDANÇA DE SINAL DO ARCO (OU ÂNGULO)

Aqui pretendemos estabelecer a comparação entre as expressões trigonométricas de um arco de medida α (sen α, cos α, etc.) e as expressões trigonométricas do arco de medida $-\alpha$ (sen $(-\alpha)$, cos $(-\alpha)$ etc.). Os arcos de medidas α e $-\alpha$ são chamados **ARCOS OPOSTOS**.

Se o ponto **P** (fig. 9.1) é extremidade do arco de medida α, é imediato que a extremidade Q do arco de medida $-\alpha$ ocupa uma *posição simétrica de P em relação ao eixo Ox*, já que ambos tem a *mesma origem A*. Resulta, portanto, que os pontos P e Q tem a *mesma abscissa* e *ordenadas opostas*, o que equivale a dizer que os arcos de medidas α e $-\alpha$ tem o **mesmo cosseno** e **senos opostos**, isto é:

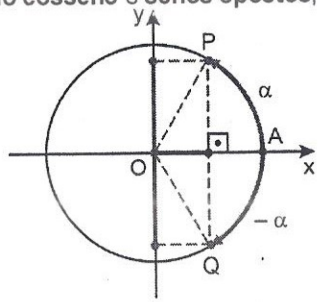


Fig. 9.1

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

e

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\alpha$$

A partir dessas conclusões, deduzimos as relações correspondentes às demais razões trigonométricas:

$$\text{tg}(-\alpha) = \frac{\text{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = -\text{tg}\ \alpha$$

$$\text{cotg}(-\alpha) = \frac{1}{\text{tg}(-\alpha)} = \frac{1}{-\text{tg}\ \alpha} = -\text{cotg}\ \alpha$$

$$\sec(-\alpha) = \frac{1}{\cos(-\alpha)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

$$\text{cossec}(-\alpha) = \frac{1}{\text{sen}(-\alpha)} = \frac{1}{-\text{sen}\,\alpha} = -\text{cossec}\,\alpha$$

Obtemos, assim, a seguinte tabela de relações:

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$	$\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$	$\text{cossec}(-\alpha) = -\text{cossec}\,\alpha$

9.3. COSSENO DA SOMA E COSSENO DA DIFERENÇA

Sejam **a** e **b** as medidas de dois arcos quaisquer. Vamos deduzir as expressões de cos (a – b) e cos (a + b) – cosseno da soma e cosseno da diferença – em função dos senos e cossenos de **a** e **b**.

Cosseno da diferença – Na figura 9.2, os pontos **P** e **Q** são, respectivamente, as extremidades dos arcos de medidas **a** e **b**; o ponto M foi obtido marcando-se $\widehat{PM} \equiv \widehat{QA}$; assim, **M** é a extremidade do arco de medida a – b. Com essa construção, as *coordenadas cartesianas* dos pontos P, Q, M e A são:

P (cos a; sen a)
Q (cos b; sen b)
M (cos [a – b]; sen [a – b])
A (1; 0)

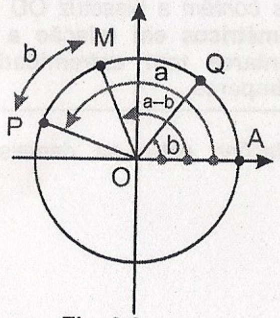


Fig. 9.2

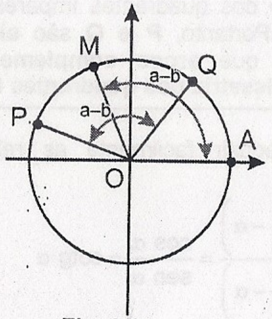


Fig. 9.3

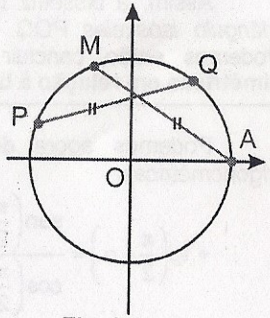


Fig. 9.4

e os arcos $\widehat{AM}$ e $\widehat{QP}$ tem a mesma medida (ver figura 9.3). Sabemos da Geometria que, ***numa mesma circunferência, a arcos iguais correspondem cordas iguais***; assim, a *distância* entre A e M é igual à *distância* entre Q e P (fig. 9.4); portanto, podemos escrever

$$\delta^2_{AM} = \delta^2_{QP}$$

Utilizando a "fórmula da distância entre dois pontos" vista em 4.3, temos:

$$(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (x_P - x_Q) + (y_P - y_Q)^2$$

Substituindo as coordenadas, vem:

$$(\cos[a-b] - 1)^2 + (\text{sen}[a-b] - 0)^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\text{sen}\ a - \text{sen}\ b)^2$$

Desenvolvendo, agora, os quadrados e lembrando que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$$\cos^2[a-b] - 2\cos[a-b] + 1 + \text{sen}^2[a-b] =$$

$$= \cos^2 a - 2\cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a - 2\text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b + \text{sen}^2 b$$

e

$$2 - 2\cos[a-b] = 2 - 2\cos a \cdot \cos b - 2\text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$$

Simplificando esta última igualdade, obtemos a **fórmula do cosseno da diferença**:

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$$

Cosseno da soma – Para o cálculo de cos (a + b), basta fazermos a + b = a – (–b) e utilizar a expressão do *cosseno da diferença*; assim:

$$\cos(a+b) = \cos[a - (-b)] = \cos a \cdot \cos(-b) + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}(-b)$$

Usando agora as fórmulas de *mudança de sinal* vistas no item 9.2, obtemos:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$$

Exercícios Resolvidos

9.1) Conhecidos $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, e $\cos\beta = \frac{1}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$, calcule $\cos(\alpha+\beta)$ e $\cos(\alpha-\beta)$.

Solução

Vamos fazer os seguintes cálculos preliminares:

$\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$; com o α é do 1º quadrante: $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\text{sen}^2\beta = 1 - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$; como β é do 4º quadrante: $\text{sen}\ \beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Finalmente, calculamos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4}{15} + \frac{6\sqrt{2}}{15} = \frac{4+6\sqrt{2}}{15}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4}{15}-\frac{6\sqrt{2}}{15}=\frac{4-6\sqrt{2}}{15}$$

9.2) Calcule cos 105°, utilizando os senos e cossenos de 60° e 45°.

Solução

Como 105° = 60° + 45°, temos:
$\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60°\cdot\cos 45° - \operatorname{sen} 60°\cdot\operatorname{sen} 45° =$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{donde} \quad \cos 105°=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

9.3) Demonstre a identidade

$$\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=\cos^2 a-\operatorname{sen}^2 b$$

Solução

1º membro $= \cos(a+b)\cdot\cos(a-b) =$
$= (\cos a\cdot\cos b - \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b)\cdot(\cos a\cdot\cos b + \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b) =$
$= \cos^2 a\cdot\cos^2 b - \operatorname{sen}^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a\cdot(1-\operatorname{sen}^2 b) - (1-\cos^2 a)\cdot\operatorname{sen}^2 b =$
$= \cos^2 a - \cos^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b - \operatorname{sen}^2 b + \cos^2 a\cdot\operatorname{sen}^2 b = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 b =$
= 2º membro

9.4. ARCOS (OU ÂNGULOS) COMPLEMENTARES

Dois arcos cujas medidas tem **soma** igual a $\frac{\pi}{2}$ (ou igual a um *côngruo* de $\frac{\pi}{2}$) são chamados **complementares**; (30°; 60°), $\left(\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{8};-\frac{11\pi}{8}\right)$ são exemplos de pares de arcos complementares. Assim, se α é a medida de um arco, $\frac{\pi}{2}-\alpha$ é a medida de um seu complementar.

Propriedade: se dois arcos são complementares, ***o cosseno de um deles é igual ao seno do outro***, isto é:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$$
$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

A verificação da primeira igualdade é simples: basta desenvolver o cosseno da diferença; assim:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\alpha$$

como $\cos\frac{\pi}{2}=0$ e $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}=1$, vem:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$$

Para verificarmos a segunda relação efetuamos uma *mudança de variável*; assim, na igualdade (já verificada)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen}x$$

fazemos a substituição $x=\frac{\pi}{2}-\alpha$, da qual resulta $\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\alpha$; logo $\cos\alpha=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

Interpretação Geométrica

Se P e Q são, respectivamente, as extremidades dos arcos de medida α e $\frac{\pi}{2}-\alpha$ (fig. 9.5), é imediato que AÔP = QÔB (medida α).

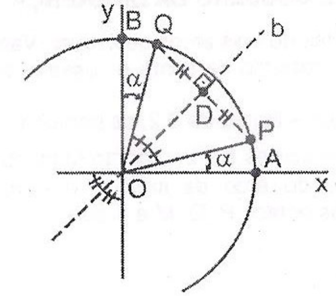


Fig. 9.5

Assim, a bissetriz b dos quadrantes ímpares *contém* a bissetriz OD do *triângulo isósceles* POQ. Portanto, **P** e **Q** são **simétricos em relação a b**. Podemos então concluir que **arcos complementares tem extremidades simétricas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares**.

Podemos agora deduzir facilmente as relações entre as demais razões trigonométricas:

- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{cotg}\alpha$

- $\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$
- $\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{cossec}\alpha$
- $\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$

Temos, assim, a seguinte tabela de relações:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$
$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{cossec}\alpha$	$\operatorname{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sec\alpha$

Exercícios Resolvidos

9.4) Simplifique a expressão:

$$y=\frac{\operatorname{sen}10^\circ\cdot\cos(-50^\circ)\cdot\operatorname{tg}65^\circ}{\cos(-80^\circ)\cdot\operatorname{sen}(-40^\circ)\cdot\operatorname{cotg}25^\circ}$$

Solução

Usando as fórmulas de mudança de sinal, vem:

$$y=\frac{\operatorname{sen}10^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\operatorname{tg}65^\circ}{\cos 80^\circ\cdot(-\operatorname{sen}40^\circ)\cdot\operatorname{cotg}25^\circ}$$

Notando, agora, que $10^\circ + 80^\circ = 90^\circ$, $50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$ e $65^\circ + 25^\circ = 90^\circ$, as relações entre arcos complementares nos permitem escrever:

$$y=\frac{\operatorname{sen}10^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\operatorname{tg}65^\circ}{\operatorname{sen}10^\circ\cdot(-\cos 50^\circ)\cdot\operatorname{tg}65^\circ}$$

logo, $y = -1$

9.5) Sendo x um arco qualquer, calcule o valor da expressão

$$y=\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$$

Solução

Basta notar que

$$\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2};$$

portanto, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$; assim

$$y=\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$$

logo, $y = 1$

9.6) Sendo α e β dois arcos complementares tais que $\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = m$, calcule o produto $\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$.

Solução

Temos $\operatorname{sen}\beta = \cos\alpha$; assim, a diferença dada fica

$$\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha = m$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, vem

$$\operatorname{sen}^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = m^2$$

ou

$$1 - 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha = m^2$$

e daí

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1-m^2}{2}$$

Então

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta=\frac{1-m^2}{2}$$

9.7) Calcule o valor da expressão

$y = \operatorname{sen}41^\circ\cdot\operatorname{sen}42^\circ\cdot\operatorname{sen}43^\circ\cdot\operatorname{sen}44^\circ\cdot\operatorname{sen}45^\circ\cdot\sec 46^\circ\cdot\sec 47^\circ\cdot\sec 48^\circ\cdot\sec 49^\circ$

Solução

Notando que

$41^\circ + 49^\circ = 90^\circ$, temos que $\sec 49^\circ = \operatorname{cossec}41^\circ = \frac{1}{\operatorname{sen}41^\circ}$;

portanto, $\operatorname{sen}41^\circ\cdot\sec 49^\circ = 1$.
Pelo mesmo motivo,
$\operatorname{sen}42^\circ\cdot\sec 48^\circ = 1$
$\operatorname{sen}43^\circ\cdot\sec 47^\circ = 1$
$\operatorname{sen}44^\circ\cdot\sec 46^\circ = 1$
Assim, a expressão dada se reduz a

$$y = \operatorname{sen}45^\circ$$

logo, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

9.5. SENO DA SOMA E SENO DA DIFERENÇA

Sejam **a** e **b** as medidas de dois arcos quaisquer. Vamos deduzir as expressões de sen (a + b) e sen (a – b) – seno da soma e seno da diferença – em função dos senos e cossenos de **a** e **b**.

Seno da soma – Como os arcos a + b e $\frac{\pi}{2}$ –(a + b) são complementares, temos:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(a+b)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right]$$

Utilizamos, agora, a fórmula do cos (A – b), onde $A=\frac{\pi}{2}-a$, e obtemos:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\cos b+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\operatorname{sen} b$$

Como $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\operatorname{sen} a$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos a$, vem, finalmente:

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\cdot\cos b+\operatorname{sen} b\cdot\cos a$$

Seno da diferença – Para o cálculo de sen (a – b), basta fazermos a – b = a + (–b) e utilizar a expressão do *seno da soma*; assim:

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}[a+(-b)]=\operatorname{sen} a\cdot\cos(-b)+\operatorname{sen}(-b)\cdot\cos a$$

Usando, agora, as fórmulas de *mudança de sinal*, obtemos:

$$\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\operatorname{sen} b\cdot\cos a$$

Exercícios Resolvidos

9.8) Sabendo que $\operatorname{tg} x=7$ e $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Solução

Vamos, inicialmente, calcular cos x e sen x:

$\sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x=1+49=50$; como x é do 3º quadrante, $\sec x=-\sqrt{50}=$

$=-5\sqrt{2}$; então $\cos x=\frac{1}{\sec x}=\frac{1}{-5\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

Como $\operatorname{tg} x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, temos $\operatorname{sen} x=\operatorname{tg} x\cdot\cos x=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$

Finalmente, calculamos:

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{sen} x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos x=-\frac{7\sqrt{2}}{10}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)=$$

$$=-\frac{7}{10}-\frac{1}{10}=-\frac{4}{5}$$

9.9) Sendo $a-b=\frac{\pi}{3}$, calcule o valor de

$$y=(\operatorname{sen} a+\cos b)^2+(\operatorname{sen} b-\cos a)^2$$

Solução

Desenvolvendo os quadrados, vem:

$y=\operatorname{sen}^2 a+2\operatorname{sen} a\cdot\cos b+\cos^2 b+\operatorname{sen}^2 b-2\operatorname{sen} b\cdot\cos a+\cos^2 a=$

$=2+2(\operatorname{sen} a\cdot\cos b-\operatorname{sen} b\cdot\cos a)=2+2\operatorname{sen}(a-b)=$

$=2+2\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=2+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

logo, $y=2+\sqrt{3}$

9.10) Prove que, com $-1\le a\le 1$, tem-se arc sen a + arc cos a = $\frac{\pi}{2}$.

Solução

Vamos fazer arc sen a = α e arc cos a = β; temos então:

$$\operatorname{arc\,sen} a=\alpha\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{sen}\alpha=a\\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\end{cases}\quad\text{(I)}$$

$$\operatorname{arc\,cos} a=\beta\Rightarrow\begin{cases}\cos\beta=a\\ 0\le\beta\le\pi\end{cases}\quad\text{(II)}$$

e, também, que

$$\cos\alpha=\sqrt{1-a^2}\quad\text{e}\quad\operatorname{sen}\beta=\sqrt{1-a^2}$$

Vamos agora calcular $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)$:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha=a\cdot a+\sqrt{1-a^2}\cdot\sqrt{1-a^2}=a^2+1-a^2$$

donde

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=1$$

Esta igualdade é uma *equação trigonométrica simples*, cuja solução é

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

No entanto, se somarmos as desigualdades (I) e (II), teremos:

$$-\frac{\pi}{2}\le\alpha+\beta\le\frac{3\pi}{2}$$

Assim, necessariamente,

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

isto é: arc sen a + arc cos a = $\frac{\pi}{2}$.

9.6. TANGENTE DA SOMA E TANGENTE DA DIFERENÇA

Sejam **a** e **b** as medidas de dois arcos, tais que **a**, **b**, **a + b** e **a − b** sejam diferentes de $\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Vamos deduzir as expressões de tg(a + b) e tg(a − b) – tangente da soma e tangente da diferença – em função das tangentes de a e b.

Tangente da soma – Escrevemos, inicialmente:

$$\text{tg}(a+b)=\frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\text{sen a}\cdot\cos b+\text{sen b}\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b-\text{sen a}\cdot\text{sen b}}$$

Dividimos agora o numerador e o denominador desta fração por cos a·cos b:

$$\text{tg}(a+b)=\frac{\frac{\text{sen a}\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}+\frac{\text{sen b}\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b}}{\frac{\cos a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}-\frac{\text{sen a}\cdot\text{sen b}}{\cos a\cdot\cos b}}=\frac{\frac{\text{sen a}}{\cos a}+\frac{\text{sen b}}{\cos b}}{1-\frac{\text{sen a}}{\cos a}\cdot\frac{\text{sen b}}{\cos b}}$$

Obtemos, finalmente

$$\text{tg}(a+b)=\frac{\text{tg a}+\text{tg b}}{1-\text{tg a}\cdot\text{tg b}}$$

Tangente da diferença – Para o cálculo de tg(a − b), basta fazermos a − b = a + (−b) e utilizarmos a expressão da *tangente da soma*; assim:

$$\text{tg}(a-b)=\text{tg}\left[a+(-b)\right]=\frac{\text{tg a}+\text{tg}(-b)}{1-\text{tg a}\cdot\text{tg}(-b)}$$

Usando agora as fórmulas de *mudança de sinal*, obtemos:

$$\text{tg}(a-b)=\frac{\text{tg a}-\text{tg b}}{1+\text{tg a}\cdot\text{tg b}}$$

Exercícios Resolvidos

9.11) Dados tg $\alpha=2$ e tg $\beta=3$, calcule a soma $\alpha+\beta$.

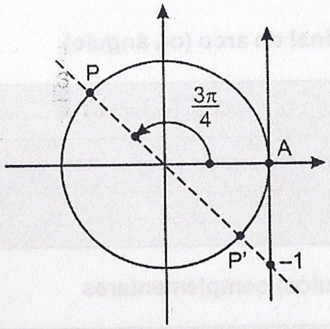
Solução

Vamos calcular $\text{tg}(\alpha+\beta)$:

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta}{1-\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}=\frac{2+3}{1-2\cdot3}=\frac{5}{-5}$$

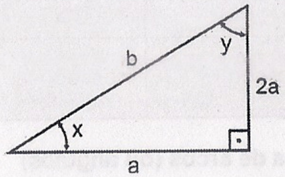
logo, $\text{tg}(\alpha+\beta)=-1$.

A figura abaixo mostra que as soluções dessa equação trigonométrica simples são os arcos de extremidade P e P'; temos, portanto,



$$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

9.12) Se x e y são ângulos do triângulo retângulo da figura, calcule tg (x − y).



Solução

Temos então $\text{tg }y=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ e $\text{tg}x=\frac{2a}{a}=2$. Daí, temos que:

$$\text{tg}(x-y)=\frac{\text{tg }x-\text{tg }y}{1+\text{tg }x\cdot\text{tg }y}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{1+1}=\frac{3}{4}$$

9.13) Seja **b** um número real, positivo e diferente de 2. Se tg α e tg β são as raízes da equação $x^2-3(b+2)x+b^2-3=0$, mostre que:

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{3}{2-b}$$

Solução

Usando as relações de soma e produto das raízes de uma equação do 2º grau, temos que

$$\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta=3(b+2)$$

$$\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta=b^2-3$$

então:

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta}{1-\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}=\frac{3(b+2)}{1-(b^2-3)}=\frac{3(b+2)}{4-b^2}=\frac{3(b+2)}{(2+b)(2-b)}=\frac{3}{2-b}$$

9.7. RESUMO

1º) Mudança de sinal do arco (ou ângulo)

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}\ \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\ \alpha$	$\text{cotg}(-\alpha) = -\text{cotg}\ \alpha$
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$	$\text{cossec}(-\alpha) = -\text{cossec}\ \alpha$

2º) Arcos (ou ângulos) complementares

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{sen}\ \alpha$
$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{cotg}\ \alpha$	$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{tg}\ \alpha$
$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \text{cossec}\ \alpha$	$\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sec\alpha$

3º) Soma e diferença de arcos (ou ângulos)

$\text{sen}\ (a+b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a$	
$\text{sen}\ (a-b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b - \text{sen}\ b \cdot \cos a$	
$\cos\ (a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$	
$\cos\ (a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$	
$\text{tg}(a+b) = \dfrac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$	$\text{tg}(a-b) = \dfrac{\text{tg}\ a - \text{tg}\ b}{1 + \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$

Exercícios Propostos

9.14) Dado que $\text{sen}\ \alpha = \frac{3}{5},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, determine:

a) $\text{sen}\ (-\alpha)$
b) $\cos\ (-\alpha)$
c) $\text{tg}\ (-\alpha)$

9.15) Sendo sen (x – y) = a, calcule **a** para que se tenha

$$3 \cdot \text{sen}\ (y-x) + 2\cos^2(y-x) = 0.$$

Resolva, em seguida, a equação sen (x – y) = a, para x – y no 1º **quadrante**.

9.16) Simplifique as expressões abaixo e, se possível, determine seu valor numérico

a) $y = \cos 3x \cdot \cos x + \text{sen} 3x \cdot \text{sen}\ x$

b) $y = \cos 65° \cdot \cos 25° - \text{sen}\ 65° \cdot \text{sen}\ 25°$
c) $y = \cos 70° \cdot \cos 10° + \text{sen}\ 70° \cdot \text{sen}\ 10°$

9.17) Calcule cos 75º e cos 15º, usando, para ambos, as fórmulas de cos(a + b) ou cos(a – b).

9.18) Se $\text{sen}\ \alpha = \frac{2}{3},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcule $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

9.19) Calcule $\cos\left(\text{arc sen}\frac{3}{5} - \text{arc sen}\frac{1}{2}\right)$.

9.20) Dado que $\sec\alpha = 3,\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, determine:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$
c) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

9.21) Sendo $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = a$, determine:

a) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

9.22) Sendo $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = m$, determine $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

9.23) Simplifique as expressões

a) $y = \dfrac{\text{sen}\ x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(-x)}{1 - \text{tg}(-x) \cdot \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$

b) $y = \dfrac{\cos(a-b) \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{12} - x\right)}{\cos(b-a) \cdot \text{cotg}\left(\frac{5\pi}{12} + x\right)}$

9.24) Calcule o valor da expressão:
$y = \text{tg}\ 1° \cdot \text{tg}\ 2° \cdot \text{tg}\ 3° \cdot \ldots \cdot \text{tg}\ 88° \cdot \text{tg}\ 89°$

9.25) Calcule o valor da expressão:
$y = 2 \cdot \cos 26° \cdot \cos 27° \cdot \cos 28° \cdot \cos 29° \cdot \cos 30° \cdot \text{cossec } 61° \cdot \text{cossec } 62° \cdot \text{cossec } 63° \cdot \text{cossec } 64°$

9.26) Simplifique as expressões abaixo e, se possível, determine seu valor numérico:

a) $y = \text{sen } 2a \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \cos 2a$

b) $y = \text{sen}\frac{\pi}{5} \cdot \cos\frac{4\pi}{5} + \text{sen}\frac{4\pi}{5} \cdot \cos\frac{\pi}{5}$

9.27) Calcule sen 105°.

9.28) Calcule $\text{sen}\left(\text{arc sen}\frac{\sqrt{3}}{2} - \text{arc tg}\frac{24}{7}\right)$.

9.29) Mostre que $\text{sen}(a+b) \cdot \text{sen}(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$.

9.30) Calcule tg 15°.

9.31) Supondo satisfeitas as condições de existência, mostre que:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos x - \text{sen } x}{\cos x + \text{sen } x}$$

9.32) Determine tg x, sabendo que:

$$\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

9.33) Sendo $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, mostre que:

$$(1 + \text{tg } \alpha) \cdot (1 + \text{tg } \beta) = 2$$

9.34) Mostre que, se $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, então

$$\text{tg } x \cdot \text{tg } y + \text{tg } x \cdot \text{tg } z + \text{tg } y \cdot \text{tg } z = 1$$

9.35) Se cotg α e cotg β são raízes da equação $x^2 + bx - 1 = 0$, calcule $\text{cotg}(\alpha + \beta)$, sabendo que $b \neq 0$.

9.36) São dadas, a seguir, três equações do 2° grau com seus respectivos conjuntos-solução:
E_1: $x^2 - sx + p = 0$, $S_1 = \{\text{sen}(a+b); \cos(a-b)\}$
E_2: $x^2 - s_1x + p_1 = 0$, $S_2 = \{\text{sen } a; \cos a\}$
E_3: $x^2 - s_2x + p_2 = 0$; $S_3 = \{\text{sen } b; \cos b\}$
Mostre que $s = s_1 \cdot s_2$ e que $p = p_1 + p_2$

9.8. SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ARCOS DA FORMA $k\pi \pm x$

Um problema importante em Trigonometria é a simplificação de expressões do tipo sen $(\pi - x)$, cos $(\pi + x)$, tg $(2\pi - x)$, sec $(2\pi + x)$ etc., isto é, expressões trigonométricas de arcos que são a **soma** (ou a **diferença**) **de um múltiplo de π com um arco x qualquer**. É claro que para resolvermos esse problema poderíamos aplicar as fórmulas de soma ou diferença de arcos. Por exemplo, para a simplificação de cos $(\pi + x)$, faríamos:

$\cos(\pi + x) = \cos \pi \cdot \cos x - \text{sen } \pi \cdot \text{sen } x = (-1) \cdot \cos x - (0) \cdot \text{sen } x$; logo,

$$\boxed{\cos(\pi + x) = -\cos x}$$

Esse processo, no entanto, seria exaustivo já que, em exercícios, poderíamos ter muitas dessas expressões. É, portanto, conveniente estabelecer uma *regra prática* para a resolução.

A observação dos resultados obtidos, quando simplificamos expressões trigonométricas **dos arcos $k\pi \pm x$** (k inteiro), encontrando expressões trigonométricas **do arco x**, nos levou a perceber que, **para todos os arcos da forma $k\pi \pm x$**, o "comportamento" na simplificação é o mesmo e pode ser assim descrito:

1) a expressão trigonométrica se conserva

(isto é, seno "continua" seno, tangente "continua" tangente etc.)

2) o sinal é conservado ou trocado, conforme os sinais da expressão trigonométrica nos quadrantes em que estão $k\pi \pm x$ e x sejam iguais ou contrários.

Essa última observação pressupõe o conhecimento do quadrante a que pertence x e, consequentemente, do quadrante a que pertence $k\pi \pm x$. Assim, se x é um arco do 2° quadrante, $\pi + x$ é do 4° quadrante e, para essa situação, a simplificação de cos $(\pi + x)$ seria assim feita:

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

(foi mantida a expressão **cos** e trocado o sinal, posto que o cosseno, nos 2° e 4° quadrantes, tem sinais contrários).

Como, de modo geral, não sabemos a que quadrante pertence x, fazemos a *suposição* de que x é do 1° quadrante, onde todas as expressões trigonométricas são *positivas*. Assim, a 2ª observação pode ser escrita:

3) o sinal é conservado ou trocado conforme o sinal da expressão trigonométrica no quadrante em que está $k\pi \pm x$ seja + ou –.

Vejamos alguns exemplos:

1°) sen $(\pi - x)$:

se x é do 1° quadrante, então $\pi - x$ é do 2° quadrante onde o seno tem sinal +; logo

$$\boxed{\text{sen}(\pi - x) = \text{sen } x}$$

2°) tg $(2\pi - x)$:

se x é do 1° quadrante, então $2\pi - x$ é do 4° quadrante, onde a tangente tem sinal –; logo

$$\text{tg}\,(2\pi - x) = -\text{tg}\,x$$

3º) sec $(2\pi + x)$:

se x é do 1º quadrante, então $2\pi + x$ é do 1º quadrante, onde a secante tem sinal +; logo

$$\sec\,(2\pi + x) = \sec x$$

4º) cotg $(13\pi - x)$:

obtemos, inicialmente, a primeira determinação positiva dos arcos de mesma extremidade que 13π:. 13 | 2 Resulta π. Temos então:

1 6

$$\text{cotg}\,(13\pi - x) = \text{cotg}\,(\pi - x)$$

Se x é do 1º quadrante, então $\pi - x$ é do 2º quadrante, onde a cotangente tem sinal –; logo

$$\text{cotg}\,(13\pi - x) = -\text{cotg}\,x$$

Caberiam aqui as seguintes perguntas: supor x no primeiro quadrante não é uma particularização do resultado? Não há prejuízo do rigor matemático?

Não é difícil verificar que isso não ocorre, já que o interesse está no *sinal relativo* da razão trigonométrica nos quadrantes em que realmente estão $k\pi \pm x$ e x. Podemos mostrar esse fato através de um exemplo no qual examinaremos as quatro possibilidades de quadrantes para o arco x. Simplificaremos sen $(\pi - x)$ e cos $(\pi - x)$.

1º caso: *x é do 1º quadrante* $\Rightarrow \pi - x$ *é do 2º quadrante*

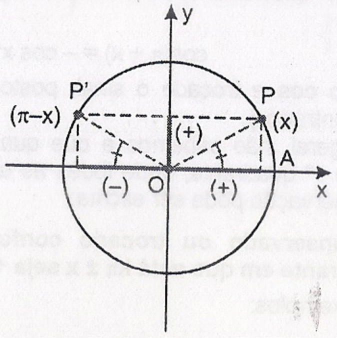


Fig. 9.6

P e P' são, respectivamente, as extremidades de x e $\pi - x$. A figura 9.6 mostra que P' ocupa uma posição simétrica de P em relação ao eixo Oy, isto é, P e P' tem mesma ordenada e abscissas opostas; portanto:

$$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x \quad \text{e} \quad \cos\,(\pi - x) = -\cos x$$

2º caso: *x é do 2º quadrante* $\Rightarrow \pi - x$ *é do 1º quadrante*

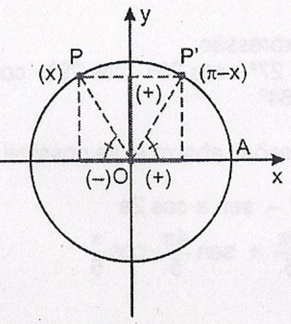


Fig. 9.7

A figura 9.7 mostra que a situação relativa não sofreu alterações: P e P' tem *mesma ordenada e abscissas opostas*; portanto:

$$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x \quad \text{e} \quad \cos\,(\pi - x) = -\cos x$$

3º caso: *x é do 3º quadrante* $\Rightarrow \pi - x$ *é do 4º quadrante*

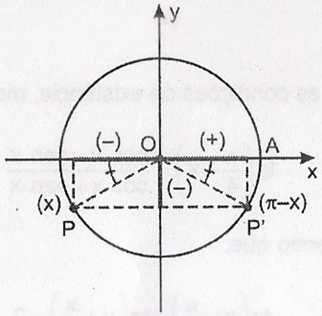


Fig. 9.8

A figura 9.8 mostra que, novamente, não há modificação na situação relativa; nos 3º e 4º quadrantes, os *senos* continuam *iguais e os cossenos, opostos*; assim:

$$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\,x \quad \text{e} \quad \cos\,(\pi - x) = -\cos x$$

4º caso: *x é do 4º quadrante* $\Rightarrow \pi - x$ *é do 3º quadrante*

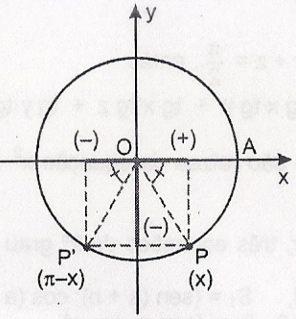


Fig. 9.9

Aqui (fig. 9.9) trata-se praticamente de uma repetição do 3º caso, confirmando, portanto, que, qualquer que seja o quadrante a que pertença o arco x, a relação entre os sinais é a *mesma* que se obtém *supondo* x *no 1º quadrante*.

Podemos, então, resumir assim as etapas de simplificação das expressões trigonométricas dos arcos $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$, $2\pi + x$ etc.:

1) **conservar a expressão trigonométrica**
2) **localizar o quadrante em que está o arco (supondo x no primeiro quadrante)**
3) **conservar ou trocar o sinal conforme a razão trigonométrica seja positiva ou negativa no quadrante localizado.**

Exercícios Resolvidos

9.37) Simplifique a expressão:
$y = \text{sen}(\pi - x)\cdot\text{sen}(2\pi - x) + \cos(\pi + x)\cdot\cos(2\pi + x)$

Solução

Supondo x é do 1º quadrante, temos $\pi - x$ é do 2º quadrante, $2\pi - x$ é do 4º quadrante, $\pi + x$ é do 3º quadrante e $2\pi + x$ é do 1º quadrante. Portanto,

$$\text{sen}(\pi - x) = \text{sen}\, x$$
$$\text{sen}(2\pi - x) = -\text{sen}\, x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\cos(2\pi + x) = \cos x$$

A expressão dada fica:
$y = \text{sen}\, x\cdot(-\text{sen}\, x) + (-\cos x)\cdot\cos x = -\text{sen}^2 x - \cos^2 x$
logo, $y = -1$

9.38) Sendo $\cos\alpha = a$, calcule:

$$y = \frac{\text{tg}(3\pi - \alpha)\cdot\sec(5\pi + \alpha)}{\text{cotg}(4\pi - \alpha)\cdot\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Solução

Temos que
$\text{tg}(3\pi - \alpha) = \text{tg}(\pi - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$
$\sec(5\pi + \alpha) = \sec(\pi + \alpha) = -\sec\alpha$
$\text{cotg}(4\pi - \alpha) = \text{cotg}(2\pi - \alpha) = -\text{cotg}\,\alpha$
$\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sec\alpha$ (complementares)

A expressão dada fica:

$$y = \frac{(-\text{tg}\,\alpha).(-\sec\alpha)}{(-\text{cotg}\,\alpha).\sec\alpha} = -\frac{\text{tg}\,\alpha}{\text{cotg}\,\alpha} = -\frac{\text{tg}\,\alpha}{\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}} = -\text{tg}^2\alpha =$$

$$= -\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{a^2 - 1}{a^2}$$

9.9. SIMPLIFICAÇÃO DE EXPRESSÕES TRIGONOMÉTRICAS DOS ARCOS DA FORMA $\frac{k\pi}{2} \pm x$, k ÍMPAR

Também é importante, em Trigonometria, o problema da simplificação de expressões do tipo $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$, $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$, $\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ etc., isto é, de razões trigonométricas de arcos que são a soma (ou a **diferença) de um múltiplo de $\frac{\pi}{2}$ com um arco x qualquer**. Ainda aqui é claro que poderíamos resolver esse problema aplicando as fórmulas de soma ou diferença de arcos (ou ângulos). Vejamos, por exemplo, as simplificações de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ e $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\cdot\cos x + \text{sen}\, x\cdot\cos\frac{\pi}{2} = (1)\cdot\cos x + \text{sen}\, x\cdot(0); \text{ logo,}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

Para $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$, *não podemos aplicar tg (a + b), pois não existe* $\text{tg}\frac{3\pi}{2}$.

Contornaríamos assim o problema:

$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \frac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)} = \frac{\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\cdot\cos x + \text{sen}\, x\cdot\cos\frac{3\pi}{2}}{\cos\frac{3\pi}{2}\cdot\cos x - \text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\cdot\text{sen}\, x} =$$

$$= \frac{(-1)\cdot\cos x + \text{sen}\, x\cdot(0)}{0\cdot(\cos x) - (-1)\cdot\text{sen}\, x} = -\frac{\cos x}{\text{sen}\, x}; \text{ logo}$$

$$\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\text{cotg}\, x$$

Esse processo, como se pode perceber, é muito trabalhoso; vamos, portanto, estabelecer uma *regra prática* para a resolução.

Observando os resultados obtidos quando simplificamos expressões trigonométricas dos arcos $\frac{k\pi}{2} \pm x$, k ímpar, encontrando expressões trigonométricas do **arco x**, percebemos que **todos eles** tem o seguinte "comportamento":

1) a expressão trigonométrica é trocada pela sua co-expressão

(isto é, seno é trocado por cosseno, cosseno por seno, cotangente por tangente etc.)

2) o sinal é conservado ou trocado conforme a expressão trigonométrica de $\frac{k\pi}{2} \pm x$, seja positiva ou negativa no quadrante em que está esse arco (supondo x no 1º quadrante).

Note-se que já estamos admitindo que a hipótese de x ser do 1º quadrante não particulariza o resultado nem causa prejuízo ao rigor, como mostramos para os arcos $k\pi \pm x$ em 9.8. Sugerimos, no entanto, que o leitor confirme esse fato por conta própria, verificando, por exemplo, que $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \text{sen}\ x$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cos x$ para os quatro casos possíveis; isto será fácil com a construção de uma figura para cada caso.

Vamos agora a alguns exemplos:

1º) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$:

se x é do 1º quadrante, então $\frac{3\pi}{2}-x$ é do 3º quadrante, onde o seno tem sinal –; logo

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\cos x$$

2º) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$:

se x é do 1º quadrante, então $\frac{\pi}{2}+x$ é do 2º quadrante, onde a tangente tem sinal –; logo

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\text{cotg}\ x$$

3º) $\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$:

se x é do 1º quadrante, então $\frac{3\pi}{2}+x$ é do 4º quadrante, onde a co-tangente tem sinal –; logo

$$\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = -\text{tg}\ x$$

4º) $\sec\left(\frac{19\pi}{2}+x\right)$:

obtemos, inicialmente, a primeira determinação positiva dos arcos de mesma extremidade que $\frac{19\pi}{2}$:

$$\frac{19\pi}{2} = 19\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ e } 2\pi = 4\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) \qquad 19 \,|\, 4 \quad \boxed{3}\ \ 4$$

Resulta $\frac{3\pi}{2}$. Temos, então

$$\sec\left(\frac{19\pi}{2}+x\right) = \sec\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

Se x é do 1º quadrante, então $\frac{3\pi}{2}+x$ é do 4º quadrante, onde a secante tem sinal + ; logo

$$\sec\left(\frac{19\pi}{2}+x\right) = \text{cossec}\ x$$

Exercícios Resolvidos

9.39) Simplifique a expressão

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$$

Solução

Temos que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = \text{sen}\ 2x$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$$

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right) = -\cos 2x$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -\text{sen}\ x$$

A expressão dada fica:

$y = \text{sen}\ 2x\cdot\cos x - (-\cos 2x)\cdot(-\text{sen}\ x) = \text{sen}\ 2x\cdot\cos x - \text{sen}\ x\cdot\cos 2x =$
$= \text{sen}\ (2x - x) = \text{sen}\ x$

9.40) Sendo tg x = a, calcule

$$y = \frac{\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - \text{tg}(\pi+x)}{\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) + \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Solução

Temos que:

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\text{cotg}\ x$$

$$\text{tg}(\pi+x) = \text{tg}\ x$$

$$\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = \text{tg}\ x$$

$$\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \text{tg}\ x$$

A expressão dada fica:

$$y = \frac{-\text{cotg}\ x - \text{tg}\ x}{\text{tg}\ x + \text{tg}\ x} = \frac{-\frac{1}{a}-a}{a+a} = -\frac{1+a^2}{2a^2}$$

Exercícios Propostos

9.41) Simplifique as expressões:

a) sen $(\pi - x)$
b) cos $(\pi - x)$
c) tg $(\pi - x)$
d) sen $(\pi + x)$
e) cos $(\pi + x)$
f) tg $(\pi + x)$
g) sen $(2\pi - x)$
h) cos $(2\pi - x)$
i) tg $(2\pi - x)$
j) sen $(2\pi + x)$
k) cos $(2\pi + x)$
l) tg $(2\pi + x)$

9.42) Simplifique as expressões:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
c) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
d) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
e) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
f) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
g) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
h) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
i) $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
j) $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$
k) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$
l) $\text{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

9.43) Simplifique as expressões:

a) $\text{cotg}(-\pi - x)$
b) $\sec(5\pi + x)$
c) $\text{cossec}(12\pi + x)$
d) $\sec\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$
e) $\text{cossec}\left(\frac{13\pi}{2} - x\right)$
f) $\text{cotg}\left(\frac{15\pi}{2} + x\right)$

9.44) Simplifique as expressões:

a) $$y = \frac{\text{sen}(2\pi - \alpha)\cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot \text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos(2\pi + \alpha)\cdot \text{tg}(\pi + \alpha)}$$

b) $$y = \frac{\text{sen}(\pi - \alpha)\cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\cdot \cos(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)\cdot \cos(2\pi - \alpha) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

9.45) Se tg 35° = a, calcule:

$$y = \frac{\text{tg } 215° - \text{tg } 125°}{\text{tg } 235° + \text{tg } 325°}$$

9.46) Simplifique a expressão:

$$\text{sen}\frac{9\pi}{2} + \text{sen}\left(\alpha + \frac{13\pi}{2}\right)\cdot \cos(\alpha - 7\pi)$$

9.47) Calcule a expressão:

$$y = \text{sen } 990° - \frac{\cos(x + 1620°)\cdot \text{tg}(x + 630°)}{\text{sen}(900° - x)}, \text{ sabendo que sen } x = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

9.48) Avalie a expressão:
E = sen 0° + sen 1° + sen 2° + ... + sen 360°

9.49) Avalie a expressão:
E = cos 20° + cos 40° + cos 60° + ... + cos 180°

9.50) Mostre que, se x, y e z são ângulos internos de um triângulo não retângulo, então tg x, tg y e tg z tem sua soma igual ao seu produto.

Capítulo 10

Fórmulas de arco dobro, arco triplo e arco metade

10.1. INTRODUÇÃO

Continuando o estudo das **fórmulas trigonométricas**, vamos, neste capítulo, relacionar as razões trigonométricas de um arco de medida **a** com as razões de seu **dobro**, **triplo** e **metade**, isto é, dos arcos de medidas 2a, 3a e $\frac{a}{2}$. Todas essas relações são obtidas como *consequências imediatas* das fórmulas estudadas no capítulo 9, de sen (a + b), cos (a + b) e tg (a + b).

10.2. ARCO DOBRO

Vamos resolver o seguinte *problema*: calcular sen 2a, cos 2a e tg 2a, conhecendo sen a, cos a e tg a.

A solução é imediata se, nas fórmulas:

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen a} \cdot \cos b + \text{sen b} \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen a} \cdot \text{sen b}$$

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg a} + \text{tg b}}{1 - \text{tg a} \cdot \text{tg b}}$$

fazemos a substituição b = a. Temos:

$$\text{sen 2a} = \text{sen}(a+a) = \text{sen a} \cdot \cos a + \text{sen a} \cdot \cos a = 2\text{sen a} \cdot \cos a$$

$$\cos 2a = \cos(a+a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen a} \cdot \text{sen a} = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\text{tg 2a} = \text{tg}(a+a) = \frac{\text{tg a} + \text{tg a}}{1 - \text{tg a} \cdot \text{tg a}} = \frac{2\text{tg a}}{1 - \text{tg}^2 a}$$

Temos, portanto, o seguinte quadro de **relações**:

$\text{sen 2a} = 2\text{sen a} \cdot \cos a$
$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$
$\text{tg 2a} = \frac{2\,\text{tg a}}{1 - \text{tg}^2 a}$

Observações importantes

1) Como cos 2a está relacionado com os *quadrados* de cos a e sen a, podemos obter duas outras expressões, muito úteis na solução de exercícios; a primeira é obtida substituindo-se $\text{sen}^2 a$ por $1 - \cos^2 a$:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1.$$

A segunda é deduzida substituindo-se $\cos^2 a$ por $1 - \operatorname{sen}^2 a$:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = (1 - \operatorname{sen}^2 a) - \operatorname{sen}^2 a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$

Temos então:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$$

2) É importante que o leitor perceba que as **fórmulas de arco dobro** podem ser usadas sob inúmeras **formas** diferentes toda vez que se deseja relacionar um dado arco com seu dobro: assim como 2x é o dobro de x, também 4a é o dobro de 2a e 3α é o dobro de $\frac{3\alpha}{2}$. Por exemplo, as expressões

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x$$
$$\cos 8a = \cos^2 4a - \operatorname{sen}^2 4a$$
$$\cos 3\alpha = \cos^2 \frac{3\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{3\alpha}{2}$$
$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

são *formas diferentes* de escrever a *mesma* relação $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$. O mesmo pode ser dito sobre as relações do seno e da tangente.

Exercícios Resolvidos

10.1) Sendo $\operatorname{sen} a = \frac{5}{13}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$, calcule seno, cosseno e tangente de 2a, utilizando as fórmulas de arco dobro.

Solução

Calculamos, inicialmente, cos a e tg a:

$\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$; como a é do 1º quadrante, $\cos a = \frac{12}{13}$;

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

Agora, temos:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a = 2 \cdot \left(\frac{5}{13}\right) \cdot \left(\frac{12}{13}\right) = \frac{120}{169}$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \frac{144}{169} - \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

10.2) Sendo sen 17º = m, calcule cos 34º.

Solução

Se usássemos a relação $\cos 34^\circ = \cos^2 17^\circ - \operatorname{sen}^2 17^\circ$, precisaríamos, de início, calcular cos 17º; é conveniente, portanto, utilizarmos a fórmula de cos 2a em função de sen a. Assim:

$$\cos 34^\circ = 1 - 2\operatorname{sen}^2 17^\circ = 1 - 2m^2$$

10.3) Sendo sen 17º = 0,2924 e cos 17º = 0,9563, calcule sen 68º.

Solução

Notando que 68º é o dobro de 34º, e 34º é o dobro de 17º, calculamos, inicialmente, sen 34º e cos 34º; em seguida, podemos obter sen 68º. Assim:

$$\operatorname{sen} 34^\circ = 2\operatorname{sen} 17^\circ \cdot \cos 17^\circ = 2 \cdot (0{,}2924) \cdot (0{,}9563) = 0{,}5592$$
$$\cos 34^\circ = \cos^2 17^\circ - \operatorname{sen}^2 17^\circ = (0{,}9563)^2 - (0{,}2924)^2 = 0{,}8290$$

Agora,

$$\operatorname{sen} 68^\circ = 2 \cdot \operatorname{sen} 34^\circ \cdot \cos 34^\circ = 2(0{,}5592) \cdot (0{,}8290) = 0{,}9272$$

10.4) Dado $\cos \alpha = 0{,}6$, calcule $\cos 4\alpha$.

Solução

Calculamos, inicialmente, $\cos 2\alpha$ e, em seguida, $\cos 4\alpha$. Assim:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot (0{,}6)^2 - 1 = -0{,}28$$

Agora,

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot (-0{,}28)^2 - 1 = -0{,}84$$

10.5) Sendo $\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha = m$, calcule $\operatorname{sen} 2\alpha$.

Solução

Elevando ao quadrado a igualdade dada, vem:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \underbrace{2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos \alpha}_{\operatorname{sen} 2\alpha} + \cos^2 \alpha = m^2$$

$$1 + \operatorname{sen} 2\alpha = m^2$$

donde, $\operatorname{sen} 2\alpha = m^2 - 1$

10.6) Demonstre a identidade:

$$4 \cdot (\operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x \cdot \cos x) = \operatorname{sen} 4x$$

Solução

$\boxed{1^\circ \text{ membro}} = 4\operatorname{sen} x \cdot \cos x(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) =$

$= 2 \cdot 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x\,(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 2 \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x = \operatorname{sen} 4x = \boxed{2^\circ \text{ membro}}$

10.7) Calcule o valor da expressão:

$$y = \frac{1-\sqrt{2}\text{ sen } x}{1+\sqrt{2}\cos x} + \frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\text{ sen } x}$$

Solução

$$y = \frac{\left(1-\sqrt{2}\text{ sen } x\right)\left(1+\sqrt{2}\text{ sen } x\right)+\left(1-\sqrt{2}\cos x\right)\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)}{\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)\left(1+\sqrt{2}\text{ sen } x\right)} =$$

$$= \frac{\left(1-2\text{ sen}^2 x\right)+\left(1-2\cos^2 x\right)}{\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)\left(1+\sqrt{2}\text{ sen } x\right)} = \frac{(\cos 2x)+(-\cos 2x)}{\left(1+\sqrt{2}\cos x\right)\left(1+\sqrt{2}\text{ sen } x\right)} = 0$$

10.8) Simplifique a expressão:

$$y = \frac{1-2\cdot\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\text{ sen }\alpha}$$

Solução

Sabemos que $1 - 2\text{sen}^2 a = \cos 2a$; então,

$$1-2\text{ sen}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \cos\left[2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$$

Temos, portanto, que

$$y = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{2\text{ sen }\alpha} = \frac{\text{sen } 2\alpha}{2\text{ sen }\alpha} = \frac{2\text{ sen }\alpha\cdot\cos\alpha}{2\text{ sen }\alpha} = \cos\alpha$$

10.9) Mostre que a expressão:

$$y = \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$ é constante.

Solução

$$y = \frac{\text{sen } 3x\cos x - \text{sen } x\cos 3x}{\text{sen } x\cdot\cos x} = \frac{\text{sen}(3x-x)}{\text{sen } x\cdot\cos x} =$$

$$= \frac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x\cdot\cos x} = \frac{2\text{ sen } x\cdot\cos x}{\text{sen } x\cdot\cos x} = 2$$

10.10) Sendo $\text{tg }\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, calcule tg 2x.

Solução

Calculamos, inicialmente, tg x e, em seguida, tg 2x. Assim:

$$\text{tg } x = \frac{2\text{ tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Agora,

$$\text{tg } 2x = \frac{2\text{ tg}x}{1-\text{tg}^2 x} = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{24}{7}$$

10.11) Mostre que:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}\cdot\left(\frac{1}{1+\text{tg } x}+\frac{1}{1-\text{tg } x}\right) = \text{tg } 2x$$

Solução

$$\boxed{1^\circ\text{ membro}} = \frac{(-\text{sen } x)}{(-\cos x)}\cdot\frac{(1-\text{tg } x)+(1+\text{tg } x)}{(1+\text{tg } x)(1-\text{tg } x)} = \frac{\text{sen } x}{\cos x}\cdot\frac{2}{1-\text{tg}^2 x} =$$

$$= \text{tg } x\cdot\frac{2}{1-\text{tg}^2 x} = \frac{2\text{ tg } x}{1-\text{tg}^2 x} = \text{tg } 2x = \boxed{2^\circ\text{ membro}}$$

10.3. ARCO TRIPLO

Vamos resolver o seguinte *problema*: calcular sen 3a e cos 3a em função de sen a e cos a.

Nas relações

$\text{sen }(a + b) = \text{sen } a\cdot\cos b + \text{sen } b\cdot\cos a$

$\cos (a + b) = \cos a\cdot\cos b - \text{sen } a\cdot\text{sen } b$

façamos a substituição b = 2a. Temos no caso do seno:

$\text{sen } 3a = \text{sen }(a + 2a) = \text{sen } a\cdot\cos 2a + \text{sen } 2a\cdot\cos a =$

$= \text{sen } a\cdot(1 - 2\text{sen}^2 a) + (2\text{sen } a\cdot\cos a)\cdot\cos a =$

$= \text{sen } a\cdot(1 - 2\text{sen}^2 a) + 2\text{sen } a\cdot\cos^2 a =$

$= \text{sen } a\cdot(1 - 2\text{sen}^2 a) + 2\text{sen } a\cdot(1 - \text{sen}^2 a) =$

$= \text{sen } a - 2\text{sen}^3 a + 2\text{sen } a - 2\text{sen}^3 a =$

$= 3\text{sen } a - 4\text{sen}^3 a$

Como o caso do cosseno é tratado de modo análogo, deixamos a cargo do leitor a dedução. Temos, ao final, as seguintes fórmulas de **arco triplo**:

$$\text{sen } 3a = 3\text{sen } a - 4\text{sen}^3 a$$
$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

Exercícios Resolvidos

10.12) Sabendo que sen 3a·cossec a = m, com $\frac{\pi}{2} < a < \pi$, calcule sen a.

Solução

A igualdade pode ser assim simplificada:

$$\left(3\text{sen } a - 4\text{sen}^3 a\right)\cdot\frac{1}{\text{sen } a} = m$$

$$\frac{\text{sen } a\left(3 - 4\text{sen}^2 a\right)}{\text{sen } a} = m$$

$$3 - 4\text{sen}^2 a = m$$

$$\text{sen}^2 a = \frac{3-m}{4}$$

Logo, como a é do 2º quadrante, $\text{sen } a = \frac{\sqrt{3-m}}{2}$.

10.13) Demonstre a identidade:

$$\frac{2\cos x}{\cos 3x + \cos x} = \sec 2x$$

Solução

$$\boxed{1^\circ \text{ membro}} = \frac{2\cos x}{\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + \cos x} = \frac{2\cos x}{4\cos^3 x - 2\cos x} =$$

$$= \frac{2\cos x}{2\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right)} = \frac{1}{2\cos^2 x - 1} = \frac{1}{\cos 2x} = \sec 2x = \boxed{2^\circ \text{ membro}}$$

10.4. ARCO METADE

Vamos, neste item, deduzir as fórmulas de $\text{sen}\frac{a}{2}$, $\cos\frac{a}{2}$ e $\text{tg}\frac{a}{2}$ em função de cos a.

Partimos das fórmulas de arco dobro já conhecidas

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\text{sen}^2\alpha$$

escrevendo-as convenientemente, isto é, com 2α = a. Temos

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 \quad \text{e} \quad \cos a = 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{a}{2}$$

Daí, é imediato que

$$\text{sen}^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$$

Dividindo membro a membro essas duas últimas igualdades, temos também

$$\text{tg}^2\frac{a}{2} = \frac{1-\cos a}{1+\cos a}$$

Obtemos, assim, as fórmulas de **arco metade** que nos permitem calcular seno, cosseno e tangente de $\frac{a}{2}$, conhecendo apenas o cosseno de a:

$$\text{sen}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

$$\text{tg}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

Observação: os sinais + e – que aparecem nas fórmulas devem ser escolhidos, em cada caso, *conforme o quadrante a que pertença o arco de medida* $\frac{a}{2}$.

Exercícios Resolvidos

10.14) Dado cos 36º = 0,809, calcule o seno e o cosseno de 18º.

Solução

Notando que 18º pertence ao 1º quadrante, vamos utilizar as fórmulas com o sinal positivo. Assim:

$$\text{sen } 18^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 36^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}809}{2}} = 0{,}309$$

$$\cos 18^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 36^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+0{,}809}{2}} = 0{,}951$$

10.15) Dados $\cos\alpha = 0{,}68$ e $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, calcule $\text{tg}\frac{\alpha}{4}$.

Solução

Temos que, se $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, então $\frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi$ e $\frac{3\pi}{8} < \frac{\alpha}{4} < \frac{\pi}{2}$, isto é, $\frac{\alpha}{2}$ é um arco do 2º quadrante e $\frac{\alpha}{4}$ é um arco do 1º quadrante. Das fórmulas estudadas, sabemos que

$$\text{tg}\frac{\alpha}{4} = +\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

Devemos, portanto, calcular primeiro $\cos\frac{\alpha}{2}$ e, em seguida, $\text{tg}\frac{\alpha}{4}$. Assim:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+0,68}{2}} = -0,92$$

$$\text{tg}\frac{\alpha}{4} = +\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1+0,92}{1-0,92}} = 4,90$$

10.5. FÓRMULAS AUXILIARES: sen a, cos a e tg a EM FUNÇÃO DE $\text{tg}\frac{a}{2}$

Em exercícios, podem ser úteis as fórmulas que dão o seno, o cosseno e a tangente de um arco em função da *tangente do arco metade*. Para a sua dedução, vamos, inicialmente, escrever as fórmulas já estudadas

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2\ \text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

de forma conveniente, isto é, fazendo $2\alpha = a$. A primeira já nos fornece a fórmula desejada.

$$\text{tg } a = \frac{2\ \text{tg}\frac{a}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}$$

Para o cosseno, temos

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 = 2\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{a}{2}} - 1 = 2\cdot\frac{1}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}} - 1 =$$

$$= \frac{2-1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}}$$

Finalmente para o seno basta lembrar que $\text{tg } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}$; daí tiramos:

$$\text{sen } a = \text{tg } a\cdot\cos a = \frac{2\ \text{tg}\frac{a}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}\cdot\frac{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2\ \text{tg}\frac{a}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}}$$

Chegamos, assim, às chamadas **fórmulas da tangente do arco metade**:

$$\text{sen } a = \frac{2\ \text{tg}\frac{a}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}}$$

$$\cos a = \frac{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}}$$

$$\text{tg } a = \frac{2\ \text{tg}\frac{a}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}$$

Exercícios Resolvidos

10.16) Sendo tg 10° = 0,18, calcule sen 20° e cos 20°.

Solução

$$\text{sen } 20° = \frac{2\text{tg } 10°}{1+\text{tg}^2 10°} = \frac{2(0,18)}{1+(0,18)^2} = 0,35$$

$$\cos 20° = \frac{1-\text{tg}^2 10°}{1+\text{tg}^2 10°} = \frac{1-(0,18)^2}{1+(0,18)^2} = 0,94$$

10.17) Sabendo que $\text{tg}\frac{a}{2} = t$, determine t de modo que 5tg a + 3sec a = 0.

Solução

Temos que

$$\text{tg } a = \frac{2\text{tg}\frac{a}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}} = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \text{e}$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{\frac{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}}} = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

Então, a equação 5tg a + 3sec a = 0 fica $5\cdot\frac{2t}{1-t^2} + 3\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} = 0$, que, simplificada, cai na equação do 2º grau

$$3t^2 + 10t + 3 = 0$$

Portanto, $t = -3$ ou $t = -\frac{1}{3}$

10.6. RESUMO

1º) Arco dobro

$\text{sen } 2a = 2\text{sen } a \cdot \cos a$
$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$
$\text{tg } 2a = \dfrac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
$\cos 2a = 1 - 2\text{sen}^2 a$

2º) Arco triplo

$\text{sen } 3a = 3\text{sen } a - 4\text{sen}^3 a$
$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

3º) Arco metade

$\text{sen}\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{2}}$
$\cos\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos a}{2}}$
$\text{tg}\dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$

4º) Fórmulas da tangente do arco metade

$\text{sen } a = \dfrac{2\text{tg}\frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{a}{2}}$
$\cos a = \dfrac{1 - \text{tg}^2\frac{a}{2}}{1 + \text{tg}^2\frac{a}{2}}$
$\text{tg } a = \dfrac{2\text{tg}\frac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2\frac{a}{2}}$

Exercícios Propostos

10.18) Determine sen 2a, dados $\text{sen } a = \frac{1}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < a < \pi$.

10.19) Determine cos 2a, dado $\text{sen } a = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

10.20) Determine tg 4x, dados $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

10.21) Determine cos 38°, dado cos 19° = 0,95.

10.22) Simplifique a expressão:

$$y = \cos(\pi - x)\cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cdot \text{sen}(\pi + x)$$

10.23) Simplifique a expressão: $y = \dfrac{\text{sen } 4x}{\text{sen } x \cdot \cos 2x}$

10.24) Sabendo que $\text{sen } 2x = \frac{\sqrt{5}}{5}$, calcule o valor de $y = \cos^4 x - \text{sen}^4 x$.

10.25) Calcule sen 2α, sabendo que sen α – cos α = m.

10.26) Simplifique a expressão: $y = \cos 4x + 8(\text{sen } x \cdot \cos x)^2$

10.27) Simplifique a expressão: $y = \text{sen } 4x \cdot \text{cotg } 2x - \cos 4x$

10.28) Simplifique a expressão: $y = \dfrac{\text{cotg } x - \text{tg } x}{\text{cotg } 2x}$

10.29) Determine os valores de m para que cada igualdade abaixo seja possível.

a) $\text{sen } x \cdot \cos x = m$

b) $\dfrac{\sec x}{\cos x + \text{sen } x} + \dfrac{\sec x}{\cos x - \text{sen } x} = \dfrac{m^2}{2}$

10.30) Sendo cos 23° = a, calcule sen 11°30'.

10.31) Calcule cos 22°30'.

10.32) Calcule tg 22°30'.

10.33) Sendo $\text{cotg } x = \frac{4}{3}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine sen 3x.

10.34) Sabendo-se que $\cos 3x \cdot \sec x = \frac{1}{10}$, determine cos 2x.

10.35) Demonstre que $\text{tg}\,3a = \frac{3\,\text{tg}\,a - \text{tg}^3 a}{1 - 3\,\text{tg}^2 a}$.

10.36) Sendo $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, determine t para que se tenha $2\cos x - 9\text{sen}\,x = -6$.

Capítulo 11

Transformação em produto

11.1. INTRODUÇÃO

As fórmulas que estudaremos neste capítulo são de grande importância dada a variedade de aplicações a que elas se prestam, não só na *simplificação* de expressões como na resolução de *equações trigonométricas* e em outros tipos de problemas. Expressões, como sen p ± sen q, cos p ± cos q, tg p ± tg q (isto é, onde temos *somas ou diferenças* de razões trigonométricas), serão facilmente transformadas em outras expressões nas quais as razões estarão *multiplicadas* (*ou divididas*). Aprenderemos também, a *reverter* esse processo, transformando *produtos* (como sen a·cos b, sen a·sen b, cos a·cos b) em *somas ou diferenças*.

11.2. TRANSFORMAÇÃO DE sen p ± sen q e cos p ± cos q

Vamos escrever, mais uma vez, as fórmulas de somas e diferenças de arcos:

1) $\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a$
2) $\text{sen}\,(a - b) = \text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a$
3) $\cos\,(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$
4) $\cos\,(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$

Fazendo agora as operações (1) + (2), (1) – (2), (3) + (4) e (3) – (4), obtemos as chamadas *Fórmulas de Werner*:

$$\text{sen}\,(a + b) + \text{sen}\,(a - b) = 2\text{sen}\,a \cdot \cos b$$
$$\text{sen}\,(a + b) - \text{sen}\,(a - b) = 2\text{sen}\,b \cdot \cos a$$
$$\cos\,(a + b) + \cos\,(a - b) = 2\cos a \cdot \cos b$$
$$\cos\,(a + b) - \cos\,(a - b) = -2\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b$$

Podemos notar que estas quatro relações já transformam somas e diferenças (observem os primeiros membros) em produtos (segundos membros). No entanto, sob essa forma, a aplicação de tais relações é, digamos, "desconfortável", já que, em cada caso, precisaríamos determinar os valores de **a** e **b**. Por exemplo, se quiséssemos transformar a soma sen 25° + sen 15° em produto, deveríamos fazer

$$a + b = 25°$$
$$a - b = 15°$$

Resolveríamos então esse pequeno sistema, encontrando a = 20° e b = 5°, e somente aí poderíamos escrever

$$\text{sen}\,25° + \text{sen}\,15° = 2\text{sen}\,20° \cdot \cos 5°$$

Assim, para tornar essas fórmulas mais práticas, vamos fazer as seguintes *mudanças de variáveis*:

$$a + b = p \quad e \quad a - b = q$$

Somando e depois subtraindo membro a membro estas duas igualdades, encontramos

$$2a = p + q \quad e \quad 2b = p - q$$

donde

$$a = \frac{p+q}{2} \quad e \quad b = \frac{p-q}{2}$$

Procedendo a estas substituições, as fórmulas de Wemer ficam:

$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen}\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$
$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{ sen}\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2}$
$\cos p + \cos q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2 \text{ sen}\frac{p+q}{2} \cdot \text{sen}\frac{p-q}{2}$

que são as chamadas **Fórmulas de Transformação em Produto**, também conhecidas como **Fórmulas de Prostaférese**.

Exercícios Resolvidos

11.1) Transforme em produto a soma sen 42° + sen 38°

Solução

Temos que p = 42° e q = 38°; portanto

$$\frac{p+q}{2} = 40° \quad e \quad \frac{p-q}{2} = 2°$$

logo, sen 42° + sen 38° = 2sen 40°·cos 2°

11.2) Simplifique a expressão

$$y = \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\text{sen } 5x - \text{sen } 3x}$$

Solução

Transformando o numerador em produto, temos:

$$\cos 5x + \cos 3x = 2\cos 4x \cdot \cos x$$

Fazendo o mesmo para o denominador, temos:

$$\text{sen } 5x - \text{sen } 3x = 2\text{sen } x \cdot \cos 4x$$

Então, $y = \dfrac{\cos 5x + \cos 3x}{\text{sen } 5x - \text{sen } 3x} = \dfrac{2 \cos 4x \cdot \cos x}{2 \text{ sen } x \cdot \cos 4x} = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x$

11.3) Transforme em produto a diferença $y = 2\cos x - \sqrt{2}$

Solução

Inicialmente, escrevemos $y = 2 \cos x - \sqrt{2} = 2\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Substituindo agora $\frac{\sqrt{2}}{2}$ por $\cos\frac{\pi}{4}$, temos:

$$y = 2\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(-2 \text{ sen}\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \text{sen}\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) =$$

$$= -4 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

Devemos notar que a resposta poderia ser escrita

$$y = 4 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right)$$

Nesta última passagem usamos a fórmula de mudança de sinal sen (–a) = – sen a.

11.4) Transforme em produto a soma y = sen 2x + 2cos x

Solução

Inicialmente, escrevemos y = 2sen x·cos x + 2cos x = 2cos x(sen x + 1).

Substituindo agora 1 por $\text{sen}\frac{\pi}{2}$, temos:

$$y = 2 \cos x\left(\text{sen } x + \text{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cos x\left(2 \text{ sen}\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos\frac{x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) =$$

$$= 4 \cos x \cdot \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

11.5) Sendo $\log_2 \text{sen } x = m$ e $\log_2 \cos x = n$, calcule $\log_2(\text{sen } 3x + \text{sen } x)$

Solução

Transformamos, inicialmente, o logaritmando em produto:

$$\text{sen } 3x + \text{sen } x = 2\text{sen } 2x \cdot \cos x = 2(2\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot \cos x = 4\text{sen } x \cdot \cos^2 x$$

Então:

$$\log_2(\text{sen } 3x + \text{sen } x) = \log_2(4\text{sen } x \cdot \cos^2 x) = \log_2 4 + \log_2 \text{sen } x + \log_2 \cos^2 x =$$

$$= \log_2 2^2 + \log_2 \text{sen } x + 2 \cdot \log_2 \cos x = 2 + m + 2n$$

11.3. TRANSFORMAÇÃO DE sen p ± cos q

Para a transformação de expressões como sen p + cos q ou sen p − cos q em produto, basta lembrarmos a *propriedade dos arcos complementares*, onde aprendemos que

$$\cos q = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - q\right)$$

Assim, ao se escrever

$$\text{sen } p + \cos q = \text{sen } p + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - q\right)$$

$$\text{sen } p - \cos q = \text{sen } p - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - q\right)$$

recai-se nas transformações conhecidas em 11.2

Exercício Resolvido

11.6) Transforme em produto a soma sen 5x + cos x

Solução

Fazendo $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e aplicando em seguida a fórmula de transformação de sen p + sen q, temos:

$$\text{sen } 5x + \cos x = \text{sen } 5x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \cdot \text{sen}\frac{5x + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} \cdot \cos\frac{5x - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2} =$$

$$= 2\ \text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

11.4. TRANSFORMAÇÃO DE tg p ± tg q

Para a transformação de tg p + tg q e tg p − tg q, basta escrever as tangentes em função de senos e cossenos. Assim:

$$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen } p}{\cos p} + \frac{\text{sen } q}{\cos q} = \frac{\text{sen } p \cdot \cos q + \text{sen } q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q}$$

logo,

$$\boxed{\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}}$$

$$\text{tg } p - \text{tg } q = \frac{\text{sen } p}{\cos p} - \frac{\text{sen } q}{\cos q} = \frac{\text{sen } p \cdot \cos q - \text{sen } q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q}$$

logo,

$$\boxed{\text{tg } p - \text{tg } q = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}}$$

Observação: o leitor deve notar que o **método** de obtenção dos resultados demonstrados é extremamente simples, dispensando-se a memorização dessas fórmulas. Assim, para transformar uma expressão como tg p + cotg q, é claro que se poderia escrever $\text{tg } p + \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - q\right)$ e usar a primeira das fórmulas demonstradas; no entanto, seria mais simples e producente fazer

$$\text{tg } p + \text{cotg } q = \frac{\text{sen } p}{\cos p} + \frac{\cos q}{\text{sen } q} = \frac{\text{sen } p \cdot \text{sen } q + \cos p \cdot \cos q}{\cos p \cdot \text{sen } q} = \frac{\cos(p-q)}{\cos p \cdot \text{sen } q}$$

Exercícios Resolvidos

11.7) Elimine a soma na expressão y = tg 3x + tg x.

Solução

$$y = \frac{\text{sen } 3x}{\cos 3x} + \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\text{sen } 3x \cos x + \text{sen } x \cos 3x}{\cos 3x \cdot \cos x} = \frac{\text{sen}(3x + x)}{\cos 3x \cdot \cos x} = \frac{\text{sen } 4x}{\cos 3x \cdot \cos x}$$

11.8) Se $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$, mostre que $\text{tg } \alpha - \text{cotg } \beta = -\text{cossec } 2\beta$

Solução

Temos que $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta$; então:

$$\text{tg } \alpha - \text{cotg } \beta = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) - \text{cotg } \beta = \text{cotg } 2\beta - \text{cotg } \beta = \frac{\cos 2\beta}{\text{sen } 2\beta} - \frac{\cos \beta}{\text{sen } \beta} =$$

$$= \frac{\cos 2\beta \cdot \text{sen } \beta - \text{sen } 2\beta \cdot \cos \beta}{\text{sen } 2\beta \cdot \text{sen } \beta} = -\frac{\text{sen } 2\beta \cos \beta - \text{sen } \beta \cos 2\beta}{\text{sen } 2\beta \cdot \text{sen } \beta} =$$

$$= -\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } 2\beta \cdot \text{sen } \beta} = -\frac{1}{\text{sen } 2\beta} = -\text{cossec } 2\beta$$

11.5. FÓRMULAS DE REVERSÃO: TRANSFORMAÇÃO DE PRODUTOS EM SOMAS OU DIFERENÇAS

Vamos mostrar aqui como transformar produtos da forma sen a · cos b, sen a · sen b e cos a · cos b em somas ou diferenças das razões trigonométricas. Isso será imediato se tomarmos as seguintes três *Fórmulas de Werner* vistas em 11.2:

$$\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2\text{sen } a \cdot \cos b$$

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cdot \cos b$$

$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

Nos segundos membros temos os produtos que desejamos transformar em somas ou diferenças. Basta, agora, reescrevermos estas relações, obtendo, assim, as chamadas **Fórmulas de Reversão**:

$\text{sen } a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)]$
$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\text{sen } a \cdot \text{sen } b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

Exercícios Resolvidos

11.9) Calcule o valor de $\cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{5\pi}{12}$.

Solução

$$\cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \cos\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

11.10) Demonstre que:
$\cos 3x \cdot \cos x - \cos 6x \cdot \cos 2x - \text{sen } 5x \cdot \text{sen } 3x = 0$

Solução

Temos que:

$\cos 3x \cdot \cos x = \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 2x]$

$\cos 6x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2}[\cos 8x + \cos 4x]$

$\text{sen } 5x \cdot \text{sen } 3x = -\frac{1}{2}[\cos 8x - \cos 2x]$

Então:

$\cos 3x \cdot \cos x - \cos 6x \cdot \cos 2x - \text{sen } 5x \cdot \text{sen } 3x =$

$$= \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x - \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 8x - \frac{1}{2}\cos 2x = 0$$

11.6. RESUMO

1º) Fórmulas de transformação em produto

$\text{sen } p + \text{sen } q = 2\,\text{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$
$\text{sen } p - \text{sen } q = 2\,\text{sen}\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2}$
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$
$\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}\frac{p+q}{2} \cdot \text{sen}\frac{p-q}{2}$
$\text{tg } p + \text{tg } q = \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}$
$\text{tg } p - \text{tg } q = \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}$

2º) Fórmulas de reversão

$\text{sen } a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b)]$
$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
$\text{sen } a \cdot \text{sen } b = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

Exercícios Propostos

11.11) Transforme em produto as expressões:
a) $\text{sen } 6x + \text{sen } 2x$
b) $\cos 7x + \cos 3x$
c) $\text{sen } x - \text{sen } 3x$
d) $\cos 3x - \cos 9x$

11.12) Transforme em produto as expressões:
a) $1 - 2\text{sen } 2x$
b) $\text{sen } 2x + 2\text{sen } x$
c) $\text{sen } x + \cos x$
d) $\text{sen } 3x - \cos x$

11.13) Transforme em produto as expressões:
a) $\text{sen } 11x + \text{sen } 3x + \text{sen } 15x - \text{sen } x$
b) $\cos 5x + \cos x + \text{sen } 9x + \text{sen } 3x$

11.14) Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\cos 9x + \cos 7x}{\text{sen } 9x - \text{sen } 7x}$$

11.15) Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\text{sen } 100° + \text{sen } 20°}{\cos 100° + \cos 20°}$$

11.16) Sendo $a + b = \frac{\pi}{3}$, calcule o valor de:

$$y = \frac{\text{sen a} - \text{sen b}}{\cos b - \cos a}$$

11.17) Utilizando as fórmulas de transformação em produto, demonstre que:
$\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \text{sen}(a + b) \cdot \text{sen}(a - b)$

11.18) Transforme em produto a expressão $\text{sen}^2 3x - \cos^2 x$

11.19) Demonstre que:
$\text{tg } 3x - \text{tg } x = 2\text{sen } x \cdot \sec 3x$

11.20) Demonstre que:

$$\text{cotg } a + \text{tg}\frac{a}{2} = \text{cossec } a$$

11.21) Adotando cos 10° = 0,98, calcule o valor de tg 10° + tg 40°

11.22) Sabendo que $\text{sen}\frac{x-y}{2} \neq 0$ e que:

$a \,\text{tg } x + b \,\text{tg } y = (a+b)\,\text{tg}\frac{x+y}{2}$, prove que $a \cos y = b \cos x$

11.23) Transforme os produtos abaixo em somas ou diferenças:
a) $\text{sen } 40° \cdot \cos 12°$
b) $2\cos 5x \cdot \cos x$
c) $2\text{sen } 3x \cdot \text{sen } 2x$

11.24) Calcule o valor das expressões:

a) $y = \text{sen}\frac{5\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{24}$

b) $y = \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{7\pi}{12}$

c) $y = 2\,\text{sen}\frac{3\pi}{24}\,\text{sen}\frac{9\pi}{24}$

11.25) Simplifique a expressão:
$y = \text{sen } x\,(2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x + 1)$

11.26) Sendo cos 10° = a, calcule o valor da expressão:
$y = 8\cos 65° \cdot \cos 25° \cdot \cos 145° \cdot \cos 125°$

Exercícios Suplementares

III.1) Resolva a equação $\text{sen}(-x) = \frac{1}{2}$

III.2) Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\cos 3x \cdot \cos x - \text{sen } 3x \cdot \text{sen } x}{\left(1+\sqrt{2}\cos 2x\right)\left(1-\sqrt{2}\cos 2x\right)}$$

III.3) Calcule sen 285°, conhecidos os senos e cossenos de 30° e 45°.

III.4) Sendo α e β ângulos agudos de um triângulo retângulo, verifique que:
$\text{sen}(\beta - 2\alpha) = \cos 3\alpha$

III.5) Dados $\text{sen } a = \frac{2}{3}$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } b = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $0 < b < \frac{\pi}{2}$, calcule o valor de sen (a – b) + cos (a + b).

III.6) Mostre que $\text{cotg}(a+b) = \frac{\text{cotg } a \cdot \text{cotg } b - 1}{\text{cotg } a + \text{cotg } b}$

III.7) Sendo $a + b = -\frac{\pi}{3}$, calcule o valor de $y = \left(1+\sqrt{3}\cdot\text{cotg } a\right)\left(1+\sqrt{3}\cdot\text{cotg } b\right)$.

III.8) Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \text{tg}(\pi - 2\alpha)}{\text{tg}(2\pi-\alpha)\cdot\text{cotg}\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right) - 1}$$

III.9) Calcule a expressão:

$$y = \frac{\text{sen}(\pi - \text{arc sen a}) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \text{arc sen b}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \text{arc sen a}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc cos b}\right)}$$

III.10) Se A, B e C são ângulos internos de um triângulo, mostre que:
$\text{cotg } A \cdot \text{cotg } B + \text{cotg } A \cdot \text{cotg } C + \text{cotg } B \cdot \text{cotg } C = 1$

III.11) Calcule $\text{sen}\left(2 \cdot \text{arc cos}\frac{1}{3}\right)$

III.12) Calcule $\cos\left(4 \cdot \text{arc sen}\frac{3}{4}\right)$

III.13) Calcule $\text{tg}\left(\frac{1}{2}\cdot\text{arc tg } 2\right)$

III.14) Verifique as identidades:
a) $2\text{sen } \alpha - \sec \alpha = \sec \alpha \cdot (\text{sen } 2\alpha - 1)$
b) $2\cos \alpha - \sec \alpha = \sec \alpha \cdot \cos 2\alpha$

III.15) Calcule cos 15º de dois modos:
1º) utilizando o fato 15º = 45º – 30º
2º) utilizando o fato $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$

III.16) Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, calcule o valor de

$$y = \frac{\text{sen}(3n\alpha)}{\text{sen}(n\alpha)} + \frac{\cos(3n\alpha)}{\cos(n\alpha)}$$

III.17) Sabendo que sen 2x = m, calcule o valor de:

$$y = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

III.18) Simplifique a expressão $y = \frac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{4 \text{sen } x}$

III.19) Sendo $x + y = \frac{\pi}{4}$, calcule $y = \frac{\cos x - \cos y}{\text{sen } x - \text{sen } y}$

III.20) Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\text{sen } 40^\circ + \text{sen } 10^\circ}{\cos 80^\circ + \cos 50^\circ}$$

III.21) Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\cos \alpha - \cos 7\alpha}{2\left(\text{sen } \alpha \cdot \text{sen } 5\alpha + \text{sen}^2\alpha\right)}$$

III.22) Transforme em produto a expressão $\cos^2 a - \cos^2 b$.

III.23) Transforme em produto a expressão sen a + sen b + sen c, sabendo que **a**, **b** e **c** são ângulos internos de um triângulo.

III.24) Transforme em produto a expressão:

$$\text{tg } a + \text{tg } b - \frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen } a \cdot \text{sen } b}$$

III.25) Calcule o valor de

$$y = \text{tg } 9^\circ - \text{tg } 27^\circ - \text{tg } 63^\circ + \text{tg } 81^\circ$$

PARTE IV

Capítulo 12 – **Equações trigonométricas**

Capítulo 13 – **Inequações trigonométricas**

Capítulo

12 Equações trigonométricas

12.1. FINALIDADE DESTE CAPÍTULO

Neste capítulo, pretendemos estudar a resolução de equações que recaem nas equações simples cos x = a, sen x = a ou tg x = a após uma série conveniente de simplificações. Não é possível desenvolver-se uma teoria geral sobre essas equações, devido à variedade de tipos diferentes que existem. De um modo geral, as simplificações são realizadas com o recurso das *fórmulas de adição de arcos, fórmulas de arco dobro, transformação em produto etc.* Através dos **exercícios resolvidos** você encontrará sugestões para a abordagem dos casos mais comuns. Nos demais itens analisaremos algumas **equações clássicas**, cuja resolução exige certos artifícios especiais. Estão incluídas também algumas equações que envolvem as **notações** arc sen x, arc cos x, arc tg x e arc cotg x.

É útil lembrar que, no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$, a equação **sen x = 0** tem conjunto-solução

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

a equação **cos x = 0** tem conjunto-solução

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

e a equação **tg x = 0** tem conjunto-solução

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

Convencionaremos que, se o exercício não mencionar o conjunto-universo, ficará subentendido $U = \mathbb{R}$.

É útil também lembrar que **tg x e sec x só existem se** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, enquanto que **cotg x e cossec x só existem se** $x \neq k\pi$. Nas equações trigonométricas que envolvem estas expressões, devemos verificar se os valores da incógnita encontrados satisfazem essas *condições de existência*.

Exercícios Resolvidos

12.1) Resolva a equação sen 5x = sen 2x.

Solução

Escrevemos sen 5x – sen 2x = 0 e, em seguida, transformamos em produto:

$$2\,\text{sen}\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{7x}{2}=0$$

Há duas possibilidades:

I) $\text{sen}\frac{3x}{2}=0$

II) $\cos\frac{7x}{2}=0$

De I) tiramos $\frac{3x}{2}=k\pi$, donde $x=\frac{2k\pi}{3}$

De II) tiramos $\frac{7x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, donde $x=\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}$

Assim,

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{2k\pi}{3}\ \text{ou}\ x=\frac{\pi}{7}+\frac{2k\pi}{7}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.2) Resolva a equação $\cos x=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)$

Solução

Escrevemos $\cos x-\cos\left(\frac{5\pi}{2}-2x\right)=0$ e, em seguida, transformamos em produto: $-2\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{3x}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)=0$

Há duas possibilidades:

I) $\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=0$

II) $\text{sen}\left(\frac{3x}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)=0$

De I) tiramos $\frac{5\pi}{4}-\frac{x}{2}=k\pi$, donde $x=\frac{5\pi}{2}-2k\pi$

De II) tiramos $\frac{3x}{2}-\frac{5\pi}{4}=k\pi$, donde $x=\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$

Assim,

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{5\pi}{2}-2k\pi\ \text{ou}\ x=\frac{5\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.3) Resolva a equação tg 2x = cotg 3x.

Solução

Escrevemos tg 2x – cotg 3x = 0, isto é, $\frac{\text{sen}\,2x}{\cos 2x}-\frac{\cos 3x}{\text{sen}\,3x}=0$. Multiplicando por sen 3x·cos 2x.

$$\text{sen}\,2x\cdot\text{sen}\,3x-\cos 2x\cdot\cos 3x=0$$

ou seja, –cos(2x + 3x) = 0

Recaímos, assim, na equação cos 5x = 0, que fornece $5x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, donde

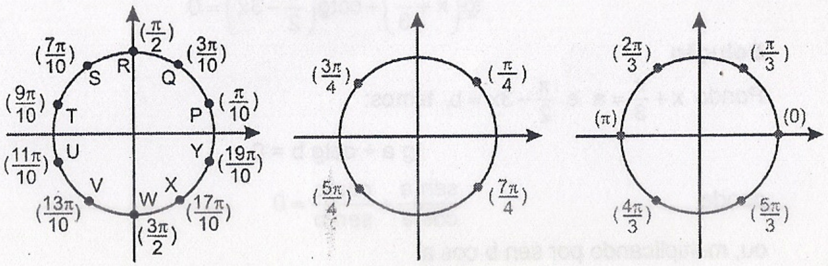
$$x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$$

Condições de existência

a) Para tg 2x escrevemos $2x\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi$, donde $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k_1\pi}{2}$.

b) Para cotg 3x escrevemos $3x\neq k_2\pi$, donde $x\neq\frac{k_2\pi}{3}$.

Devemos verificar se estas condições são obedecidas pelos valores de x dados na expressão $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$. Para isso, vamos representar as expressões acima por meio dos pontos correspondentes na circunferência trigonométrica.



I) Pontos que correspondem à expressão $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}$

II) Pontos que correspondem à expressão $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k_1\pi}{2}$

III) Pontos que correspondem à expressão $x=\frac{k_2\pi}{3}$

Observe que *nenhum ponto da figura I) coincide com os pontos das duas outras*. Isto significa que **todos eles satisfazem às condições de existência**. Podemos escrever

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{5}\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.4) Resolva a equação $\text{sen}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos 2x$.

Solução

Escrevemos $\text{sen}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos 2x=0$ ou ainda $\text{sen}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0$ e, em seguida, transformamos em produto:

$$2\ \text{sen}\left(\frac{3x}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=0$$

Há duas possibilidades:

I) $\text{sen}\left(\frac{3x}{2}-\frac{7\pi}{12}\right)=0$

II) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=0$

De I) tiramos $\frac{3x}{2}-\frac{7\pi}{12}=k\pi$, donde $x=\frac{7\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}$

De II) tiramos $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, donde $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Assim

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{7\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}\ \text{ou}\ x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.5) Resolva a equação

$$\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=0$$

Solução

Pondo $x+\frac{\pi}{3}=a$ e $\frac{\pi}{2}-3x=b$, temos:

$$\text{tg } a+\text{cotg } b=0$$

donde

$$\frac{\text{sen } a}{\cos a}+\frac{\cos b}{\text{sen } b}=0$$

ou, multiplicando por sen b cos a:

$$\text{sen } a\ \text{sen } b+\cos a\cos b=0$$

e, finalmente, cos (a – b) = 0. Daí resulta

$$a-b=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

ou seja:

$$\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

e então

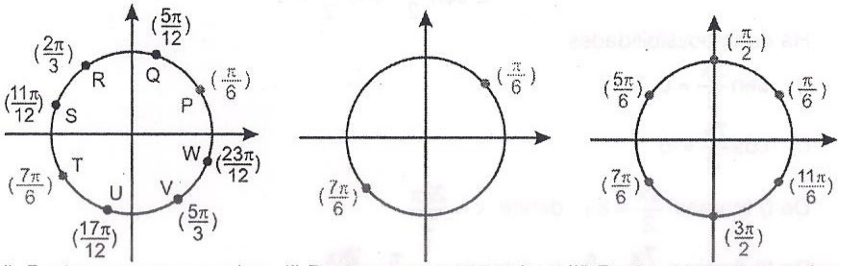
$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}$$

Condições de existência

a) Para $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ escrevemos $x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k_1\pi$ donde $x\neq\frac{\pi}{6}+k_1\pi$.

b) Para $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$ escrevemos $\frac{\pi}{2}-3x\neq k_2\pi$ donde $x\neq\frac{\pi}{6}-\frac{k_2\pi}{3}$.

Façamos agora as figuras:



I) Pontos que correspondem à expressão $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}$

II) Pontos que correspondem à expressão $x=\frac{\pi}{6}+k_1\pi$

III) Pontos que correspondem à expressão $x=\frac{\pi}{6}-\frac{k_2\pi}{3}$

Observe que há *dois pontos* na figura I) que aparecem também nas outras duas: $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $T\left(\frac{7\pi}{6}\right)$. Isto significa que os valores da forma $x=\frac{\pi}{6}+k'\pi$ **não satisfazem às condições de existência**. Devemos então escrever.

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}\ \text{e}\ x\neq\frac{\pi}{6}+k'\pi\ (k\in\mathbb{Z}\ \text{e}\ k'\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.6) Resolva a equação

$$\text{sen } 2x+\text{sen } 6x=2\text{sen } 4x$$

Solução

Transformemos em produto a expressão do 1º membro.

$$2\text{sen } 4x\cdot\cos 2x=2\text{sen } 4x$$

Daí, vem

$$\text{sen } 4x\cdot\cos 2x-\text{sen } 4x=0$$
$$\text{sen } 4x\,(\cos 2x-1)=0$$

Há duas possibilidades:

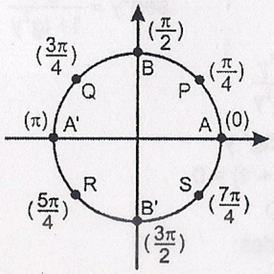
I) sen 4x = 0

II) cos 2x = 1

De I) tiramos $4x=k\pi$, donde $x=\frac{k\pi}{4}$.

De II) tiramos $2x=2k\pi$, donde $x=k\pi$.

A expressão $x = \frac{k\pi}{4}$ representa os oito pontos indicados na figura ao lado, vértices de um octógono regular. A expressão $x = k\pi$ representa os pontos A e A'. Vê-se, assim, que o conjunto indicado por $x = k\pi$ *está contido* no conjunto indicado por $x = \frac{k\pi}{4}$. Sendo assim, basta escrever



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

12.7) Resolva a equação

$$\cos(a + 2x) + \cos(a + x) + \cos a = 0$$

Solução

Agrupemos os termos convenientemente:

$$[\cos(a + 2x) + \cos a] + \cos(a + x) = 0$$

para, em seguida, transformarmos em produto a expressão entre colchetes.

$$2\cos(a + x) \cdot \cos x + \cos(a + x) = 0$$

Daí, vem

$$\cos(a + x) \cdot [2\cos x + 1] = 0$$

havendo, portanto, duas possibilidades:

I) $\cos(a + x) = 0$

II) $\cos x = -\frac{1}{2}$

De I) tiramos $a + x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde

$$x = \frac{\pi}{2} - a + k\pi$$

De II) tiramos $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} - a + k\pi \ \text{ou} \ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

12.8) Resolva a equação tg 3x = sen 6x.

Solução

Observe primeiramente que, sendo $\text{sen}\, 2a = \frac{2\,\text{tg}\, a}{1 + \text{tg}^2 a}$, podemos escrever

$$\text{sen}\, 6x = \frac{2\,\text{tg}\, 3x}{1 + \text{tg}^2 3x}$$

e a equação fica

$$\text{tg}\, 3x = \frac{2\,\text{tg}\, 3x}{1 + \text{tg}^2 3x}$$

donde $\text{tg}\, 3x \cdot [1 + \text{tg}^2 3x] = 2\text{tg}\, 3x$
isto é, $\text{tg}\, 3x \cdot [\text{tg}^2 3x - 1] = 0$
Consideremos as possibilidades:

I) tg 3x = 0, donde $3x = k\pi$, isto é,

$$x = \frac{k\pi}{3}$$

II) tg 3x = ± 1, donde $3x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, isto é,

$$x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$$

Assim,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3} \ \text{ou} \ x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

Nota: neste caso, não é necessário verificar a *condição de existência*, pois os valores de **x** foram determinados a partir das equações tg 3x = 0 e tg 3x = ± 1, nas quais a existência de tg 3x já está garantida pelo simples fato de serem dados os seus valores 0, +1 ou –1.

12.9) Resolva a equação

$$2\cos^2 x + \cos 5x - 1 = 0$$

Solução

Consideremos inicialmente que $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$; logo, a equação pode ser escrita

$$\cos 5x + \cos 2x = 0$$

ou, transformando em produto:

$$2\cos\frac{7x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} = 0$$

Há duas possibilidades:

I) $\cos\frac{7x}{2} = 0$

II) $\cos\frac{3x}{2} = 0$

De I) vem $\frac{7x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde $x = \frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7}$.

De II) vem $\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$.

Então,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{7} + \frac{2k\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

12.10) Resolva a equação

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos 2x$$

Solução

Observe em 1º lugar que

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

e $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$

Com isto, a equação fica

$$\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\cos^2 x$$

ou, transformando em produto:

$$2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \cdot \cos x = 2\cos^2 x$$

Daí vem $\cos x = 2\cos^2 x$
ou seja, $\cos x \cdot (1 - 2\cos x) = 0$
Há duas possibilidades:

I) $\cos x = 0$

II) $\cos x = \frac{1}{2}$

De I) tiramos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

De II) tiramos $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

Assim,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

12.11) Resolva a equação

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1 + \operatorname{sen} 2x$$

Solução

Façamos a *mudança de variável* $\frac{\pi}{4} + x = y$. Teremos $2x = 2y - \frac{\pi}{2}$ e assim

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{tg} y \quad \text{e}$$

$$1 + \operatorname{sen} 2x = 1 + \operatorname{sen}\left(2y - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \cos 2y = 2\operatorname{sen}^2 y$$

A equação dada fica $\operatorname{tg} y = 2\operatorname{sen}^2 y$. Por outro lado, sabemos que

$$\operatorname{sen}^2 y = \frac{\operatorname{tg}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

e então $\operatorname{tg} y = \frac{2\operatorname{tg}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$

ou $\operatorname{tg} y \cdot [1 + \operatorname{tg}^2 y] = 2\operatorname{tg}^2 y$
$\operatorname{tg} y \cdot [\operatorname{tg}^2 y - 2\operatorname{tg} y + 1] = 0$
$\operatorname{tg} y \cdot [\operatorname{tg} y - 1]^2 = 0$

Há duas possibilidades:

I) $\operatorname{tg} y = 0$

II) $\operatorname{tg} y = 1$

De I) vem $y = k\pi$, donde $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

De II) vem $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$, donde $x = k\pi$.

Assim,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

Nota: como os valores de **x** foram determinados **a partir dos valores** de $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$, não é necessário verificar as *condições de existência*.

12.12) Resolva a equação

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

Solução

Com a *mudança de variável* $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} = y$, obtemos $x = \frac{\pi}{2} - 2y$ e assim $\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} = \pi - 3y$. A equação dada fica

$$\operatorname{sen}(\pi - 3y) = 3\operatorname{sen} y$$

ou ainda

$$\operatorname{sen} 3y = 3\operatorname{sen} y$$

Desenvolvendo o arco triplo:

$$3\operatorname{sen} y - 4\operatorname{sen}^3 y = 3\operatorname{sen} y$$

resulta $4\operatorname{sen}^3 y = 0$ e finalmente $\operatorname{sen} y = 0$.

Obtemos então $y = k\pi$, ou seja,

$$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=k\pi$$

donde $x=\frac{\pi}{2}=-2k\pi$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{2}-2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.2. EQUAÇÕES CLÁSSICAS

Denominamos **equações clássicas** certos tipos de equações em cuja resolução se utilizam artifícios especiais. Analisaremos aqui os três tipos mais importantes, com seus métodos de resolução.

12.3. 1ª EQUAÇÃO CLÁSSICA

Trata-se da equação

$$a\,\text{sen}\,x + b\cos x = c\quad(ab\neq 0)$$

Há dois métodos principais. O primeiro, que consiste em colocar sen x e cos x em função de $\text{tg}\frac{x}{2}=t$, deve ser utilizado de preferência quando os coeficientes são literais e se impõe uma discussão. O segundo, mais indicado nos problemas numéricos, utiliza o *ângulo auxiliar*.

1º método

Conhecemos as expressões de sen x e cos x em função de $\text{tg}\frac{x}{2}=t$:

$$\text{sen}\,x=\frac{2t}{1+t^2}\quad\text{e}\quad\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Com esta substituição, a equação clássica fica

$$\frac{2(at)}{1+t^2}+\frac{b(1-t^2)}{1+t^2}=c$$

ou seja, após as simplificações:

$$(b+c)t^2-2at+c-b=0\quad(\text{I})$$

Esta equação (I) permite calcular **t** e, em seguida, tendo-se $\text{tg}\frac{x}{2}=t$, podemos calcular x: $x = 2\,\text{arc tg}\,t + 2k\pi$.

Supondo $b + c \neq 0$, a equação (I) admitirá raízes se e somente se

$$\Delta=4a^2-4(b+c)(c-b)\geq 0$$

isto é, se

$$a^2+b^2\geq c^2$$

Note-se, porém, que, adotando-se $\text{tg}\frac{x}{2}$ como incógnita auxiliar, corre-se o risco de perder a solução $x = \pi + 2k\pi$, que corresponderia à situação em que $\text{tg}\frac{x}{2}$ não existe.

Verifiquemos em que caso isto aconteceria: se $x = \pi + 2k\pi$ for solução, teremos, para esse valor de x, sen x = 0 e cos x = –1, de modo que na equação a sen x + b cos x = c, obteríamos b + c = 0.

Conclusão: se b + c = 0, teremos a solução $x = \pi + 2k\pi$ e, além desta, a solução $t=\frac{c-b}{2a}$ que se obtém de (I). Se $b + c \neq 0$, teremos apenas as soluções dadas por (I).

Exercícios Resolvidos

12.13) Resolva a equação

$$2\,\text{sen}\,x + 3\cos x = 1$$

Solução

Temos a = 2, b = 3 e c = 1

Pondo $\text{tg}\frac{x}{2}=t$, obtemos $\text{sen}\,x=\frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. A equação fica

$$\frac{4t}{1+t^2}+\frac{3(1-t^2)}{1+t^2}=1$$

isto é, $2t^2-2t-1=0$.

Daí resulta $t=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, donde

$$\frac{x}{2}=\text{arc tg}\left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)+k\pi$$

e, finalmente, $x=2\,\text{arc tg}\left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi$.

Como $b + c = 4 \neq 0$, segue que a solução $x=\pi+2k\pi$ *não satisfaz*. Sendo assim,

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=2\,\text{arc tg}\left(\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.14) Resolva a equação

$$\sqrt{3}\,\text{sen}\,x-\cos x=1$$

Solução

Temos $a=\sqrt{3}$, $b=-1$ e $c=1$. Pondo $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, vem $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

A equação fica

$$\frac{2\sqrt{3}t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}=1$$

isto é, $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Daí resulta $\frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+k\pi$

donde $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

Neste caso, temos b + c = 0; logo, os valores de x dados por $x=\pi+2k\pi$ *também constituem solução*, como se pode verificar diretamente, pondo $\operatorname{sen} x=0$ e $\cos x=-1$ na equação dada. Temos então

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.15) Resolva e discuta a equação $m\operatorname{sen} x+\cos x+3m-1=0$.

Solução

Temos a = m, b = 1 e c = 1 – 3m. Há dois aspectos a observar: primeiramente, se m = 0 ou $m\neq 0$ e, em segundo lugar, se b + c = 0 ou $b+c\neq 0$. Como b + c = 2 – 3m teremos b + c = 0 para $m=\frac{2}{3}$. Vamos então analisar separadamente os três casos:

1º) m = 0

2º) $m=\frac{2}{3}$

3º) $m\neq 0$ e $m\neq\frac{2}{3}$

1º caso: suponhamos m = 0. A equação fica cos x = 1, donde resulta

$$S=\{x\in\mathbb{R}\mid x=2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\}$$

2º caso: suponhamos $m=\frac{2}{3}$. A equação fica $\frac{2}{3}\operatorname{sen} x+\cos x+1=0$.

Pondo $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, obtemos $\frac{4t}{3(1+t^2)}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+1=0$ isto é, $t=-\frac{3}{2}$. Resulta $\frac{x}{2}=\operatorname{arc tg}\left(-\frac{3}{2}\right)+k\pi$.

Temos então $x=2\operatorname{arc tg}\left(-\frac{3}{2}\right)+2k\pi$ e ainda $x=\pi+2k\pi$. Assim,

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=2\operatorname{arc tg}\left(-\frac{3}{2}\right)+2k\pi \text{ ou } x=\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

3º caso: suponhamos $m\neq 0$ e $m\neq\frac{2}{3}$. Pondo $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $\operatorname{sen} x=\frac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, obtemos $\frac{2m\,t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+3m-1=0$

isto é $(3m-2)t^2+2mt+3m=0$.

A equação admitirá solução se e somente se $\Delta=4m^2-4(3m-2)\cdot 3m\geq 0$, ou seja, $0\leq m\leq\frac{3}{4}$

Como $m\neq 0$ e $m\neq\frac{2}{3}$, devemos ter

$$0<m<\frac{2}{3} \text{ ou } \frac{2}{3}<m\leq\frac{3}{4}$$

Se t_1 e t_2 são as raízes desta equação do 2º grau, escrevemos

$$S=\{x\in\mathbb{R}\mid x=2\operatorname{arc tg} t_1+2k\pi \text{ ou } x=2\operatorname{arc tg} t_2+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\}$$

2º método: ângulo auxiliar

Dada a equação $a\operatorname{sen} x+b\cos x=c$ $(ab\neq 0)$, podemos escrever

$$\operatorname{sen} x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}$$

Seja $\varphi=\operatorname{arc tg}\frac{b}{a}$ (valor que pode ser obtido, por exemplo, por meio de uma tabela). Podemos fazer a substituição

$$\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$$

e a equação fica

$$\operatorname{sen} x+\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\cdot\cos x=\frac{c}{a}$$

donde $\operatorname{sen} x\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\cos x=\frac{c}{a}\cos\varphi$

isto é,

$$\operatorname{sen}(x+\varphi)=\frac{c}{a}\cos\varphi$$

Esta última é uma *equação imediata* que fornece os valores de x. Haverá soluções desde que seja satisfeita a condição

$$-1\leq\frac{c}{a}\cos\varphi\leq 1$$

Note que esta condição se escreve $\frac{c^2}{a^2}\cos^2\varphi \le 1$

e como $\cos^2\varphi = \frac{1}{\sec^2\varphi} = \frac{1}{1+tg^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$

resulta $\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2} \le 1$

e finalmente $\boxed{a^2+b^2 \ge c^2}$

Esta condição confirma aquela que encontramos no *1º método*.

Exercícios Resolvidos

12.16) Resolva a equação $\text{sen}\ x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

Solução

Façamos $\varphi = \text{arc tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Assim, podemos substituir $\sqrt{3}$ por

$$tg\frac{\pi}{3} = \frac{\text{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

A equação fica

$$\text{sen}\ x + \frac{\text{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos x = 1$$

ou
$$\text{sen}\ x\cdot\cos\frac{\pi}{3} + \text{sen}\frac{\pi}{3}\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$$

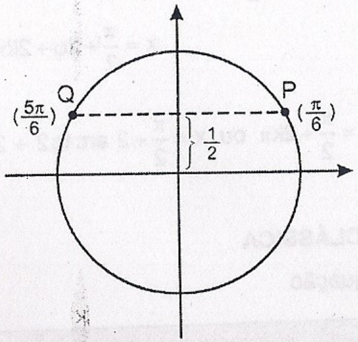
e finalmente $\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Observe a figura. Para o ponto P, temos $x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}+2k\pi$

Donde $x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi$ e para o ponto Q temos $x+\frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Donde $x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$.

Assim,



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \ \text{ ou } \ x = \frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.17) Resolva a equação sen x – 2·cos x = 1

Solução

Façamos $\varphi = \text{arc tg}\ 2$. Assim,

$$2 = tg\ \varphi = \frac{\text{sen}\ \varphi}{\cos\varphi}$$

e a equação fica $\text{sen}\ x - \frac{\text{sen}\ \varphi}{\cos\varphi}\cdot\cos x = 1$

ou seja $\text{sen}\ x\cdot\cos\varphi - \text{sen}\ \varphi\cdot\cos x = \cos\varphi$

$$\text{sen}\ (x-\varphi) = \cos\varphi$$

Escrevemos ainda

$$\text{sen}(x-\varphi) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$
$$\text{sen}(x-\varphi) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = 0$$
$$2\ \text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = 0$$

Há 2 casos a considerar:

I) $\text{sen}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 0$

II) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}-\varphi\right) = 0$

De I) vem $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4} = k\pi$, donde $x = \frac{\pi}{2}+2k\pi$.

De II) vem $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}-\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$, donde

$$x=\frac{\pi}{2}+2\varphi+2k\pi.$$

Assim,

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2\text{ arc tg}2+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.4. 2ª EQUAÇÃO CLÁSSICA

Trata-se da equação

$$a\,\text{sen}^2x + b\,\text{sen } x\cdot\cos x + c\cos^2 x = d,\ (abc\neq 0)$$

Há dois métodos principais. O primeiro consiste em colocar a expressão em função de tg x = r e é preferível nos casos de coeficientes literais, que exigem discussão. O segundo, mais indicado nos problemas numéricos, utiliza o **arco dobro** para recair na *1ª equação clássica*.

1º método

Vamos dividir ambos os membros da equação por $\cos^2x$. Obtemos

$$a\,\text{tg}^2x+b\,\text{tg}x+c=\frac{d}{\cos^2 x}$$

e, lembrando que $\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+\text{tg}^2x$,

vem

$$a\,\text{tg}^2x+b\,\text{tg } x+c=d(1+\text{tg}^2x)$$

ou seja:

$$(a-d)r^2+br+c-d=0 \qquad \text{(I)}$$

Esta equação (I) permite calcular **r** para, em seguida, recairmos na equação imediata tg x = r. Note, entretanto, que, ao dividirmos ambos os membros por $\cos^2x$, podemos *perder* a solução $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, que corresponderia ao caso cos x = 0.

Verifiquemos em que situação isto ocorreria. Se $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ for solução, teremos, para este valor de **x**, cos x = 0 e sen x = ± 1, de modo que na equação

$$a\,\text{sen}^2x + b\,\text{sen } x\cdot\cos x + c\cos^2x=d$$

obteríamos a = d.

Conclusão: se a = d, teremos a solução $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ e, além desta, a solução $r=\frac{d-c}{b}$ que se obtém de (I). Se $a\neq d$, teremos apenas as soluções dadas por (I).

Exercício Resolvido

12.18) Resolva a equação

$$3\cos^2x + 4\text{sen } x\cdot\cos x - \text{sen}^2x=2$$

Solução

Temos a = –1, b = 4, c = 3 e d = 2. Como $a\neq d$, é claro que $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ *não constitui solução*. Podemos então supor $\cos x\neq 0$ e dividir ambos os membros da equação por $\cos^2x$. Obtemos

$$3+4\,\text{tg } x-\text{tg}^2x=\frac{2}{\cos^2 x}$$

e como $\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+\text{tg}^2x$

resulta $3+4\text{tg } x-\text{tg}^2x=2(1+\text{tg}^2x)$

ou seja: $3\text{tg}^2x-4\text{tg } x-1=0$

Daí vem $\text{tg } x=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$ e assim

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\text{arc tg}\left(\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}\right)+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

2º método: arco dobro

Conhecemos as identidades

$$\text{sen}^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\text{sen } x\cos x=\frac{1}{2}\text{sen } 2x$$

Substituindo estas expressões na equação $a\,\text{sen}^2x + b\,\text{sen } x\cdot\cos x + c\cos^2x = d$, obtemos

$$\frac{a}{2}(1-\cos 2x)+\frac{b}{2}\text{sen } 2x+\frac{c}{2}(1+\cos 2x)=d$$

Donde $b\,\text{sen } 2x + (c-a)\cos 2x = 2d-a-c$

Esta é a **1ª equação clássica**, cuja resolução já examinamos.

Exercício Resolvido

12.19) Resolva a equação

$$\sqrt{3}\,\text{sen}^2x-2\,\text{sen}\,x\cos x-\sqrt{3}\cos^2 x=-\sqrt{2}$$

Solução

Façamos a substituição em função do arco 2x:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\cos 2x)-\text{sen }2x-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+\cos 2x)=-\sqrt{2}$$

Donde $\text{sen }2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{2}$

Pondo $\sqrt{3}=\text{tg}\frac{\pi}{3}=\dfrac{\text{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$, a equação fica $\text{sen }2x+\dfrac{\text{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cos 2x=\sqrt{2}$

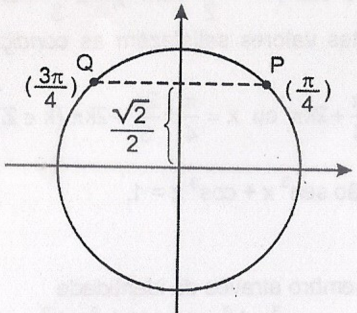
ou $\text{sen}2x\cos\frac{\pi}{3}+\text{sen}\frac{\pi}{3}\cos 2x=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{3}$

e então $\text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Observe a figura. Para o ponto P, temos $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$, ou seja, $x=-\frac{\pi}{24}+k\pi$

e para o ponto Q temos $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, ou seja, $x=\frac{5\pi}{24}+k\pi$.

Assim,



$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-\frac{\pi}{24}+k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{24}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.5. 3ª EQUAÇÃO CLÁSSICA

Trata-se da equação

$$a(\text{sen }x+\cos x)+b\,\text{sen}\,x\cos x=c$$

isto é, uma equação que se exprime em função da *soma* sen x + cos x e do *produto* sen x cos x.

Há dois métodos principais. O primeiro baseia-se na mudança de variável

$$\text{sen }x+\cos x=z$$

O segundo utiliza a mudança de variável

$$x=\frac{\pi}{4}+y$$

1º método

Pondo sen x + cos x = z e elevando esta expressão ao quadrado, obtemos

$$\text{sen}^2 x+2\,\text{sen }x\cos x+\cos^2 x=z^2$$

donde

$$\text{sen }x\cdot\cos x=\frac{z^2-1}{2}$$

Substituindo na equação dada, vem

$$az+b\left(\frac{z^2-1}{2}\right)=c$$

ou seja:

$$bz^2+2az-b-2c=0 \qquad \text{(I)}$$

Uma vez calculado z nesta equação (I), recai-se na equação sen x + cos x = z. Esta pode ser resolvida por *transformação em produto*, escrevendo-se

$$\text{sen }x+\cos x=\text{sen }x+\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

Resulta então a equação imediata

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=z$$

É claro que só são aceitáveis os valores de z dados em (I) tais que

$$-\sqrt{2}\le z\le\sqrt{2}$$

Exercício Resolvido

12.20) Resolva a equação

$$\text{sen }x+\cos x+2\sqrt{2}\,\text{sen }x\cos x=0$$

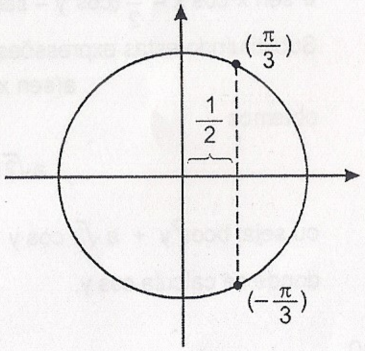
Solução

Pondo sen x + cos x = z e $\text{sen }x\cos x=\frac{z^2-1}{2}$, a equação fica

$$z+\sqrt{2}(z^2-1)=0$$

ou seja: $\sqrt{2}\,z^2+z-\sqrt{2}=0$

Daí obtemos $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $z=-\sqrt{2}$.



Para $z=\frac{\sqrt{2}}{2}$, vem $\text{sen } x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ou seja, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

e finalmente $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

Temos então

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ e } x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

Para $z=-\sqrt{2}$ vem $\text{sen } x+\cos x=-\sqrt{2}$, ou seja, $\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$ e finalmente $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$. Temos então $x-\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi$ e

$$x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$$

Assim,

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

2º método

Pondo $x=\frac{\pi}{4}+y$, obtemos

$$\text{sen } x=\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+y\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y+\text{sen } y)$$

$$\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{4}+y\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y-\text{sen } y)$$

Assim,

$\text{sen } x+\cos x=\sqrt{2}\cos y$

e $\text{sen } x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(\cos^2 y-\text{sen}^2 y)=\cos^2 y-\frac{1}{2}$

Substituindo estas expressões na equação

$$a(\text{sen } x+\cos x)+b\,\text{sen } x\cdot\cos x=c$$

obtemos

$$a\sqrt{2}\cos y+b\left(\cos^2 y-\frac{1}{2}\right)=c$$

ou seja: $b\cos^2 y+a\sqrt{2}\cos y-\frac{b}{2}-c=0$

donde se calcula cos y.

Exercícios Resolvidos

12.21) Resolva a equação

$$\sec x+\text{cossec } x=2\sqrt{2}$$

Solução

Escrevemos $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\text{sen } x}=2\sqrt{2}$

donde, $\text{sen } x+\cos x=2\sqrt{2}\ \text{sen } x\cos x$

É, portanto, a **3ª equação clássica**. Façamos $x=\frac{\pi}{4}+y$, obtendo (como explicado na teoria acima)

$$\text{sen } x+\cos x=\sqrt{2}\cos y \text{ e } \text{sen } x\cdot\cos x=\cos^2 y-\frac{1}{2}$$

A equação fica $\sqrt{2}\cos y=2\sqrt{2}\left(\cos^2 y-\frac{1}{2}\right)$

donde $2\cos^2 y-\cos y-1=0$.

Aqui obtemos $\cos y=1$ ou $\cos y=-\frac{1}{2}$. Para $\cos y=1$ vem $y=2k\pi$, donde $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$. Para $\cos y=-\frac{1}{2}$ vem $y=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, donde $x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. É imediato que estes valores satisfazem as *condições de existência* de sec x e cossec x. Assim,

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.22) Resolva a equação $\text{sen}^3 x+\cos^3 x=1$.

Solução

Fatorando o 1º membro através da identidade

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab), \text{ vem}$$

$$(\text{sen } x+\cos x)(\text{sen}^2 x+\cos^2 x-\text{sen } x\cos x)=1$$

ou $(\text{sen } x+\cos x)(1-\text{sen } x\cos x)=1$

Pondo $\text{sen } x+\cos x=z$ e $\text{sen } x\cos x=\frac{z^2-1}{2}$, a equação fica

$$z\left(1-\frac{z^2-1}{2}\right)=1$$

Isto é, $z^3-3z+2=0$

A expressão do 1º membro, fatorada, resulta $(z-1)^2(z+2)$. Assim, temos $z=1$ ou $z=-2$. Somente o valor $z=1$ satisfaz a condição $-\sqrt{2}\le z\le\sqrt{2}$. Recaímos então na equação $\text{sen } x+\cos x=1$, donde

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1 \text{ ou } \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, $x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$ e finalmente

$x=2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. Assim,

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

12.6. EQUAÇÕES QUE ENVOLVEM AS RELAÇÕES INVERSAS

Daremos neste item alguns exemplos de equações que envolvem as notações arc sen x, arc cos x, arc tg x e arc cotg x. A variedade dos exercícios deste tipo é muito grande, sendo portanto impossível estabelecer uma teoria geral. Os exercícios resolvidos a seguir poderão sugerir alguns dos métodos mais comuns.

Exercícios Resolvidos

12.23) Resolva a equação

$$\text{arc tg } x + \text{arc tg }(1-x) = 2 \text{ arc tg }\sqrt{x-x^2}$$

Solução

Indiquemos

α = arc tg x, donde tg α = x e $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

β = arc tg (1 – x), donde tg β = 1 – x e $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$

γ = arc tg $\sqrt{x-x^2}$, donde tg γ = $\sqrt{x-x^2}$ e $-\frac{\pi}{2}<\gamma<\frac{\pi}{2}$

A equação dada fica $\alpha+\beta=2\gamma$ e podemos então escrever

$$\text{tg}(\alpha+\beta)=\text{tg } 2\gamma$$

$$\frac{\text{tg }\alpha+\text{tg }\beta}{1-\text{tg }\alpha\cdot\text{tg }\beta}=\frac{2\text{ tg }\gamma}{1-\text{tg}^2\gamma}$$

ou ainda

$$\frac{x+(1-x)}{1-x(1-x)}=\frac{2\sqrt{x-x^2}}{1-\left(\sqrt{x-x^2}\right)^2}$$

Nesta equação, o valor de x pode ser calculado. Obtemos

$$x=\frac{1}{2} \text{ e, assim, } S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

12.24) Resolva a equação

$$\text{arc sen } 2x = \text{arc sen } x\sqrt{3} + \text{arc sen } x$$

Solução

Indiquemos

α = arc sen 2x, donde sen α = 2x e $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

β = arc sen $x\sqrt{3}$, donde sen β = $x\sqrt{3}$ e $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$

γ = arc sen x, donde sen γ = x e $-\frac{\pi}{2}\le\gamma\le\frac{\pi}{2}$

A equação dada fica $\alpha=\beta+\gamma$ e, em seguida, escrevemos sen $\alpha=\text{sen}(\beta+\gamma)$

$$\text{sen }\alpha = \text{sen }\beta\cos\gamma + \text{sen }\gamma\cos\beta$$

Calculemos cos β e cos γ. Como sen $\beta=x\sqrt{3}$, obtemos

$\cos^2\beta=1-\text{sen}^2\beta=1-3x^2$ e, assim, $\cos\beta=\pm\sqrt{1-3x^2}$.

Mas $-\frac{\pi}{2}\le\beta\le\frac{\pi}{2}$, donde se conclui que cos β não é negativo. Portanto,

$\cos\beta=\sqrt{1-3x^2}$.

Como sen γ = x, obtemos $\cos^2\gamma=1-\text{sen}^2\gamma=1-x^2$ e sendo $-\frac{\pi}{2}\le\gamma\le\frac{\pi}{2}$, vem

$\cos\gamma=\sqrt{1-x^2}$.

Com isto, a equação fica $2x=x\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-x^2}+x\cdot\sqrt{1-3x^2}$

onde se calculam os valores de x. Obtemos $x=0$ ou $x=\pm\frac{1}{2}$.

Discussão

Sendo 2x = sen α, devemos ter $-1\le 2x\le 1$, isto é,

$$-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$$

Sendo $x\sqrt{3}$ = sen β, devemos ter $-1\le x\sqrt{3}\le 1$, isto é,

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sendo x = sen γ, devemos ter $-1\le x\le 1$.

Nota-se que os três valores encontrados para x *satisfazem* estas três condições. Podemos então escrever

$$S=\left\{0;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right\}$$

12.25) Resolva a equação

$$\text{arc sen } x + \text{arc sen }(1-x) = \text{arc cos } x$$

Solução

Indiquemos

$\alpha = \text{arc sen } x$, donde $\text{sen } \alpha = x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$

$\beta = \text{arc sen}(1-x)$, donde $\text{sen } \beta = 1-x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$

$\gamma = \text{arc cos } x$, donde $\cos \gamma = x$ e $0 \leq \gamma \leq \pi$

A equação dada fica $\alpha + \beta = \gamma$ e, em seguida, escrevemos $\cos(\alpha+\beta) = \cos \gamma$

$$\cos\alpha \, \cos\beta - \text{sen}\,\alpha \, \text{sen}\,\beta = \cos \gamma$$

Calculemos $\cos \alpha$ e $\cos \beta$. Como $\text{sen } \alpha = x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, vem

$\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$. Como $\text{sen } \beta = (1-x)$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, vem

$\cos^2 \beta = 1 - \text{sen}^2\beta = 1-(1-x)^2 = 2x - x^2$ e então

$\cos \beta = \sqrt{2x-x^2}$.

Com isto, a equação fica

$$\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{2x-x^2} - x(1-x) = x$$

onde se calculam os valores de x. Obtemos $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$. O valor $x = 2$ não é satisfatório. Escrevemos

$$S = \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$$

12.26) Resolva a equação

$$\text{arc tg } x + 2 \text{ arc cotg } x = \frac{2\pi}{3}$$

Solução

Indiquemos

$\alpha = \text{arc tg } x$, donde $\text{tg } \alpha = x$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\beta = \text{arc cotg } x$, donde $\text{cotg } \beta = x$ e $0 < \beta < \pi$

A equação dada fica $\alpha + 2\beta = \frac{2\pi}{3}$ e, em seguida, escrevemos $2\beta = \frac{2\pi}{3} - \alpha$

$$\text{tg } 2\beta = \text{tg}\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$$

$$\frac{2 \text{ tg } \beta}{1 - \text{tg}^2\beta} = \frac{\text{tg}\frac{2\pi}{3} - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg}\frac{2\pi}{3}\text{tg } \alpha}$$

$$\frac{\frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{-\sqrt{3} - x}{1 - \sqrt{3}x}$$

Nesta equação obtemos $x = \sqrt{3}$ e, assim,

$$S = \{\sqrt{3}\}$$

Exercícios Propostos

Resolva as equações dadas a seguir:

12.27) $\text{sen } 7x = \text{sen } 5x$

12.28) $\cos 2x = \cos x$

12.29) $\text{tg } x = \text{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

12.30) $\text{sen } 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

12.31) $\text{tg}\left(3x + \frac{5\pi}{4}\right) + \text{cotg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

12.32) $3 + 2\cos 2x = 4\cos x$

12.33) $\sec x - \cos x = \text{sen } x$

12.34) $\cos a - \cos x = \text{sen }(x-a) \left(a \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$

12.35) $\cos^2 \frac{x-a}{2} + \cos^2 \frac{x+a}{2} = 1 \; (\cos a \neq 0)$

12.36) $\text{sen }(a + 2x) + \text{sen }(a + x) + \text{sen } a = 0$

12.37) $\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \text{sen}\frac{\pi}{12} = 0$

12.38) $\text{sen}^3 x \cdot \cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x \cdot \text{sen } x$

12.39) $\cos x \cdot \cos 7x = \cos 3x \cdot \cos 5x$

12.40) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}$

12.41) $2(\operatorname{sen} x + \cos x) = \sec x$

12.42) $\operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen}^2 x = \frac{3}{2}$

12.43) $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

12.44) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \frac{4}{3} \operatorname{sen} 2x$

Parei

12.45) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{cotg} x = 8 \cos^2 x$

12.46) $\operatorname{sen} 3x + \cos 3x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

12.47) $2\operatorname{sen} x + 3\cos x = 1$

12.48) $\sqrt{3} \operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 1$

12.49) $1 - \cos 4x + \operatorname{sen} 4x = 0$

12.50) $\sqrt{3} \cos^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen}^2 x = \sqrt{2}$

12.51) $\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$

12.52) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \sqrt{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + 1 = 0$

12.53) $4\operatorname{sen} x \cdot \cos x - 2\sqrt{2} (\operatorname{sen} x + \cos x) + 3 = 0$

12.54) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2$ → gabarito errado

12.55) $\operatorname{arc sen} x + \operatorname{arc sen}\left(x\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{2}$

12.56) $\operatorname{arc cos} x + \operatorname{arc cos} 2x = \frac{\pi}{3}$

12.57) $\operatorname{arc sen} \sqrt{x} + \operatorname{arc cos} \sqrt{x} = \frac{\pi}{6}$

12.58) $\operatorname{arc tg} x + \operatorname{arc tg} 3x = \frac{\pi}{2}$

12.59) $\operatorname{arc sen} x + \operatorname{arc cos} x + \operatorname{arc tg} x = \operatorname{arc tg} 2 + \operatorname{arc tg} 4$

12.60) $\operatorname{arc sen} (1 - x) - 2 \operatorname{arc cos} \sqrt{1 - x^2} = \frac{\pi}{2}$

Capítulo

13

Inequações trigonométricas

13.1. INEQUAÇÃO DO TIPO cos x < a

Consideremos o seguinte **problema**:

Resolva a inequação cos x < a no conjunto-universo U.

Levando-se em conta que $-1 \leq \cos x \leq 1$, temos vários casos a considerar:

1º) **a ≤ −1.** A inequação é *impossível* e temos $S = \phi$.

2º) **a > 1.** Qualquer valor de $x \in U$ satisfaz a condição cos x < a. Temos S = U.

3º) **a = 1.** A inequação fica cos x < 1 e é satisfeita para todos os valores de $x \in U$, *exceto* aqueles para os quais cos x = 1. Assim,
$S = U - \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

4º) **−1 < a < 1.** É o caso mais comum. Observando a figura 13.1, percebe-se que as extremidades dos arcos que constituem solução devem pertencer ao arco geométrico $\widehat{P_1 A' P_2}$. Se indicamos α = arc cos a (correspondente a P_1), então a 1ª determinação positiva correspondente a P_2 é $2\pi - \alpha$. Se fosse U = [0; 2π], escreveríamos
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < 2\pi - \alpha\}$

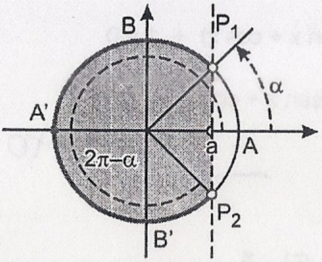


Fig. 13.1

Se tivermos $U = \mathbb{R}$, escreveremos

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha + 2k\pi < x < (2\pi - \alpha) + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$$

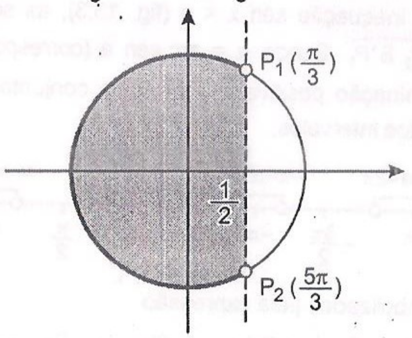
Se o conjunto-universo for $U \subset \mathbb{R}$, bastará fazer a interseção de U com o conjunto acima.

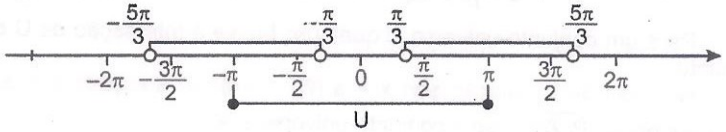
Exemplo

Seja resolver a inequação $\cos x < \frac{1}{2}$ no conjunto-universo $U = [-\pi; \pi]$.

Observemos a figura ao lado. No intervalo $[0; 2\pi]$ a solução seria $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$. No conjunto-universo $\mathbb{R}$, teríamos

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$





Nesta expressão, fazendo k = ... –2, – 1, 0, 1, 2, ..., obtemos uma sequência de *infinitos intervalos*, regularmente distribuídos ao longo do conjunto dos números reais. Como, no nosso problema, pretendemos $U = [-\pi; \pi]$, devemos considerar a interseção desses intervalos com o conjunto U. Obtemos então (conforme a figura ilustra):

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \le x < -\frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{3} < x \le \pi\right\}$$

13.2. INEQUAÇÃO DO TIPO cos x > a

Consideremos o seguinte **problema**:

> Resolva a inequação cos x > a no conjunto-universo U.

Sendo $-1 \le \cos x \le 1$, temos vários casos a considerar:

1º) **a < –1.** A inequação é satisfeita para todo $x \in U$. Temos S = U.

2º) **a ≥ 1.** Não existe solução real. Tem-se $S = \phi$.

3º) **a = –1.** A inequação fica cos x > –1 e é satisfeita para todos os valores de $x \in U$, *exceto* aqueles para os quais cos x = –1. Assim,

$$S = U - \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$$

4º) **–1 < a < 1.** Como a figura 13.2 indica, as extremidades dos arcos que constituem solução pertencem ao arco geométrico $\widehat{P_1AP_2}$. Sendo α = arc cos a (correspondente a P_1), então a 1ª determinação positiva correspondente a P_2 é 2π – α. Se fosse U = [0; 2π], escreveríamos

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < \alpha \text{ ou } 2\pi - \alpha < x \le 2\pi\}$$

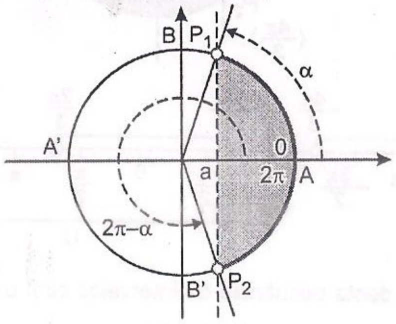
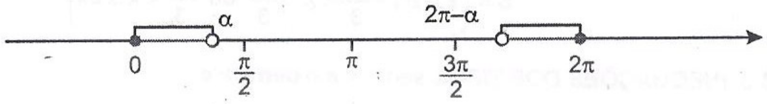
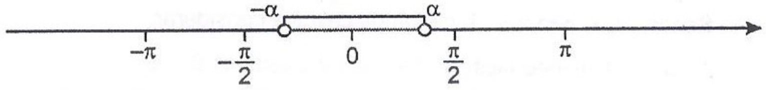


Fig. 13.2



Se fosse U = [–π; π], poderíamos escrever

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\alpha < x < \alpha\}$$



Se fosse $U = \mathbb{R}$, poderemos escrever

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$$

No caso de um conjunto-universo U qualquer, faz-se a interseção de U com este último conjunto.

Exemplo

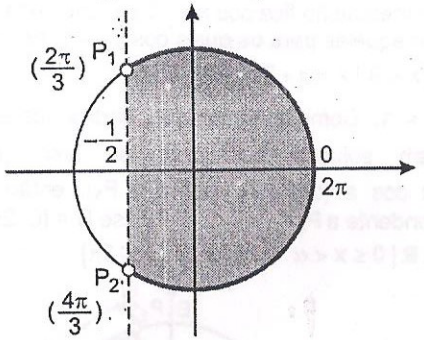
Seja resolver a inequação $\cos x > -\frac{1}{2}$ no conjunto-universo $U = [-\pi; 2\pi]$.

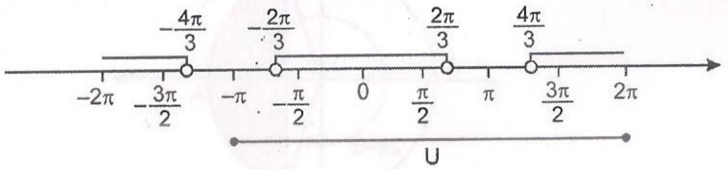
Observemos a figura abaixo. No intervalo $[0; 2\pi]$, a solução seria

$$0 \le x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x \le 2\pi$$

No conjunto-universo $\mathbb{R}$, teríamos

$$-\frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{2\pi}{3}+2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$





A interseção desta sequência de intervalos com o conjunto $U=[-\pi;2\pi]$ nos dá o resultado:

$$S=\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x \leq 2\pi\right\}$$

13.3. INEQUAÇÕES DOS TIPOS sen x < a e sen x > a

Consideremos o seguinte **problema**:

Resolver a inequação sen x < a (ou sen x > a) no conjunto-universo U.

Sendo $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$, há vários casos a considerar.

1º) **a < – 1.** A inequação sen x < a é *impossível*: $S = \phi$;
A inequação sen x > a é satisfeita para todo $x \in U$: S = U.

2º) **a = –1.** A inequação sen x < –1 é *impossível*: $S = \phi$;
A inequação sen x > – 1 é satisfeita para todos os valores de $x \in U$ exceto aqueles para os quais sen x = –1. Assim,

$$S=U-\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

3º) **a = 1.** Para a inequação sen x < 1. temos

$$S=U-\left\{x \in \mathbb{R} \mid x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

e para a inequação sen x > 1 temos $S = \phi$.

4º) **a > 1.** Para sen x < a temos S = U e para sen x > a temos $S = \phi$.

5º) **–1 < a < 1.** É o caso mais comum, que se resolve com o auxílio da figura.

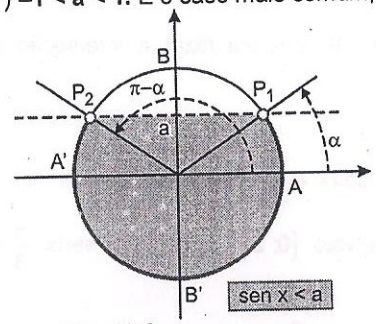


Fig. 13.3

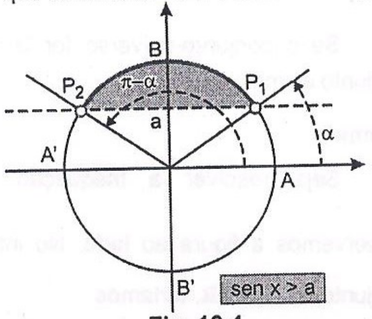
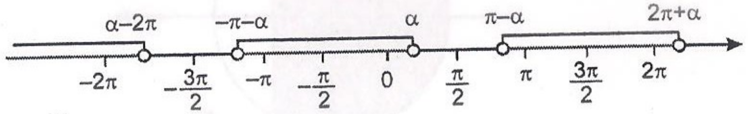


Fig. 13.4

No caso da inequação sen x < a (fig. 13.3), as soluções tem extremidades no arco geométrico $\widehat{P_2B'P_1}$. Sendo α = arc sen a (correspondente a P_1), então para P_2 temos a 1ª determinação positiva π – α. Se o conjunto-universo é ℝ, obtemos uma sequência de infinitos intervalos,

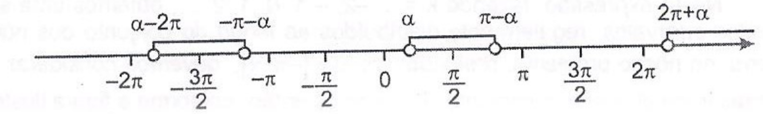


que podem ser simbolizados pela expressão

$$S=\{x \in \mathbb{R} \mid \pi-\alpha+2k\pi < x < 2\pi+\alpha+2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$$

Para um conjunto-universo U qualquer faz-se a interseção de U com este último conjunto.

No caso da inequação sen x > a (fig. 13.4), as soluções tem extremidades no arco geométrico $\widehat{P_1BP_2}$. Se o conjunto-universo é ℝ,



obtemos uma sequência de infinitos intervalos, que podem ser simbolizados pela expressão

$$S=\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha+2k\pi < x < \pi-\alpha+2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$$

Para um conjunto-universo U qualquer faz-se a interseção de U com este último conjunto.

Exemplos

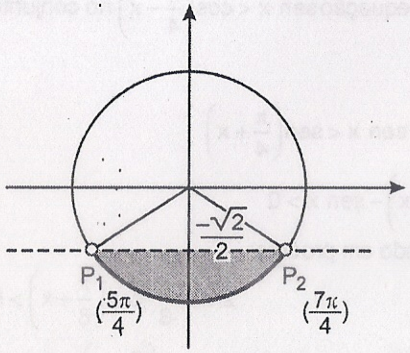
1º) Seja resolver a inequação $\text{sen } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ no conjunto-universo $U=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

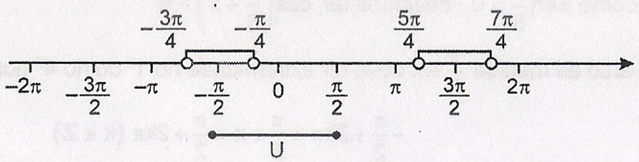
Observemos a figura abaixo. No intervalo $[0; 2\pi]$ a solução seria

$\frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}$.

No conjunto-universo $\mathbb{R}$ teríamos

$$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$$





A interseção desta sequência de intervalos com o conjunto

$$U = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

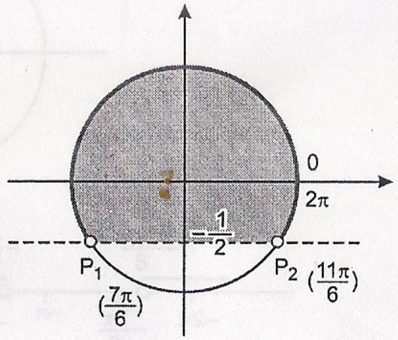
nos dá o resultado

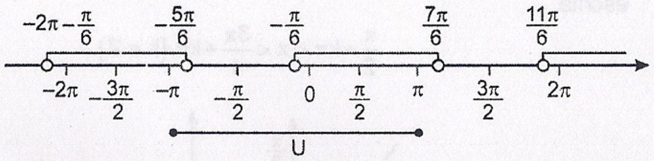
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} \le x < -\frac{\pi}{4}\right\}$$

2º) Seja resolver a inequação $\operatorname{sen} x > -\frac{1}{2}$ no conjunto-universo $U = [-\pi; \pi]$.

Observemos a figura abaixo. No conjunto-universo $\mathbb{R}$, teríamos

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \; (k \in \mathbb{Z})\right\}$$





A interseção desta sequência de intervalos com o conjunto $U = [-\pi; \pi]$ nos dá o resultado

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \le x < -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } -\frac{\pi}{6} < x \le \pi\right\}$$

13.4. INEQUAÇÕES DOS TIPOS tg x < a e tg x > a

Consideremos o seguinte **problema**:

> Resolva a inequação tg x < a (ou tg x > a) no conjunto-universo U.

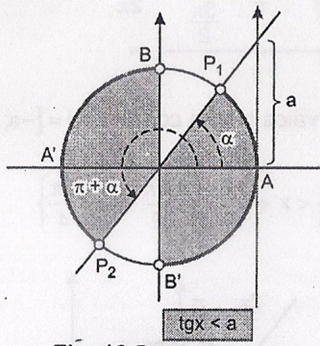


Fig. 13.5

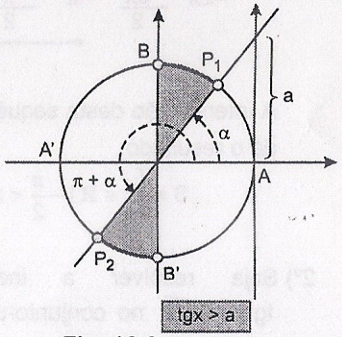


Fig. 13.6

Observemos as figuras onde está ilustrado o caso a > 0.

No caso da inequação tg x < a, as soluções tem extremidades nos arcos geométricos $\widehat{P_1AB'}$ e $\widehat{P_2A'B}$. Seja α = arc tg a. Quando o conjunto-universo é $\mathbb{R}$, escrevemos

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \alpha + k\pi \; (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

No caso da inequação tg x > a, as soluções tem extremidades nos arcos geométricos $\widehat{P_1B}$ e $\widehat{P_2B'}$. Quando o conjunto-universo é $\mathbb{R}$, podemos escrever

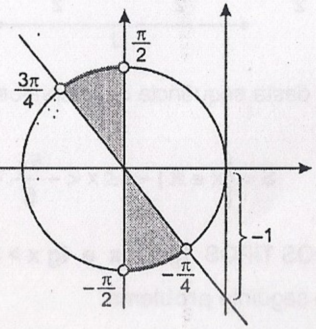
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

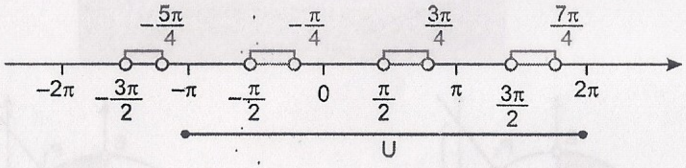
Exemplos

1º) Seja resolver a inequação tg x < – 1 no conjunto-universo $U = [-\pi; 2\pi]$.

Observemos a figura abaixo. No conjunto-universo $\mathbb{R}$, a solução poderia ser escrita

$$\frac{\pi}{2}+k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$





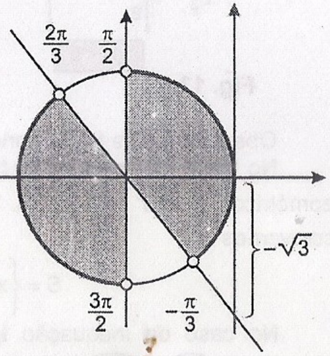
A intersecção desta sequência de intervalos com o conjunto $U=[-\pi;\ 2\pi]$ nos dá o resultado

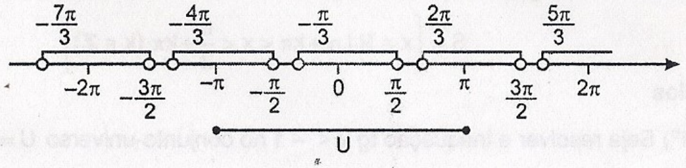
$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\ -\frac{\pi}{2}<x<-\frac{\pi}{4}\ \text{ou}\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{4}\ \text{ou}\ \frac{3\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{4}\right\}$$

2º) Seja resolver a inequação $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$ no conjunto-universo $U=[-\pi;\pi]$.

Observemos a figura abaixo. Se o conjunto-universo fosse $\mathbb{R}$, poderíamos escrever a solução na forma

$$-\frac{\pi}{3}+k\pi < x < \frac{\pi}{2}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$





A intersecção desta sequência de intervalos com o conjunto $U=[-\pi;\ \pi]$ nos dá o resultado

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\ |\ -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}\ \text{ou}\ -\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}\ \text{ou}\ \frac{2\pi}{3}<x\le\pi\right\}$$

Exercícios Resolvidos

13.1) Resolva a inequação $\operatorname{sen} x < \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$ no conjunto-universo $U=[0;\ 2\pi]$.

Solução

Escrevemos $\operatorname{sen} x < \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

ou $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\operatorname{sen} x>0$

Transformando em produto:

$$2\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)>0$$

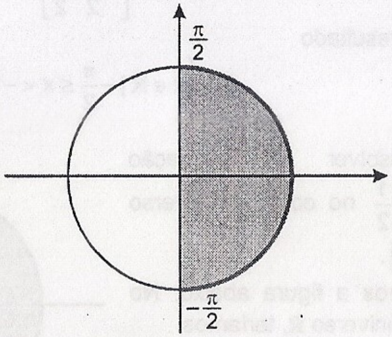
e como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}>0$, devemos ter $\cos\left(\frac{\pi}{8}+x\right)>0$

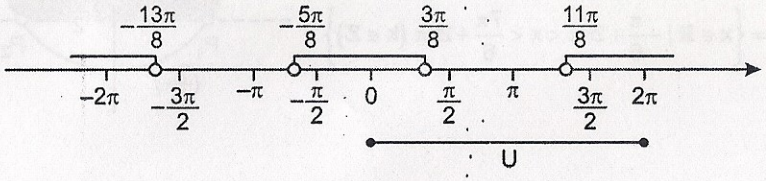
O arco de medida $\frac{\pi}{8}+x$ deve ter extremidade no 1º ou no 4º quadrante, isto é,

$$-\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{\pi}{8}+x<\frac{\pi}{2}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$

Daí resulta

$$-\frac{5\pi}{8}+2k\pi<x<\frac{3\pi}{8}+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$$





A interseção desta sequência de intervalos com o conjunto $U = [0; 2\pi]$ nos dá o resultado

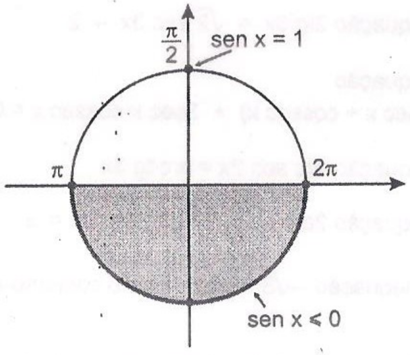
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x < \frac{3\pi}{8} \text{ ou } \frac{11\pi}{8} < x \le 2\pi\right\}$$

13.2) Resolva a inequação $1 - \text{sen } x \ge \cos^2 x$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

Solução

Pondo $1 - \text{sen } x \ge 1 - \text{sen}^2 x$, vem $\text{sen}^2 x - \text{sen } x \ge 0$. Trata-se de uma *inequação do 2º grau* $y^2 - y \ge 0$, com $y = \text{sen } x$. Devemos ter $y \le 0$ ou $y \ge 1$, ou seja, $\text{sen } x \le 0$ ou $\text{sen } x \ge 1$.
A figura representa a solução, que pode ser escrita

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \pi + 2k\pi \le x \le 2\pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

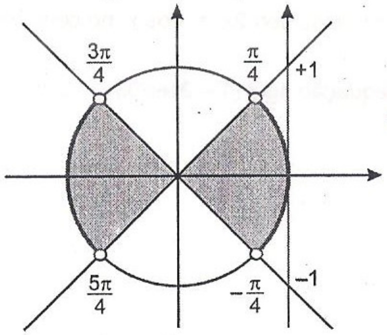


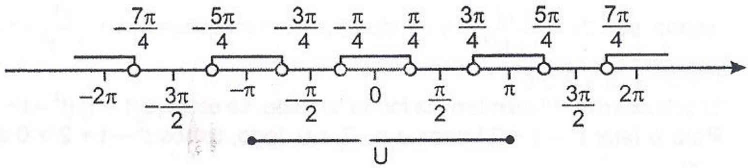
13.3) Resolva a inequação $\text{tg}^2 x < 1$ no conjunto-universo $U = [-\pi; \pi]$.

Solução

A inequação dada equivale a $-1 < \text{tg } x < 1$. Observemos a figura. Para o conjunto-universo $\mathbb{R}$, escreveríamos a solução

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$





A interseção dessa sequência de intervalos com o conjunto $U = [-\pi; \pi]$ nos dá o resultado

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\pi \le x < -\frac{3\pi}{4} \text{ ou } -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x \le \pi\right\}$$

13.4) Resolva a inequação $\text{sen}^2 x > 1 - \text{sen } 2x$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

Solução

Coloquemos $\text{sen}^2 x$ e $\text{sen } 2x$ em função de $\text{tg } x = t$. Sabemos que

$$\text{sen}^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

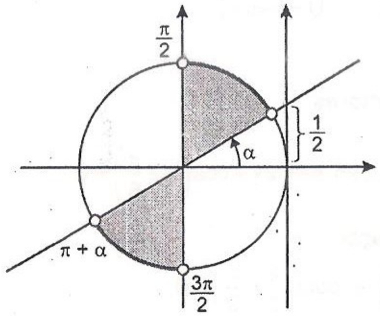
$$\text{sen } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1 + \text{tg}^2 x} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

A inequação fica $\dfrac{t^2}{1 + t^2} > 1 - \dfrac{2t}{1 + t^2}$

que, simplificada, resulta $t > \dfrac{1}{2}$. Devemos, então, resolver a inequação $\text{tg } x > \dfrac{1}{2}$.

Indiquemos $\alpha = \text{arc tg} \dfrac{1}{2}$

No conjunto-universo $U = \mathbb{R}$ podemos escrever a solução na forma



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

13.5) Resolva a inequação $\text{sen } 2x + \text{tg } x \ge 2$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

14.20) Resolva um triângulo retângulo, conhecendo o semiperímetro $p = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ e o raio $R = \sqrt{2}$ da circunferência circunscrita.

$\left(\text{Dados } \operatorname{sen} 75° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},\ \cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$

14.21) Resolva um triângulo retângulo, conhecendo o perímetro $12\sqrt{2}$ e a altura $\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$ relativa à hipotenusa.

14.22) Prove que em qualquer triângulo tem-se:

a) $\dfrac{b - a\cos\hat{C}}{c - a\cos\hat{B}} = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{B}}$

b) $a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}$

c) $(a+b)(1-\cos\hat{C}) = c(\cos\hat{A} + \cos\hat{B})$

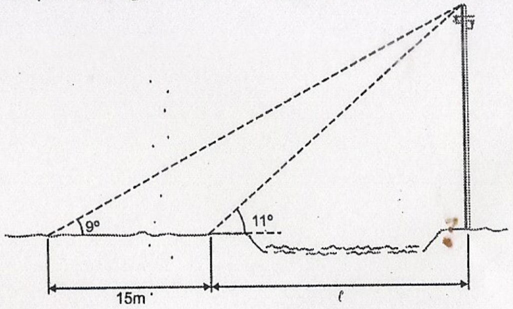
d) $a(\cos\hat{B} - \operatorname{sen}\hat{B}) + b(\cos\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{A}) = c$

e) $2S(\operatorname{cotg}\hat{A} + \operatorname{cotg}\hat{B}) = c^2$

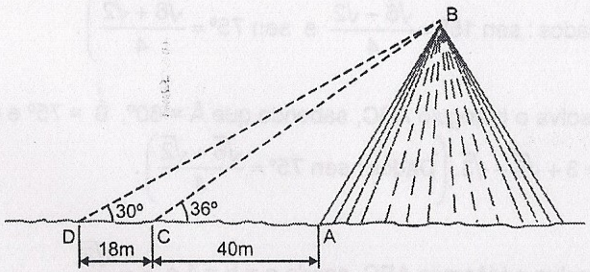
f) $a\cos\hat{A} - b\cos\hat{B} = \cos\hat{C}(b\cos\hat{A} - a\cos\hat{B})$

14.23) A e B são dois pontos situados à margem direita de um rio, distantes 600 metros um do outro. C é outro ponto situado à margem esquerda. Os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ medem, respectivamente, 48° e 75°. Determine a largura do rio. (Dados: sen 48° = 0,74, sen 75° = 0,97, sen 57° = 0,84).

14.24) Um homem deseja determinar a largura de um rio. Então, de um ponto da margem mede o ângulo de elevação do topo de um poste situado na margem oposta, obtendo 11°. Afastando-se 15m, ele obtém o novo ângulo de 9°. Calcule a largura do rio. (Dados: tg 9° = 0,16 e tg 11° = 0,19).

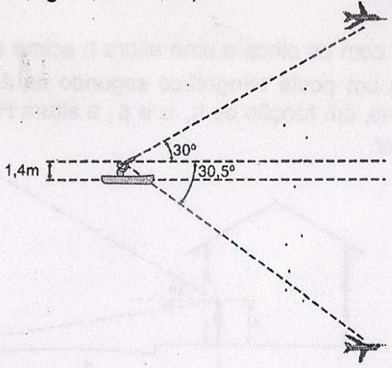


14.25) Na figura, calcule o comprimento de $\overline{AB}$. São dados:
sen 30° = 0,50
sen 6° = 0,10
e cos 36° = 0,81



14.26) Um observador está no ponto A sobre o topo de uma montanha e sua vista se estende até um ponto C no horizonte. O raio visual faz um ângulo α com a vertical. Sendo R o raio da Terra, calcule a altura da montanha em função de α e R.

14.27) Um observador situado sobre um barco, com o olho a uma altura de 1,4m acima do nível da água, vê um avião e a imagem desse avião na água sob os ângulos de 30° e 30,5°, respectivamente, em relação à horizontal. Calcule a que altura se encontra o avião.
(Dados: tg 30° = 0,58, tg 30,5° = 0,59).



Exercícios Sumplementares

V.1) Determine a natureza (acutângulo, retângulo, obtusângulo) do triângulo cujos lados medem a = 5, b = 17, c = 18.

V.2) Resolva o triângulo ABC, sendo a = 74cm, $\hat{A}$ = 132° e $\hat{B}$ = 18°.
(Dados: sen 18° = 0,31, sen 132° = 0,74, sen 30° = 0,50)

V.3) Resolva o triângulo ABC, sendo $\hat{A}$ = 45°, $b = \sqrt{3} + 1$ e $c = \sqrt{6}$

V.4) Resolva o triângulo ABC, sendo $a = 2\sqrt{3},\ b = \sqrt{6} - \sqrt{2},\ c = 2\sqrt{2}$.

V.5) Calcule a área do triângulo ABC, sendo a = 98cm, b = 50cm e c = 74cm.

Solução

Sendo $\text{sen } 2x = \frac{2 \text{ tg } x}{1+\text{tg}^2 x}$ e pondo tg x = t, a inequação fica $\frac{2t}{1+t^2} + t \geq 2$, ou seja:
$t^3 - 2t^2 + 3t - 2 \geq 0$.
O polinômio do 1º membro, na forma fatorada, se escreve $(t-1)(t^2 - t + 2) \geq 0$.
Para o fator $t^2 - t + 2$ temos $\Delta = -7 < 0$; logo, temos $t^2 - t + 2 > 0$ para todo t $\in \mathbb{R}$.
Assim, basta impor $t - 1 \geq 0$, ou seja: $\text{tg } x \geq 1$
Para $U = \mathbb{R}$ tem-se o conjunto-solução

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \right\}$$

Exercícios Propostos

Resolva as inequações, dadas a seguir, no conjunto-universo U indicado:

13.6) $2\text{sen}^2 x < \cos 2x$, $U = \mathbb{R}$

13.7) $\text{tg } x > \text{sen } 2x$, $U = [-\pi; \pi]$

13.8) $\text{sen}^2 x \leq 1 - \cos x$, $U = [0; 2\pi]$

13.9) $5\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 2x > 4\cos 2x$, $U = \mathbb{R}$

13.10) $\text{sen } 2x + \cos 2x \leq -\sqrt{2}$, $U = \mathbb{R}$

13.11) $\text{sen } 2x + \cos 2x \leq 1$, $U = [0; 2\pi]$

13.12) $\text{sen}^3 x > \cos^3 x$, $U = [-\pi; \pi]$

Exercícios Suplementares

IV.1) Resolva a equação $\text{sen } 2x + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

IV.2) Resolva a equação
$$\text{cotg}\left(\frac{3x}{2} + \frac{3\pi}{5}\right) + \text{cotg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

IV.3) Resolva a equação
$$\cos\left(4x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos 2x + \cos\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$$

IV.4) Resolva a equação
$$\text{sen}\frac{x}{2} - \text{sen}\frac{3x}{2} + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

IV.5) Resolva a equação $\cos 2x + \text{tg}^2 x = 1$

IV.6) Resolva a equação $2\sqrt{2}\,\text{sen}^3 x = \text{sen } 2x$

IV.7) Resolva a equação $2\text{sen}^2 3x + \text{sen}^2 6x = 2$

IV.8) Resolva a equação $\text{tg } 3x + \text{tg } 2x + \text{tg } x = 0$

IV.9) Resolva a equação $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8}$

IV.10) Resolva a equação $\text{sen}^2 2x - 6\text{sen}^2 x + 2 = 0$

IV.11) Resolva a equação $2\text{tg } 3x = \sqrt{2} \sec 3x - 2$

IV.12) Resolva a equação
$$4 - 2\sqrt{2}(\sec x + \text{cossec } x) + 3\sec x \cdot \text{cossec } x = 0$$

IV.13) Resolva a equação arc sen 2x = arc tg 3x

IV.14) Resolva a equação $2\text{arc sen } x + \text{arc sen } 2x = \pi$

IV.15) Resolva a inequação $-\sqrt{3} < \text{tg } x < 1$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

IV.16) Resolva o sistema de inequações simultâneas $\text{sen } x \geq -\frac{1}{2}$ e $\cos x < -\frac{1}{2}x$ no conjunto-universo $U = [0; 2\pi]$.

IV.17) Resolva a inequação $\cos 2x + \cos x \geq 0$ no conjunto-universo $U = [-\pi; \pi]$.

IV.18) Resolva a inequação $\text{sen } 2x < \text{tg } x$ no conjunto-universo $U = [0; 2\pi]$.

IV.19) Resolva a inequação $\text{sen } 2x > \cos x$ no conjunto-universo $U = [0; 2\pi]$.

IV.20) Resolva a inequação $\text{tg } x(1 - 2\text{sen}^2 x) > 0$ no conjunto-universo $U = \mathbb{R}$.

PARTE V

Capítulo 14 – **Resolução de triângulos**

Capítulo 14

Resolução de triângulos

14.1. INTRODUÇÃO

Dizemos que um triângulo está *resolvido* quando conhecemos as medidas de seus lados, de seus ângulos internos e também a sua área. Para resolver um triângulo, frequentemente são usadas as *relações métricas* para triângulos retângulos e para triângulos obliquângulos, bem como as *relações trigonométricas*, que se exprimem em função dos lados e ângulos. Passaremos a examinar tais relações.

14.2. LEI DOS SENOS

Para um triângulo ABC qualquer, valem as relações

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

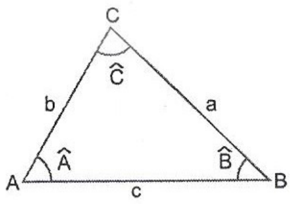


Fig. 14.1

ou seja, **os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.**

Esta propriedade é conhecida como ***lei dos senos***. Passemos à sua demonstração.

Consideremos a circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Foram feitas três figuras (14.2, 14.3 e 14.4) para representar separadamente os casos dos triângulos *acutângulo*, *retângulo* e *obtusângulo*. Tomando como base o lado $\overline{BC}$, construímos um novo triângulo BCA', de tal modo que $\overline{BA'}$ seja um *diâmetro*. Este triângulo é, portanto, *retângulo em C*.

No caso da figura 14.2, temos BÂ'C = Â (pois são ângulos inscritos à circunferência, correspondentes a um mesmo arco $\widehat{BC}$). Escrevemos, então, $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R}$ isto é, $\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$.

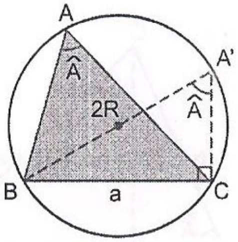


Fig. 14.2

No caso da figura 14.4, temos BÂ'C = $\pi - \hat{A}$ (pois são ângulos inscritos à circunferência, correspondentes a arcos replementares $\widehat{BAC}$ e $\widehat{BA'C}$). Escrevemos, então, $\operatorname{sen}(\pi - \hat{A}) = \frac{a}{2R}$, o que é o mesmo que $\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{2R}$, isto é, $\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = 2R$. É evidente que, repetindo o processo com as bases $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, encontraremos analogamente $\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = 2R$ e $\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$ donde resulta

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R.$$

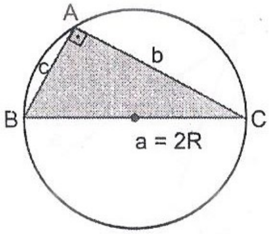


Fig. 14.3

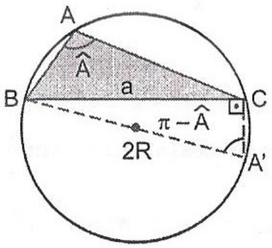


Fig. 14.4

No caso da figura 14.3, a lei dos senos resulta como consequência imediata da própria definição de seno no triângulo retângulo: $\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}$, donde $\frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = a$.

$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{c}{a}$, donde $\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = a$.

Assim, lembrando ainda que $\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, vem

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$$

Exemplos

1º) Suponha-se que conhecemos, de um triângulo ABC, as medidas a = 5cm, Â = 32º e $\hat{B}$ = 49º. Podemos, com o auxílio da lei dos senos, determinar as medidas dos outros dois lados, b e c. Como $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$, temos imediatamente $\hat{C}$ = 99º. Da tabela obtemos os valores

$\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{sen} 32^\circ \cong 0{,}53$

$\operatorname{sen}\hat{B} = \operatorname{sen} 49^\circ \cong 0{,}75$ e

$\operatorname{sen}\hat{C} = \operatorname{sen} 99^\circ =$

$= \operatorname{sen} 81^\circ \cong 0{,}99$

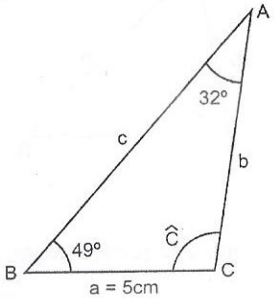
Em seguida, pela lei dos senos, escrevemos

$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}}$ donde

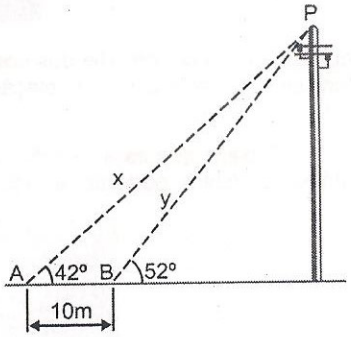
$b = \frac{a \operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{5 \cdot 0{,}75}{0{,}53} \cong 7{,}1\text{cm}$

e ainda $\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}}$

donde $c = \frac{a \operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{5 \cdot 0{,}99}{0{,}53} \cong 9{,}3\text{cm}$



2º) Um homem caminhando em direção a um poste, observa que o ângulo de elevação do topo é 42º quando ele se encontra no ponto A (ver figura) e, avançando 10m para mais perto, esse ângulo passa a ser 52º em B. Com estes dados, pode-se, por exemplo, determinar as distâncias x e y que separam o homem do topo em cada um dos dois instantes. Basta aplicar a lei dos senos ao triângulo ABP. Temos



$\text{sen}\,\hat{A} = \text{sen}\,42° \cong 0{,}67$

$\text{sen}\,\hat{B} = \text{sen}\,128° = \text{sen}\,52° \cong 0{,}79$ e

$\text{sen}\,\hat{P} = \text{sen}\,10° \cong 0{,}17$

Então, escrevemos

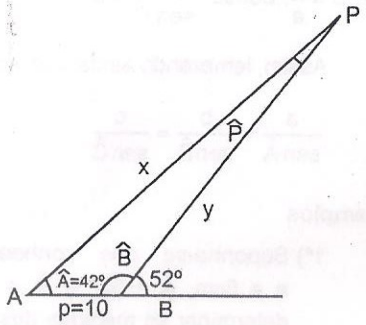
$$\frac{x}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{p}{\text{sen}\,P}$$

donde

$$x = \frac{p\,\text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{P}} = \frac{10 \cdot 0{,}79}{0{,}17} \cong 46{,}5\text{m}$$

$$\text{e} \quad \frac{y}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{p}{\text{sen}\,\hat{P}}, \text{ donde}$$

$$y = \frac{p\,\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{P}} = \frac{10 \cdot 0{,}67}{0{,}17} \cong 39{,}4\text{m}$$



14.3. LEI DOS COSSENOS

Consideremos um triângulo ABC qualquer (as figuras representam os casos em que o ângulo Â é agudo, reto e obtuso).

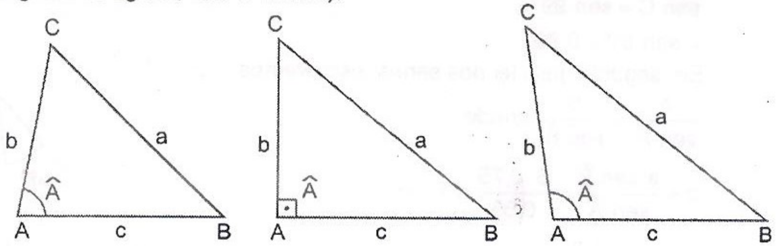


Fig. 14.5

Vale a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

que é conhecida como lei dos cossenos. No caso particular em que Â é um ângulo reto, tem-se cos Â = 0; assim, a relação acima recai no teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

É claro que esta relação pode ser escrita também para os outros dois lados do triângulo. Valem, portanto, as três relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

Passemos à demonstração da lei dos cossenos nos casos em que Â é agudo ou obtuso.

Se o ângulo Â é agudo (fig. 14.6), aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo CHB, obtemos

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2 =$$
$$= h^2 + (c^2 - 2cx + x^2) =$$
$$= (h^2 + x^2) + c^2 - 2cx$$

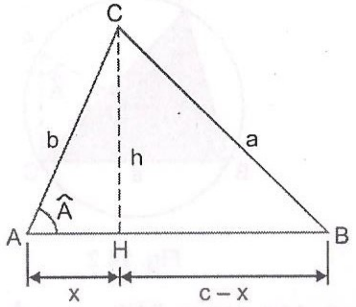


Fig. 14.6

No triângulo AHC, obtemos $h^2 + x^2 = b^2$ e também $\frac{x}{b} = \cos\hat{A}$, donde $x = b\cos\hat{A}$. Assim, finalmente, vem a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

Se o ângulo Â é obtuso (fig. 14.7), aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo CHB, obtemos

$$a^2 = h^2 + (c + x)^2 =$$
$$= h^2 + (c^2 + 2cx + x^2) =$$
$$= (h^2 + x^2) + c^2 + 2cx$$

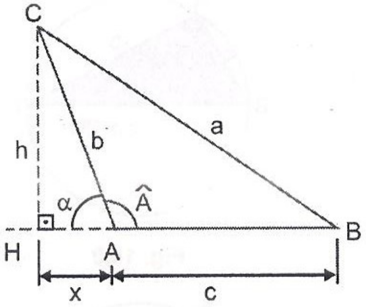


Fig. 14.7

No triângulo AHC, obtemos $h^2 + x^2 = b^2$ e também

$$\frac{x}{b} = \cos\alpha = \cos(\pi - \hat{A}) = -\cos\hat{A}\text{, donde } x = -b\cos\hat{A}.$$

Assim, finalmente, vem a relação $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

Notas: 1ª) As expressões da lei dos cossenos podem ser escritas na forma

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\quad \cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};\quad \cos\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

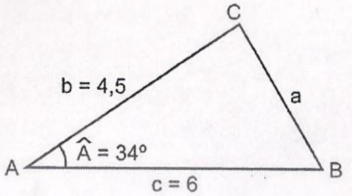
onde fica clara uma das mais comuns aplicações da lei dos cossenos: determinar as medidas dos ângulos internos do triângulo, conhecendo-se as medidas dos lados.

2ª) Através da lei dos cossenos, deduzimos um critério para determinar se um ângulo interno do triângulo é agudo, reto ou obtuso. Basta aplicar a tabela abaixo:

$\hat{A}$	condição
agudo	$a^2 < b^2 + c^2$
reto	$a^2 = b^2 + c^2$
obtuso	$a^2 > b^2 + c^2$

Exemplos

1º) Sabendo que, num triângulo, dois lados que formam um ângulo de 34° tem as medidas 4,5cm e 6cm, podemos calcular a medida do outro lado. Observemos a figura e apliquemos a lei dos cossenos, fazendo $b = 4,5$, $c = 6$ e $\hat{A} = 34°$.



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} =$
$= (4,5)^2 + 6^2 - 2\cdot(4,5)\cdot 6\cdot 0,83 = 11,43$
Assim, $a \cong 3,4$ cm.

2º) Sabendo que os lados de um triângulo medem $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$ e $c = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, podemos determinar as medidas dos ângulos internos. Temos

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\quad \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2}{2\cdot\left(2\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}$$

Esta expressão, simplificada, nos dá $\cos\hat{A} = \frac{1}{2}$, onde $\hat{A} = 60°$. Para calcular $\hat{B}$, podemos utilizar a relação

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

ou então aplicar a lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}},\ \text{donde}\ \text{sen}\,\hat{B} = \frac{b\,\text{sen}\hat{A}}{a}$$

Desta última obtemos

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

isto é, $\hat{B} = 45°$

Consequentemente, temos $\hat{C} = 75°$.

Resposta: $\hat{A} = 60°, \hat{B} = 45°, \hat{C} = 75°$.

14.4. ÁREA DO TRIÂNGULO

Examinemos algumas relações que permitem determinar a área de um triângulo. A primeira delas, que se destaca por sua importância, permite calcular a área de um triângulo ABC conhecendo-se as medidas dos três lados a, b e c. Chama-se Fórmula de Herão:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Aqui, p representa o semiperímetro, isto é:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

Exemplo

Vamos determinar a área de um triângulo cujos lados medem 10, 11 e 17. Calculamos primeiramente o semiperímetro, com $a = 10$, $b = 11$ e $c = 17$.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+11+17}{2} = 19$$

Depois, $p - a = 19 - 10 = 9$
$p - b = 19 - 11 = 8$
$p - c = 19 - 17 = 2$

e então $p(p-a)(p-b)(p-c) = 19\cdot 9\cdot 8\cdot 2 = 2736$

Portanto, $S = \sqrt{2\,736} \cong 52,3$

Demonstração da fórmula

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Consideremos o triângulo ABC, no qual $\hat{A}$ e $\hat{B}$ sejam agudos ($\hat{C}$ poderá ser agudo, reto ou obtuso).

A área do triângulo pode ser expressa na

$$S = \frac{ch}{2}$$

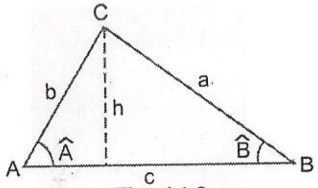


Fig. 14.8

Mas, como $\frac{h}{b} = \text{sen}\,\hat{A}$, temos h = bsen Â e então $S = \frac{bc}{2}\text{sen}\,\hat{A}$.

Vamos agora exprimir sen Â em função das medidas a, b e c dos lados. Sabe-se que

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

Então,

$$\text{sen}^2\hat{A} = 1-\cos^2\hat{A} = 1-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 =$$

$$= \left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) =$$

$$= \left(\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}\right) =$$

$$= \left(\frac{(b^2+c^2+2bc)-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{a^2-(b^2+c^2-2bc)}{2bc}\right) =$$

$$= \left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right)\left(\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right) = \frac{1}{4b^2c^2}\cdot(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$$

Mas, sendo a + b + c = 2p. temos

$$b+c-a = 2p-2a$$
$$a+b-c = 2p-2c$$
$$a-b+c = 2p-2b$$

donde

$$\text{sen}^2\hat{A} = \frac{1}{4b^2c^2}\cdot(2p)\cdot(2p-2a)(2p-2b)(2p-2c) = \frac{4}{b^2c^2}p(p-a)(p-b)(p-c)$$

e então

$$\text{sen}\hat{A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Podemos agora voltar à expressão da área:

$$S = \frac{bc}{2}\text{sen}\,\hat{A} = \frac{bc}{2}\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e assim

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Examinemos agora outras expressões da área do triângulo. Valem as seguintes relações:

$$S = \frac{1}{2}ab\ \text{sen}\hat{C}$$
$$S = \frac{1}{2}ac\ \text{sen}\hat{B}$$
$$S = \frac{1}{2}bc\ \text{sen}\hat{A}$$

É claro que basta demonstrar a validade de uma delas, por exemplo, a terceira.

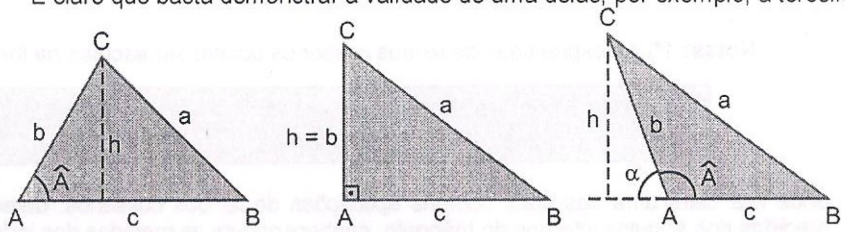


Fig. 14.9

A figura 14.9 representa o triângulo ABC nos casos em que Â é agudo, reto e obtuso. Nos três casos, temos $S = \frac{ch}{2}$. Nos casos em que Â é agudo ou reto, escrevemos h = bsen Â. Para o caso em que Â é obtuso, temos também h = bsen α = bsen (π − Â) = bsen Â. Assim, em qualquer caso podemos escrever $S = \frac{ch}{2} = \frac{1}{2}bc\ \text{sen}\,\hat{A}$.

14.5. RESUMO

1) $\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$ (lei dos senos)

2) Lei dos cossenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

ou ainda

$\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

3) Área

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Fórmula de Herão)

$S = \frac{1}{2}ab\ \text{sen}\,\hat{C}$

$S = \frac{1}{2}ac\ \text{sen}\,\hat{B}$

$S = \frac{1}{2}bc\ \text{sen}\,\hat{A}$

Exercícios Resolvidos

14.1) Resolva o triângulo ABC, sendo $a = \sqrt{3}$, $b = 1$ e $\hat{A} = 120°$.

Solução

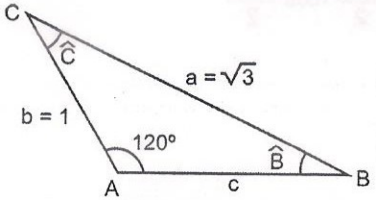
Apliquemos a lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

pondo $\text{sen } \hat{A} = \text{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

obtemos

$$\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$



Resulta $\text{sen} \hat{B} = \frac{1}{2}$, donde $\hat{B} = 30°$; daí também obtemos imediatamente

$\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 180° - 120° - 30° = 30°$

Então, de $\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{1}{\text{sen } \hat{B}}$ tiramos

$\frac{c}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$, ou seja: $c = 1$.

Para calcular a área, podemos fazer $S = \frac{1}{2} ab \text{ sen } \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Resposta: $c = 1$, $\hat{B} = \hat{C} = 30°$, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$

14.2) Resolva o triângulo ABC, sendo dados $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $b = 2$, $B = 15°$ e sabendo-se que $\text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

Solução

Pela lei dos senos: $\frac{a}{\text{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen} \hat{B}}$

donde $\text{sen } \hat{A} = \frac{a \text{ sen } \hat{B}}{b} = \frac{\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)}{2} \cdot \frac{\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)}{4} = \frac{1}{2}$

Podemos ter $\hat{A} = 30°$ ou $\hat{A} = 150°$. Vamos então separar o problema em duas possibilidades:

1º) $\hat{A} = 30°$. Temos $\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 135°$. Pela lei dos senos:

$\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}}$, donde $c = \frac{b \text{ sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{B}}$

e então $c = \frac{2}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2\sqrt{3} + 2$

A área vale $S = \frac{1}{2} ab \text{ sen } \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3} + 1$

Resumindo: $c = 2\sqrt{3} + 2$, $\hat{A} = 30°$, $\hat{C} = 135°$, $S = \sqrt{3} + 1$

2º) $\hat{A} = 150°$. Temos $\hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B} = 15°$. Assim, como $\hat{B} = \hat{C}$, resulta $c = b = 2$. Para a área escrevemos

$S = \frac{1}{2} bc \text{ sen } \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Resumindo: $c = 2$, $\hat{A} = 150°$, $\hat{C} = 15°$, $S = 1$

14.3) Resolva o triângulo ABC, sendo $a = 32$, $b = 44$ e $\hat{C} = 78°$. Utilize os valores aproximados:
$\text{sen } 78° = 0{,}98$ e $\cos 78° = 0{,}21$.

Solução

Pela *lei dos cossenos*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 32^2 + 44^2 - 2 \cdot 32 \cdot 44 \cdot 0{,}21 \cong 2369$$

donde $c = \sqrt{2369} \cong 49$

Pela *lei dos senos*:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}, \text{ donde sen } \hat{A} = \frac{a \text{ sen } \hat{C}}{c} = \frac{32 \cdot 0{,}98}{49}$$

e assim $\text{sen } \hat{A} \cong 0{,}64$. Na tabela, obtemos (aproximadamente) $\hat{A} = 40°$. Em seguida calculamos $\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 62°$.
Para a área temos:
$S = \frac{1}{2} ab \text{ sen } \hat{C} = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 44 \cdot 0{,}98 \cong 690$

Resposta: $c = 49$, $\hat{A} = 40°$, $\hat{B} = 62°$, $S = 690$.

14.4) Resolva um triângulo cujos ângulos internos medem 53°, 58° e 69°, sabendo-se que o seu perímetro é igual a 43.
(Dados: $\text{sen } 53° = 0{,}80$, $\text{sen } 58° = 0{,}85$, $\text{sen } 69° = 0{,}93$)

Solução

Pela *lei dos senos*:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}} = 2R$$

donde $a = 2R\ \text{sen}\ \hat{A}$

$b = 2R\ \text{sen}\ \hat{B}$

$c = 2R\ \text{sen}\ \hat{C}$

então $a + b + c = 2R\ (\text{sen}\ \hat{A} + \text{sen}\ \hat{B} + \text{sen}\ \hat{C})$

isto é: $43 = 2R\ (0{,}80 + 0{,}85 + 0{,}93)$

Daí obtemos $R = \frac{25}{3}$. Assim,

$$a = 2R\ \text{sen}\ \hat{A} = 2 \cdot \frac{25}{3} \cdot 0{,}80 \cong 13$$

$$b = 2R\ \text{sen}\ \hat{B} = 2 \cdot \frac{25}{3} \cdot 0{,}85 \cong 14$$

$$c = 2R\ \text{sen}\ \hat{C} = 2 \cdot \frac{25}{3} \cdot 0{,}93 \cong 16$$

Para a área temos:

$$S = \frac{1}{2} bc\ \text{sen}\ \hat{A} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 16 \cdot 0{,}80 \cong 90$$

Resposta: a = 13, b = 14, c = 16, S = 90

14.5) Prove que em qualquer triângulo, tem-se $b^2 - c^2 = a(b\cos\ \hat{C} - c\cos\ \hat{B})$.

Solução

Temos

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\ \hat{B}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\ \hat{C}$

donde $b^2 - c^2 = c^2 - b^2 - 2ac\cos\ \hat{B} + 2ab\cos\ \hat{C}$

$2b^2 - 2c^2 = 2a(b\cos\ \hat{C} - c\cos\ \hat{B})$

e assim: $b^2 - c^2 = a(b\cos\ \hat{C} - c\cos\ \hat{B})$

14.6) Prove que em qualquer triângulo tem-se $4S = (b^2 + c^2 - a^2) \cdot \text{tg}\ \hat{A}$.

Solução

Sabemos que $\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}$, donde $bc = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cos\hat{A}}$. Por outro lado,

$$S = \frac{1}{2} bc\ \text{sen}\ \hat{A}$$

Assim $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\cos\hat{A}} \cdot \text{sen}\ \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4} \cdot \text{tg}\ \hat{A}$

e então $4S = (b^2 + c^2 - a^2) \cdot \text{tg}\ \hat{A}$

14.7) Prove que em todo triângulo vale a relação

$$\frac{\text{tg}\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}}{\text{tg}\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}} = \frac{b-c}{b+c} \quad \text{(lei de tangentes)}$$

Solução

Da lei dos senos $\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$

tiramos $\frac{b}{c} = \frac{\text{sen}\ \hat{B}}{\text{sen}\ \hat{C}}$. Daqui podemos escrever $\frac{b-c}{b+c} = \frac{\text{sen}\ \hat{B} - \text{sen}\ \hat{C}}{\text{sen}\ \hat{B} + \text{sen}\ \hat{C}}$

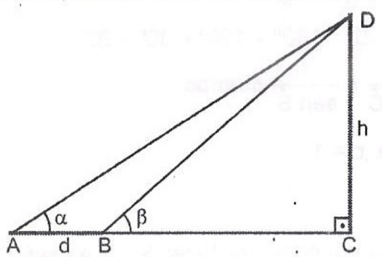
ou transformando em produto:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{2\ \text{sen}\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2} \cdot \cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}}{2\ \text{sen}\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} \cdot \cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}}$$

isto é,

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\text{tg}\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}}{\text{tg}\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}}$$

14.8) Na figura, determine a expressão de h em função de d, α e β.



Solução

No triângulo ABD podemos aplicar a lei dos senos:

$$\frac{BD}{\text{sen}\alpha} = \frac{d}{\text{sen}\ A\hat{D}B}$$

onde $A\hat{D}B = \beta - \alpha$. Assim, $BD = \frac{d\ \text{sen}\alpha}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$

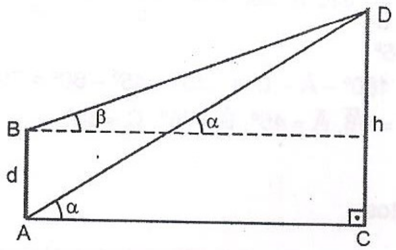
Por outro lado, temos

$$h = BD\ \text{sen}\ \beta$$

e então

$$h = \frac{d\ \text{sen}\alpha\ \text{sen}\beta}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$$

14.9) Na figura, determine a expressão de h em função de d, α e β.



Solução

No triângulo ABD podemos aplicar a lei dos senos:

$$\frac{AD}{\text{sen } A\hat{B}D} = \frac{d}{\text{sen } A\hat{D}B}$$

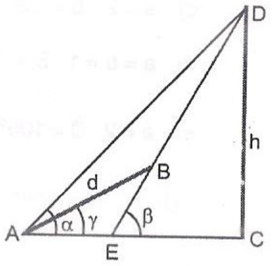
onde $A\hat{B}D = \frac{\pi}{2} + \beta$ e $A\hat{D}B = \alpha - \beta$

Assim, $AD = \dfrac{d \text{ sen}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\text{sen}(\alpha - \beta)} = \dfrac{d \cos\beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$

Por outro lado, temos $h = AD \cdot \text{sen } \alpha$ e então

$$h = \frac{d \text{ sen}\alpha \cos\beta}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$$

14.10) Na figura, determine a expressão de h em função de d, α, β e γ.



Solução

Apliquemos a lei dos senos ao triângulo ABD:

$$\frac{AD}{\text{sen } A\hat{B}D} = \frac{d}{\text{sen } A\hat{D}B}$$

Temos

$A\hat{B}D = \pi - A\hat{B}E$, onde $A\hat{B}E = \beta - \gamma$; logo

$A\hat{B}D = \pi - (\beta - \alpha)$

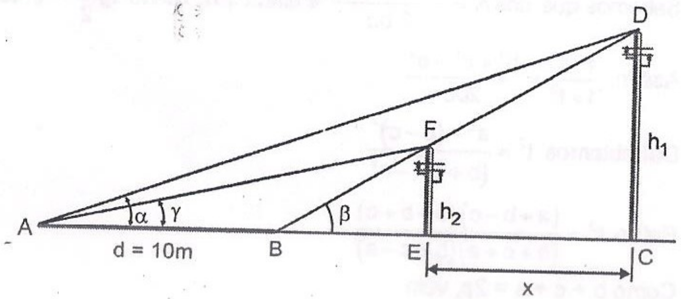
e ainda $A\hat{D}B = \beta - \alpha$

Assim, $AD = \dfrac{d \text{ sen}[\pi - (\beta - \gamma)]}{\text{sen}(\beta - \alpha)} = \dfrac{d \text{ sen}(\beta - \gamma)}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$

Por outro lado, $h = AD \cdot \text{sen } \alpha$ e então

$$h = \frac{d\text{sen } \alpha \cdot \text{sen}(\beta - \gamma)}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$$

14.11) Para medir a distância x entre dois postes CD e EF, foram medidos os ângulos α, β e γ como indica a figura, a partir dos pontos A e B separados um do outro pela distância d = 10 m. Os valores obtidos foram o $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$ e $\gamma = 30°$. Calcule a distância x entre os postes.



Solução

Apliquemos a lei dos senos ao triângulo ABD:

$$\frac{BD}{\text{sen}\alpha} = \frac{d}{\text{sen } A\hat{D}B}$$

onde $A\hat{D}B = \beta - \alpha$. Assim,

$$BD = \frac{d \text{ sen}\alpha}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$$

Por outro lado, temos $BC = BD \cos\beta$, isto é:

$$BC = \frac{d \text{ sen}\alpha \cos\beta}{\text{sen}(\beta - \alpha)}$$

ou seja, $BC = \dfrac{10 \cdot \text{sen}40° \cos 50°}{\text{sen}10°} = \dfrac{10 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}64}{0{,}17}$

e então $BC \cong 24{,}1$m

Apliquemos agora a lei dos senos ao triângulo ABF:

$$\frac{BF}{\text{sen}\gamma} = \frac{d}{\text{sen } A\hat{F}B}$$

onde $A\hat{F}B = \beta - \gamma$. Assim,

$$BF = \frac{d \text{ sen}\gamma}{\text{sen}(\beta - \gamma)}$$

Por outro lado, temos $BE = BF \cos\beta$, isto é:

$$BE = \frac{d \text{ sen}\gamma \cos\beta}{\text{sen}(\beta - \gamma)}$$

ou seja, $BE = \dfrac{10 \cdot \text{sen}30° \cdot \cos 50°}{\text{sen}20°} = \dfrac{10 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}64}{0{,}34}$

e então $BE \cong 9{,}4$ m

A distância entre os postes é

x = BC – BE = 24,1 – 9,4 = 14,7

x = 14,7m

14.12) Prove que em qualquer triângulo ABC tem-se

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\left(\text{onde } p = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

Solução

Sabemos que $\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$ e ainda que, sendo $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = t$, $\cos\hat{A} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Assim, $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Daí obtemos $t^2 = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$

Então $t^2 = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(b+c+a)(b+c-a)}$

Como b + c + a = 2p, vem

$a + b - c = 2p - 2c$

$a - b + c = 2p - 2b$

$b + c - a = 2p - 2a$

e então $t^2 = \frac{(2p-2c)(2p-2b)}{2p(2p-2a)} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}$

finalmente

$$t = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

14.13) Resolva o triângulo ABC, acutângulo, no qual

$a = 2$, $b = \sqrt{3}+1$ e $S = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Solução

Sendo $S = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\hat{C}$, temos

$$\text{sen}\,\hat{C} = \frac{2S}{ab} = \frac{3+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como o triângulo é acutângulo, $\hat{C} = 60°$ e $\cos\hat{C} = \frac{1}{2}$.

Então, pela lei dos cossenos,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\,\hat{C} = 2^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2.2.(\sqrt{3}+1).\frac{1}{2} = 6$

donde $c = \sqrt{6}$.

Da lei dos senos obtemos:

$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\,\hat{C}}$, isto é, $\text{sen}\,\hat{A} = \frac{a\,\text{sen}\,\hat{C}}{c} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e então $\hat{A} = 45°$

Daí vem $\hat{B} = 180° - \hat{A} - \hat{C} = 180° - 45° - 60° = 75°$

Resposta: $c = \sqrt{6}$, $\hat{A} = 45°$, $\hat{B} = 75°$, $\hat{C} = 60°$

Exercícios Propostos

14.14) Determine a natureza de cada triângulo (acutângulo, retângulo, obtusângulo) nos seguintes casos:

a) a = 18, b = 20, c = 30

b) a = 10, b = 34, c = 38

c) a = 8, b = 15, c = 17

d) a = 8, b = 12, c = 14

e) a = 7, b = 10, c = 13

14.15) Determine a natureza do triângulo (acutângulo, retângulo, obtusângulo) cujos lados medem 2mn, $m^2 - n^2$ e $m^2 + n^2$.

14.16) Resolva o triângulo ABC em cada um dos casos seguintes:

a) $a = 2$, $b = \sqrt{6}$, $c = \sqrt{3}+1$

b) $a = 1$, $b = \sqrt{3}+1$, $\hat{A} = 15°\left(\text{dado sen } 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

c) $a = 2$, $b = \sqrt{3}-1$, $\hat{C} = 30°$

d) $a = b = 1$, $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $a = 2$, $\hat{C} = 105°$, $S = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\left(\text{Dados sen } 105° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \cos 105° = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$

14.17) Calcule a área do triângulo ABC no qual se tem a = 25cm, b = 26cm e c = 19cm.

14.18) Resolva um triângulo retângulo, conhecendo um ângulo agudo $\hat{B} = 75°$ e a diferença $b - c = \sqrt{3}-1$ dos lados do ângulo reto.

$\left(\text{Dados sen } 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \text{sen } 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

14.19) Calcule as medidas dos lados de um triângulo sabendo que elas são números inteiros consecutivos e que o ângulo maior é igual ao dobro do ângulo menor.

14.20) Resolva um triângulo retângulo, conhecendo o semiperímetro $p=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ e o raio $R = \sqrt{2}$ da circunferência circunscrita.

$\left(\text{Dados sen } 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \cos 75° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$

14.21) Resolva um triângulo retângulo, conhecendo o perímetro $12\sqrt{2}$ e a altura $\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$ relativa à hipotenusa.

14.22) Prove que em qualquer triângulo tem-se:

a) $\dfrac{b - a\cos\hat{C}}{c - a\cos\hat{B}} = \dfrac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{B}}$

b) $a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}$

c) $(a+b)(1-\cos\hat{C}) = c(\cos\hat{A}+\cos\hat{B})$

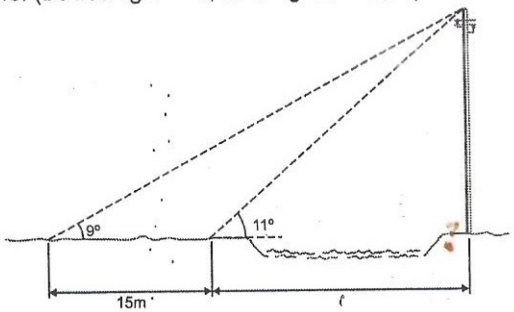
d) $a(\cos\hat{B}-\text{sen}\hat{B}) + b(\cos\hat{A}+\text{sen}\hat{A}) = c$

e) $2S(\text{cotg }\hat{A} + \text{cotg }\hat{B}) = c^2$

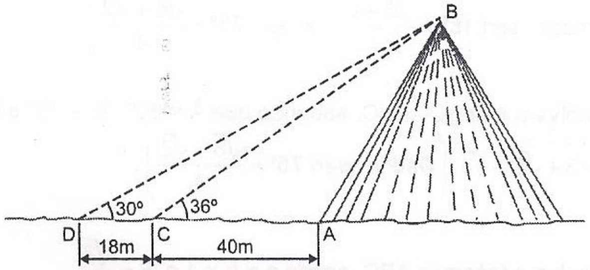
f) $a\cos\hat{A} - b\cos\hat{B} = \cos\hat{C}(b\cos\hat{A} - a\cos\hat{B})$

14.23) A e B são dois pontos situados à margem direita de um rio, distantes 600 metros um do outro. C é outro ponto situado à margem esquerda. Os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ medem, respectivamente, 48° e 75°. Determine a largura do rio. (Dados: sen 48° = 0,74, sen 75° = 0,97, sen 57° = 0,84).

14.24) Um homem deseja determinar a largura de um rio. Então, de um ponto da margem mede o ângulo de elevação do topo de um poste situado na margem oposta, obtendo 11°. Afastando-se 15m, ele obtém o novo ângulo de 9°. Calcule a largura do rio. (Dados: tg 9° = 0,16 e tg 11° = 0,19).

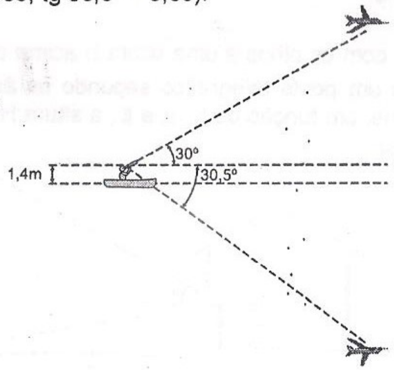


14.25) Na figura, calcule o comprimento de $\overline{AB}$. São dados:
sen 30° = 0,50
sen 6° = 0,10
e cos 36° = 0,81



14.26) Um observador está no ponto A sobre o topo de uma montanha e sua vista se estende até um ponto C no horizonte. O raio visual faz um ângulo α com a vertical. Sendo R o raio da Terra, calcule a altura da montanha em função de α e R.

14.27) Um observador situado sobre um barco, com o olho a uma altura de 1,4m acima do nível da água, vê um avião e a imagem desse avião na água sob os ângulos de 30° e 30,5°, respectivamente, em relação à horizontal. Calcule a que altura se encontra o avião.
(Dados: tg 30° = 0,58, tg 30,5° = 0,59).



Exercícios Sumplementares

V.1) Determine a natureza (acutângulo, retângulo, obtusângulo) do triângulo cujos lados medem a = 5, b = 17, c = 18.

V.2) Resolva o triângulo ABC, sendo a = 74cm, $\hat{A}$ = 132° e $\hat{B}$ = 18°.
(Dados: sen 18° = 0,31, sen 132° = 0,74, sen 30° = 0,50)

V.3) Resolva o triângulo ABC, sendo $\hat{A}$ = 45°, $b = \sqrt{3} + 1$ e $c = \sqrt{6}$

V.4) Resolva o triângulo ABC, sendo $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $c = 2\sqrt{2}$.

V.5) Calcule a área do triângulo ABC, sendo a = 98cm, b = 50cm e c = 74cm.

V.6) Resolva o triângulo ABC, sendo $a = 2\sqrt{3}$, $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, $\hat{A} = 60°$.

$\left(\text{Dados: sen } 15° = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ e sen } 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$.

V.7) Resolva o triângulo ABC, sabendo que $\hat{A} = 60°$, $\hat{B} = 75°$ e que o semiperímetro é $p = 3 + \sqrt{6} + \sqrt{3}$. $\left(\text{Dados: sen } 75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$.

V.8) Resolva o triângulo ABC, sendo a = b = 1 e $S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

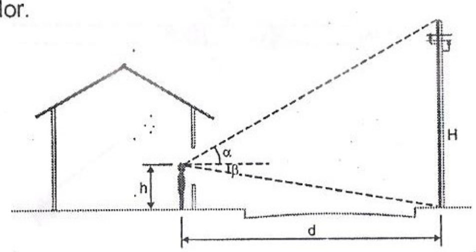
V.9) Sendo h a altura do triangulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$, prove que

$$h = \frac{a}{\text{cotg}\,\hat{B} + \text{cotg}\,\hat{C}}.$$

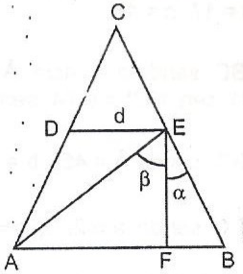
V.10) Prove que num triângulo ABC tem-se:

$$\frac{\text{tg}\,\hat{B}}{\text{tg}\,\hat{C}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

V.11) De uma janela, com os olhos a uma altura h acima do chão, um observador vê o topo e o pé de um poste telegráfico segundo os ângulos α e β como a figura indica. Determine, em função de h, α e β, a altura H do poste e a sua distância d até o observador.



V.12) No triângulo ABC da figura tem-se a = b. Além disso, $\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$ e $\overline{EF} \perp \overline{AB}$. Calcule c sendo dados d, α e β.



PARTE VI

Capítulo 15 – **Funções trigonométricas**

Capítulo 16 – **Cálculo de período e construção de gráficos**

Capítulo 17 – **Funções trigonométricas inversas**

Capítulo 15

Funções trigonométricas

15.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo, serão retomadas as seis razões trigonométricas – seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante – para que sejam estudadas do ponto de vista da teoria de funções. Para um bom entendimento, devemos ter um conhecimento razoável das definições e propriedades que caracterizam essa teoria; vamos, então, incluir, paralelamente ao texto específico das funções trigonométricas, os conceitos fundamentais que regem as funções reais de variável real.

15.2. O CONCEITO DE FUNÇÃO

Dados dois conjuntos A e B, diferentes do conjunto vazio, uma função f, de A em B, é uma correspondência que associa *a cada elemento de A um único elemento de B.*

O conjunto A é denominado **domínio de f**; o conjunto B é denominado **contradomínio de f**; se x é um elemento qualquer de A, então o único y de B, associado a x, é denominado **imagem de x pela função f** e é indicado por

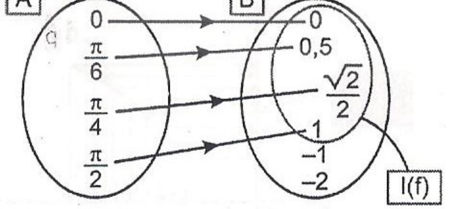
$$y = f(x)$$

O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A é denominado **conjunto-imagem de f** e é indicado por I(f).

Exemplo

A figura mostra uma função f, de A em B, onde temos:

Domínio: $A = \left\{0; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}$



Contradomínio: $B = \left\{0; 0,5; \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; -1; -2\right\}$

Conjunto-imagem: $I(f) = \left\{0;\ 0,5;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right\}$

15.3. FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

Uma função f, de A em B, diz-se **função real de variável real** se $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$.

Exemplo

A função definida por $f(x) = \sqrt{x-5}$ tem para domínio A todo x real para o qual $x - 5 \geq 0$, isto é, $x \geq 5$. Então

$$A = [5; +\infty[\ \subset \mathbb{R}$$

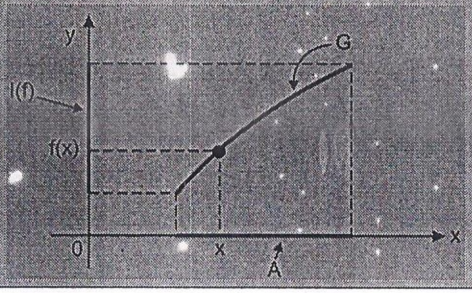
O contradomínio é $B = \mathbb{R}$

15.4. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO REAL DE VARIÁVEL REAL

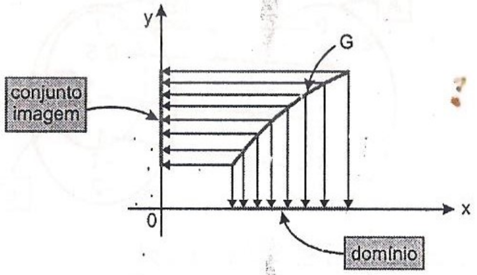
Considere uma função f, real de variável real:

$$f: A \to B$$

Fixado um sistema de coordenadas xOy, o conjunto G de todos os pontos (x; f(x)), com $x \in A$, é o **gráfico de f**.



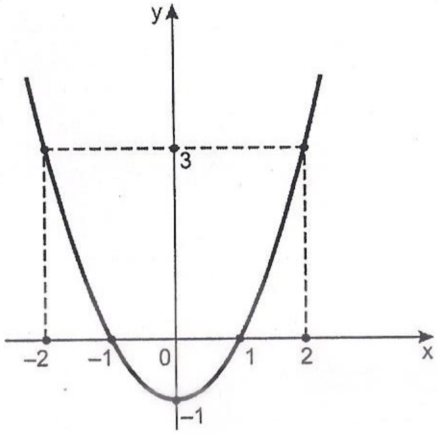
Observe que, conhecido o gráfico G de uma função f, o seu domínio pode ser obtido projetando-se G sobre Ox, na direção Oy; o conjunto-imagem de f pode ser obtido projetando-se G sobre Oy, na direção Ox. Assim:



Exemplo

Seja a função definida por $f(x) = x^2 - 1$.

Trata-se de uma função quadrática; seu domínio é $\mathbb{R}$ e seu conjunto-imagem será obtido a partir do gráfico, que é uma parábola:



x	y
0	−1
1	0
−1	0
2	3
−2	3

Projetando o gráfico em Oy, obtemos

$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -1\}$

15.5. A CORRESPONDÊNCIA ENTRE UM NÚMERO REAL E UM PONTO DA CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

Consideremos a circunferência trigonométrica da figura 15.1. Já sabemos que, dado um número real x, existe sempre um arco orientado $\overset{\frown}{AP}$ cuja medida algébrica é x radianos.

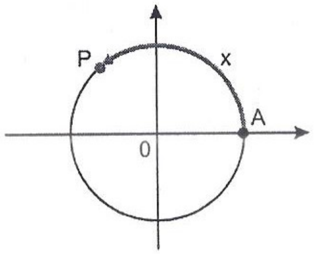


Fig. 15.1

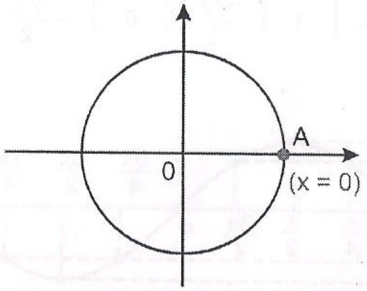
Portanto, é claro que, dado x, fica determinado um único ponto P da circunferência trigonométrica, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$.

Temos, então, definida a seguinte correspondência:

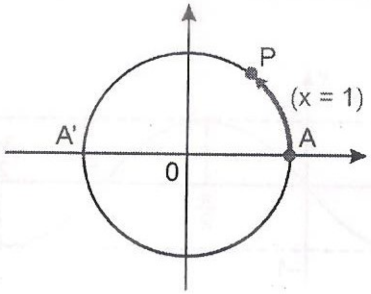
A todo número real x está associado um único ponto P da circunferência trigonométrica.

Exemplos

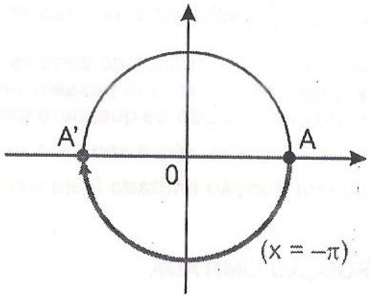
1º) Ao número real $x = 0$ está associado o ponto A.



2º) Ao número real $x = 1$ está associado o ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, onde $\overset{\frown}{AP} = 1$ rad $\cong 57°$.

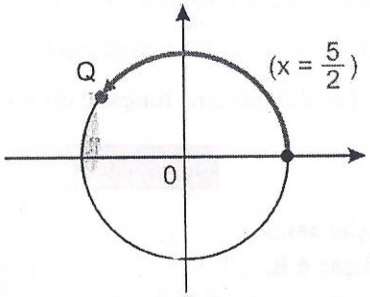


3º) Ao número real $x = -\pi$ está associado o ponto A', extremidade do arco $\overset{\frown}{AA'}$, onde $\overset{\frown}{AA'} = -\pi$ rad $= -180°$.

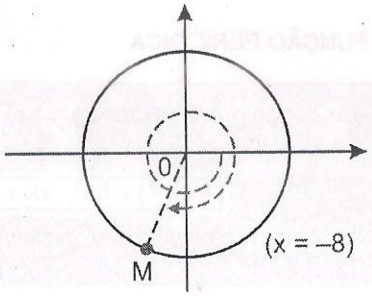


4º) Ao número real $x = \frac{5}{2}$ está associado o ponto Q, extremidade do arco $\overset{\frown}{AQ}$,

onde $\overset{\frown}{AQ} = \frac{5}{2}$ rad $= 2{,}5$ rad $\cong 143°$.



5º) Ao número real $x = -8$ está associado o ponto M, extremidade do arco $\overset{\frown}{AM}$, onde $\overset{\frown}{AM} = -8$ rad $\cong 458°$. (Observe que, agora, *fazemos um percurso de mais de uma volta* para determinar M).



15.6. FUNÇÃO SENO

Na circunferência trigonométnca da figura 15.2, seja P o ponto associado a um número real x; P_1 é a projeção ortogonal de P em Oy. Sabemos que a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P é o seno do arco de medida algébrica x, cuja extremidade é P.

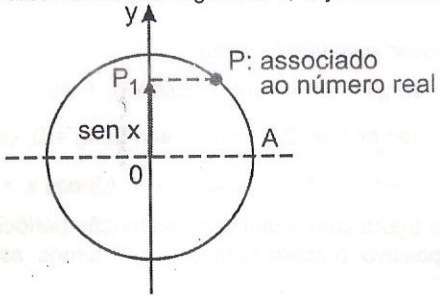


Fig. 15.2

> A ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P denomina-se **SENO DO NÚMERO REAL X**.

Deve ser observado que, ao número real x, associamos o ponto P, extremidade de um arco $\overset{\frown}{AP}$ por sua vez, ao arco $\overset{\frown}{AP}$ está associado um único número real $\overline{OP_1}$ que é o seno de $\overset{\frown}{AP}$; assim, fica definida uma **função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$** para a qual

$$\boxed{f(x) = \text{sen } x}$$

que é denominada **função seno**.

O domínio da função é $\mathbb{R}$.

Para todo x real $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$. Temos que

$$\boxed{I(f) = [-1; 1]}$$

15.7. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO PERIÓDICA

Uma função f, de domínio $A \subset \mathbb{R}$, diz-se **periódica** se existe um real T, não nulo, tal que

$$\boxed{f(x+T) = f(x), \ \forall x \in A}$$

Período de uma função periódica f é o **menor T positivo** que satisfaz a condição acima.

15.8. GRÁFICO DA FUNÇÃO SENO

Se, inicialmente, observarmos que para todo x real sen x = sen(x + 2π) = = sen(x + 4π) = . . . = sen(x + 2kπ), $k \in \mathbb{Z}$, veremos que a função seno é periódica e seu período é p = 2π.

Podemos provar esse fato fazendo

$$\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen } x \cdot \cos(2k\pi) + \text{sen}(2k\pi) \cdot \cos x$$

e como, para $k \in \mathbb{Z}$, temos cos (2kπ) = 1 e sen (2kπ) = 0, vem:

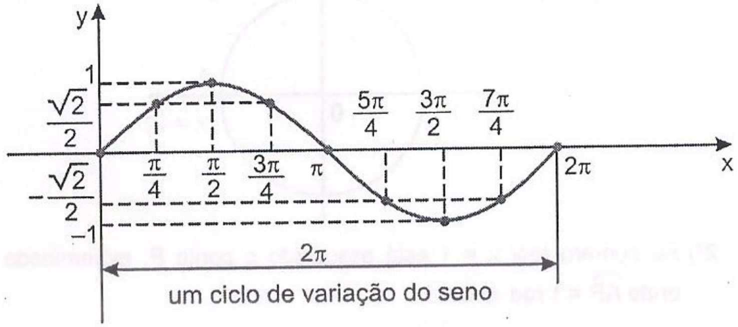
$$\text{sen } (x + 2k\pi) = \text{sen } x \cdot (1) + (0) \cdot \cos x = \text{sen } x$$

Comparando agora com a definição de função periódica (15.7), temos T = 2kπ; o menor valor de T, positivo, é obtido fazendo k = 1; temos, assim, o período 2π da função seno.

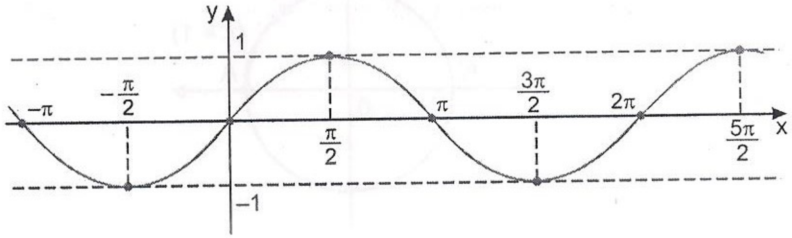
Sendo assim, para a construção do gráfico de f(x) = sen x, vamos considerar alguns valores particulares para x no intervalo [0; 2π] já previamente sabendo que a "figura" obtida nesse trecho será repetida à esquerda de 0 e à direita de 2π.

Temos, portanto:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	−1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0



E assim:



Devemos observar que a função seno é crescente no intervalo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ e decrescente no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ voltando a ser crescente no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Também é preciso notar que o gráfico do seno está inteiramente situado na faixa do plano limitada pelas retas horizontais que passam pelos pontos (0; 1) e (0; −1), obedecendo, assim, ao fato já conhecido de que, para todo x real,

$$-1 \leq f(x) = \text{sen } x \leq 1$$

Portanto, o seno é uma **função limitada** (veja o item 15.9)

15.9. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO LIMITADA

Uma função f de domínio $A \subset \mathbb{R}$, diz-se **limitada** se existe um real M, positivo, tal que

$$\boxed{-M \leq f(x) \leq M, \ \forall x \in A}$$

15.10. FUNÇÃO COSSENO

Na circunferência trigonométrica da figura 15.3, seja P o ponto associado a um número real x; P_2 é a projeção ortogonal de P em Ox. Sabemos que a *abscissa* $\overline{OP_2}$ do ponto P é o *cosseno do arco de medida algébrica x*, cuja extremidade é o ponto P.

Escrevemos, então, que

> A abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P denomina-se **COSSENO DO NÚMERO REAL x**

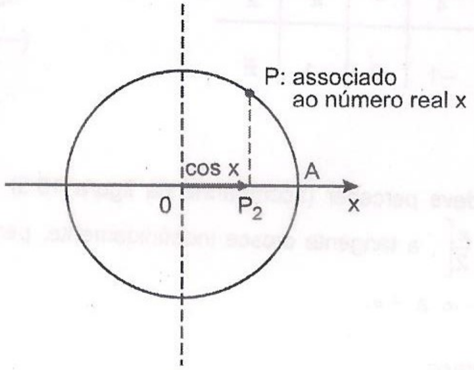


Fig. 15.3

Fica assim estabelecido que ao **número real x** associamos **um único número real** $\overline{OP_2}$, que é o cosseno de x; está, então, definida uma **função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$**, denominada **função cosseno**, para a qual

$$f(x) = \cos x$$

O domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$.

Para todo x real $-1 \le \cos x \le 1$. Temos que

$$I(f) = [-1; 1]$$

15.11. GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSENO

Observando, inicialmente, que para todo x real

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \ldots =$$
$$= \cos(x + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z},$$

veremos que a função cosseno é *periódica* e seu período é $p = 2\pi$. De fato, fazendo

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \cdot \cos(2k\pi) - \text{sen}\, x \cdot \text{sen}\,(2k\pi)$$

e como $\cos(2k\pi) = 1$ e $\text{sen}\,(2k\pi) = 0$, vem

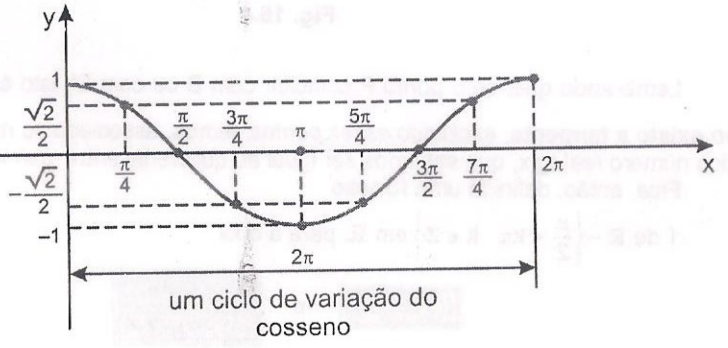
$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x \cdot (1) - \text{sen}\, x \cdot (0) = \cos x$$

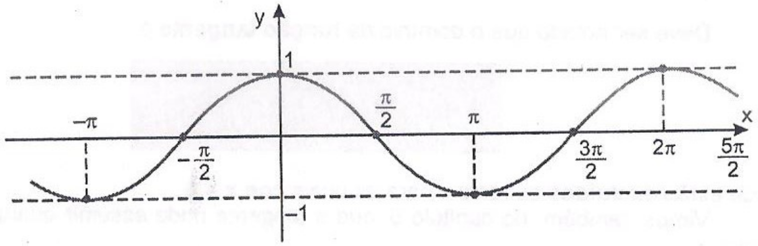
O menor valor positivo de $T = 2k\pi$ (ver 15.7) é obtido fazendo $k = 1$; temos assim, o período 2π da função cosseno.

A exemplo do que fizemos para a função seno, vamos construir o gráfico de $f(x) = \cos x$ no intervalo $[0; 2\pi]$ e "completá-lo" em seguida.

Temos, assim:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1





Observe que a função cosseno é decrescente no intervalo $[0; \pi]$ e crescente no intervalo $[\pi; 2\pi]$. Note, também, que o cosseno é uma **função limitada**, pois $-1 \le \cos x \le 1$ para todo x real.

15.12. FUNÇÃO TANGENTE

Na circunferência trigonométrica da figura 15.4, seja P o ponto associado a um numero real x; T é o ponto de interseçao da reta $\overline{OP}$ com o eixo Az. Sabemos que a *ordenada* $\overline{AT}$, do ponto T, é a *tangente do arco de medida algébrica x*, enquanto que $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ são, respectivamente, o seno e o cosseno desse mesmo arco.

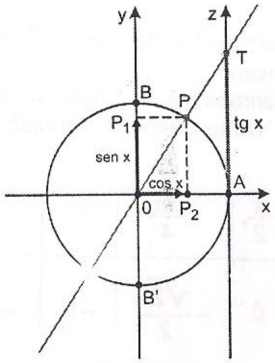


Fig. 15.4

Lembrando que, se o ponto P coincidir com B ou com B', isto é, se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, **não existe a tangente**; *excluindo esses pontos*, temos, associado ao número real x, um único número real tg x, que sabemos ser igual ao quociente entre sen x e cos x.

Fica, então, definida uma **função**

f de $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ em $\mathbb{R}$, para a qual

$$\boxed{f(x) = \operatorname{tg} x} \quad \text{e} \quad \boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$

Deve ser notado que o domínio da **função tangente** é

$$\boxed{A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})\right\}}$$

onde estão **excluídos** os reais x para os quais **cos x = 0**.

Vimos, também, no capítulo 5, que a tangente pode assumir qualquer valor real; assim,

$$\boxed{I(f) = \mathbb{R}}$$

15.13. GRÁFICO DA FUNÇÃO TANGENTE

Observando, inicialmente, que para todo x do domínio A da função

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x + 2\pi) = \operatorname{tg}(x + 3\pi) = \ldots = \operatorname{tg}(x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

veremos que a função tangente é *periódica* e seu **período** é $p = \pi$. Vamos verificar isto, fazendo

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(k\pi)}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}(k\pi)} = \frac{\operatorname{tg} x + 0}{1 - \operatorname{tg} x \cdot 0} = \operatorname{tg} x$$

Pela definição dada em 15.7, temos $T = k\pi$, de onde tiramos, para k = 1, o período π da função tangente.

Construiremos, então, o gráfico de f(x) = tg x no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ e, em seguida, o ampliaremos para o domínio A.

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	∄	−1	0	1	∄

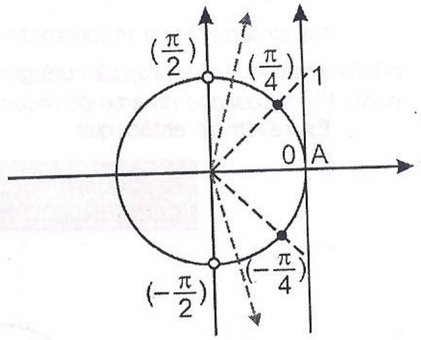
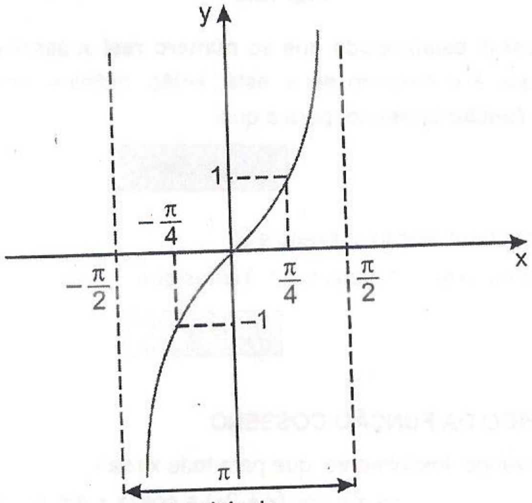


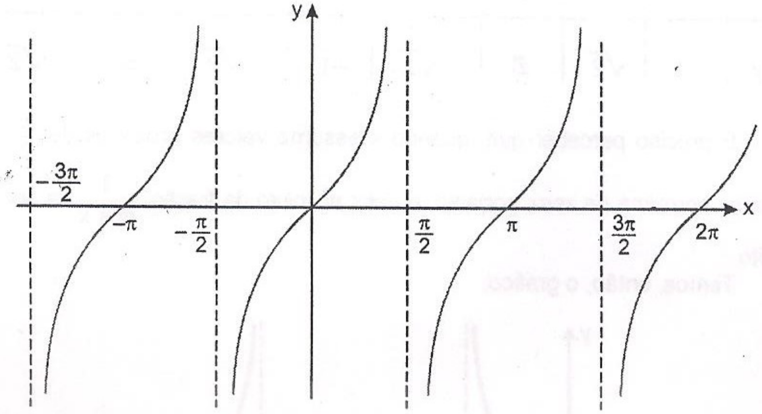
Fig. 15.5

O leitor deve perceber (acompanhe na figura 15.5) que, quando x percorre o intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, a tangente cresce indefinidamente, percorrendo todo o conjunto-imagem $\mathbb{R}$, de $-\infty$ a $+\infty$.

Assim, temos:



Um ciclo de variação da tangente



A função tangente não é limitada.

15.14. FUNÇÃO COTANGENTE

Na circunferência trigonométrica da figura 15.6, seja P o ponto associado a um número real x; S é o ponto de interseção da reta $\overline{OP}$ com o eixo Bs. Sabemos que a *abscissa* $\overline{BS}$ do ponto S é a *cotangente do arco de medida algébrica x*, enquanto que $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ são, respectivamente, o seno e o cosseno desse mesmo arco.

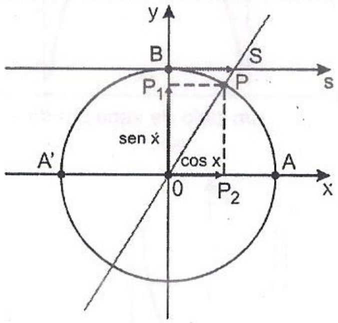


Fig. 15.6

Lembremos que, se o ponto P coincidir com A ou com A', isto é, se $x = k\pi$, **não existe a cotangente**; *excluindo esses pontos*, temos, associado ao número real x, um único número real cotg x, que sabemos ser igual ao quociente entre cos x e sen x.

Fica, então, definida uma **função f de $\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ em $\mathbb{R}$** para a qual

$$f(x) = \text{cotg } x \quad \text{e} \quad \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Deve ser notado que o domínio da **função cotangente** é

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})\}$$

onde estão **excluídos** os reais x para os quais sen x = 0.

Vimos, também, no capítulo 5, que a cotangente pode assumir **qualquer valor real**; assim,

$$I(f) = \mathbb{R}$$

15.15. GRÁFICO DA FUNÇÃO COTANGENTE

Para todo x do domínio A da função,

$\text{cotg } x = \text{cotg}(x + \pi) = \text{cotg}(x + 2\pi) = \text{cotg}(x + 3\pi) = \ldots = \text{cotg}(x + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$.

A função cotangente é *periódica* e seu período é $p = \pi$.

Vamos, portanto, construir o gráfico de $f(x) = \text{cotg } x$ no intervalo $]0;\ \pi[$ e, em seguida, ampliá-lo para o domínio A.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	π
y	∄	1	0	−1	∄

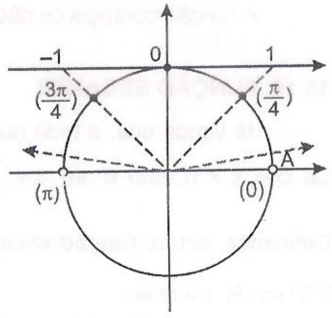
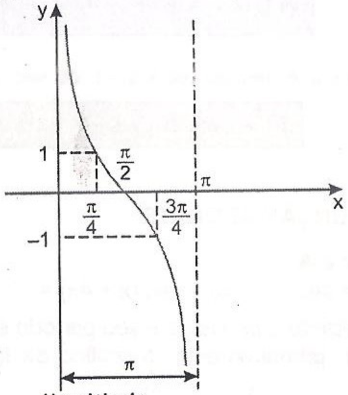


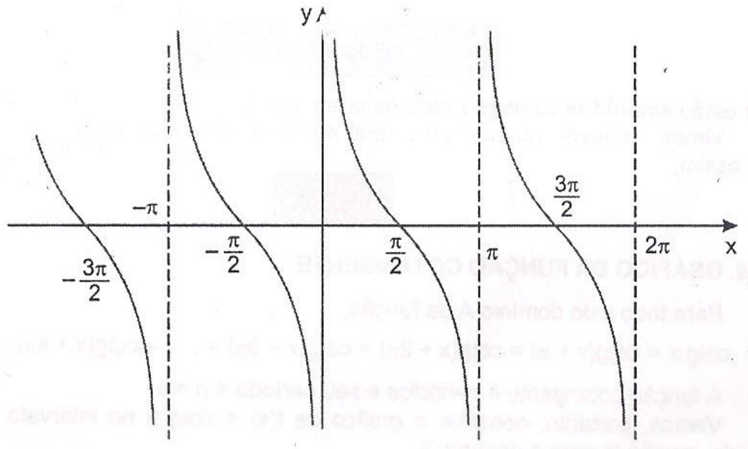
Fig. 15.7

O leitor deve perceber (acompanhe na figura 15.7) que, quando x percorre o intervalo $]0;\ \pi[$, a cotangente decresce, percorrendo todo o conjunto-imagem $\mathbb{R}$, de $+\infty$ a $-\infty$.

Assim, temos o gráfico



Um ciclo de variação da cotangente



A função cotangente não é limitada.

15.16. FUNÇÃO SECANTE

Já vimos que, a todo número real x está associado um único número real cos x. Se $\cos x \neq 0$, isto é, se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ existe, e é único, o seu inverso $\frac{1}{\cos x} = \sec x$.

Definimos, então, **função secante** como sendo uma **função f de** $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ **em** $\mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

O domínio da função secante é

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})\}$$

Como para todo $x \in A$, temos $\sec x \leq -1$ ou $\sec x \geq 1$,

$$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$$

15.17. GRÁFICO DA FUNÇÃO SECANTE

É claro que, se $x \in A$

$$\sec x = \sec (x + 2\pi) = \sec (x + 4\pi) = \ldots = \sec (x + 2k\pi)$$

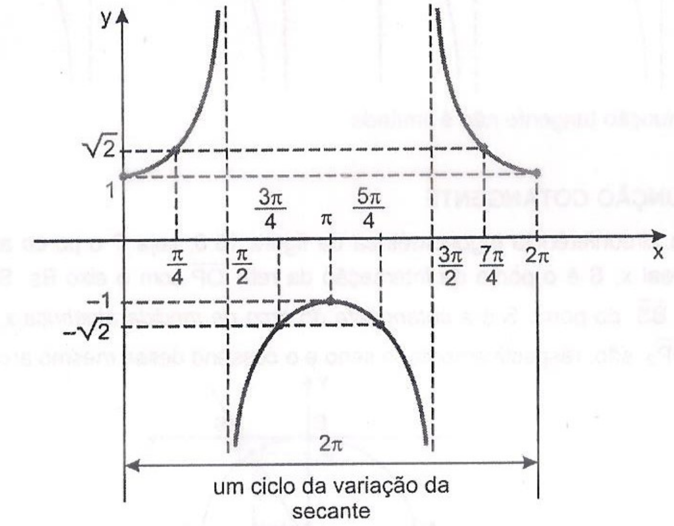
e, por isso, a função secante é *periódica* e seu período é $p = 2\pi$.

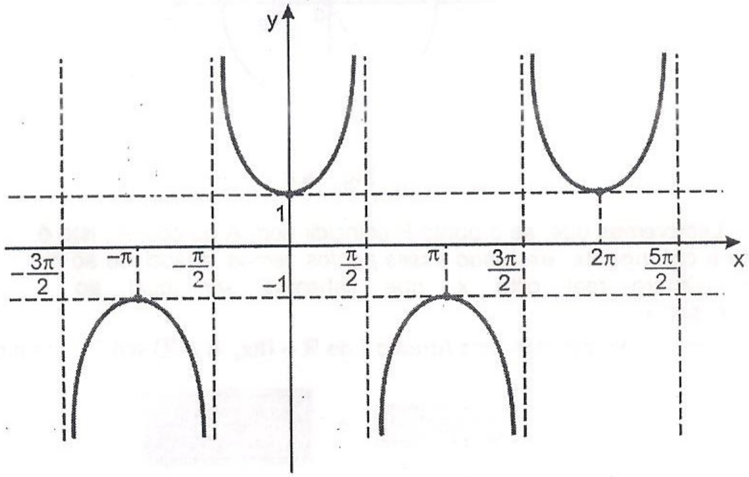
Vamos construir, primeiramente, o gráfico de $f(x) = \sec x$ no intervalo $[0;\ 2\pi]$ $\left(\text{excluindo, naturalmente, } x = \frac{\pi}{2} \text{ e } x = \frac{3\pi}{2}\right)$ e depois completá-lo.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	1	$\sqrt{2}$	$\nexists$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\nexists$	$\sqrt{2}$	1

É preciso perceber que, quando x assume valores próximos de $\frac{\pi}{2}$ ou de $\frac{3\pi}{2}$, *cos x se aproxima de zero*; portanto, o *valor absoluto* da fração $\frac{1}{\cos x} = \sec x$ tende ao infinito.

Temos, então, o gráfico:





15.18. FUNÇÃO COSSECANTE

Já vimos que, a todo número real x, está associado um único número real sen x. Se sen x $\neq$ 0, isto é, se x $\neq$ kπ, existe, e é único, o seu inverso $\frac{1}{\text{sen } x}$ = cossec x . Definimos, então, **função cossecante** como sendo uma **função f de** $\mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ **em** $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

O domínio da função cossecante é

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})\}$$

Como para todo x $\in$ A temos cossec x ≤ -1 ou cossec x ≥ 1,

$$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$$

15.19. GRÁFICO DA FUNÇÃO COSSECANTE

Como para todo x $\in$ A

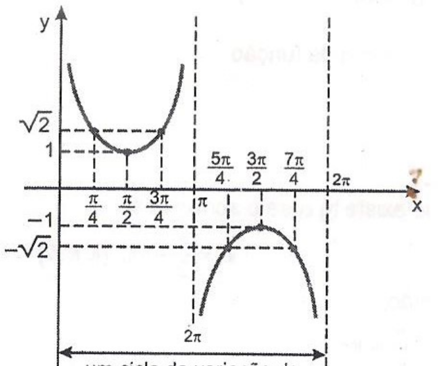
$$\text{cossec } x = \text{cossec } (x + 2\pi) = \ldots = \text{cossec } (x + 2k\pi),$$

a função cossecante é *periódica* e seu período é p = 2π.

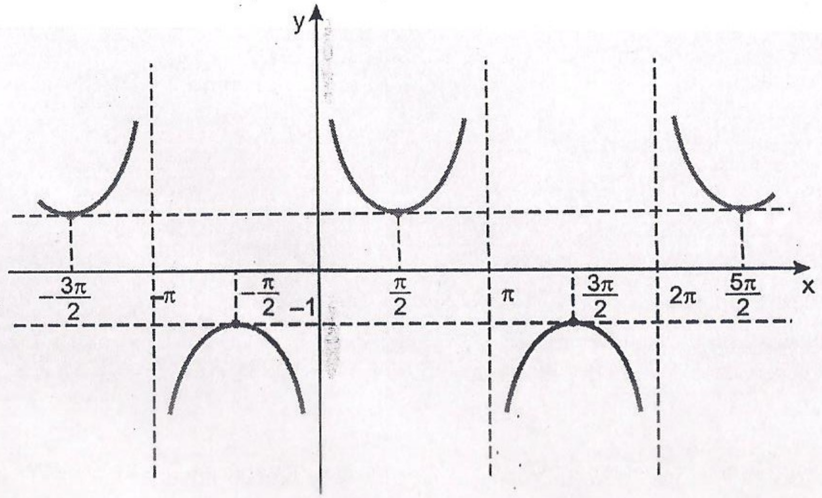
A exemplo do que fizemos anteriormente, vamos construir o gráfico de f(x) = cossecx no intervalo]0; 2π[(excluindo, naturalmente, x = π) e depois completá-lo.

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y	$\nexists$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\nexists$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\nexists$

É preciso perceber que, quando x assume valores próximos de 0, π ou 2π, sen x se aproxima de zero; portanto, o valor absoluto da fração $\frac{1}{\text{sen } x}$ = cossec x tende ao infinito.



um ciclo da variação da cossecante



15.20. DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO PAR E FUNÇÃO ÍMPAR

Seja f uma função de domínio A, tal que: se x $\in$ A, então $-x \in$ A.
Se para todo x $\in$ A se tem f($-$x) = f(x), f diz-se PAR.
Se para todo x $\in$ A se tem f($-$x) = $-$f(x), f diz-se ÍMPAR.

15.21. PARIDADE DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Vimos, no item 9.2, as seguintes *fórmulas de mudança de sinal*:

sen ($-$x) = $-$sen x
cos($-$x) = cos x
tg ($-$x) = $-$tg x
cotg ($-$x) = $-$cotg x
sec($-$x) = sec x
cossec ($-$x) = $-$cossec x

Sendo x um número real dos domínios das funções trigonométricas, vemos que as funções f(x) = cos x e f(x) = sec x são tais que f($-$x) = f(x); todas as demais são tais que f($-$x) = $-$f(x). Temos, assim, que as **funções cosseno e secante são PARES**, enquanto que as **funções seno, tangente, cotangente e cossecante são IMPARES**.

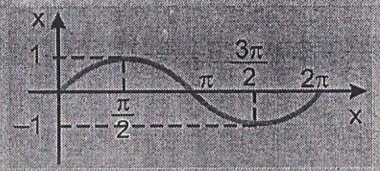
15.22 .RESUMO

Função seno

f(x) = sen x

D(f) = ℝ

I(f) = [–1; 1]



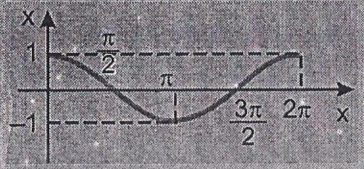
período 2π
função limitada
função ímpar

Função cosseno

f(x) = cos x

D(f) = ℝ

I(f) = [–1; 1]



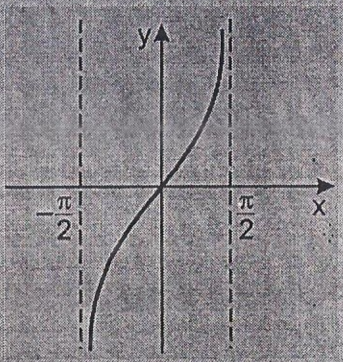
período 2π
função limitada
função par

Função tangente

f(x) = tg x

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$

I(f) = ℝ



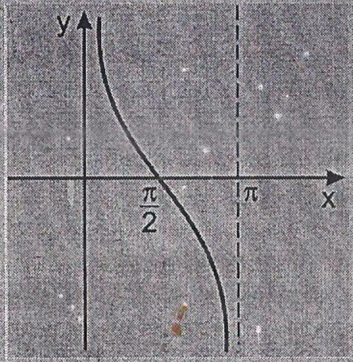
período π
função ímpar

Função cotangente

f(x) = cotg x

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$

I(f) = ℝ



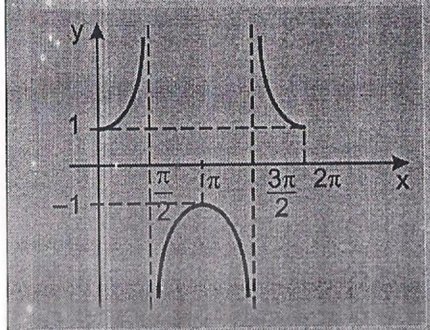
período π
função ímpar

Função secante

f(x) = sec x

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$

$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$



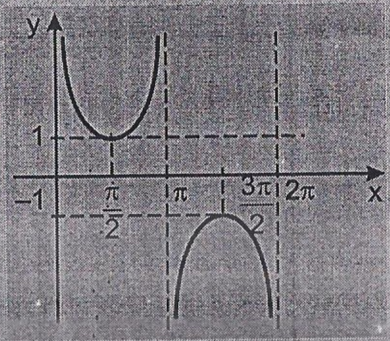
período 2π
função ímpar

Função cossecante

f(x) = cossec x

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})\}$

$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$



período 2π
função ímpar

Exercícios Resolvidos

15.1) Determine o conjunto-imagem da função f(x) = 2sen x.

Solução

Temos que, para todo x real, $-1 \leq \text{sen } x \leq 1$; multiplicando essa desigualdade por 2, vem:

$$-2 \leq 2\text{sen } x \leq 2$$

e daí $-2 \leq f(x) \leq 2$

Assim, $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$

15.2) Determine o domínio da função

$$f(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

Solução

Sabemos que existe tg α se e somente se

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ (k \in \mathbb{Z})$$

Fazemos, então,

$$\alpha = x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

e tiramos $x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$

Logo

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

15.3) Determine o conjunto-imagem da função $f(x) = -2 + 3\sec x$

Solução

Temos que, para todo x do domínio da função secante,

$$\sec x \leq -1 \text{ ou } \sec x \geq 1;$$

multiplicando as desigualdades por 3, vem

$$3\sec x \leq -3 \text{ ou } 3\sec x \geq 3;$$

subtraindo agora 2, temos

$$-2 + 3\sec x \leq -5 \text{ ou } -2 + 3\sec x \geq 1$$

e daí

$$f(x) \leq -5 \text{ ou } f(x) \geq 1$$

Assim, $I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -5 \text{ ou } y \geq 1\}$

15.4) Calcule o valor máximo assumido pela função $f(x) = 5^{\text{sen } x \cdot \cos x}$

Solução

Sabemos que $2\text{sen } x \cdot \cos x = \text{sen } 2x$, donde $\text{sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\text{sen } 2x$

Escrevemos então,

$$f(x) = 5^{\frac{1}{2}\text{sen } 2x} = \left(\sqrt{5}\right)^{\text{sen } 2x}$$

Como a base $\sqrt{5}$ é um número maior que 1, f(x) terá valor máximo quando o expoente assumir seu maior valor possível; como o máximo valor de sen 2x é 1, temos

$$f_{máx} = \left(\sqrt{5}\right)^1 = \sqrt{5}$$

15.5) Determine o domínio da função

$$f(x) = \frac{1}{\text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Solução

Para obtermos o domínio dessa função, devemos impor duas condições: que a cotangente exista e que seja diferente de zero.

1ª) existência de $\text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Sabemos que existe cotg α se, e somente se $\alpha \neq k\pi$; fazemos então,

$\alpha = x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi$ e tiramos $x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi$

2ª) $\text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$

Sabemos que cotg $\alpha \neq 0$ para $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; fazemos, então

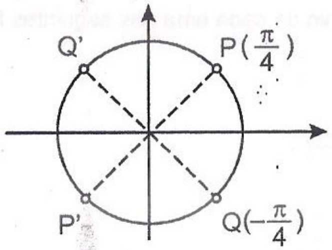
$\alpha = x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ e tiramos $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

Portanto,

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ e } x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$

Observe que, se marcarmos na circunferência trigonométrica os pontos correspondentes às extremidades dos arcos $\frac{\pi}{4} + k\pi$ e $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, obtemos quatro pontos igualmente distribuídos, isto é, que dividem a circunferência em quatro partes iguais. Portanto, podemos escrever que

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$$



$\frac{\pi}{4} + k\pi \to P;\ P'$

$-\frac{\pi}{4} + k\pi \to Q;\ Q'$

15.6) Mostre que a função definida por $f(x) = x \cdot \text{sen } x$ é par.

Solução

Vamos calcular $f(-x)$

$f(-x) = (-x)\cdot\text{sen }(-x) = (-x)\cdot(-\text{sen } x)$ ou seja

$f(-x) = x\cdot\text{sen } x = f(x)$

Como $f(-x) = f(x)$, a função é par.

Exercícios Propostos

15.7) Determine o conjunto-imagem de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{sen } 3x$

b) $f(x) = 3\text{sen } x$

c) $f(x) = 3 + \text{sen } x$
d) $f(x) = -2 - \cos x$
e) $f(x) = 1 + 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
f) $f(x) = |\cos x|$

15.8) Determine o conjunto-imagem de cada uma das seguintes funções:
a) $f(x) = \sec 2x$
b) $f(x) = -2\sec x$
c) $f(x) = -2 + \sec 2x$
d) $f(x) = 2 + 4\text{cossec } x$
e) $f(x) = |\text{cossec } x|$
f) $f(x) = |-1 + \text{cossec } x|$

15.9) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:
a) $f(x) = \text{tg } 2x$
b) $f(x) = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{5}\right)$
c) $f(x) = \sec\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

15.10) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:
a) $f(x) = \dfrac{1}{\text{tg } 2x}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x + \cos x}$
c) $f(x) = \dfrac{1}{\text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } 3x + \text{sen } x}$

15.11) Determine os valores mínimo e máximo que assume a função $f(x) = -1 + 3\text{sen } x$

15.12) Determine os valores mínimo e máximo que assume a função $f(x) = |-1 + 3\text{sen } x|$

15.13) Determine o valor mínimo assumido pela função $f(x) = 4^{\text{sen } x \cdot \cos x}$

15.14) Determine o valor máximo assumido pela função $f(x) = (0,1)^{\cos x}$

15.15) Determine o conjunto-imagem da função $f(x) = \text{sen } x - \cos x$

15.16) Determine a paridade de cada uma das seguintes funções
a) $f(x) = x^3 \cdot \cos x$
b) $f(x) = x \cdot \text{tg } x$
c) $f(x) = \dfrac{\text{tg } 3x + \text{sen } x}{\text{cossec } 2x}$
d) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \text{cotg } 2x - \text{sen } x}{\sec 3x}$

Capítulo 16

Cálculos de períodos e construção de gráficos

16.1. INTRODUÇÃO

No capítulo 15, tomamos conhecimento dos períodos e dos gráficos das funções f(x) = sen x, f(x) = cos x, f(x) = tg x etc. No entanto, é muito comum surgirem, em problemas (como, por exemplo, no estudo da Ondulatória, em Física), funções trigonométricas que ou sofreram transformações em relação às originais ou são a soma ou o produto daquelas; por exemplo, as funções definidas por f(x) = sen 2x, $f(x) = \cos^2 x$, $f(x) = a \cdot \text{sen}\,(\omega t + \varphi)$, f(x) = sen x + cos x.

Vamos, no presente capítulo, estudar algumas regras para o cálculo dos períodos e para a construção dos gráficos de algumas dessas funções.

16.2. CÁLCULO DO PERÍODO DE FUNÇÕES DA FORMA

$y = m + n \cdot f(ax + b)$

Sejam m, n, a e b constantes reais, com $a \cdot n \neq 0$. Nessas *condições*, enunciamos o seguinte *teorema*:

> Se uma função f, definida por y = f(x), é periódica, de período p, então a função definida por $g(x) = m + n \cdot f(ax + b)$ é periódica e seu período é
>
> $$P = \frac{P}{|a|}$$

Por exemplo, f(x) = cos x é uma função periódica, de período $p = 2\pi$; então, a função definida por $g(x) = 5 + 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ é periódica e seu período é

$$P = \frac{p}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

Deve-se notar, com muita atenção, que dos coeficientes m = 5, n = 3, a = 2 e $b = -\frac{\pi}{4}$, **o único a influir no período é a = 2, isto é, o coeficiente de x.**

Demonstração do Teorema

Devemos provar (ver 15.7) que existe um real T, tal que $g(x) = g(x + T)$, isto é $m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f[a(x + T) + b]$.

Assim:

se $y = f(x)$ tem período p, temos que $f(x) = f(x + p) = f(x + 2p) = f(x + 3p) = \ldots$ isto é, para $k \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f(x + k \cdot p)$

Multiplicando essa igualdade por n ($n \neq 0$) e somando em seguida m, vem:
$m + n \cdot f(x) = m + n \cdot f(x + k \cdot p)$

Fazendo agora a substituição de x por $ax + b$ ($a \neq 0$), obtemos:

$$m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f(ax + b + kp)$$

que podemos escrever

$$m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f(ax + b + a \cdot \frac{kp}{a})$$

ou ainda

$$m + n \cdot f(ax + b) = m + n \cdot f[a(x \cdot \frac{kp}{a}) + b]$$

Considerando $\boxed{\frac{kp}{a} = T}$ temos

$$\underbrace{m + n \cdot f(ax + b)}_{g(x)} = \underbrace{m + n \cdot f[a(x + T) + b]}_{g(x+T)}$$

logo, como existe o real $T = \frac{kp}{a}$ para o qual $g(x) = g(x + T)$, **a função g é periódica**.
Como, por definição, período é o *menor T positivo*, obtemos, fazendo $k = 1$, o período de g

$$P = \frac{p}{|a|}$$

Exercícios Resolvidos

16.1) Calcule o período da função $f(x) = \text{sen } \frac{x}{3}$.

Solução

Como a função sen x tem período $p = 2\pi$, então

$$P = \frac{p}{|a|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$$

16.2) Calcule o período de função

$$f(x) = 3 \cdot \text{tg}\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Solução

Como a função tg x tem período $p = \pi$, então

$$P = \frac{p}{|a|} = \frac{\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{3\pi}{2}$$

16.3) Calcule o período da função $f(x) = 4 - 3\sec(-\pi x)$.

Solução

Como a função sec x tem período $p = 2\pi$, então

$$P = \frac{p}{|a|} = \frac{2\pi}{|-\pi|} = 2$$

16.4) Calcule o período da função $f(x) = \text{sen}^2 x$.

Solução

Devemos, inicialmente, escrever a função na forma $y = m + n \cdot f(ax + b)$. Para isso, vamos lembrar a *fórmula de arco dobro*

$$\cos 2x = 1 - 2\text{sen}^2 x$$

de onde tiramos $\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

isto é, que

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

Como a função cos x tem período $p = 2\pi$, então

$$P = \frac{p}{|a|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

16.3. CÁLCULO DO PERÍODO DE SOMAS E PRODUTOS DE DUAS FUNÇÕES PERIÓDICAS

Sejam f e g duas funções periódicas, definidas por $y = f(x)$ e $y = g(x)$, cujos períodos são, respectivamente, p_1 e p_2 com $\mathbf{p_1 \neq p_2}$. Enunciamos, então,o seguinte *teorema*:

Se $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos e primos entre si, então as funções definidas por $\varphi = f + g$ e $\lambda = f \cdot g$ são periódicas e seu período é

$$P = np_1 = mp_2$$

Por exemplo, $f(x)=\text{sen}\frac{x}{2}$ e $g(x)=\text{tg}\frac{x}{3}$ são funções periódicas, cujos períodos são $p_1=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ e $p_2=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi$.

Estabelecendo a razão entre p_1 e p_2, obtemos

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{4}{3}$$

Assim, o período das funções

$$\varphi(x)=\text{sen}\frac{x}{2}+\text{tg}\frac{x}{3} \quad \text{e} \quad \lambda(x)=\text{sen}\frac{x}{2}\cdot\text{tg}\frac{x}{3}$$

$$P=3p_1=4p_2; \quad \text{logo } P=12\pi$$

Demonstrativo do teorema

Devemos provar que existe um real T, tal que

$\varphi(x)=\varphi(x+T)$ e $\lambda(x)=\lambda(x+T)$

isto é,

$f(x)+g(x)=f(x+T)+g(x+T)$ e $f(x)\cdot g(x)=f(x+T)\cdot g(x+T)$

Assim:

se f e g tem períodos p_1 e p_2, respectivamente, podemos escrever que

$$f(x)=f(x+knp_1) \text{ (I)}$$

e

$$g(x)=g(x+kmp_2) \text{ (II)}$$

onde para $k\in\mathbb{Z}$ tem-se também $(kn)\in\mathbb{Z}$ e $(km)\in\mathbb{Z}$.

Efetuando as operações (I) + (II) e (I) · (II),

vem (III) : $f(x)+g(x)=f(x+knp_1)+g(x+kmp_2)$

e

(IV) : $f(x)\cdot g(x)=f(x+knp_1)\cdot g(x+kmp_2)$

Como $\frac{p_1}{p_2}=\frac{m}{n}$, então $np_1=mp_2$. Fazendo

$\boxed{knp_1=kmp_2=T}$; as igualdades (III) e (IV) são escritas

$$\underbrace{f(x)\cdot g(x)}_{\varphi(x)}=\underbrace{f(x+T)+g(x+T)}_{\varphi(x+T)}$$

e

$$\underbrace{f(x)\cdot g(x)}_{\lambda(x)}=\underbrace{f(x+T)\cdot g(x+T)}_{\lambda(x+T)}$$

logo, como existe o real $T=knp_1=kmp_2$ para o qual $\varphi(x)=\varphi(x+T)$ e $\lambda(x)=\lambda(x+T)$, **as funções** φ e λ **são periódicas**.

Como, por definição, período é o *menor T positivo*, fazendo k = 1, obtemos o período de φ e λ:

$$P=np_1=mp_2$$

Deve-se notar que esse teorema é aplicável, não só a funções da forma $f+g$ e $f\cdot g$, mas, também, às funções $f-g$ e $\frac{f}{g}(g\neq 0)$.

Exercícios Resolvidos

16.5) Calcule o período da função
$\varphi(x)=\text{tg } 3x + \cos 4x$

Solução

Calculamos, inicialmente, os períodos p_1 e p_2 das funções $f(x)=\text{tg } 3x$ e $g(x)=\cos 4x$; assim:

$$p_1=\frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad p_2=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

Estabelecemos, agora a razão entre p_1 e p_2, encontrando

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{2}{3}$$

Temos, então, que $P=3p_1=2p_2$; logo, $P=\pi$

16.6) Calcule o período da função

$$\lambda(x)=\sec\frac{x}{2}\cdot\text{sen } 3x$$

Solução

Calculamos, inicialmente, os períodos p_1 e p_2 das funções $f(x)=\sec\frac{x}{2}$ e $g(x)=\text{sen } 3x$; assim:

$$p_1=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi \quad \text{e} \quad p_2=\frac{2\pi}{3}$$

Estabelecemos, agora, a razão entre P_1 e P_2 encontrando

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{6}{1}$$

Temos, então, que $P=1\cdot p_1=6p_2$; logo, $P=4\pi$

16.7) Calcule o período da função $\lambda(x)=\frac{\cos 3x}{\text{cotg } 8x}$

Solução

Sendo $f(x)=\cos 3x$ e $g(x)=\text{cotg } 8x$, vem

$$p_1=\frac{2\pi}{3} \quad \text{e} \quad p_2=\frac{\pi}{8}$$

Assim, $\frac{p_1}{p_2}=\frac{16}{3}$

Portanto, $P=3p_1=16p_2=2\pi$

16.8) Calcule o período da função $\lambda(x) = tg^2 x$

Solução

Sendo $\lambda(x) = tg\ x \cdot tg\ x$, notamos que os períodos p_1 e p_2 são iguais ($p_1 = p_2 = \pi$). Não podemos, portanto, aplicar o teorema visto, a menos que consigamos mudar a forma da função $\lambda(x)$.
No caso, se lembrarmos a fórmula de arco dobro

$$tg\ 2x = \frac{2 tg\, x}{1 - tg^2 x}$$

e daí tirarmos

$$tg^2 x = 1 - \frac{2 tg\, x}{tg\, 2x}$$

poderemos aplicar o teorema; sendo $f(x) = 2tg\ x$ e $g(x) = tg\ 2x$, temos

$$p_1 = \pi \text{ e } p_2 = \frac{\pi}{2}$$

Assim, $\frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{1}$

Portanto, $P = 1 \cdot p_1 = 2p_2 = \pi$

16.9) Calcule o período da função $\varphi(x) = \sec x - \text{sen}\ x$

Solução

Também aqui não podemos utilizar o teorema (16.3), pois $p_1 = p_2 = 2\pi$. Vamos, então, transformar a função; assim:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\cos x} - \text{sen}\, x = \frac{1 - \text{sen}\, x \cdot \cos x}{\cos x}$$

Lembrando que $2\text{sen}\ x \cdot \cos x = \text{sen}\ 2x$, temos

$$\varphi(x) = \frac{1 - \frac{1}{2}\text{sen}\, 2x}{\cos x}$$

Agora, $f(x) = 1 - \frac{1}{2}$ sen 2x e $g(x) = \cos x$, onde

$$p_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ e } p_2 = 2\pi \text{ e } \frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $P = 2p_1 = 1 \cdot p_2 = 2\pi$

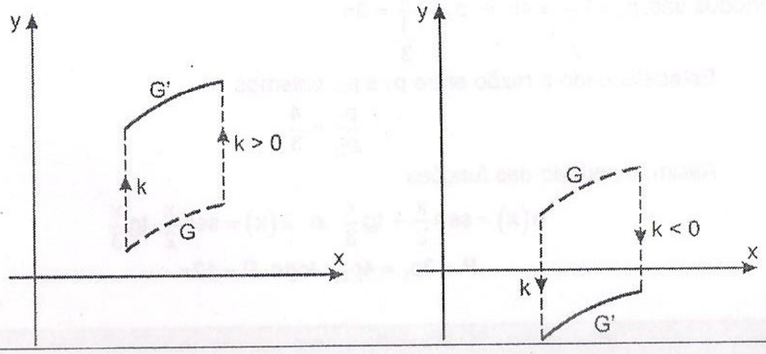
16.4. CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS

De modo geral, a construção do gráfico de uma função f, definida por $y = f(x)$, pode ser feita com o auxílio de uma tabela na qual são atribuidos alguns valores particulares a x e determinados os correspondentes valores de y. Foi o que fizemos para a obtenção dos gráficos das funções trigonométricas no capítulo 15. No entanto, conhecidos aqueles gráficos, com algumas *regras* de **transformações no gráfico de uma função**, podemos, facilmente, construir os gráficos de muitas outras funções.

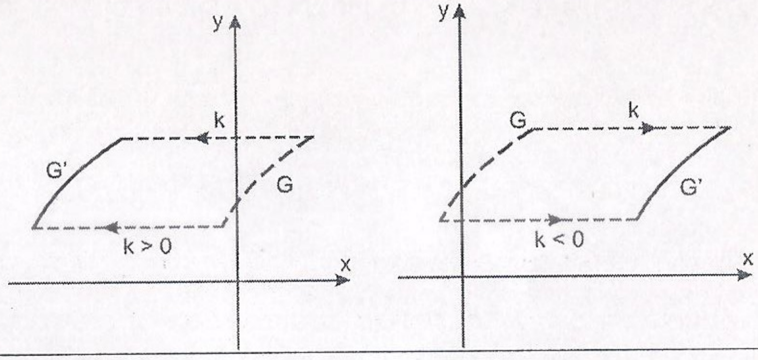
Vamos enunciar algumas dessas regras.

Seja G o gráfico da função definida por $y = f(x)$ e seja $k \neq 0$ uma constante real.

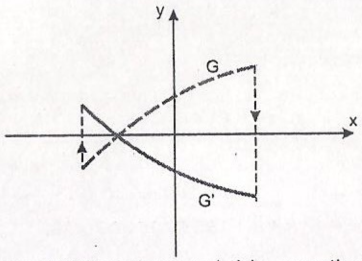
1ª) O gráfico G' da função $y = f(x) + k$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma translação de k unidades, na direção Oy, "para cima", se k é positivo, ou "para baixo", se k é negativo.



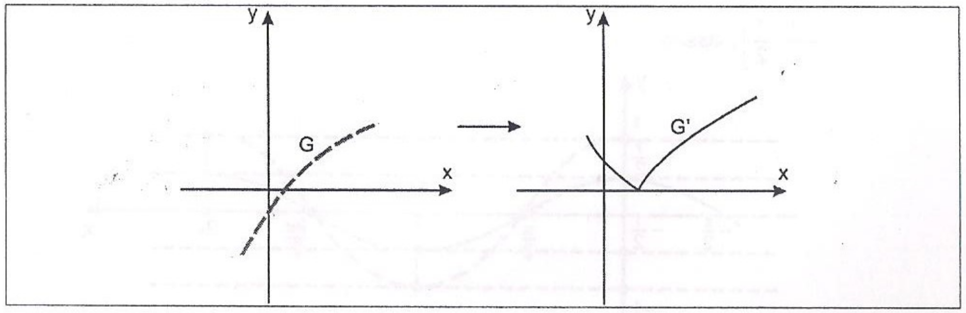
2ª) O gráfico G' da função $y = f(x + k)$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma translação de k unidades, na direção Ox, "para a esquerda", se k é positivo, ou "para a direita", se k é negativo.



3ª) O gráfico G' da função $y = -f(x)$ pode ser obtido a partir de G, fazendo este sofrer uma reflexão em relação ao eixo Ox.



4ª) O gráfico G' da função $y = |f(x)|$ pode ser obtido a partir de G, fazendo a "parte" que está abaixo do eixo Ox sofrer uma reflexão em relação a Ox.



Vamos, agora, resolver alguns exercícios onde construiremos gráficos de funções trigonométricas que sofreram transformações. Nem sempre necessária, mas de grande utilidade, é a determinação prévia do período e do conjunto-imagem. Para maior praticidade, propomos as seguintes etapas para a resolução dos problemas:

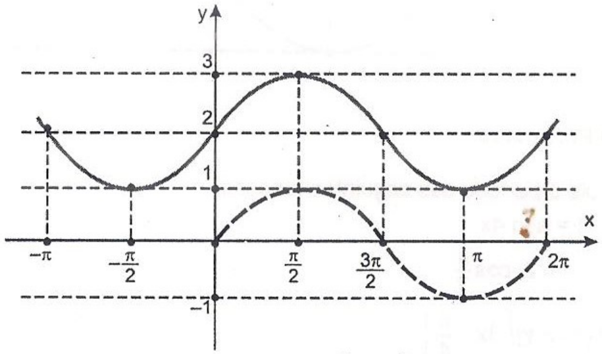
- determinação do conjunto-imagem
- cálculo do período
- identificação da função trigonométrica base
- identificação das transformações sofridas pela função base
- construção do gráfico

Exercícios Resolvidos

16.10) Construa o gráfico da função g(x) = 2 + sen x.

Solução

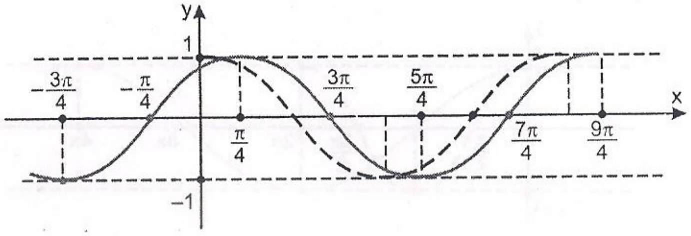
Temos que $I(g) = [1; 3]$ e $p = 2\pi$
A função base é f(x) = sen x.
A função dada é da forma g(x) = f(x) + k, k = 2;
utilizaremos, portanto, a primeira regra, transladando o gráfico de sen x duas unidades "para cima".



16.11) Construa o gráfico da função $g(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Solução

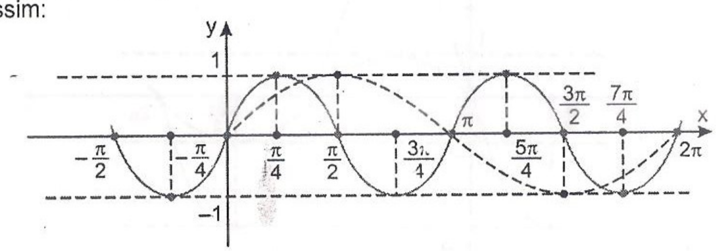
Temos que $I(g) = [-1; 1]$ e $p = 2\pi$
A função base é f(x) = cos x.
A função dada é da forma $g(x) = f(x+k),\ k = -\frac{\pi}{4}$; pela segunda regra, transladamos o gráfico de cos x "para a direita", de uma distância igual a $\frac{\pi}{4}$



16.12) Construa o gráfico da função g(x) = sen 2x.

Solução

Temos que $I(g) = [-1;1]$ e $p = \pi$.
A função base é f(x) = sen x.
A função dada é da forma g(x) = f(kx), k = 2; note que, nas regras dadas, não consta esse tipo de transformação. No entanto, a construção do gráfico não tem maiores dificuldades se observarmos que, em primeiro lugar, o conjunto-imagem é o mesmo de sen x, isto é, a *amplitude* é a mesma e, em segundo lugar,o período de g(x) é a **metade** do período de f(x); podemos, intuitivamente, entender que, num intervalo de comprimento π, sen 2x "faz" tudo o que sen x "faz" num intervalo de comprimento 2π. Portanto, devemos obrigar o gráfico de sen x a "encolher" do intervalo $[0; 2\pi]$ para $[0; \pi]$.
Assim:

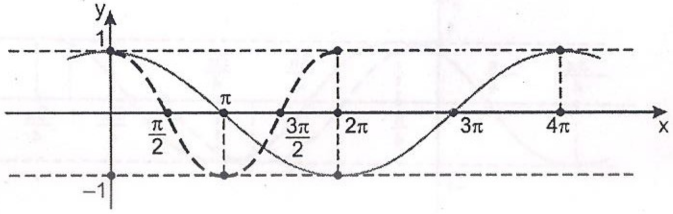


16.13) Construa o gráfico da função $g(x) = \cos\frac{x}{2}$

Solução

Temos que $I(g) = [-1; 1]$ e $p = 4\pi$
A função base é f(x) = cos x

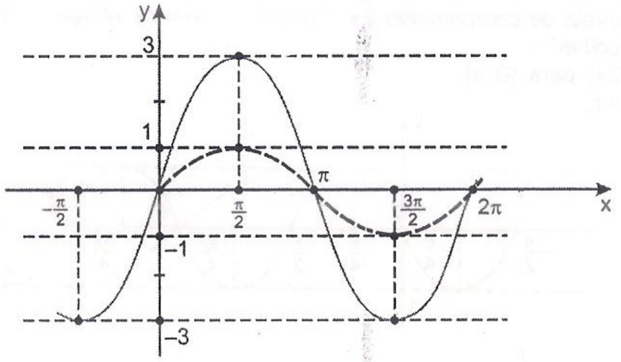
A função dada é da forma g(x) = f(kx), $k = \frac{1}{2}$; a exemplo do exercício anterior, note que o conjunto-imagem não se altera e que o período de g(x) é o **dobro** do período de f(x). Entendemos, intuitivamente, que $\cos\frac{x}{2}$ "faz", num intervalo de comprimento 4π, exatamente o mesmo que cos x "faz" num intervalo de comprimento 2π. Vamos, então, "esticar" o gráfico de cos x do intervalo $[0;\ 2\pi]$ para $[0;\ 4\pi]$. Assim:



16.14) Construa o gráfico da função g(x) = 3sen x.

Solução

Temos que $I(g) = [-3;\ 3]$ e $p = 2\pi$.
A função base é f(x) = sen x.
A função dada é da forma $g(x) = k\cdot f(x)$, k = 3; note, também, que esse tipo de transformação não consta das regras dadas. Observe que o período de g(x) é o mesmo de f(x) e que o conjunto-imagem "mudou" de $[-1;\ 1]$ para $[-3;\ 3]$, isto é, que a *amplitude* se alterou. Devemos construir uma *senóide* que, em um intervalo como $[0;\ 2\pi]$, percorra todo o conjunto-imagem $[-3;\ 3]$. Assim:

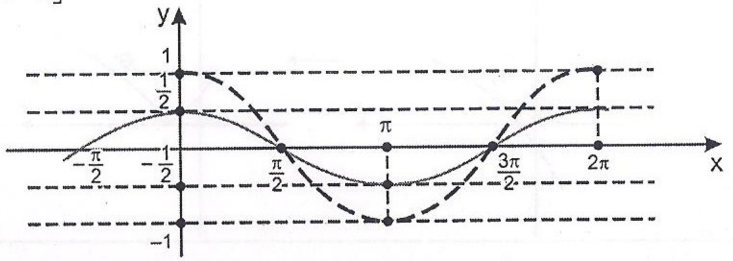


16.15) Construa o gráfico da função $g(x) = \frac{1}{2}\cos x$

Solução

Temos que $I(g) = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$ e $p = 2\pi$

A exemplo do que foi observado no exercício anterior, devemos construir uma cossenóide que, num intervalo como $[0;\ 2\pi]$, percorra o conjunto-imagem $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$; assim:



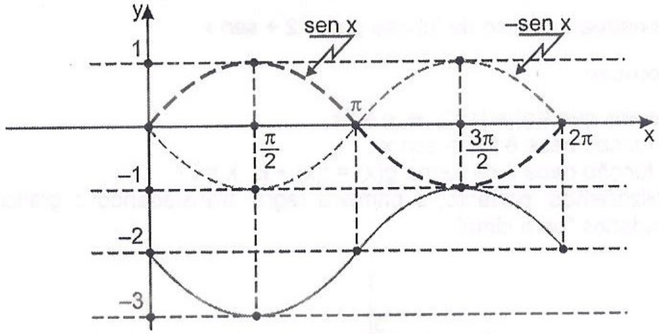
16.16) Construa, para $0 \le x \le 2\pi$, o gráfico da função g(x) = –2 – sen x.

Solução

Temos que $I(g) = [-3;\ -1]$ e $p = 2\pi$
A função base é f(x) = sen x
A "evolução" da função base até a função dada foi

$$\text{sen} \xrightarrow{(I)} -\text{sen}x \xrightarrow{(II)} -2-\text{sen}x$$

Sabemos que a transformação (I) (ver regra 3ª) provoca uma *reflexão* no gráfico de sen x em relação ao eixo Ox e que a transformação (II) (ver regra 1ª) faz o gráfico de –sen x sofrer uma **translação** de duas unidades "para baixo". Assim:



Exercícios Propostos

16.17) Calcule o período das seguintes funções:

a) f(x) = sen 4x
b) $f(x) = 2\cdot\cos\frac{x}{2}$
c) $f(x) = \text{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

d) $f(x) = 1 + \text{cotg}\left(\frac{2x}{3}\right)$

e) $f(x) = -1 + 3\ \sec\frac{3x}{2}$

f) $f(x) = \text{cossec}(2\pi x)$

g) $f(x) = \text{tg}\left(\frac{\pi x}{5}\right)$

h) $f(x) = 5 + 4\,\text{sen}(nx),\ n \neq 0$

16.18) Calcule o período das seguintes funções:

a) $f(x) = \cos^2 x$

b) $f(x) = \text{sen}^2\frac{x}{2}$

c) $f(x) = \cos^2 2x$

d) $f(x) = \text{sen}^2\frac{3x}{2}$

16.19) Sabe-se que a função definida por f(x) = Asen (kx) tem período 6π e conjunto imagem [–4; 4]. Determine essa função.

16.20) Seja k um real positivo. Determine a condição para que a função f(x) = tg (kx) tenha período racional.

16.21) O conjunto-imagem da função f(x) = A + B·cos (Bx + A) é [–3; 7]. Determine o período dessa função.

16.22) Calcule o período das seguintes funções:

a) $\varphi(x) = \text{sen}\frac{x}{3} + \text{cossec}\ 3x$

b) $\varphi(x) = \text{tg}\ 2x - \sec\frac{5x}{3}$

c) $\lambda(x) = \cos 4x \cdot \text{tg}\frac{2x}{3}$

d) $\lambda(x) = \dfrac{\text{sen}\frac{3x}{8}}{\cos\frac{4x}{5}}$

16.23) Calcule o período das seguintes funções:

a) f(x) = cos x + cossec x

b) f(x) = sec 3x + sen 3x

16.24) Calcule o período das seguintes funções:

a) f(x) = sen 2x + cos 2x

b) $f(x) = \text{sen}^3 x$

c) $f(x) = \cos^3\frac{x}{2}$

16.25) Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) g(x) = 2 + cos x

b) g(x) = –1 + sec x

c) $g(x) = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

d) $g(x) = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

16.26) Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $g(x) = \text{sen}\frac{x}{2}$

b) g(x) = cos 2x

c) g(x) = –3cos x

d) $g(x) = \frac{1}{2}\text{sen}\ x$

16.27) Construa o gráfico das funções e determine seus períodos:

a) g(x) = |sen x|

b) g(x) = –|cos x|

16.28) Construa o gráfico da função g(x) = 1 + 3sen 2x

16.29) Construa o gráfico da função g(x) = sen x + cos x

Capítulo 17

Funções trigonométricas inversas

17.1. O CONCEITO DE FUNÇÃO INVERSA

Uma função f, de A em B (fig. 17.1), define uma correspondência que a cada $x \in A$ associa um único $y \in B$. Se f é tal que a *cada* $y \in B$ *existe em correspondência um único* $x \in A$, isto é, se *todo* elemento de B é imagem de *um só* elemento de A, f se diz uma função **bijetora**. Pode-se, nessas condições, definir uma *função de B em A*, indicada por f^{-1} para a qual, se $(x; y) \in f$, então $(y; x) \in f^{-1}$ (fig. 17.2).

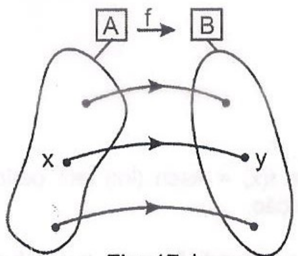


Fig. 17.1

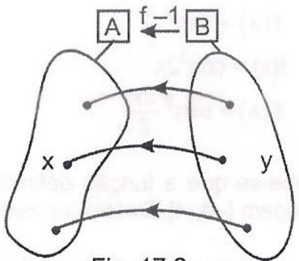


Fig. 17.2

A função f^{-1}, de B em A, é chamada *inversa de f*.

Note-se que:

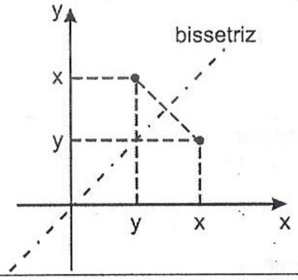
1º) Só existe f^{-1} se f é bijetora.

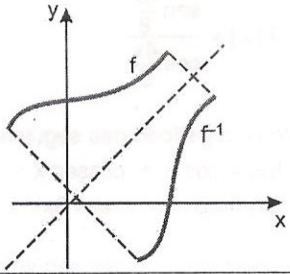
2º) Se f é bijetora, seu conjunto-imagem é o próprio contradomínio.

3º) $D(f) = I(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = I(f)$

4º) Se o ponto de coordenadas (x; y) pertence ao gráfico de f, o ponto de coordenadas (y; x) pertence ao gráfico de f^{-1} como (x; y) e (y; x) são pontos simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, conclui-se que:

Os gráficos da função f e de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.





17.2. INTRODUÇÃO ÀS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sabemos que uma função f, de domínio A, é **invertível** somente se f é bijetora. Portanto, muitas das funções usuais, incluindo as seis funções trigonométricas, não admitem inversa no seu domínio de definição, pois, a um dado y, existe, em correspondência, mais de um x. A função seno, por exemplo: ao valor y = sen x = 1 correspondem infinitos valores de x, como $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}$, etc, isto é, $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$; isto quer dizer que não podemos definir a inversa de f(x) = sen x no seu domínio $\mathbb{R}$.

No entanto, podem existir subconjuntos do domínio A nos quais f é bijetora e, nesses subconjuntos, é possível definir f^{-1}. Para maior clareza, tomemos um exemplo:

A função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$, não é invertível (veja na figura 17.3 que a um dado y corresponde mais de um x).

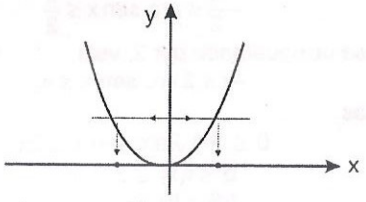
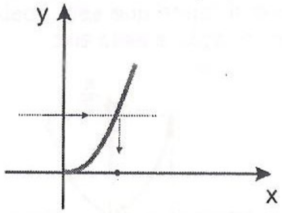


Fig 17.3

Seja, agora, a função f, de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$.

No subconjunto $\mathbb{R}_+$, a função definida por $f(x) = x^2$ é invertível, pois a cada y temos um e um só x.



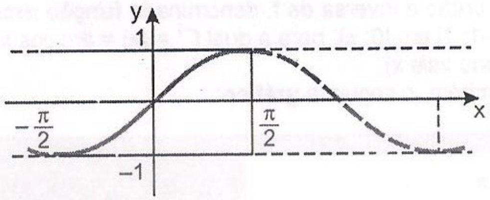
Assim, para a definição das inversas das funções trigonométricas, devem ser escolhidos subconjuntos dos domínios nos quais elas sejam bijetoras. Uma rápida consulta aos gráficos do capítulo 15 nos faz perceber que existem muitos *intervalos* em que as funções trigonométricas são bijetoras; então, para maior uniformidade, convenciona-se escolher, em cada caso, um intervalo em que o *zero* **seja ponto médio ou extremo inferior** e no qual a função percorra todo o seu conjunto-imagem.

Seguindo também um procedimento tradicional, definiremos apenas as inversas das funções seno, cosseno, tangente e cotangente.

17.3. A INVERSA DO SENO: FUNÇÃO ARCO-SENO

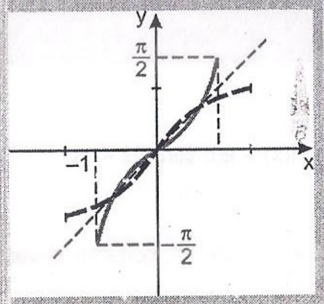
Seja a função f, definida por:

$$f(x) = \text{sen } x$$
$$D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$
$$CD(f) = I(f) = [-1; 1]$$



Definimos, então, a inversa de f, denominada **função arco-seno**, como sendo a função f^{-1}, de [–1; 1] em $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, para a qual $f^{-1}(x)$ = arc sen x (isto é, a *imagem de x é o arco cujo seno vale x*).

Pela quarta observação feita em 17.1, podemos construir o **gráfico** da função arco-seno.

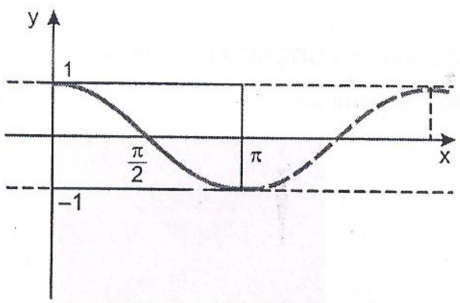


$$f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$$
$$D(f^{-1}) = [-1; 1]$$
$$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

17.4. A INVERSA DO COSSENO: FUNÇÃO ARCO-COSSENO

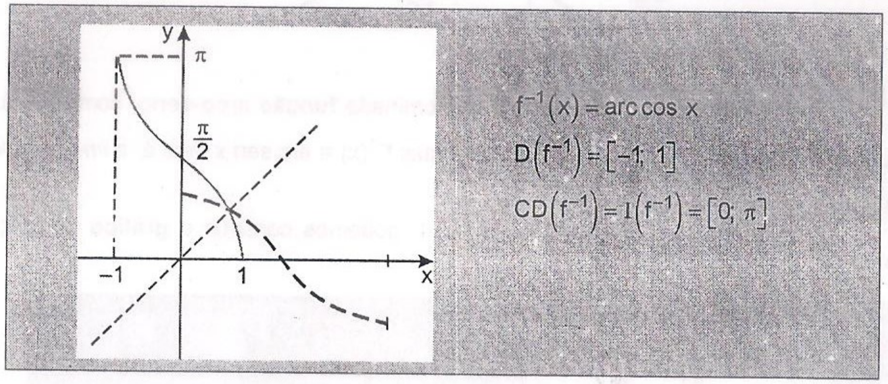
Seja a função f, definida por

$$f(x) = \cos x$$
$$D(f) = [0; \pi]$$
$$CD(f) = I(f) = [-1; 1]$$



Definimos então a inversa de f, denominada **função arco-cosseno**, como sendo a função f^{-1}, de [–1; 1] em [0; π], para a qual f^{-1} = (x) = arc cos x (isto é, *a imagem de x é o arco cujo cosseno vale x*).

Temos, também, o seguinte **gráfico**:



Exercícios Resolvidos

17.1) Determine o domínio da função definida por f(x) = arc sen (2x – 1).

Solução

Sabemos que, se α = arc sen (2x – 1), então sen α = 2x – 1; portanto, devemos ter

$$-1 \leq 2x - 1 \leq 1$$

donde

$$0 \leq x \leq 1$$

logo

$$D(f) = [0; 1]$$

17.2) Determine o conjunto-imagem da função f(x) = 2·arc cos x.

Solução

Sabemos que o conjunto-imagem da função arc cos x é [0; π], isto é

$$0 \leq \text{arc cos } x \leq \pi$$

multiplicando essa desigualdade por 2, vem:

$$0 \leq 2\text{arc cos } x \leq 2\pi$$

ou $0 \leq f(x) \leq 2\pi$

logo, I(f) = [0; 2π]

17.3) Determine o domínio da função f(x) = arc cos (x^2 – 1).

Solução

Sabemos que, se α = arc cos (x^2 – 1), então cos α = x^2 – 1; portanto, devemos ter

$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1$$

ou

$$0 \leq x^2 \leq 2$$

Como a condição $x^2 \geq 0$ é satisfeita para todo x real, basta resolvermos a inequação $x^2 \leq 2$, isto é, $x^2 - 2 \leq 0$; encontramos, então

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

logo,

$$D(f) = \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$$

17.4) Determine o conjunto-imagem da função f(x) = π + 2arc sen x.

Solução

Sabemos que o conjunto-imagem da função arc sen x é $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, isto é,

$$-\frac{\pi}{2} \leq \text{arc sen } x \leq \frac{\pi}{2}$$

multiplicando essa desigualdade por 2, vem

$$-\pi \leq 2\text{arc sen } x \leq \pi$$

somando π, temos

$$0 \leq \pi + 2\text{arc sen } x \leq 2\pi$$

ou

$$0 \leq f(x) \leq 2\pi$$

logo

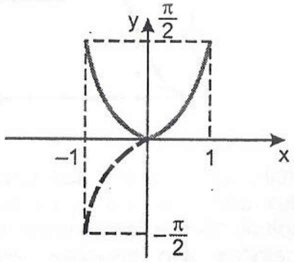
$$I(f) = [0; 2\pi]$$

17.5) Construa o gráfico da função g(x) = |arc sen x|.

Solução

Sabemos, pela quarta regra enunciada em 16.4 que, para obtermos o gráfico de g(x) = |f(x)|, basta fazer a "parte que está abaixo" do eixo Ox, do gráfico de f(x), sofrer uma reflexão em relação a esse eixo.

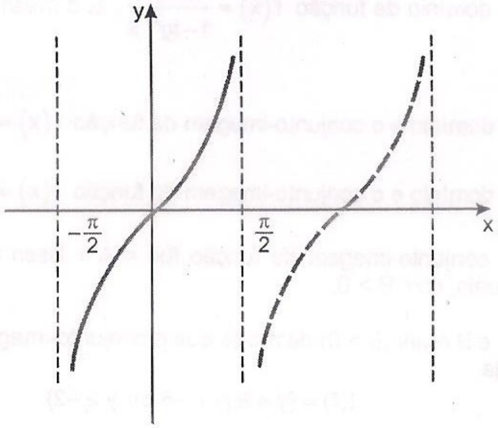
Como f(x) = arc sen x, temos:



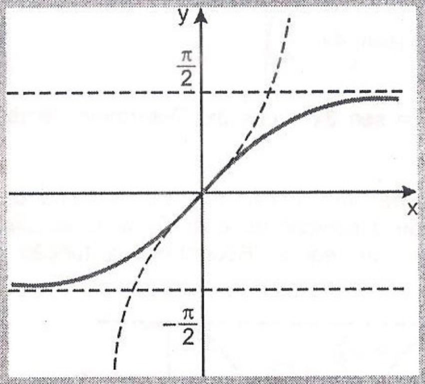
17.5. A INVERSA DA TANGENTE: FUNÇÃO ARCO-TANGENTE

Seja a função f definida por:

$$f(x) = \text{tg } x$$
$$D(f) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$
$$CD(f) = I(f) = \mathbb{R}$$



Definimos, então, inversa de f, denominada **função arco-tangente**, como sendo a função f^{-1}, de $\mathbb{R}$ em $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, para a qual $f^{-1}(x)$ = arc tg x (isto é, a *imagem de x é o arco cuja tangente vale x*). E o seu gráfico é:

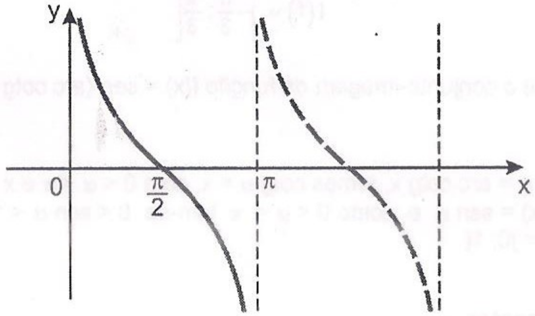


$$f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$$
$$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$$
$$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

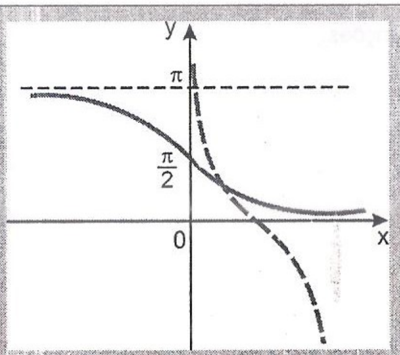
17.6. A INVERSA DA COTANGENTE: FUNÇÃO ARCO-COTANGENTE

Seja a função f definida por:

$$f(x) = \text{cotg } x$$
$$D(f) =]0; \pi[$$
$$CD(f) = I(f) = \mathbb{R}.$$



Definimos então a inversa de f, denominada **função arco-cotangente**, como sendo a função f^{-1} de $\mathbb{R}$ em $]0; \pi[$, para a qual $f^{-1}(x)$ = arc cotg x (isto é, *a imagem de x é o arco cuja cotangente vale x)*. E o seu gráfico é:



$$f^{-1}(x) = \text{arc cotg } x$$
$$D(f^{-1}) = \mathbb{R}$$
$$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) =]0; \pi[$$

Exercícios Resolvidos

17.6) Determine o conjunto-imagem da função $f(x) = \frac{2}{3}\text{arc tg} x$.

Solução

Sabemos que o conjunto-imagem da função arc tg é $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, isto é,

$$-\frac{\pi}{2} < \text{arc tg} < \frac{\pi}{2}$$

multiplicando essa desigualdade por $\frac{2}{3}$, vem

$$-\frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\,\text{arc tg}\,x < \frac{\pi}{3}$$

logo, $$I(f) = \left]-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right[$$

17.7) Determine o conjunto-imagem da função f(x) = sen (arc cotg x)

Solução

Fazendo α = arc cotg x, temos cotg α = x, com $0 < \alpha < \pi$ e x real qualquer.
Assim, f(x) = sen α e como $0 < \alpha < \pi$ tem-se $0 < \text{sen}\,\alpha < 1$
logo, I(f) =]0; 1[

Exercícios Propostos

17.8) Determine o domínio das funções:
a) f(x) = arc sen 3x
b) $f(x) = 2\text{arc cos}\left(\frac{x}{2}+3\right)$

17.9) Determine o conjunto-imagem das funções:
a) f(x) = 3arc sen x
b) f(x) = –2arc cos x
c) f(x) = arc sen $\sqrt{x}$
d) f(x) = $-\frac{\pi}{3}+3$ arc cos x

17.10) Construa os gráficos de:
a) f(x) = arc sen (x – 2)
b) f(x) = –arc cos x

17.11) Determine o conjunto-imagem das funções:
a) f(x) = 4arc tg x
b) $f(x) = -\frac{\pi}{2} + \text{arc cotg}\,x$
c) f(x) = arc tg $\sqrt{x}$
d) f(x) = arc cotg $\left(-\sqrt{x}\right)$

17.12) Verifique a paridade da função f(x) = arc sen x.

17.13) Verifique a paridade da função f(x) = arc cos x.

17.14) Verifique a paridade da função f(x) = arc tg x

17.15) Verifique a paridade da função f(x) = arc cotg x

Exercícios Suplementares

VI.1) Determine o domínio da função $f(x) = \frac{2\,\text{tg}\,x}{1-\text{tg}^2\,x}$. É o mesmo que da função g(x) = tg 2x?

VI.2) Determine o domínio e o conjunto-imagem da função $f(x) = \sqrt{\text{sen}\,x}$

VI.3) Determine o domínio e o conjunto-imagem da função $f(x) = -\sqrt{2\cos x - 1}$

VI.4) Determine o conjunto-imagem da função f(x) = A + Bsen (2x), onde A e B são constantes reais, com B > 0.

VI.5) Determine A e B reais (B > 0) de modo que o conjunto-imagem da função f(x) = A + Bsec x seja

$$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -6 \text{ ou } y \geq -2\}$$

VI.6) Determine o domínio e o conjunto-imagem da função f(x) = tg x + cotg x.

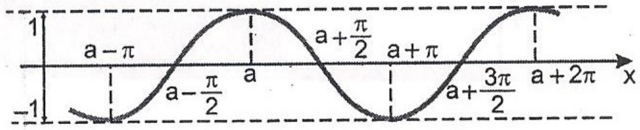
VI.7) Calcule o período da função f(x) = tg x + cotg x

VI.8) Calcule o período da função $f(x) = \text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$

VI.9) Calcule o período da função $f(x) = \left|\text{sen}\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$

VI.10) Calcule o período da função f(x) = sen 3x – cos 3x. Determine, também, seu conjunto-imagem.

VI.11) A figura abaixo mostra o gráfico de uma função f(x) num sistema cartesiano ortogonal, em que não está fixada a posição do eixo Oy e as abscissas são dadas em função de uma constante real a. Reconheça a função f(x) nos seguintes casos:



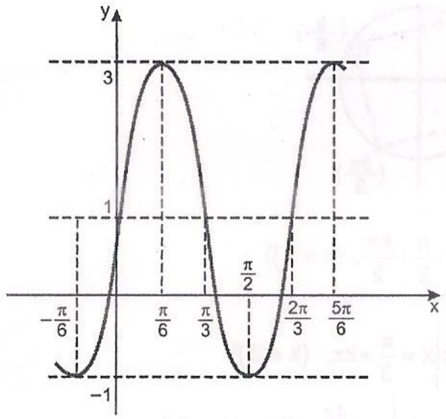
a) $a = 0$

b) $a = \frac{\pi}{2}$

c) $a = -\frac{\pi}{2}$

d) $a = \pi$

VI.12) O gráfico ao lado representa a função $f(x) = A + B\text{sen } Cx$. Determine A, B e C positivos.



VI.13) Construa o gráfico da função $f(x) = \text{tg } x + \text{cotg } x$

VI.14) Construa o gráfico da função $f(x) = 2\text{sen}^2 x$

VI.15) Construa o gráfico da função $f(x) = \cos^2 x$

VI.16) Verifique a paridade das seguintes funções:

a) $f(x) = (\text{arc } \cos x) - \frac{\pi}{2}$

b) $f(x) = |\text{arc sen } x|$

c) $f(x) = (\text{arc cotg } x) - \frac{\pi}{2}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.8) 0,9cm

1.9) 4cm

1.10) π unidades

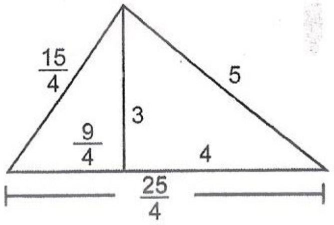
1.11) $\frac{3}{2}$

1.12) $\frac{1}{2}$

1.13) $\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{9}; \frac{5\pi}{18}$

1.14) 0,27 rad.

2.7)



2.8) $a = 4,\ b = 2\sqrt{3},\ c = 2,\ h = \sqrt{3}$

2.9) $a = 6,\ b = \sqrt{30},\ c = \sqrt{6},\ n = 1$

2.10) $a = 4,\ b = 2\sqrt{3},\ m = 1, h = \sqrt{3}$

2.11) 2 732m, aproximadamente

2.12) 5,1cm

2.13) 4,1

2.14) 49,6m

2.15) $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7},\ \text{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{15}$

2.16) $\text{sen}\,\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10},\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$

2.17) $\left(tg\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2=\left(\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2=\dfrac{(sen\alpha+1)^2}{\cos^2\alpha}=\dfrac{(sen\alpha+1)^2}{1-sen^2\alpha}=$

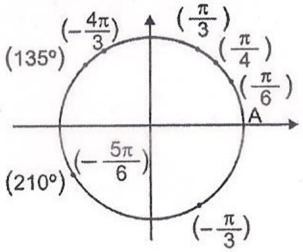
$=\dfrac{(sen\alpha+1)^2}{(1-sen\alpha)(1+sen\alpha)}=\dfrac{1+sen\alpha}{1-sen\alpha}$

2.18) sen^4x

3.11) a) 5 b) $-\dfrac{13}{2}$

3.12) a) $-\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{5}{2}$

3.13)



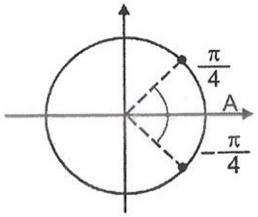
3.14) a) $\dfrac{7\pi}{6}$ c) $\dfrac{\pi}{2}$

b) 338° d) 10°

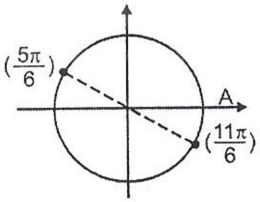
3.15) a) 1° c) 2°

b) 2° d) 4°

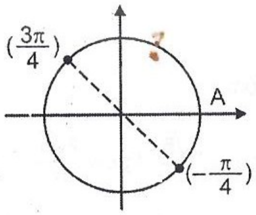
3.16)



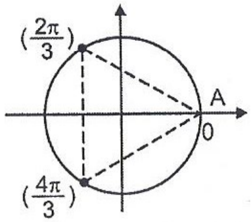
3.17) a)



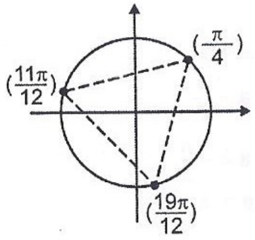
b)



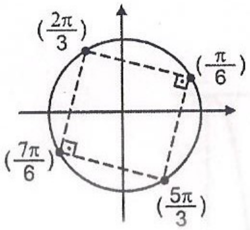
c)



d)



e)



3.18) $E\cup F=\{x \mid x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})\}$

3.19) a) $E\cap F=\{x \mid x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\}$

b) $E\cap F\cap G=\{x \mid x=\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\}$

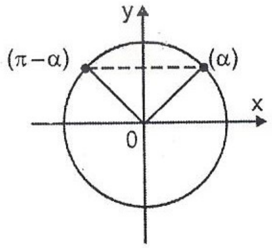
c) $F-E=\{x \mid x=\dfrac{5\pi}{3}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\}$

3.20) $(k\in\mathbb{Z})$

a) $x=\dfrac{\pi}{5}+k\pi$ c) $x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{k\pi}{2}$

b) $x=\dfrac{7\pi}{10}+k\pi$

3.21) dois pontos simétricos em relação ao eixo Oy.



4.9) positivo

4.10) negativo

4.11) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

4.12) $-\frac{1}{2}$

4.13) 0,9563

4.14) $\cos x = \frac{\pm\sqrt{3+m^2}}{2}$

4.15) $\text{sen } x = 1$ e $\cos x = 0$ ou $\text{sen} x = \frac{1}{3}$ e $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

4.16) a) $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

b) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

4.17) Desenvolvendo o 1º membro, obtemos:

$$\frac{4-5\cos\alpha}{3-5\,\text{sen}\,\alpha} + \frac{3+5\,\text{sen}\,\alpha}{4+5\cos\alpha} =$$

$$= \frac{(4-5\cos\alpha)(4+5\cos\alpha)+(3-5\,\text{sen}\,\alpha)(3+5\,\text{sen}\,\alpha)}{(3-5\,\text{sen}\,\alpha)(4+5\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{16-25\cos^2\alpha+9-25\,\text{sen}^2\alpha}{(3-5\,\text{sen}\,\alpha)(4+5\cos\alpha)} = \frac{25-25(\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha)}{(3-5\,\text{sen}\,\alpha)\cdot(4+5\cos\alpha)} = 0$$

4.18) Aplicando ao 1º membro a identidade $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$, obtemos:
$\cos^3\alpha - \text{sen}^3\alpha = (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha + \text{sen}\,\alpha\cos\alpha) =$
$= (\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha)(1 + \text{sen}\,\alpha\cos\alpha)$

4.19) Vamos desenvolver a expressão do 1º membro, mantendo agrupados os termos 1 + sen x:
$(1 + \text{sen } x \cos x)^2 = (1 + \text{sen } x)^2 + 2(1 + \text{sen } x)\cos x + \cos^2 x =$
$= (1 + \text{sen } x)^2 + 2(1 + \text{sen } x)\cos x + (1 - \text{sen}^2 x) =$
$= (1 + \text{sen } x)^2 + 2(1 + \text{sen } x)\cos x + (1 + \text{sen } x)(1 - \text{sen } x) =$
$= (1 + \text{sen } x)[(1 + \text{sen } x) + 2\cos x + (1 - \text{sen } x)] =$
$= (1 + \text{sen } x)(2 + 2\cos x) =$
$= 2(1 + \text{sen } x)(1 + \cos x)$

4.20) Temos inicialmente:
$\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta = (1-\text{sen}^2\alpha)(1-\text{sen}^2\beta) = 1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta$
Então, o 1º membro fica
$\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta - \text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta =$
$= \text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta - \text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta + 1 - \text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta = 1.$

4.21) Aplicando a identidade
$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 + b^4 - a^2b^2)$
obtemos
$\text{sen}^6 x + \cos^6 x + 3\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x =$
$= (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^4 x + \cos^4 x - \text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x) + 3\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x =$
$= \text{sen}^4 x + \cos^4 x + 2\text{sen}^2 x\cdot\cos^2 x = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 = 1.$

4.22) $\text{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$

4.23) $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

5.14) a) positivo b) negativo c) negativo
d) negativo e) positivo f) negativo

5.15) I) $\cos x = +\frac{\sqrt{91}}{10}$; $\text{tg} x = +\frac{3\sqrt{91}}{91}$; $\text{cotg } x = +\frac{\sqrt{91}}{3}$

II) $\cos x = -\frac{\sqrt{91}}{10}$; $\text{tg} x = -\frac{3\sqrt{91}}{91}$; $\text{cotg } x = -\frac{\sqrt{91}}{3}$

5.16) I) sen x = +0,6; tg x = –0,75; cotg x = –1,33
II) sen x = –0,6; tg x = +0,75; cotg x = +1,33

5.17) I) $\text{cotg } x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\text{sen} x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos x = +\frac{2}{3}$

II) $\text{cotg } x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\text{sen} x = +\frac{\sqrt{5}}{3}$; $\cos x = -\frac{2}{3}$

5.18) I) tg x = +0,50; sen x = +0,45; cos x = +0,90
II) tg x = +0,50; sen x = –0,45; cos x = –0,90

5.19) $\cos x = \frac{\pm 2t}{t^2+1}$; $\text{tg} x = \frac{\pm(t^2-1)}{2t}$; $\text{cotg } x = \frac{\pm 2t}{t^2-1}$

5.20) a) 3º ou 4º b) 1º ou 2º c) 1º ou 2º

5.21) $\cos x = \dfrac{\pm m}{\sqrt{1+m^2}}$

5.22) $\cos x = \pm\dfrac{1-p}{1+p}$

5.23) $\text{tg}x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{cotg } x = \pm\sqrt{3}$

5.24) $\text{tg}x = \pm 1$; $\text{cotg } x = \pm 1$

5.25) $m = 4 \pm \sqrt{13}$

5.26) a) $-\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}$

b) $-\dfrac{5\pi}{3}; -\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}$

c) $-\dfrac{4\pi}{3}; -\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{3}$

d) $-\dfrac{7\pi}{6}; -\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}$

e) $-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi$

5.27) a) $-\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}$

b) $-\dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}$

c) $-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}$

d) $-\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}$

e) $-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}$

5.28) a) $x = k\pi$

b) $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi$

c) $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$

d) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

e) $x = \dfrac{5\pi}{6} + k\pi$

f) $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

g) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

h) $x = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

5.29) $\text{tg}A = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$; $\text{tg}B = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

5.30) a) $\text{sen } \alpha + \cos \alpha$

b) $\text{sen}^2\alpha$

c) $\cos \alpha$

d) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$

e) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

f) $\text{cotg } \alpha$

g) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$

h) $\text{sen}^2\alpha$

i) $\text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$

5.31) a) $(\text{tg}\alpha + \text{cotg}\alpha)\,\text{sen}\alpha.\cos\alpha = \left(\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}\right)\text{sen}\alpha\cos\alpha =$

$= \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}.\text{sen}\alpha\cos\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}.\text{sen}\alpha\cos\alpha = \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $\dfrac{1-\text{tg}^2\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} = \dfrac{1-\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{\dfrac{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha =$

$= \cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$

c) $[(\text{cotg } \alpha + \cos \alpha)^2 - (\text{cotg } \alpha - \cos \alpha)^2]^2 =$

$= [(\text{cotg}^2\alpha + 2\text{cotg } \alpha \cos \alpha + \cos^2\alpha) - (\text{cotg}^2\alpha - 2\text{cotg } \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2\alpha)^2 =$

$= [4\text{cotg } \alpha \cos \alpha]^2 = 16\text{cotg}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 16\text{cotg}^2\alpha\,(1 - \text{sen}^2\alpha) =$

$= 16\,[\text{cotg}^2\alpha - \text{cotg}^2\alpha \cdot \text{sen}^2\alpha] = 16\,[\text{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha]$

6.5) 1ª)
sen x = –0,60
cos x = –0,80
tg x = +0,75
cotg x = +1,33
sec x = –1,25
cossec x = –1,67

2ª)
sen x = –0,60
cos x = +0,80
tg x = –0,75
cotg x = –1,33
sec x = +1,25
cossec x = –1,67

6.6) 1ª)
$\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos x = \dfrac{3}{4}$

$\text{tg } x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\text{cotg } x = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

$\sec x = \dfrac{4}{3}$

$\text{cossec } x = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

2ª)
$\text{sen } x = -\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos x = -\dfrac{3}{4}$

$\text{tg } x = +\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

$\text{cotg } x = +\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

$\sec x = -\dfrac{4}{3}$

$\text{cossec } x = -\dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

6.7) 1ª) $\text{sen } x = +\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\cos x = -\frac{2}{5}$

$\text{tg } x = -\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\text{cotg } x = -\frac{2\sqrt{21}}{21}$

$\sec x = -\frac{5}{2}$

$\text{cossec } x = +\frac{5\sqrt{21}}{21}$

2ª) $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{21}}{5}$

$\cos x = -\frac{2}{5}$

$\text{tg } x = +\frac{\sqrt{21}}{2}$

$\text{cotg } x = +\frac{2\sqrt{21}}{21}$

$\sec x = -\frac{5}{2}$

$\text{cossec } x = -\frac{5\sqrt{21}}{21}$

6.8) $\text{sen}\, x = \frac{\pm t}{\sqrt{t^2+1}}; \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}};\ \text{tg}x = \pm t;\ \text{cotg}x = \pm\frac{1}{t};$

$\sec x = \sqrt{t^2+1};\ \text{cossec } x = \frac{\pm\sqrt{t^2+1}}{t}$

6.9) $\text{tg}x = \frac{\pm\sqrt{m^2-1}}{m^2-1}$

6.10) $p \le -1$ ou $p = 0$ ou $p \ge 1$

6.11) $m = -1$ ou $m = -\frac{3}{4}$

6.12) $\text{tg}x = \pm\sqrt{\frac{m}{n}}$

6.13) a) $\cos\alpha$ c) $2 + 4\text{cotg}^2\alpha$
b) $\text{sen}^2\alpha$ d) $\text{sen}\ \alpha$

6.14) a) Temos $y = (1 - \text{cotg } x)^2 + (1 - \text{tg } x)^2 =$
$= (1 + \text{cotg}^2x - 2\text{cotg } x) + (1 + \text{tg}^2x - 2\text{tg } x) =$
$= \text{cossec}^2x - 2\text{cotg } x + \sec^2 x - 2\text{tg } x = \sec^2 x + \text{cossec}^2 x - 2(\text{tg } x + \text{cotg } x)$
Por outro lado, podemos escrever

$$\text{tg } x + \text{cotg } x = \frac{\text{sen}x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}x \cos x} = \frac{1}{\text{sen}x\cos x} = \sec x \cdot \text{cossec } x$$

e assim:
$y = \sec^2 x + \text{cossec}^2 x - 2\sec x \cdot \text{cossec } x = (\sec x - \text{cossec } x)^2$

b) De $\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$ e $\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$ podemos tirar
$\sec^2 x - \text{cossec}^2 x = \text{tg}^2 x - \text{cotg}^2 x$

isto é:
$(\sec x - \text{cossec } x)(\sec x + \text{cossec } x) = (\text{tg } x - \text{cotg } x)(\text{tg } x + \text{cotg } x)$
e assim

$$\frac{\sec x - \text{cossec } x}{\text{tg} x + \text{cotg} x} = \frac{\text{tg} x - \text{cotg} x}{\sec x + \text{cossec } x}$$

7.3) a) +0,9063 f) −1,4396
b) −0,1219 g) −0,1564
c) −0,8098 h) −0,9848
d) +3,4874 i) −0,5317
e) −1,2062

7.4) a) −0,7530
b) −0,9430

8.9) a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\text{arc}\cos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{1}{3}\text{arc}\cos\frac{1}{3} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

8.10) a) $\left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}$

b) $\left\{\text{arccos}\left(-\frac{1}{3}\right); 2\pi - \text{arccos}\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}$

c) $\left\{\frac{1}{3}\text{arccos}\frac{1}{3}; \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{3}\text{arccos}\frac{1}{3}; \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{3}\text{arccos}\frac{1}{3}; 2\pi - \frac{1}{3}\text{arccos}\frac{1}{3};\right.$
$\left.\frac{4\pi}{3} - \frac{1}{3}\text{arccos}\frac{1}{3}; \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{3}\text{arccos}\frac{1}{3}\right\}$

8.11) a) $\frac{3}{4}$

8.12) $y = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

8.17) a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \text{arc sen}\frac{1}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \text{arc sen}\frac{1}{5} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-2+\frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{1}{3}+k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}-2-\frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{1}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.18) a) $S=\left\{\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $S=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $S=\left\{\text{arc sen}\frac{1}{5};\ \pi-\text{arc sen}\frac{1}{5}\right\}$

d) $S=\left\{\pi-2+\frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{1}{3};2\pi-2+\frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{1}{3};\frac{3\pi}{2}-2-\frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{1}{3};\ \frac{5\pi}{2}-2-\frac{1}{2}\text{arcsen}\frac{1}{3}\right\}$

8.19) $\frac{12}{5}$

8.31) a) $\frac{\pi}{6}$ b) $-\frac{\pi}{3}$ c) π d) $\frac{3\pi}{4}$

e) $-\frac{\pi}{3}$ f) $-\frac{\pi}{4}$ g) $\frac{2\pi}{3}$ h) $\frac{3\pi}{4}$

8.32) a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x=\text{arc tg } 2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$

8.33) a) $S=\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{5\pi}{3}\right\}$

b) $S=\left\{\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$

c) $S=\left\{\frac{2\pi}{9};\frac{5\pi}{9};\frac{8\pi}{9};\frac{11\pi}{9};\frac{14\pi}{9};\frac{17\pi}{9}\right\}$

d) $S=\{\text{arctg } 2;\pi+\text{arctg } 2\}$

8.34) $S=\left\{\frac{\pi}{4}+\text{arc tg}(-3);\ \frac{5\pi}{4}+\text{arc tg}(-3)\right\}$

8.35) $\frac{63}{65}$

8.36) $\frac{1-u^2}{1+u^2}$

8.37) Indicando arc sen a = x e arc cotg b = x, resulta sen x = a e cotg x = b. Então $\text{cossec}^2 x = 1+\text{cotg}^2 x = 1+b^2$ isto é, $\text{sen}^2 x = \frac{1}{1+b^2}$.

Obtemos $a^2=\frac{1}{1+b^2}$, donde $a=\frac{\pm 1}{\sqrt{1+b^2}}$

Mas devemos ter simultaneamente $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ e $0<x<\pi$,

Isto é, devemos ter $0<x\le\frac{\pi}{2}$

Isto indica que sen x = a é positivo, ou seja:

$$a=\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$$

8.38) $a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

8.39) $a=\frac{\sqrt{6}}{6}$

8.40) $y=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

8.41) a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\text{arc sen}\frac{1}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\text{arc sen}\frac{1}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=k\pi \text{ ou } x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

d) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

8.42) a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \operatorname{arc\,cotg} 2\sqrt{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

h) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

i) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

9.14) a) $-\frac{3}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{4}$

9.15) $a = \frac{1}{2};\ x - y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

9.16) a) $y = \cos 2x$ b) $y = 0$ c) $y = \frac{1}{2}$

9.17) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

9.18) $-\frac{\sqrt{2}}{6}\left(\sqrt{5}+2\right)$

9.19) $\frac{4\sqrt{3}+3}{10}$

9.20) a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

9.21) a) a b) a

9.22) –m

9.23) a) $y = \cos^2 x$ b) $y = 1$

9.24) $y = 1$

9.25) $y = \sqrt{3}$

9.26) a) $y = \operatorname{sen} a$ b) $y = 0$

9.27) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

9.28) $\frac{7\sqrt{3}-24}{50}$

9.29) $\operatorname{sen}(a+b)\cdot\operatorname{sen}(a-b) =$
$= (\operatorname{sen} a\cdot\cos b + \operatorname{sen} b\cdot\cos a)\cdot(\operatorname{sen} a\cdot\cos b - \operatorname{sen} b\cdot\cos a) =$
$= \operatorname{sen}^2 a\cdot\cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b\cdot\cos^2 a =$
$= (1-\cos^2 a)\cdot\cos^2 b - (1-\cos^2 b)\cdot\cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a$

9.30) $2-\sqrt{3}$

9.31) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.\operatorname{tg}x} = \dfrac{1-\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}}{1+1.\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}} = \dfrac{\cos x - \operatorname{sen}x}{\cos x + \operatorname{sen}x}$

9.32) $-1 \pm \sqrt{2}$

9.33) $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta} = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 1 - \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta = 1$; então
$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta) = 1 + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\beta) = 1+1 = 2$

9.34) $x + y = \frac{\pi}{2} - z$

$\operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-z\right) = \operatorname{cotg} z$

$\dfrac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}z}$

$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z + \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z = 1 - \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y$

$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y + \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}z + \operatorname{tg}y\cdot\operatorname{tg}z = 1$

9.35) $\frac{2}{b}$

9.36) 1º) $s = \operatorname{sen}(a+b) + \cos(a-b) =$
$= \operatorname{sen} a\cdot\cos b + \operatorname{sen} b\cdot\cos a + \cos a\cdot\cos b + \operatorname{sen} a\cdot\operatorname{sen} b =$
$= \cos b\cdot(\operatorname{sen} a + \cos a) + \operatorname{sen} b\cdot(\cos a + \operatorname{sen} a) =$
$= (\operatorname{sen} a + \cos a)\cdot(\cos b + \operatorname{sen} b) = s_1 \cdot s_2$

2º) $p = \text{sen}(a+b)\cdot\cos(a-b) =$
$= (\text{sen } a\cdot\cos b + \text{sen } b\cdot\cos a)\cdot(\cos a\cdot\cos b + \text{sen } a\cdot\text{sen } b) =$
$= \text{sen } a\cdot\cos a\cdot\cos^2 b + \text{sen } b\cdot\cos b\cdot\text{sen}^2 a +$
$+ \text{sen } b\cdot\cos b\cdot\cos^2 a + \text{sen } a\cdot\cos a\cdot\text{sen}^2 b =$
$= \text{sen } a\cdot\cos a\,(\cos^2 b + \text{sen}^2 b) + \text{sen } b\cdot\cos b\,(\text{sen}^2 a + \cos^2 a) =$
$= \text{sen } a\cdot\cos a + \text{sen } b\cdot\cos b = p_1 + p_2$

9.41) a) sen x — g) – sen x
b) – cos x — h) cos x
c) – tg x — i) – tg x
d) – sen x — j) sen x
e) – cos x — k) cos x
f) tg x — l) tg x

9.42) a) cos x — g) – cos x
b) sen x — h) – sen x
c) cotg x — i) cotg x
d) cos x — j) – cos x
e) – sen x — k) sen x
f) – cotg x — l) – cotg x

9.43) a) – cotg x — d) – cossec x
b) – sec x — e) sec x
c) cossec x — f) – tg x

9.44) a) $y = 1$ — b) $y = -\frac{1}{2}\sec^2\alpha$

9.45) $y = \frac{1+a^2}{1-a^2}$

9.46) $\text{sen}^2\alpha$

9.47) $y = -5$

9.48) $E = 0$

9.49) $E = -1$

9.50) $x+y+z=\pi \Rightarrow x+y=\pi-z \Rightarrow tg(x+y)=tg(\pi-z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy} = -tgz \Rightarrow tgx+tgy = -tgz+tgx.tgy.tgz \Rightarrow$

$\Rightarrow tgx+tgy+tgz = tgx.tgy.tgz$

10.18) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

10.19) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

10.20) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$

10.21) 0,81

10.22) $y = -\cos 2x$

10.23) $y = 4\cos x$

10.24) $y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

10.25) $1 - m^2$

10.26) $y = 1$

10.27) $y = 1$

10.28) $y = 2$

10.29) a) $-\frac{1}{2} \le m \le \frac{1}{2}$ — b) $m \le -2$ ou $m \ge 2$

10.30) $\sqrt{\frac{1-a}{2}}$

10.31) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

10.32) $\sqrt{2}-1$

10.33) $\frac{117}{125}$

10.34) $\frac{11}{20}$

10.35) $tg\,3a = tg(a+2a) = \frac{tg\,a + tg\,2a}{1 - tg\,a\cdot tg\,2a} = \frac{tg\,a + \frac{2\,tg\,a}{1-tg^2 a}}{1 - tg\,a\cdot\frac{2\,tg\,a}{1-tg^2 a}} =$

$= \frac{tga - tg^3 a + 2tga}{1 - tg^2 a - 2tg^2 a} = \frac{3tga - tg^3 a}{1 - 3tg^2 a}$

10.36) $t=\frac{1}{2}$ (o valor t = 4 não convém pois, se $0<x<\frac{\pi}{2}$ então $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$, portanto, $0<tg\frac{x}{2}<1$).

11.11) a) $2sen\,4x\cdot\cos 2x$ c) $-2sen\,x\cdot\cos 2x$
b) $2\cos 5x\cdot\cos 2x$ d) $2sen\,6x\cdot sen\,3x$

11.12) a) $4sen\left(\frac{\pi}{12}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+x\right)$ c) $\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$
b) $4senx.\cos^2\frac{x}{2}$ d) $2sen\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

11.13) a) $4sen\,7x\cdot\cos 2x\cdot\cos 6x$
b) $4\cos 3x.sen\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$

11.14) $y = \text{cotg}\,x$

11.15) $y=\sqrt{3}$

11.16) $y=\sqrt{3}$

11.17) $sen^2a - sen^2b = (sen\,a + sen\,b)\,(sen\,a - sen\,b) =$

$$=\left(2sen\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}\right).\left(2sen\frac{a-b}{2}.\cos\frac{a+b}{2}\right)=$$

$$=\left(2sen\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}\right).\left(2sen\frac{a-b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}\right)=$$

$$=sen\left[2.\frac{a+b}{2}\right]sen\left[2.\frac{a-b}{2}\right]=sen(a+b).sen(a-b)$$

11.18) $-\cos 2x\cdot\cos 4x$

11.19) $tg3x-tgx=\frac{sen(3x-x)}{\cos 3x.\cos x}=\frac{sen2x}{\cos 3x.\cos x}=\frac{2senx.\cos x}{\cos 3x.\cos x}=$

$$=2senx\frac{1}{\cos 3x}=2senx.\sec 3x$$

11.20) $\text{cotg}\,a+tg\frac{a}{2}=\frac{\cos a}{sen\,a}+\frac{sen\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos a\cdot\cos\frac{a}{2}+sen\,a\cdot sen\frac{a}{2}}{sen\,a\cdot\cos\frac{a}{2}}$

$$=\frac{\cos\left(a-\frac{a}{2}\right)}{sen\,a\cdot\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{sen\,a\cdot\cos\frac{a}{2}}=\frac{1}{sen\,a}=\text{cossec}\,a$$

11.21) 1,02

11.22) Da igualdade dada, temos:

$$a\cdot tgx+b\cdot tgy=a\cdot tg\frac{x+y}{2}+b\cdot tg\frac{x+y}{2}$$

$$a\cdot tgx-a\,tg\frac{x+y}{2}=b\,tg\frac{x+y}{2}-b\,tg\,y$$

$$a\left(tgx-tg\frac{x+y}{2}\right)=b\left(tg\frac{x+y}{2}-tgy\right)$$

$$a.\frac{sen\left(x-\frac{x+y}{2}\right)}{\cos x.\cos\frac{x+y}{2}}=b.\frac{sen\left(\frac{x+y}{2}-y\right)}{\cos\frac{x+y}{2}.\cos y}$$

$\frac{a}{\cos x}=\frac{b}{\cos y}$ logo, $a\cos y=b\cos x$

11.23) a) $\frac{1}{2}\left[sen52°+sen28°\right]$ b) $\cos 6x+\cos 4x$ c) $\cos x-\cos 5x$

11.24) a) $y=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$ b) $y=-\frac{1}{4}$ c) $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

11.25) $y = sen\,7x$

11.26) $y=\frac{4a^2-1}{2}$

12.27) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=k\pi \text{ ou } x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.28) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.29) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.30) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.31) $S=\phi$

12.32) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.33) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=+k\pi\ \text{ ou }\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.34) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=a+2k\pi\ \text{ ou }\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.35) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.36) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-a+k\pi\ \text{ ou }\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.37) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ \text{ ou }\ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.38) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.39) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{k\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.40) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ \text{ ou }\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.41) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.42) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ \text{ ou }\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.43) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.44) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.45) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \text{ ou }\ x=\frac{3\pi\pm2\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.46) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{3\pi\pm4\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.47) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=2\,\mathrm{arc\,tg}\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.48) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{3}+k\pi\ \text{ ou }\ x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.49) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{k\pi}{2}\ \text{ ou }x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.50) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{2\pi\pm3\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.51) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\mathrm{arc\,tg}(-5)+k\pi\ \text{ ou }\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.52) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}\pm\mathrm{arc\,cos}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.53) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.54) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\ \text{ ou }\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

12.55) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

12.56) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

12.57) $S=\phi$

12.58) $S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

12.59) $S=\left\{\frac{7}{6}\right\}$

12.60) $S = \{0\}$

13.6) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

13.7) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{4} < x < 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \pi \right\}$

13.8) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \text{ ou } x = 2\pi \right\}$

13.9) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

13.10) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{5\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$

13.11) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \frac{\pi}{4} \le x \le \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \le x \le 2\pi \right\}$

13.12) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\pi \le x \le -\frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{4} < x \le \pi \right\}$

14.14) a) obtusângulo d) acutângulo
b) obtusângulo e) obtusângulo
c) retângulo

14.15) retângulo

14.16) a) $\hat{A} = 45°,\ \hat{B} = 60°,\ \hat{C} = 75°,\ S = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$

b) 1º) $c = \frac{\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2},\ \hat{B} = 45°,\ \hat{C} = 120°,\ S = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$

2º) $c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \hat{B} = 135°,\ \hat{C} = 30°,\ S = \frac{\sqrt{3}+1}{4}$

c) $c = \sqrt{2},\ \hat{A} = 135°,\ \hat{B} = 15°,\ S = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

d) 1º) $c = 1,\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$

2º) $c = \sqrt{3},\ \hat{A} = \hat{B} = 30°,\ \hat{C} = 120°$

e) $b = \sqrt{2}, c = \sqrt{3}+1,\ \hat{A} = 45°,\ \hat{B} = 30°$

14.17) $S = 60\sqrt{14}\text{cm}^2$

14.18) $a = \sqrt{6}-\sqrt{2}, b = 1,\ c = 2-\sqrt{3},\ \hat{C} = 15°, S = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$

14.19) 4,5 e 6

14.20) $a = 2\sqrt{2},\ b = \sqrt{3}+1,\ c = \sqrt{3}-1, \hat{A} = 90°,\ \hat{B} = 75°,\ \hat{C} = 15°, S = 1$

14.21) $a = 5\sqrt{2},\ b = 4\sqrt{2},\ c = 3\sqrt{2}, \hat{A} = 90°,\ \hat{B} = \text{arcsen}\frac{4}{5},\ \hat{C} = \text{arcsen}\frac{3}{5}, S = 12$

14.22) a) De $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$ e $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}$

tiramos $a\cos\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$ e $a\cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$

donde $b - a\cos\hat{C} = b - \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$

e $c - a\cos\hat{B} = c - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}$

Assim, $\frac{b - a\cos\hat{C}}{c - a\cos\hat{B}} = \frac{c}{b}$

Mas, pelo lei dos senos: $\frac{c}{b} = \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{B}}$, donde

$$\frac{b - a\cos\hat{C}}{c - a\cos\hat{B}} = \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{B}}$$

b) De $\cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ e $\cos\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

vem $c\cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$ e $b\cos\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$

donde $b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} = \frac{\left(a^2+b^2-c^2\right)+\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a$

c) Pelo exercício anterior, temos:

$b = a\cos\hat{C} + c\cos\hat{A}$

$a = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B}$

donde:

$c\cos\hat{A} = b - a\cos\hat{C}$

$c\cos\hat{B} = a - b\cos\hat{C}$

Assim:

$c\cos\hat{A} + c\cos\hat{B} = a + b - a\cos\hat{C} - b\cos\hat{C} =$

$= a + b - (a+b)\cos\hat{C} = (a+b)(1-\cos\hat{C})$

Isto é,

$(a + b)(1 - \cos\hat{C}) = c(\cos\hat{A} + \cos\hat{B})$

d) Da lei dos senos obtemos $a \operatorname{sen}\hat{B} = b \operatorname{sen}\hat{A}$
donde $b \operatorname{sen}\hat{A} - a \operatorname{sen}\hat{B} = 0$ (I)
Do exercício 14.22.b temos
$a\cos\hat{B} + b\cos\hat{A} = c$ (II)
somando (I) e (II), vem
$a\cos\hat{B} - a \operatorname{sen}\hat{B} + b\cos\hat{A} + b \operatorname{sen}\hat{A} = c$
ou seja, $a(\cos\hat{B} - \operatorname{sen}\hat{B}) + b(\cos\hat{A} + \operatorname{sen}\hat{A}) = c$

e) Temos $S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{1}{2} b \cdot \frac{\cos\hat{A}}{\operatorname{cotg}\hat{A}}$
donde $2S \operatorname{cotg}\hat{A} = bc\cos\hat{A}$
Por outro lado, $S = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{1}{2} ac \cdot \frac{\cos\hat{B}}{\operatorname{cotg}\hat{B}}$
Donde $2S \operatorname{cotg}\hat{B} = ac\cos\hat{B}$
Assim, $2S \operatorname{cotg}\hat{A} + 2S \operatorname{cotg}\hat{B} = ac\cos\hat{B} + bc\cos\hat{A}$
Isto é, $2S(\operatorname{cotg}\hat{A} + \operatorname{cotg}\hat{B}) = c(a\cos\hat{B} + b\cos\hat{A})$
Do exercício 14.22.b temos
$a\cos\hat{B} + b\cos\hat{A} = c$
Logo, $2S(\operatorname{cotg}\hat{A} + \operatorname{cotg}\hat{B}) = c^2$

f) Do exercício 14.22.b temos
$c\cos\hat{A} = b - a\cos\hat{C}$
e $c\cos\hat{B} = a - b\cos\hat{C}$
donde $c\cos\hat{A}\cos\hat{B} = b\cos\hat{B} - a\cos\hat{B}\cos\hat{C}$
e $c\cos\hat{A}\cos\hat{B} = a\cos\hat{A} - b\cos\hat{A}\cos\hat{C}$
então
$b\cos\hat{B} - a\cos\hat{B}\cos\hat{C} = a\cos\hat{A} - b\cos\hat{A}\cos\hat{C}$
ou $a\cos\hat{A} - b\cos\hat{B} = b\cos\hat{A}\cos\hat{C} - a\cos\hat{B}\cos\hat{C}$
e assim $a\cos\hat{A} - b\cos\hat{B} = \cos\hat{C}\,(b\cos\hat{A} - a\cos\hat{B})$.

14.23) aproximadamente 513m

14.24) 80m

14.25) aproximadamente 62m

14.26) $h = R(\operatorname{cossec}\alpha - 1)$

14.27) aproximadamente 164m

15.7) a) $[-1; 1]$ b) $[-3; 3]$ d) $[-3; -1]$ e) $[-3; 5]$

c) $[2; 4]$ f) $[0; 1]$

15.8) a) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le -1 \text{ ou } y \ge 1\}$ d) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le -2 \text{ ou } y \ge 6\}$
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le -2 \text{ ou } y \ge 2\}$ e) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge 1\}$
c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le -3 \text{ ou } y \ge -1\}$ f) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge 0\}$

15.9) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ne \frac{\pi}{5} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ne \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

15.10) a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ne \frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ne \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ne \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \ne \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

15.11) $f_{máx} = -4$; $f_{máx} = 2$

15.12) $f_{min} = 0$; $f_{máx} = 4$

15.13) $f_{min} = \frac{1}{2}$

15.14) $f_{máx} = 10$

15.15) $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

15.16) a) ímpar b) par c) par d) ímpar

16.17) a) $\frac{\pi}{2}$ b) 4π c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{2}$ e) $\frac{4\pi}{3}$ f) 1 g) 5 h) $\frac{2\pi}{|n|}$

16.18) a) π b) 2π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{2\pi}{3}$

16.19) $f(x) = 4\text{sen}\frac{x}{3}$ ou $f(x) = -4\text{sen}\frac{x}{3}$

16.20) $k = q\pi$, com q racional positivo.

16.21) $\frac{2\pi}{5}$

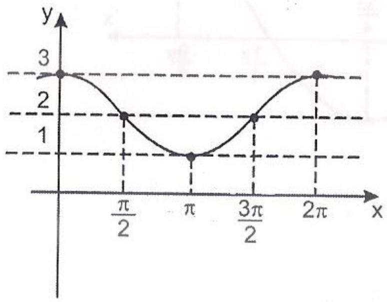
16.22) a) 6π c) $\frac{3\pi}{2}$

b) 6π d) 80π

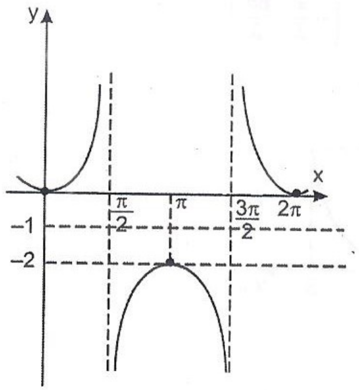
16.23) a) 2π b) $\frac{2\pi}{3}$

16.24) a) π b) 2π c) 4π

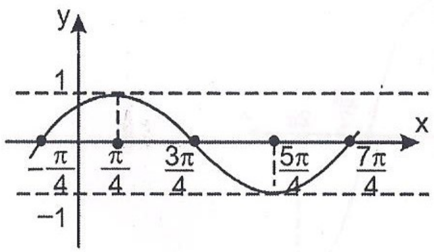
16.25) a)



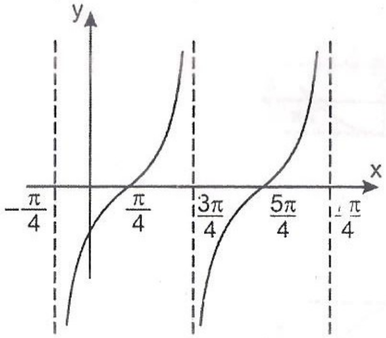
b)



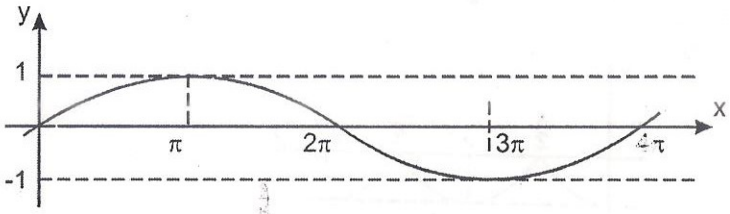
c)



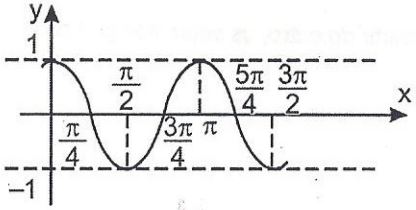
d)



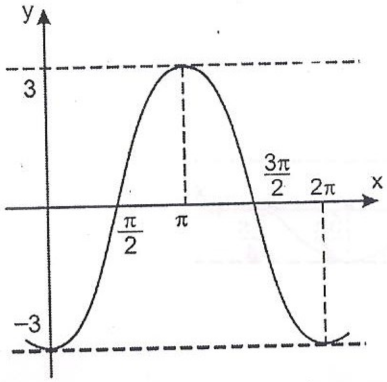
16.26) a)



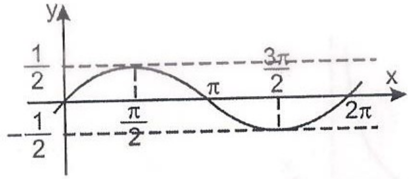
b)



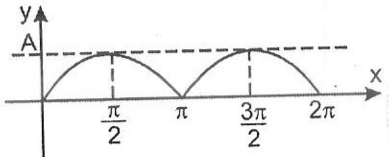
c)



d)

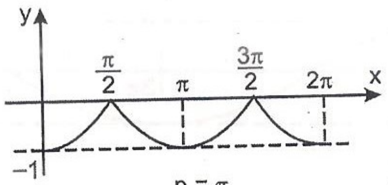


16.27) a)



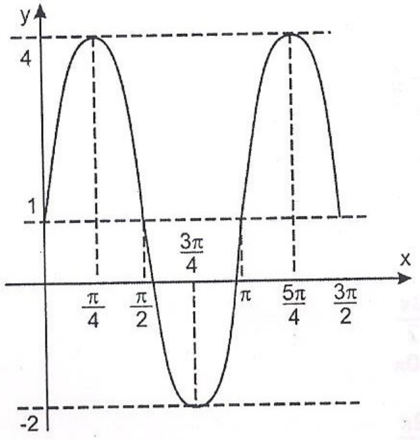
$p = \pi$

b)

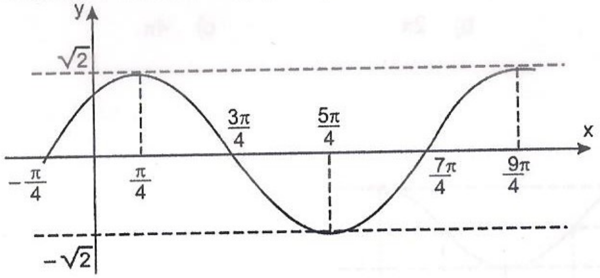


$p = \pi$

16.28) Sugestão: construa, um a partir do outro, os seguintes gráficos:
(1) sen x
(2) sen 2x
(3) 3sen 2x
(4) 1 + 3sen 2x = g(x)



16.29) Sugestão: transforme g(x) em produto.

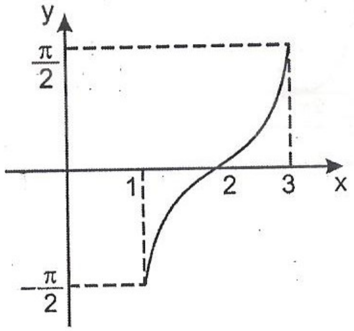


17.7) a) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$ b) $[-8; -4]$

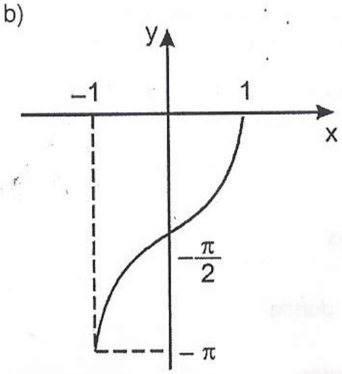
17.8) a) $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ c) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

b) $[-2\pi; 0]$ d) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{8\pi}{3}\right]$

17.9) a)



b)



17.10) a) $]-2\pi;\ 2\pi[$ c) $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$

b) $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$ d) $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$

17.11) função ímpar

17.12) a função não é par, nem ímpar

17.13) função ímpar

17.14) a função não é par, nem ímpar

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) $\frac{\ell_2^2 - \ell_1^2}{2\alpha}$

I.2) 1cm

I.3) $S = \{(120°;\ 150°)\}$

I.4) Grado – é um arco unitário $\widehat{PQ}$ igual a $\frac{1}{400}$ da circunferência; $\pi x = 200\alpha$.

I.5) 10m; 30m e $10\sqrt{7} \cong 26{,}5$m

I.6) 44° e 46°

I.7) $\frac{9+4\sqrt{2}}{9}$

I.8) $\text{sen}^2\alpha\ \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ e $\cos^2\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

I.9) a) $\frac{m^2-1}{2}$

b) $\frac{2}{m^2-1}$

I.10) $y = a - 2$

II.1) a) 0,2250
b) 0,5736
c) 1,540
d) 0
e) –2
f) 1,1547

II.2) $\text{sen}x = \frac{1}{2}$ e $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou então $\text{sen}x = \frac{1}{3}$ e $\cos x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

II.3) $\text{sen}x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$ e $\cos x = \pm\frac{2}{3}$ ou então $\text{sen}x = \pm\frac{2}{3}$ e $\cos x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$
(sempre sen x e cos x com mesmo sinal)

II.4) $\text{sen}x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
(quatro combinações possíveis entre os sinais)

II.5) $\operatorname{sen}x = 0$ e $\cos x = 1$ ou então $\operatorname{sen}x = \dfrac{2a}{a^2+1}$ e $\cos x = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

II.6) $\operatorname{sen}x = 1$ e $\cos x = 0$ ou então $\operatorname{sen}x = \dfrac{2m}{m^2+1}$ e $\cos x = \dfrac{m^2-1}{m^2+1}$

II.7) $$\frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\theta}{\sec^2\theta} = \left(1-\operatorname{tg}^2\theta\right).\cos^2\theta =$$
$$= \cos^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta \cdot \cos^2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta =$$
$$= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$$

II.8) $$1 + (1+2\operatorname{tg}^2x)\operatorname{sen}^2x = 1 + (1+2\operatorname{tg}^2x)(1-\cos^2x) =$$
$$= 1 + (1 - \cos^2x + 2\operatorname{tg}^2x - 2\operatorname{tg}^2x\cos^2x) =$$
$$= 2 - \cos^2x + 2\operatorname{tg}^2x - 2\operatorname{sen}^2x =$$
$$= 2 - \cos^2x + 2\operatorname{tg}^2x - 2(1-\cos^2x) =$$
$$= 2 - \cos^2x + 2\operatorname{tg}^2x - 2 + 2\cos^2x =$$
$$= 2\operatorname{tg}^2x + \cos^2x$$

II.9) $\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$

II.10) $$\frac{4+4\operatorname{tg}x+\operatorname{cotg}x}{4\operatorname{tg}x-\operatorname{cotg}x} = \frac{4+\dfrac{4\operatorname{sen}x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}}{\dfrac{4\operatorname{sen}x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}} =$$
$$= \frac{4\operatorname{sen}x\cos x + 4\operatorname{sen}^2x + \cos^2 x}{4\operatorname{sen}^2x - \cos^2x} =$$
$$= \frac{(2\operatorname{sen}x+\cos x)^2}{(2\operatorname{sen}x-\cos x)(2\operatorname{sen}x+\cos x)} = \frac{2\operatorname{sen}x+\cos x}{2\operatorname{sen}x-\cos x}$$

II.11) $$\frac{\cos^4x-\operatorname{sen}^4x}{\sqrt{2}-\sec x} = \frac{(\cos^2x+\operatorname{sen}^2x)(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)}{\sqrt{2}-\sec x} =$$
$$= \frac{\cos^2x-\operatorname{sen}^2x}{\sqrt{2}-\sec x} = \frac{(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)(\sqrt{2}+\sec x)}{2-\sec^2x} =$$
$$= \frac{[\cos^2x-(1-\cos^2x)](\sqrt{2}+\sec x)}{2-\dfrac{1}{\cos^2x}} =$$
$$\frac{\cos^2x\cdot(2\cos^2x-1)(\sqrt{2}+\sec x)}{2\cos^2x-1} =$$
$$= \cos^2x\cdot(\sqrt{2}+\sec x)$$

II.12) Temos $y = \operatorname{sen}\alpha\,(1+\operatorname{tg}\alpha) + \cos\alpha\,(1+\operatorname{cotg}\alpha) - \sec\alpha =$
$$= \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha + \cos\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha - \sec\alpha =$$
$$= (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\cdot\operatorname{cotg}\alpha) + (\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha) - \sec\alpha =$$
$$= \left(\operatorname{sen}\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right) + \left(\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha\right) - \sec\alpha =$$
$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} - \sec\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Por outro lado, se $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$, temos

$$\sec^2\alpha = 1+\operatorname{tg}^2\alpha = 1+\frac{b^2}{a^2-b^2} = \frac{b^2}{a^2-b^2},\quad \text{donde}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}\quad \text{e então}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{b}{a}$$

Finalmente, $y = \pm\dfrac{b}{a}$.

II.13) $y = \operatorname{sen}x$

II.14) $y = \sqrt{2}\operatorname{cossec}\alpha$

II.15) $y = 1$

II.16) $\cos x = \sqrt{\dfrac{b}{a+b}}, \operatorname{tg}x = \sqrt{\dfrac{a}{b}}, \operatorname{cotg}x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$

$\sec x = \sqrt{\dfrac{a+b}{b}}, \operatorname{cossec}x = \sqrt{\dfrac{a+b}{a}}$

II.17) $\operatorname{sen}x = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}, \operatorname{tg}x = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}, \operatorname{cotg}x = \dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

$\sec x = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, \operatorname{cossec}x = \dfrac{a^2+b^2}{2ab}$

II.18) $\operatorname{sen}x = -\sqrt{\dfrac{a-b}{2a}}, \cos x = -\sqrt{\dfrac{a+b}{2a}}, \operatorname{cotg}x = \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$

$\sec x = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2},\ \operatorname{cossec}x = -\sqrt{\dfrac{2a}{a-b}}$

II.19) $\operatorname{sen}x = \dfrac{2\sqrt{mn}}{m+n}, \cos x = \dfrac{m-n}{m+n}, \operatorname{tg}x = \dfrac{2\sqrt{mn}}{m-n}$

$\sec x = \dfrac{m+n}{m-n}$, $\text{cossec}\, x = \dfrac{m+n}{2\sqrt{mn}}$

II.20) $\cos x = \dfrac{m^2-1}{m^2+1}$

II.21) $m = 0$ ou $m = -2$

II.22) $m = 0$ ou $m = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

II.23) $\dfrac{a(3-a^2)}{2}$

II.24) $\dfrac{2[4-3(a^2-1)^2]}{(a^2-1)^3}$

II.25) $\text{tg}^2\theta \cdot \sec\theta + \text{sen}^2\theta\,(\sec\theta + \cos\theta) =$
$= (\sec^2\theta - 1)\sec\theta + \text{sen}^2\theta\,(\sec\theta + \cos\theta) =$
$= \sec^3\theta - \sec\theta + \text{sen}^2\theta \cdot \sec\theta + \text{sen}^2\theta\cos\theta =$
$= \sec^3\theta - \sec\theta\,(1 - \text{sen}^2\theta) + \text{sen}^2\theta\cos\theta =$
$= \sec^3\theta - \sec\theta \cdot \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta\cos\theta =$
$= \sec^3\theta - \cos\theta + \text{sen}^2\theta\cos\theta =$
$= \sec^3\theta - \cos\theta\,(1 - \text{sen}^2\theta) =$
$= \sec^3\theta - \cos^3\theta$

II.26) aproximadamente $-0{,}9$

II.27) $S = \left\{-\dfrac{\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{12}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{11\pi}{12}\right\}$

II.28) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

II.29) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}$

II.30) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

II.31) $S = \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

II.32) $S = \{1\}$

II.33) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

II.34) $\dfrac{\sqrt{1+a^2}}{a}$

II.35) $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}; \text{arc tg}\, 3; \pi + \text{arc tg}\, 3\right\}$

II.36) $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{3}\right\}$

II.37) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

II.38) $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{3}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

II.39) $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}; \dfrac{5\pi}{4}; \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

II.40) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

III.1) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

III.2) $y = -1$

III.3) $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

III.4) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, donde $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. Então,

$\text{sen}(\beta - 2\alpha) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha - 2\alpha\right) = \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - 3\alpha\right) = \cos 3\alpha$

III.5) $\dfrac{2\sqrt{5}+5}{15}$

III.6) $\text{cotg}(a+b) = \dfrac{\cos(a+b)}{\text{sen}(a+b)} = \dfrac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a} =$

$$= \dfrac{\dfrac{\cos a \cdot \cos b}{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b} - \dfrac{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}}{\dfrac{\text{sen}\, a \cdot \cos b}{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b} + \dfrac{\text{sen}\, b \cdot \cos a}{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}} = \dfrac{\text{cotg}\, a \cdot \text{cotg}\, b - 1}{\text{cotg}\, b + \text{cotg}\, a}$$

III.7) $y = 4$

III.8) $y = -\text{tg}\, 3\alpha$

III.9) $y = \dfrac{a-b}{a+b}$

III.10) $A + B = \pi - C$

$\text{cotg}\,(A + B) = \text{cotg}\,(\pi - C)$

Utilizando a expressão do exercício III.6, vem:

$$\dfrac{\text{cotg}\, A \cdot \text{cotg}\, B - 1}{\text{cotg}\, A + \text{cotg}\, B} = -\text{cotg}\, C$$

$\text{cotg}\, A \cdot \text{cotg}\, B - 1 = -\text{cotg}\, A \cdot \text{cotg}\, C - \text{cotg}\, B \cdot \text{cotg}\, C$

e então $\text{cotg}\, A \cdot \text{cotg}\, B + \text{cotg}\, A \cdot \text{cotg}\, C + \text{cotg}\, B \cdot \text{cotg}\, C = 1$

III.11) $\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

III.12) $-\dfrac{31}{32}$

III.13) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

III.14) a) $2\,\text{sen}\,\alpha - \sec\alpha = 2\,\text{sen}\,\alpha - \dfrac{1}{\cos\alpha} =$

$$= \dfrac{2\,\text{sen}\,\alpha \cos\alpha - 1}{\cos\alpha} = \dfrac{\text{sen}\, 2\alpha - 1}{\cos\alpha} = \sec\alpha(\text{sen}\, 2\alpha - 1)$$

b) $2\cos\alpha - \sec\alpha = 2\cos\alpha - \dfrac{1}{\cos\alpha} =$

$$= \dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

III.15) $(1^\circ)\,\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\,(2^\circ)$

III.16) $y = 4\cos 2n\alpha$

III.17) $y = 1 - m$

III.18) $y = \cos^2 x$

III.19) $y = 1 - \sqrt{2}$

III.20) $y = 1$

III.21) $y = 2\cos\alpha$

III.22) $\text{sen}(a + b) \cdot \text{sen}(b - a)$

III.23) $4\cos\dfrac{a}{2} \cdot \cos\dfrac{b}{2} \cdot \cos\dfrac{c}{2}$

III.24) $-\dfrac{2\,\text{sen}(2a+2b)}{\text{sen}\, 2a \cdot \text{sen}\, 2b}$

III.25) $y = 4$

IV.1) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{4\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

IV.2) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{-2\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2} \text{ e } x \neq -\dfrac{2\pi}{5} + 2k_1\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ e } k_1 \in \mathbb{Z}\right\}$

IV.3) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = -\dfrac{3\pi}{4} \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

IV.4) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

IV.5) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = k\pi \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

IV.6) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = k\pi \text{ ou } x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

IV.7) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{6} \text{ ou } x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

IV.8) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \dfrac{k\pi}{3} \text{ ou } x = \arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

IV.9) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

IV.10) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

IV.11) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=\frac{\pi}{12}\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

IV.12) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

IV.13) $S=\left\{0;\frac{\sqrt{5}}{6};-\frac{\sqrt{5}}{6}\right\}$

IV.14) $S=\phi$

IV.15) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=-\frac{\pi}{3}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

IV.16) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=\frac{2\pi}{3}<x\le\frac{7\pi}{6}\right\}$

IV.17) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=\pm\pi\ \text{ou}\ -\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}\right\}$

IV.18) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\ \text{ou}\ \frac{3\pi}{4}<x<\pi\ \text{ou}\ \frac{5\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{2}\ \text{ou}\ \frac{7\pi}{4}<x<2\pi\right\}$

IV.19) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}\ \text{ou}\ \frac{5\pi}{6}<x<\frac{3\pi}{2}\right\}$

IV.20) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{k\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

V.1) obtusângulo

V.2) $b = 31cm,\ c = 50cm,\ \hat{C} = 30°,\ S = 573{,}5\ cm^2$

V.3) $a = 2,\ \hat{B} = 75°,\ \hat{C} = 60°,\ S=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

V.4) $\hat{A} = 120°,\ \hat{B} = 15°,\ \hat{C} = 45°,\ S = 3-\sqrt{3}$

V.5) $S \cong 1805\ cm^2$

V.6) $c=\sqrt{6}+\sqrt{2},\ \hat{B}=15°,\ \hat{C}=105°,\ S=\sqrt{3}$

V.7) $a=2\sqrt{6},\ b=2\sqrt{3}+2,\ c=4,\ \hat{C}=45°,\ S=2(3+\sqrt{3})$

V.8) 1º) $c=1,\ \hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=60°$

2º) $c=\sqrt{3},\ \hat{A}=\hat{B}=30°,\ \hat{C}=120°$

V.9) Temos $S=\frac{1}{2}ah$, $S=\frac{1}{2}ab\ \text{sen}\ \hat{C}$ e $S=\frac{1}{2}ac\ \text{sen}\ \hat{B}$

Então $ah = ab\ \text{sen}\ \hat{C}$ e $ah = ac\ \text{sen}\ \hat{B}$

ou seja: $h = b\ \text{sen}\ \hat{C}$ e $h = c\ \text{sen}\ \hat{B}$

Assim,

$h\ \text{cotg}\ \hat{B} = c\ \text{sen}\ \hat{B}\ \text{cotg}\ \hat{B} = c\cos\hat{B}$

e $h\ \text{cotg}\ \hat{C} = b\ \text{sen}\ \hat{C}\ \text{cotg}\ \hat{C} = b\cos\hat{C}$

onde

$h\ \text{cotg}\ \hat{B} + h\ \text{cotg}\ \hat{C} = b\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} = a$

(conforme o exercício nº 14.22.b).

Portanto,

$$h=\frac{a}{\text{cotg}\ \hat{B}+\text{cotg}\ \hat{C}}$$

V.10) Temos $\cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ e $\cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

donde $\frac{\cos\hat{C}}{\cos\hat{B}}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}\cdot\frac{c}{b}$

$$\frac{b}{c}\cdot\frac{\cos\hat{C}}{\cos\hat{B}}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$$

Mas $\frac{b}{c}=\frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{C}}$, logo $\frac{\text{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C}}{\text{sen}\hat{C}\cdot\cos\hat{B}}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$

ou seja, $\frac{\text{tg}\hat{B}}{\text{tg}\hat{C}}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$

V.11) $H = h\left[1 + \dfrac{tg\ \alpha}{tg\ \beta}\right]$

$d = \dfrac{h}{tg\ \beta}$

V.12) $c = d \cdot \dfrac{tg\ \beta + tg\ \alpha}{tg\ \beta - tg\ \alpha}$

VI.1) a) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \text{ e } x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) não pois, $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

VI.2) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \le x \le \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$I(f) = [0;\ 1]$

VI.3) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$I(f) = [-1;\ 0]$

VI.4) $I(f) = [A - B;\ A + B]$

VI.5) $A = -4$, $B = 2$

VI.6) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$I(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \le -2 \text{ ou } y \ge 2\}$

VI.7) π

VI.8) $\pi/2$

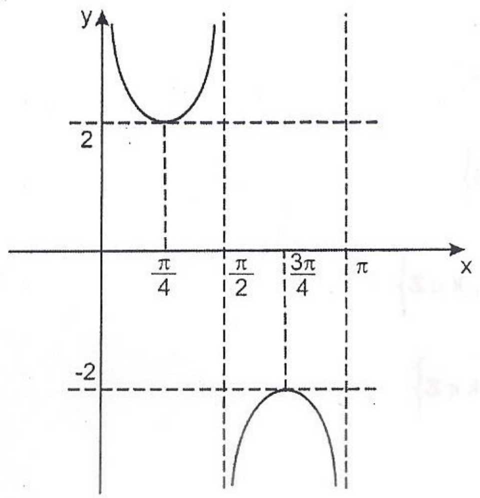
VI.9) $\pi/4$

VI.10) $\dfrac{2\pi}{3}$; $I(f) = [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$

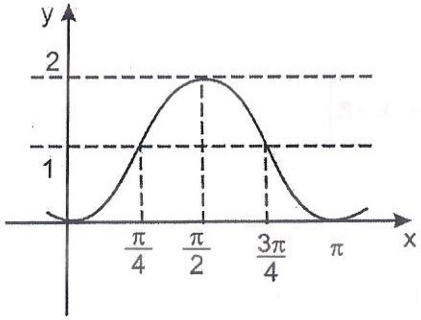
VI.11) a) $f(x) = \cos x$ b) $f(x) = \text{sen } x$ c) $f(x) = -\text{sen } x$ d) $f(x) = -\cos x$

VI.12) A = 1; B = 2; C = 3

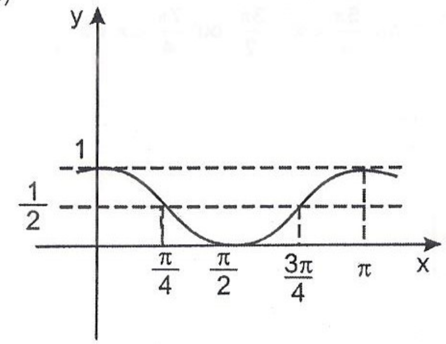
VI.13)



VI.14)



VI.15)



VI.16) a) ímpar b) par c) ímpar

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

g°	sen	tg	cotg	cos	
0	0,000 0	0,000		1,000 0	90
1	0,017 5	0,017 5	57,29	0,999 8	89
2	0,034 9	0,034 9	28,64	0,999 4	88
3	0,052 3	0,052 4	19,08	0,998 6	87
4	0,069 8	0,069 9	14,30	0,997 6	86
5	0,087 2	0,087 5	11,43	0,996 2	85
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5	84
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5	83
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3	82
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7	81
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8	80
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6	79
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1	78
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4	77
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3	76
15	0,258 8	0,267 9	3,732	0,965 9	75
16	0,275 6	0,286 7	3,487	0,961 3	74
17	0,292 4	0,305 7	3,271	0,956 3	73
18	0,309 0	0,324 9	3,078	0,951 1	72
19	0,325 6	0,344 3	2,904	0,945 5	71
20	0,342 0	0,364 0	2,747	0,939 7	70
21	0,358 4	0,383 9	2,605	0,933 6	69
22	0,374 6	0,404 0	2,475	0,927 2	68
23	0,390 7	0,424 5	2,356	0,920 5	67
24	0,406 7	0,445 2	2,246	0,913 5	66
25	0,422 6	0,466 3	2,145	0,906 3	65
26	0,438 4	0,487 7	2,050	0,898 8	64
27	0,454 0	0,509 5	1,963	0,891 0	63
28	0,469 5	0,531 7	1,881	0,882 9	62
29	0,484 8	0,554 3	1,804	0,874 6	61
30	0,500 0	0,577 4	1,732	0,866 0	60
31	0,515 0	0,600 9	1,664	0,857 2	59
32	0,529 9	0,624 9	1,600	0,848 0	58
33	0,544 6	0,649 4	1,540	0,838 7	57
34	0,559 2	0,674 5	1,483	0,829 0	56
35	0,573 6	0,700 2	1,428	0,819 2	55
36	0,587 8	0,726 5	1,376	0,809 0	54
37	0,601 8	0,753 6	1,327	0,798 6	53
38	0,615 7	0,781 3	1,280	0,788 0	52
39	0,629 3	0,809 8	1,235	0,777 1	51
40	0,642 8	0,839 1	1,192	0,766 0	50
41	0,656 1	0,869 3	1,150	0,754 7	49
42	0,669 1	0,900 4	1,111	0,743 1	48
43	0,682 0	0,932 5	1,072	0,731 4	47
44	0,694 7	0,965 7	1,036	0,719 3	46
45	0,707 1	1,000 0	1,000	0,707 1	45
	cos	cotg	tg	sen	g°

COMBINATÓRIA MATRIZES E DETERMINANTES

AREF ANTAR NETO
NILTON LAPA
JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO
SIDNEY LUIZ CAVALLANTTE

COMBINATÓRIA MATRIZES E DETERMINANTES

Noções de Matemática

Capa:
Ricardo van Steen

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

Combinatória, matrizes e determinantes : 2º grau /
C724 Aref Antar Neto . . . (et al.). — São Paulo : Ed. Moderna, 1979.
(Noções de matemática ; v.4)

1. Determinantes 2. Matemática (2º grau) 3. Matrizes I. Antar Neto, Aref, 1949–

17. CDD–512.896
18. –512.943
17. –512.83

79-1367

Índices para catálogo sistemático:

1. Determinantes : Álgebra 512.83 (17.) 512.943 (18.)
2. Matrizes : Álgebra 512.896 (17.) 512.943 (18.)

Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tels.: 61-2235 - 240-2637 - 531-1730 - 531-3768
CEP 04511 - São Paulo - SP - Brasil

1979

Impresso no Brasil

2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

Índice

Parte I

Capítulo 1. **O conceito de matriz** 3

1.1 — Matriz 3
1.2 — Ordem de uma matriz 4
1.3 — Matriz quadrada 4
1.4 — Notação geral 4
1.5 — Diagonal principal — diagonal secundária 6
1.6 — Algumas matrizes importantes 9
1.7 — Igualdade de matrizes 11

Capítulo 2. **Operações com matrizes** 15

2.1 — Adição de matrizes 15
2.2 — Multiplicação de uma matriz por um número real 19
2.3 — Multiplicação de matrizes 26
2.4 — A matriz inversa 45
Exercícios suplementares 59

Parte II

Capítulo 3. **Cálculo de determinantes** 65

3.1 — Definições 65
3.2 — Menor e cofator 69
3.3 — Definição de determinante 71
3.4 — Teorema de Laplace 73

Capítulo 4. **Propriedades dos determinantes** 79

4.1 — Determinante da matriz transposta 79
4.2 — Troca de filas 80
4.3 — Filas iguais 82
4.4 — Fila nula 84

4.5 — Multiplicação de uma fila por uma constante 84
4.6 — Filas proporcionais 87
4.7 — Adição de determinantes 93
4.8 — Teorema de Cauchy 97
4.9 — Adição de filas 100
4.10 — Abaixamento da ordem de um determinante 116
4.11 — A matriz de Vandermonde 121

Capítulo 5. **Outros temas importantes** 126
5.1 — Determinante do produto de matrizes 126
5.2 — Comatriz 126
5.3 — Matrizes invertíveis 129
Exercícios suplementares 134

Parte III

Capítulo 6. **Generalidades** 141
6.1 — Equações lineares 141
6.2 — Sistema de equações lineares 143
6.3 — Expressão matricial de um sistema linear 146
6.4 — Classificação de um sistema linear 150
6.5 — Sistemas de Cramer 150

Capítulo 7. **Resolução de sistemas lineares: o escalonamento** 156
7.1 — Sistemas equivalentes 156
7.2 — Sistemas escalonados 160
7.3 — Método de eliminação de Gauss 164
7.4 — Sistemas homogêneos de equações lineares 176

Capítulo 8. **Outros temas importantes** 185
8.1 — Operações elementares sobre linhas 185
8.2 — Matrizes equivalentes por linhas 185
8.3 — Matriz escalonada 186
8.4 — Característica de uma matriz 188
8.5 — Teorema de Rouché-Capelli 192
Exercícios suplementares 197

Parte IV

Capítulo 9. **Processos básicos de contagem** 201
9.1 — Introdução 201
9.2 — Diagramas de árvore 207
9.3 — Princípio fundamental da contagem (regra do produto) 211
9.4 — O problema do número de subconjuntos 224
9.5 — O problema do número de funções 226
9.6 — O problema do número de divisores 228

Capítulo 10. **Fatorial** 232
10.1 — Definição 232
10.2 — Função fatorial 233

Capítulo 11. **Combinações simples e arranjos simples** 241
11.1 — Introdução e conceitos iniciais 241
11.2 — Definições 242
11.3 — Arranjo ou combinação? 245

Capítulo 12. **Cálculo do número de arranjos e de combinações** 249
12.1 — Introdução 249
12.2 — Cálculo do número de arranjos 249
12.3 — Cálculo do número de combinações 255

Capítulo 13. **Problemas de arranjos e combinações** 261
13.1 — Os problemas gerais 261
13.2 — O problema do número de funções injetoras 273
13.3 — O problema do número de submatrizes e menores 276

Capítulo 14. **Permutações simples** 278
14.1 — Definição 278
14.2 — O problema do número de funções bijetoras 286

Capítulo 15. **Permutações com repetição** 289
15.1 — O conceito 289
15.2 — Cálculo do número de permutações com repetição 289
Exercícios suplementares 295

Parte V

Capítulo 16. **Números binomiais** 299
16.1 — Introdução 299
16.2 — Definição de número binomial 299
16.3 — Soma dos números binomiais de mesmo numerador 300
16.4 — Números binomiais complementares 302
16.5 — Números binomiais consecutivos 307
16.6 — Relação de Stifel 309

Capítulo 17. **O Triângulo de Pascal** 313
17.1 — O Triângulo de Pascal 313
17.2 — Uma nota histórica 316

Capítulo 18. **Binômio de Newton** 318
18.1 — Introdução: como desenvolver $(x + a)^n$ 318
18.2 — Desenvolvimento de $(x - a)^n$ 321
18.3 — Fórmulas do termo geral 325
18.4 — Algumas aplicações do Binômio de Newton 332
Exercícios suplementares 335

Parte VI

Capítulo 19. **Complementos da análise combinatória** 339
19.1 — Permutações circulares 339
19.2 — Arranjos com repetição 342
19.3 — Combinações com repetição 346
Exercícios suplementares 353

Parte VII

Capítulo 20. **Noções de probabilidade** 357
20.1 — Experimento aleatório — resultados equiprováveis 357
20.2 — Espaço amostral – evento 358
20.3 — Probabilidade 361

Capítulo 21. **Soma de probabilidades** 371

Capítulo 22. **Produto de probabilidades** 377
22.1 — Exemplos iniciais 377
22.2 — Probabilidade condicional 379
22.3 — Probabilidade da interseção 383

Capítulo 23. **Distribuição binomial** 390
23.1 — Introdução 390
23.2 — Expressão da distribuição binomial 393
Exercícios suplementares 397

Respostas dos exercícios propostos 399
Respostas dos exercícios suplementares 439

PARTE I

Capítulo 1 — **O conceito de matriz**

Capítulo 2 — **Operações com matrizes**

Capítulo

1 O conceito de matriz

1.1 — MATRIZ

A uma tabela de números, dispostos em *linhas* e *colunas*, colocados entre "colchetes", damos o nome de **matriz**. Os números que a constituem são seus elementos.

Exemplos

1º) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ← linha

2º) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ \sqrt{3} & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix}$
↑ coluna

3º) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \\ 10 & 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

4º) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \\ \frac{1}{3} & -1 \\ 1 & 12 \end{bmatrix}$

As linhas são numeradas de "cima para baixo" e as colunas, "da esquerda para a direita"; assim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 6 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & -2 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow 1^{a} \text{ linha} \\ \leftarrow 2^{a} \text{ linha} \\ \leftarrow 3^{a} \text{ linha} \\ \leftarrow 4^{a} \text{ linha} \end{matrix}$$

↑ 1ª coluna ↑ 2ª coluna ↑ 3ª coluna

1.2 – ORDEM DE UMA MATRIZ

A **ordem de uma matriz** é dada pelo número de linhas e o número de colunas que a constituem.

Para indicá-la, escreve-se em primeiro lugar o número de linhas e, em seguida, o número de colunas, colocando-se entre esses dois números o sinal X.

No 1º exemplo, acima, a matriz é de **ordem** 2 X 2 (lê-se: *"dois por dois"*); no 2º exemplo, a matriz é de **ordem** 2 X 3 (lê-se: *"dois por três"*); no 3º exemplo, a matriz é de **ordem** 3 X 4, e, no 4º exemplo, a matriz é 4 X 2.

Podemos então dizer que uma **matriz de ordem m X n**, ou simplesmente **matriz m X n**, é uma tabela de números distribuídos em **m** linhas e **n** colunas. Observe, então, que o número de elementos que a constituem é **m · n**.

1.3 – MATRIZ QUADRADA

Matriz quadrada é uma matriz constituída pelo mesmo número de linhas e de colunas.

Se uma matriz quadrada é de ordem **n** X **n**, isto é, se possui **n** linhas e **n** colunas, diz-se que ela é uma **matriz quadrada de ordem n**.

Exemplos

1º) A matriz A = [3] é quadrada de ordem 1.

2º) A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 2.

3º) A matriz $C = \begin{bmatrix} -7 & 3 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 9 & 14 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 3.

1.4 – NOTAÇÃO GERAL

Para representarmos a matriz A, m X *n*, *indicamos* cada um de seus elementos com uma letra minúscula afetada de dois índices, que indicam a posição ocupada por esse elemento na matriz.

Assim, um *elemento genérico* da matriz A será representado por:

$$a_{ij}$$

O primeiro índice, i, indica a linha a que esse elemento pertence, e o segundo índice, j, a coluna a que esse elemento pertence:

$$A = \begin{bmatrix} & & \\ & a_{ij} & \\ & & \end{bmatrix} \leftarrow \text{i-ésima linha}$$

↑ j-ésima coluna

Exemplos

1º) Na matriz de ordem 2 X 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

a_{11} (lê-se: *"a um um"*) é o elemento que ocupa a 1ª linha e a 1ª coluna; a_{12} (lê-se: *"a um dois"*) é o elemento que ocupa a 1ª linha e a segunda coluna; a_{23} (lê-se: *"a dois três"*) é o elemento que ocupa a segunda linha e a terceira coluna.

2º) Na matriz

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \text{ tem-se:}$$

$a_{11} = 8$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 3$, $a_{31} = 3$ e $a_{32} = -2$.

Em geral, a matriz A, de ordem m X n, é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, com a *notação abreviada*:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

1.5 – DIAGONAL PRINCIPAL – DIAGONAL SECUNDÁRIA

Em uma matriz quadrada:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

o conjunto de seus elementos a_{ij}, tais que $i = j$, chama-se **diagonal principal**; o conjunto de seus elementos tais que $i + j = n + 1$ chama-se **diagonal secundária**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal secundária

Exercícios Resolvidos

1.1) Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 7 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

a) Qual é a sua ordem?
b) Quantos elementos ela possui?
c) Complete: $a_{41} = \dots$ $a_{22} = \dots$ $a_{32} = \dots$ $a_{13} = \dots$
d) Se $a_{ij} = 0$, então $i = \dots$ e $j = \dots$

Solução

a) A matriz é constituída por 4 linhas e por 3 colunas; sua ordem é 4×3.
b) Ela possui $4 \cdot 3 = 12$ elementos.
c) $a_{41} = 7$, $a_{22} = 4$, $a_{32} = 3$ e $a_{13} = 7$.
d) Na matriz, $a_{21} = 0$ e daí, $i = 2$ e $j = 1$.

1.2) Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ para a qual $a_{ij} = i^2 - j$.

Solução

Observe que a *definição* dada:

$$a_{ij} = i^2 - j$$

indica como se obtém um elemento qualquer de A: *eleva-se o seu primeiro índice ao quadrado e desse quadrado subtraímos o seu segundo índice*; então:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2-1 & 1^2-2 & 1^2-3 \\ 2^2-1 & 2^2-2 & 2^2-3 \\ 3^2-1 & 3^2-2 & 3^2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

1.3) Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ para a qual:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{se } i < j \\ 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i > j \end{cases}$$

Solução

Observe que na matriz quadrada de ordem 4:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

os elementos para os quais $i = j$ pertencem à *diagonal principal*, e eles todos são iguais a 1; aqueles para os quais $i < j$ estão "acima da diagonal principal", e para calculá-los somamos os seus índices; e, aqueles para os quais $i > j$ estão "abaixo da diagonal principal", e eles todos são iguais a zero.

Então:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios Propostos

1.4) Seja a matriz de ordem $m \times n$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} 600 & 621 & \dots & 517 \\ 407 & 440 & \dots & 330 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 706 & 850 & \dots & 1000 \end{bmatrix}$$

a) Quantos elementos ela possui?
b) Complete: $a_{21} = \dots$ $a_{m2} = \dots$ $a_{1n} = \dots$ $a_{mn} = \dots$

1.5) Uma matriz possui 6 elementos. Qual é a sua ordem?

1.6) Numa matriz quadrada de ordem n quantos elementos não pertencem à *diagonal principal*?

1.7) Numa matriz, chamam-se *elementos internos* aqueles que não pertencem à primeira ou à última linha ou coluna. Quantos elementos internos possui uma matriz 5×6?

1.8) Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ para a qual $a_{ij} = 3i - j^2$.

1.9) Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ para a qual:

$$a_{ij} = \begin{cases} i, & \text{se } i < j \\ 0, & \text{se } i = j \\ j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

1.10) O símbolo **delta de Kronecker** é definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$$

Construa a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$ para a qual $a_{ij} = 3i + j^2 \cdot \delta_{ij}$.

1.11) Seja a *matriz quadrada* de ordem n: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$. Denomina-se **traço da matriz A** à soma $a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$ dos elementos da diagonal principal de A; indica-se:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Considere a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ para a qual $a_{ij} = i \cdot j$; determine tr(A).

1.6 — ALGUMAS MATRIZES IMPORTANTES

1ª) Matriz linha

É a matriz constituída por uma única linha.

Exemplos

a) $A = [-1 \quad 3]$ b) $B = [4 \quad 4 \quad -5 \quad 2]$

2ª) Matriz coluna

É a matriz constituída por uma única coluna.

Exemplos

a) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 7 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

3ª) Matriz diagonal

É a matriz *quadrada* na qual os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4ª) Matriz identidade

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

Será representada por **I**.

Por exemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se quisermos colocar em evidência que a sua ordem é **n**, escrevemos I_n. Assim:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para a matriz identidade $I_n = [a_{ij}]_{n \times n}$ tem-se:

$$a_{ij} = \left\{ \begin{matrix} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{matrix} \right\} = \delta_{ij}$$

5ª) Matriz nula

É uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero. Será representada por **O**

Por exemplo:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se quisermos colocar em evidência a sua ordem, escrevemos $O_{m \times n}$. Assim:

$$O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6ª) Matriz transposta

Seja a matriz A. Chama-se **matriz transposta** de A à matriz obtida de A, trocando-se, "ordenadamente" suas linhas por colunas (ou, o que conduz ao mesmo resultado: trocando-se suas colunas por linhas).

Indica-se a matriz transposta de A por A^t

Exemplo

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ então } A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ então $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$ onde

$$b_{ij} = a_{ji} \begin{cases} \text{para todo } i, 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo } j, 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

1.7 – IGUALDADE DE MATRIZES

Elementos correspondentes

Sejam as matrizes **A** e **B** de mesma ordem **m** × **n**. Um elemento **a** da matriz **A** e um elemento **b** da matriz **B** dizem-se **correspondentes** *se eles ocuparem a mesma posição nas respectivas matrizes.*

Exemplo

Nas matrizes de mesma ordem 2 × 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

os elementos

a_{11} e b_{11}
a_{12} e b_{12}
a_{21} e b_{21}
a_{22} e b_{22}

são **correspondentes**.

Observe que, na notação, elementos correspondentes têm índices iguais.

Definição

As matrizes A e B **são iguais**, se, e somente se, têm mesma ordem e os elementos correspondentes são iguais; indica-se:

$$A = B$$

Então:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \qquad B = [b_{ij}]_{p \times q}$$

$$A = B \iff \begin{cases} m = p \quad e \quad n = q \\ \quad e \\ a_{ij} = b_{ij} \begin{cases} \text{para todo i, } 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo j, } 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases} \end{cases}$$

Exemplos

1º) As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1^2 \\ 2 & 2^2 \\ 3 & 3^2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & 1 \\ \frac{4}{2} & 4 \\ \frac{9}{3} & 9 \end{bmatrix}$ são iguais, isto é,

$A = B$

2º) Se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$, então: $a = 0, b = 2, c = -1$ e $d = \sqrt{2}$

No conjunto das matrizes de mesma ordem, a **igualdade de matrizes** define uma *relação de equivalência*; goza, então, das seguintes propriedades:

1ª) **reflexiva**: para toda matriz A, tem-se A = A.

2ª) **simétrica**: para as matrizes A e B, se A = B então B = A.

3ª) **transitiva**: para as matrizes A, B e C, se A = B e B = C, então A = C.

Exercícios Resolvidos

1.12) Se $\begin{bmatrix} x + y & a + b \\ x - y & a - b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, determine x, y, a e b.

Solução

Da definição de igualdade de matrizes, os elementos correspondentes devem ser iguais; então:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 3 \end{cases}$$

Resolvendo os dois sistemas acima (somando e subtraindo as respectivas equações) obtemos: $x = 3$, $y = 2$, $a = 1$ e $b = -2$.

1.13) Uma matriz *quadrada* $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ diz-se **simétrica** quando $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, e para todo j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Observe que se A é simétrica então $A = A^t$ e inversamente.

Determine o número b, $b \in \mathbb{R}$, para que a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2b \\ b^2 & b \end{bmatrix}$$

seja simétrica.

Solução

Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 2b \\ b^2 & b \end{bmatrix}$ então $A^t = \begin{bmatrix} 3 & b^2 \\ 2b & b \end{bmatrix}$, e, se A é *simétrica*, tem-se $A = A^t$; daí:

$$3 = 3 \qquad 2b = b^2$$
$$b^2 = 2b \qquad b = b$$

As condições acima ficam satisfeitas para as raízes da equação: $b^2 = 2b$ que são $b = 0$ e $b = 2$.

Note que há duas matrizes que satisfazem à condição imposta:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

1.14) Demonstre que para toda matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ tem-se:

$$(A^t)^t = A$$

Solução

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ então $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$ onde $b_{ij} = a_{ji}$.

A matriz $(A^t)^t$ é de ordem $m \times n$; seja então $(A^t)^t = [c_{ij}]_{m \times n}$ onde $c_{ij} = b_{ji}$.

Então, para todo i, $1 \leqslant i \leqslant m$, e para todo j, $1 \leqslant j \leqslant n$, tem-se:

$$(A^t)^t = [c_{ij}]_{m \times n} = [b_{ji}]_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = A.$$

Exercícios Propostos

1.15) Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ para a qual:

$$\begin{cases} a_{ii} = 0 \\ a_{ij} = a_{ji} \\ a_{ij} = i + j, \text{ se } 1 \leqslant i < j \leqslant 4 \end{cases}$$

Determine A e A^t. A é *simétrica*?

• 1.16) Se $\begin{bmatrix} \text{sen } 2\theta & (\text{sen } \theta + \cos \theta)^2 \\ \cos 4\theta & |\text{sen}^3\theta + \cos^3\theta| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b \\ a & c \end{bmatrix}$, determine os números reais a, b e c.

• 1.17) Seja D uma matriz *diagonal* de ordem 3×3. D é *simétrica*?

• 1.18) Se $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ é *simétrica*, em A há, no máximo, quantos elementos distintos?

• 1.19) **Definição: a matriz J, de ordem $m \times n$, é uma matriz cujos elementos são todos iguais a 1. Construa, para matrizes 3×3:**

a) I^t b) J^t c) O^t

• 1.20) Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ para a qual $a_{ij} = f(i) + f(j)$, onde $f(x) = x + 1$. Construa A^t.

Capítulo

2 Operações com matrizes

2.1 – ADIÇÃO DE MATRIZES

Definição

Sejam as matrizes A e B, de *mesma ordem* $m \times n$.

Denomina-se **soma** de A com B à matriz C, de ordem $m \times n$, cujos elementos são obtidos somando-se os elementos correspondentes das matrizes A e B. Indica-se:

$$C = A + B$$

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+6 \\ -3+3 & 5+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Formalmente:

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$.
A matriz C = A + B é tal que:

$$C = [c_{ij}]_{m \times n} \quad \text{onde} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \begin{cases} \text{para todo i, } 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo j, } 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

Se as matrizes A e B têm mesma ordem, elas se dizem **conformáveis para a adição.**

Observe que existe A + B somente se A e B têm mesma ordem, isto é, se A e B são *conformáveis para a adição*.

As matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

não têm mesma ordem; a adição de A com B não pode ser efetuada.

Diz-se que matrizes de ordens diferentes *não são conformáveis para a adição.*

Propriedades da adição de matrizes

1ª) A adição de matrizes é *comutativa*: para as matrizes A e B, conformáveis para a adição:

$$\boxed{A + B = B + A}$$

Demonstração

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$; então:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \overset{(I)}{=} [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n} = B + A$$

Observe que a adição entre números é comutativa, o que justifica a igualdade (I) acima.

2ª) A adição de matrizes é *associativa*: para as matrizes A, B e C, conformáveis para a adição:

$$\boxed{(A + B) + C = A + (B + C)}$$

Demonstração

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{ij}]_{m \times n}$; então:

$$(A + B) + C = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} + [c_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n} \overset{(I)}{=} [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} =$$

$$= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij} + c_{ij}]_{m \times n} = A + (B + C).$$

Observe que a adição entre números é associativa, o que justifica a igualdade (I) acima.

3ª) *Existe o elemento neutro.*

Dada uma matriz A, existe uma matriz X, conformável com A para a adição, tal que:

$$\boxed{A + X = A}$$

Demonstração

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $X = [x_{ij}]_{m \times n}$, da condição $A + X = A$ obtemos:

$$a_{ij} + x_{ij} = a_{ij},$$

e daí, $x_{ij} = 0$.

Então, X é a *matriz nula* de ordem m × n, $O_{m \times n}$:

$$\boxed{A + O = A}$$

4ª) *Existe a matriz oposta.*

Para toda matriz A, de ordem m × n, existe uma matriz X, conformável com A para a adição, tal que:

$$\boxed{A + X = O_{m \times n}}$$

Demonstração

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $X = [x_{ij}]_{m \times n}$, da condição $A + X = O$ obtemos:

$$a_{ij} + x_{ij} = 0,$$

e daí, $x_{ij} = -a_{ij}$.

Então, X é a matriz cujos elementos são os *opostos* dos elementos correspondentes de A; a matriz X, então, denomina-se **oposta** da matriz A, e se indica com:

$$\boxed{-A}$$

Observe que se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, então $-A = [-a_{ij}]_{m \times n}$, e que:

$$\boxed{A + (-A) = O_{m \times n}}$$

Note também que $-(-A) = A$.

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ então $-A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & -4 \\ 4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

Definição

Sejam as matrizes A e B, *conformáveis para a adição.*
A **diferença** de matrizes A - B define-se por:

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ então:

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + (-2) & 3 + 3 \\ 5 + (-4) & -2 + (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Formalmente:

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$
A matriz D = A - B é tal que:

$$D = [d_{ij}]_{m \times n} \quad \text{onde } d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \begin{cases} \text{para todo } i, \ 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo } j, \ 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

A equação matricial X + A = B. Teorema

Sejam X, A e B matrizes conformáveis para a adição; então, vale a equivalência:

$$X + A = B \iff X = B - A$$

Demonstração

Na equação X + A = B, somando-se a matriz -A a ambos os membros, obtemos sucessivamente:

$$(X + A) + (-A) = B + (-A)$$
$$X + [A + (-A)] = B - A$$
$$X + O = B - A$$
$$X = B - A$$

Então, $X + A = B \Rightarrow X = B - A$ (I)

Inversamente, para X = B - A, a equação X + A = B fica satisfeita:

$$X + A = (B - A) + A = B + (-A + A) = B + O = B$$

Então, $X = B - A \Rightarrow X + A = B$ (II)

De (I) e (II) vem a tese: $X + A = B \iff X = B - A$.

Note então que, numa equação matricial, *uma matriz "pode passar" de um membro para o outro da equação, "mudando" o seu sinal.*

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determinemos a matriz X tal que

X + A = B. Então, do teorema acima:

$$X = B - A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

2.2 – MULTIPLICAÇÃO DE UMA MATRIZ POR UM NÚMERO REAL

Definição

Dados uma matriz A, de ordem m × n, e um número real α, o **produto** de α por A é uma matriz B, de ordem m × n, obtida multiplicando-se cada elemento de A por α. Indica-se:

$$B = \alpha \cdot A$$

Exemplo

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot (-3) \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Formalmente:

Sejam a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e o número real α.

A matriz $B = \alpha \cdot A$ é tal que:

$$B = [b_{ij}]_{m \times n} \text{ onde } b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \begin{cases} \text{para todo } i,\ 1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{para todo } j,\ 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

Propriedades

Sejam A e B matrizes de ordem m × n e os números reais α e β.
Valem as propriedades:

1ª) $1 \cdot A = A$
2ª) $(-1) \cdot A = -A$
3ª) $\alpha \cdot O_{m \times n} = O_{m \times n}$
4ª) $0 \cdot A = O_{m \times n}$
5ª) $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$
6ª) $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
7ª) $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha\beta) \cdot A$

Veja os exercícios 2.4 e 2.14.

Exercícios Resolvidos

2.1) Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, determine:

a) A + B b) A − B

Solução

a) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 3+5 & 1+2 & -5+(-4) \\ 2+0 & 1+7 & 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -9 \\ 2 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

b) $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 3-5 & 1-2 & -5-(-4) \\ 2-0 & 1-7 & 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2) Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A − B + C.

Solução

A adição de matrizes é *associativa*; não há, então, ambigüidade na notação A − B + C; ela pode ser escrita, por exemplo, (A − B) + C; então:

$$A - B + C = (A - B) + C = \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 13 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 13 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

2.3) Determine os números reais x, y, z e μ sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix} x+1 & 3 \\ 8 & z-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & y \\ \mu & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

$$\begin{bmatrix} x+3 & 3+y \\ 8+\mu & z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Então: $x + 3 = 2x$ $3 + y = 3$
$8 + \mu = 5$ $z - 1 = 1$

e daí: $x = 3$, $y = 0$, $\mu = -3$ e $z = 2$.

2.4) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, calcule:

a) 5A − B b) 2A + 3B

Solução

$$a)\ 5A - B = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 10 & 25 & -5 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 16 \\ 3 & 14 & -5 \\ 15 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b)\ 2A + 3B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 4 & 10 & -2 \\ 8 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 21 & 33 & 0 \\ 15 & -9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 25 & 43 & -2 \\ 23 & -3 & 16 \end{bmatrix}$$

2.5) Sejam as matrizes A e B, conformáveis para a adição; se $\alpha \in \mathbb{R}$, demonstre que:

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

Solução

Se $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ tem-se $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$; então:

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} = [\alpha \cdot (a_{ij} + b_{ij})]_{m \times n} = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]_{m \times n} =$$

$$= [\alpha a_{ij}]_{m \times n} + [\alpha b_{ij}]_{m \times n} = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

2.6) Seja $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que: $-4(X - I_3) = X + J$

Solução

As propriedades da adição de matrizes e da multiplicação de uma matriz por um número real, possibilitam escrever sucessivamente:

$$-4(X - I_3) = X + J$$
$$-4X + 4I_3 = X + J$$
$$-4X - X = J - 4I_3 \text{ (veja o Teorema da página 18)}$$
$$-5X = J - 4I_3$$
$$X = -\frac{1}{5} J + \frac{4}{5} I_3$$

Então:

$$X = -\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

2.7) Determine as matrizes X e Y sabendo-se que:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X - Y = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Somando membro a membro as duas equações, resulta:

$$2X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

e daí:

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Subtraindo membro a membro as duas equações, resulta:

$$2Y = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e daí:

$$Y = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2.8) Sejam as matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$. Demonstre que:

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

Solução

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$; então:

$$A^t = [\alpha_{ij}]_{n \times m} \quad \text{onde} \quad \alpha_{ij} = a_{ji}$$

$$B^t = [\beta_{ij}]_{n \times m} \quad \text{onde} \quad \beta_{ij} = b_{ji}$$

Seja $A + B = [c_{ij}]_{m \times n}$ onde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; então:

$$(A + B)^t = [\gamma_{ij}]_{n \times m} \quad \text{onde} \quad \gamma_{ij} = c_{ji}$$

Temos sucessivamente:

$$A^t + B^t = [\alpha_{ij}]_{n \times m} + [\beta_{ij}]_{n \times m} = [\alpha_{ij} + \beta_{ij}]_{n \times m} = [a_{ji} + b_{ji}]_{n \times m} =$$

$$= [c_{ji}]_{n \times m} = [\gamma_{ij}]_{n \times m} = (A + B)^t$$

2.9) Seja a matriz A, quadrada de ordem n. Demonstre que $A + A^t$ é *simétrica*.

Solução

Seja $B = A + A^t$ e demonstremos que B é simétrica, isto é, que $B = B^t$. (Veja exercício 1.13.)

De fato,

$$B^t = (A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t = B$$

2.10) Uma matriz *quadrada* $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ diz-se **anti-simétrica** quando $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$ e para todo j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Observe que se A é anti-simétrica $A^t = -A$ e inversamente.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ é anti-simétrica.

Note que os elementos que pertencem à diagonal principal são todos iguais a zero, e que os elementos colocados simetricamente em relação à diagonal principal são opostos.

Determine os números reais a, b, c, x, y e z *para que a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a & 2 & -3 \\ x-1 & b & 2y-4 \\ z & 4 & c \end{bmatrix}$$

seja *anti-simétrica*.

Solução

Os elementos da diagonal principal devem ser iguais a zero:

$$a = b = c = 0$$

Os elementos colocados simetricamente em relação à diagonal principal são opostos:

$$x - 1 = -2$$
$$z = -(-3)$$
$$4 = -(2y - 4)$$

Então: $x = -1$, $z = 3$ e $y = 0$.

A matriz é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercícios Propostos

2.11) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 11 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) $A + B$ b) $B - A$

2.12) Determine os números reais x e y sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix} x^2 & x \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -x \\ -y & 0 \end{bmatrix} = I_2$$

2.13) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 9 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Determine a matriz $A - 6B - 2C$.

b) Resolva a equação matricial:

$$\frac{1}{2}(X + A) = 3[X + (2X + B)] + C$$

2.14) Seja A uma matriz e sejam α e β números reais. Demonstre que

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

2.15) Determine as matrizes X e Y sabendo-se que:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X - Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.16) X e Y são matrizes de ordem 3×3. Determine-as sabendo-se que:

$$\begin{cases} X + 2Y = I_3 \\ 2X - Y = O_3 \end{cases}$$

2.17) A e B são matrizes quadradas de mesma ordem. Demonstre que:

$tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$ (veja exercício 1.11)

2.18) Sejam a matriz A e α um número real. Demonstre que:

$$(\alpha A)^t = \alpha \cdot A^t$$

2.19) Sejam as matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$. Demonstre que:

$(A - B)^t = A^t - B^t$ (use os exercícios 2.8 e 2.18)

2.20) Seja a matriz A, quadrada de ordem n. Demonstre que $A - A^t$ é *anti-simétrica.* (Veja exercício 2.10.)

2.3 – MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Requisito para a existência do produto de matrizes

Para que o produto de duas matrizes exista, exige-se que os fatores que são multiplicados sejam **conformáveis para a multiplicação**; isto significa que o primeiro fator deve possuir tantas colunas quantas são as linhas do segundo fator.

Assim, se A é uma matriz de ordem $m \times n$ e B é uma matriz de ordem $p \times k$, o produto $A \cdot B$ só existe se $n = p$. Se $n \neq p$, a multiplicação de A por B não pode ser efetuada, isto é, o produto $A \cdot B$ não existe.

Definição

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$, conformáveis para a multiplicação.

O **produto de A por B**, notado com $A \cdot B$, é a matriz de ordem $m \times p$, $C = [c_{ik}]_{m \times p}$, para a qual o elemento c_{ik}, que se encontra em sua i-ésima linha e em sua k-ésima coluna, é obtido multiplicando-se os elementos da i-ésima **linha** de A pelos "correspondentes" elementos da k-ésima **coluna** de B e somando-se os "produtos parciais" assim obtidos:

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

Exemplos

1º)

$$\underset{\text{matriz A}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}} \cdot \underset{\text{matriz B}}{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{bmatrix}} = \underset{\text{matriz A} \cdot \text{B}}{\begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ * & c_{32} \end{bmatrix}}$$

3×4 são conformáveis 4×2 → 3×2

$$c_{32} = a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} + a_{33} \cdot b_{32} + a_{34} \cdot b_{42} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j} b_{j2}$$

Observe que, para obtermos o elemento c_{32} da matriz produto, multiplicamos os elementos da 3ª linha de A pelos "correspondentes" elementos da 2ª coluna de B, somando-se, então, os produtos assim obtidos.

2º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot B = \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}}$$

$c_{11} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 25$ $c_{12} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 10$ $c_{13} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 34$

$c_{21} = 3 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 42$ $c_{12} = 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 15$ $c_{23} = 3 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 1 \cdot 1 = 58$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 25 & 10 & 34 \\ 42 & 15 & 58 \end{bmatrix}$$

3º) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22}) \\ (a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21}) & (a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22}) \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{2} a_{1j}b_{j2} \\ \sum_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{2} a_{2j}b_{j2} \end{bmatrix} = \left[\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk} \right]_{2 \times 2}$$

4º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe que $A \cdot B \neq B \cdot A$, isto é, a multiplicação de matrizes *não é uma operação comutativa.*

5º) Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $C = [-2 \quad 1]$

Calculemos $(A \cdot B) \cdot C$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [-2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, calculemos $A \cdot (B \cdot C)$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} [-2 \quad 1] = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-4) & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-6) + 2 \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Observe que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

6º) Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **e a matriz identidade** $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot I_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 & a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 & c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

$$I_2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A$$

Observe que $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A = A$

7º) Sejam $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **e a matriz nula** $O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot O_2 = O_2 \cdot A = O_2$$

Formalizando, então, a definição discutida acima:

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$.

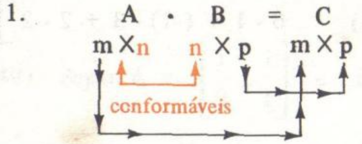
A matriz $C = A \cdot B$ é tal que:

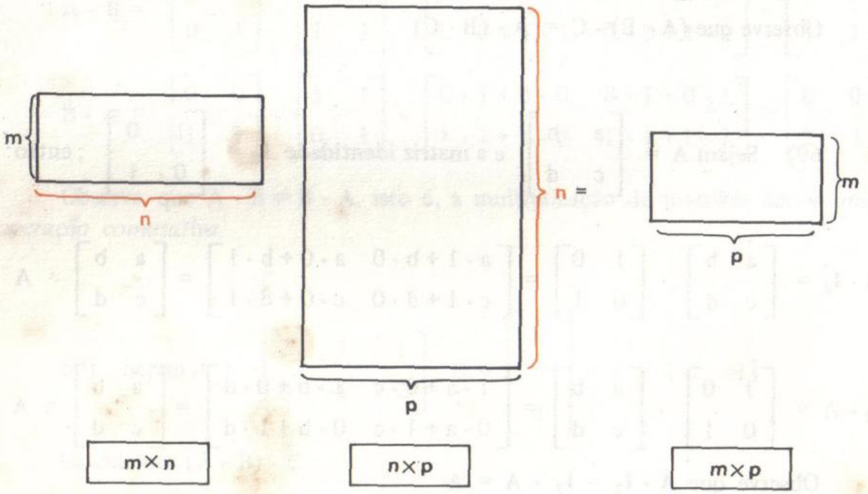
$$C = [c_{ik}]_{m \times p} \text{ onde } c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \quad \begin{cases} \text{para todo } i, 1 \leq i \leq m \\ \text{para todo } k, 1 \leq k \leq p \end{cases}$$

$$A \cdot B = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p}$$

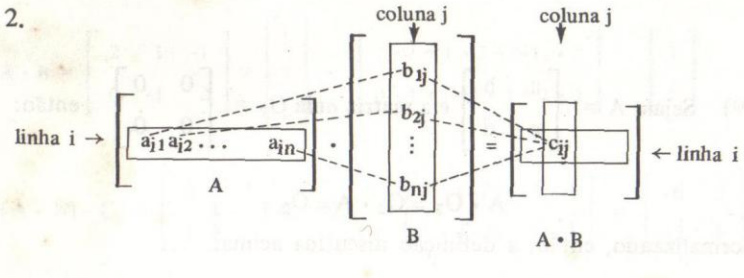
Um resumo para memorizar

1.





2.



Exercícios Propostos

2.21) As matrizes A, B, C e D são de ordem 2×3, 3×4, 1×3 e 2×1, respectivamente. Dê a ordem de cada matriz abaixo:

a) $A \cdot B$ b) $C \cdot B$ c) $D \cdot (C \cdot B)$

2.22) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; determine $A \cdot B$.

2.23) Para as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B$.

2.24) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ verifique que $A \cdot B = A \cdot C$.

2.25) a) Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

b) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine $A \cdot B$ e $B \cdot A$.

2.26) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que: $A \cdot X = I_2$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

1ª) A multiplicação de matrizes *não é comutativa.*

Sejam as matrizes A e B. Se o produto $A \cdot B$ existe, o produto $B \cdot A$ pode não existir. Por exemplo, se A é de ordem 5×2 e B é de ordem 2×3, existe $A \cdot B$, mas não existe $B \cdot A$ (por quê?).

Mas, atenção! mesmo que existam $A \cdot B$ e $B \cdot A$, pode-se ter $A \cdot B \neq B \cdot A$ (veja o 4º exemplo, acima).

Então, para duas matrizes A e B quaisquer, é **falso** que necessariamente:

$$A \cdot B = B \cdot A$$

Quando as matrizes A e B são tais que $A \cdot B = B \cdot A$, diz-se que A e B **comutam.**

Observe que uma condição necessária para que as matrizes A e B comutem é que sejam *quadradas e de mesma ordem*. Por exemplo, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

comutam, pois $A \cdot I_2 = I_2 \cdot A$ (veja o 6º exemplo, acima).

2ª) A multiplicação de matrizes é *associativa*.

Sejam as matrizes:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n},\ B = [b_{jk}]_{n \times p} \text{ e } C = [c_{kr}]_{p \times q}$$

Então:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Demonstração (opcional)

Da definição de multiplicação, temos:

$$A \cdot B = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right]_{m \times p}$$

Aplicando novamente a definição para as matrizes $A \cdot B$ e C:

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) \cdot c_{kr} \right]_{m \times q}$$

Multiplicando o fator c_{kr} em cada parcela da soma entre parênteses:

$$(A \cdot B) \cdot C = \left[\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \cdot c_{kr} \right) \right]_{m \times q}$$

Analogamente:

$$B \cdot C = \left[\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{kr} \right]_{n \times q}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kr} \right) \right]_{m \times q}$$

e daí:

$$A \cdot (B \cdot C) = \left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kr} \right) \right]_{m \times q}$$

A ordem segundo a qual desenvolvemos as *somatórias*, numa soma de um número finito de parcelas, é arbitrária; então:

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kr} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{jk} c_{kr} \right),$$

e daí a tese: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

3ª) A multiplicação de matrizes é *distributiva* em relação à adição.

Sejam as matrizes:

$$A = [a_{ik}]_{m \times n},\ B = [b_{kj}]_{n \times p} \text{ e } C = [c_{kj}]_{n \times p}$$

Então:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

Demonstração

$$A \cdot (B + C) = [a_{ik}]_{m \times n} \cdot [b_{kj} + c_{kj}]_{n \times p} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot (b_{kj} + c_{kj}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} \cdot b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} b_{kj}) + \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} c_{bk}) \right]_{m \times p} =$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right]_{m \times p} + \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} \right]_{m \times p} = A \cdot B + A \cdot C$$

A propriedade acima, desde que a conformabilidade esteja respeitada, também assume a forma:

$$(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$$

A demonstração é análoga à anterior. (Veja exercício 2.45.)

4ª) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n\times p}$ e o número real α; então:

$$(\alpha\cdot A)\cdot B = \alpha\cdot(A\cdot B)$$

Demonstração

$$(\alpha\cdot A)\cdot B = [\alpha\cdot a_{ij}]_{m\times n}\cdot[b_{jk}]_{n\times p} =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{ij})\cdot b_{jk}\right]_{m\times p} = \left[\sum_{j=1}^{n}\alpha\cdot(a_{ij}b_{jk})\right]_{m\times p} =$$

$$= \left[\alpha\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right]_{m\times p} = \alpha\cdot(A\cdot B)$$

5ª) Multiplicação pela *matriz identidade.*

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$; então:

$$A\cdot I_n = I_m\cdot A = A$$

Demonstração

Demonstremos que $A\cdot I_n = A$.

Sendo $I_n = [\delta_{jk}]_{n\times n}$, onde $\delta_{jk} = 0$ se $j\neq k$ e $\delta_{jk} = 1$ se $j = k$ (veja pág. 8), temos:

$$A\cdot I_n = [a_{ij}]_{m\times n}\cdot[\delta_{jk}]_{n\times n} = \left[\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\delta_{jk})\right]_{m\times p} =$$

$$= [(a_{i1}\delta_{1k} + a_{i2}\delta_{2k} + a_{i3}\delta_{3k} + \ldots + a_{ik}\delta_{kk} + \ldots + a_{in}\delta_{nk})]_{m\times n} =$$

$$= [(a_{i1}\cdot 0 + a_{i2}\cdot 0 + a_{i3}\cdot 0 + \ldots + a_{ik}\cdot 1 + \ldots + a_{in}\cdot 0]_{m\times n} =$$

$$= [a_{ik}]_{m\times n} = A$$

A demonstração da igualdade $I_m\cdot A = A$ é análoga.

6ª) Multiplicação pela *matriz nula.*

Seja a matriz A, de ordem $m\times n$; então:

$$O_{p\times m}\cdot A = O_{p\times n}$$
$$A\cdot O_{n\times p} = O_{m\times p}$$

A demonstração é imediata.

Observações muito importantes

1ª) Sejam A e B matrizes conformáveis para a multiplicação; da igualdade $A\cdot B = O$, *não podemos concluir* que $A = O$ ou $B = O$.

Por exemplo:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Note que o produto das matrizes acima é a matriz nula, mas nenhum dos fatores o é.

2ª) Sejam as matrizes A, B e C. Respeitadas as condições de conformabilidade, da igualdade $A\cdot B = A\cdot C$ ou da igualdade $B\cdot A = C\cdot A$, *não podemos concluir que* $B = C$, mesmo que $A\neq O$. **Para a multiplicação de matrizes não vale a lei do cancelamento.**

Por exemplo:

Se $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$,

então:

$$A\cdot B = \begin{bmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 3 & 2 & -7\end{bmatrix} = A\cdot C$$

Observe que se tem $A\cdot B = A\cdot C$ e $B\neq C$.

Exercícios Resolvidos

2.27) Mostre que para quaisquer **a**, **b**, **c** e **d**, reais, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$$

comutam.

Solução

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca - db & cb + da \\ -da - cb & -db + ca \end{bmatrix}$$

Observe que $A \cdot B = B \cdot A$, isto é, A e B *comutam.*

2.28) Se A é uma *matriz quadrada*, de ordem n. Define-se:

$$A^0 = I_n, \text{ se } A \neq O$$
$$A^1 = A$$
$$A^{p+1} = A^p \cdot A, \text{ para } p \in \mathbb{N}^*$$

Note que da definição tem-se, por exemplo:

$$A^2 = A \cdot A$$
$$A^3 = A^2 \cdot A = (A \cdot A) \cdot A$$

A multiplicação de matrizes é uma operação associativa, o que nos permite escrever:

$$A^3 = (A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A)$$

Na prática, é comum escrever-se:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

notação que não gera ambigüidade, pois a associatividade da multiplicação permite que se determine A^3 calculando $(A \cdot A) \cdot A$ ou $A \cdot (A \cdot A)$, alternativas que nos conduzem a um mesmo resultado.

Analogamente, a associatividade da multiplicação permite-nos escrever:

$$A^4 = A^3 \cdot A$$
$$A^4 = (A \cdot A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A \cdot A)$$

e, na prática, sem que se tenha qualquer ambigüidade, escreve-se:

$$A^4 = A \cdot A \cdot A \cdot A$$

As considerações anteriores permitem-nos concluir que para p, inteiro e $p \geq 2$, a notação A^p indica um produto de p fatores iguais a A:

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots A}_{p \text{ fatores}}$$

Para as definições acima, resolva os problemas:

a) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, calcule A^2, A^3 e A^4.

b) Dê todas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$ que satisfazem $A^3 + A = O$.

Solução

a) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-3) \cdot 1 + (-6) \cdot 1 & (-3) \cdot (-1) + (-6) \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 6 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -9 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Calculemos inicialmente A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + a \cdot b & 0 \cdot a + a \cdot 0 \\ b \cdot 0 + 0 \cdot b & b \cdot a + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab \cdot 0 + 0 \cdot b & ab \cdot a + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + ab \cdot b & 0 \cdot a + ab \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Então:

$$A^3 + A = \begin{bmatrix} 0 & a^2b \\ ab^2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^2b + a \\ ab^2 + b & 0 \end{bmatrix}$$

E, sendo $A^3 + A = O$, tem-se:

$$\begin{cases} a^2b + a = 0 & \text{(I)} \\ ab^2 + b = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

A equação (I) pode ser escrita: $a(ab + 1) = 0$ e daí obtemos:

$$a = 0 \text{ ou } ab = -1$$

Para $a = 0$, em (II), tem-se $b = 0$, e então a solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O_2$$

Agora, observe que a equação $ab = -1$ não é satisfeita para $a = 0$; então, supondo $a \neq 0$, tem-se $b = \frac{-1}{a}$. Substituindo em (II):

$$a \cdot \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a} = 0,$$

equação que fica satisfeita para todo a, $a \neq 0$.

Então, a solução:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}, \; a \in \mathbb{R}^*$$

2.29) Uma matriz A, quadrada, diz-se **involutiva** quando $A^2 = I$. Uma matriz *diagonal*, de ordem 2, é *involutiva*; determine-a.

Solução

Se A é *diagonal* (veja a página 9) então $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$; e, se A é *involutiva* tem-se:

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então, $a^2 = 1$ e $b^2 = 1$, e daí as soluções:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{jk}]_{n \times p}$. Demonstre que:

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

Solução

Temos:

$$A^t = [\alpha_{ij}]_{n \times m} \text{ onde } \alpha_{ij} = a_{ji}$$
$$B^t = [\beta_{jk}]_{p \times n} \text{ onde } \beta_{jk} = b_{kj}$$

Seja $A \cdot B = [c_{ik}]_{m \times p}$ onde $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot b_{jk})$

Então, a matriz $(A \cdot B)^t$ é de ordem $p \times m$, e, nela, o elemento c_{ik} ocupa a i-ésima coluna e a k-ésima linha.

Por outro lado, a matriz $B^t \cdot A^t$ também é de ordem $p \times m$, e o elemento que nela igualmente ocupa a i-ésima coluna e a k-ésima linha é dado por:

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_{kj} \cdot \alpha_{ji}) = \sum_{j=1}^{n} (b_{jk} \cdot a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot b_{jk}) = c_{ik}$$

Fica então demonstrada a tese.

31) Use o **Método da Indução Matemática** para demonstrar que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

Solução

Teorema 1

Para $n = 1$ a propriedade é válida.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que a propriedade é válida para $n = k$, isto é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para $n = k + 1$, isto é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se, "à direita", ambos os membros da igualdade da hipótese pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ obtemos:}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^k \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando a definição dada no exercício 2.28 ao primeiro membro da igualdade acima e efetuando a multiplicação do segundo membro, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1+0 & 1+k \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

que é a tese.

Note que na passagem acima, onde multiplicamos ambos os membros da igualdade pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, o fizemos "à direita" no primeiro membro e também "à direita", no segundo membro. Poderíamos multiplicar ambos os membros "à esquerda". Mas, *não poderíamos* multiplicar um dos membros "à esquerda" e o outro "à direita", pois a multiplicação de matrizes não é comutativa.

2.32) Seja A uma matriz *quadrada*.
Uma **matriz polinomial**, na matriz A, é uma expressão da forma:

$$a_0 \cdot A^p + a_1 \cdot A^{p-1} + a_2 \cdot A^{p-2} + \ldots + a_{p-1} \cdot A + a_p \cdot I$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant i \leqslant p$.

Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a *matriz polinomial*:

$$2 \cdot A^2 + 3 \cdot A + 5 \cdot I$$

Solução

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5 \cdot I = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Então:

$$2 \cdot A^2 + 3 \cdot A + 5 \cdot I = \begin{bmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{bmatrix}$$

2.33) Respeitada a conformabilidade para as operações, se as matrizes A e B *comutam*, demonstre que:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

Solução

$$(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B)$$

A *distributividade* da multiplicação permite-nos escrever sucessivamente:

$$(A+B)^2 = A \cdot (A+B) + B \cdot (A+B)$$
$$(A+B)^2 = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B$$
$$(A+B)^2 = A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$$

Como, por hipótese, A e B *comutam*, tem-se $A \cdot B = B \cdot A$, e daí a tese:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$$

Observe que se A e B *não comutam*: $(A+B)^2 \neq A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

2.34) As matrizes A e B são quadradas e de mesma ordem n. Demonstre que:

$$[A^t \cdot (B + I_n)]^t = B^t \cdot A + A$$

Solução

$$[A^t \cdot (B+I_n)]^t = (B+I_n)^t \cdot (A^t)^t = (B^t + I_n^t) \cdot A = (B^t + I_n) \cdot A =$$
$$= B^t \cdot A + I_n \cdot A = B^t \cdot A + A$$

Note que para a *matriz identidade* tem-se $I^t = I$.

2.35) a) Respeitada a conformabilidade para as matrizes A, B e C, demonstre que:

$$(A \cdot B \cdot C)^t = C^t \cdot B^t \cdot A^t$$

b) A, matriz quadrada de ordem n, é *simétrica*; P é uma matriz de ordem m×n. Demonstre que a matriz $B = P^t \cdot A \cdot P$ é *simétrica*.

Solução

a) A propriedade associativa permite-nos escrever: $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$.
Então, aplicando o resultado do exercício 2.30 obtemos:
$$(A \cdot B \cdot C)^t = [(A \cdot B) \cdot C]^t = C^t \cdot (A \cdot B)^t = C^t \cdot (B^t \cdot A^t) = C^t \cdot B^t \cdot A^t$$

b) Devemos demonstrar que $B^t = B$; de fato, o ítem anterior permite-nos escrever:
$$B^t = (P^t \cdot A \cdot P)^t = P^t \cdot A^t \cdot (P^t)^t = P^t \cdot A \cdot P = B$$
A é simétrica

2.36) Seja a matriz $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Calcule J^2, J^3, J^4 e J^p, para $p \geqslant 2$, $p \in \mathbb{Z}$.

b) Toma-se $\urcorner = \{M | M = x \cdot I_2 + y \cdot J;\ (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$; demonstre que $\urcorner$ é **estável para a multiplicação**, isto é, que o produto de dois elementos (matrizes) de $\urcorner$ também é elemento de $\urcorner$.

c) A multiplicação é comutativa em $\urcorner$?

Solução

a) $J^2 = J \cdot J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot J$

$J^3 = J^2 \cdot J = (2 \cdot J) \cdot J = 2 \cdot J^2 = 2 \cdot (2 \cdot J) = 2^2 \cdot J$

$J^4 = J^3 \cdot J = (2^2 \cdot J) \cdot J = 2^2 \cdot J^2 = 2^2 \cdot (2 \cdot J) = 2^3 \cdot J$

As igualdades acima "sugerem" que $J^p = 2^{p-1} \cdot J$; vamos provar esse resultado usando o **Método da Indução Matemática.**

Teorema 1

O resultado vale para $p = 2$ (veja acima).

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que o resultado é válido para $p = k$, isto é:
$$J^k = 2^{k-1} \cdot J$$

Tese: demonstremos que o resultado é válido para $p = k + 1$, isto é:
$$J^{k+1} = 2^k \cdot J$$

Multiplicando-se, à direita, ambos os membros da hipótese, pela matriz J:
$$J^k \cdot J = (2^{k-1} \cdot J) \cdot J$$
$$J^{k+1} = 2^{k-1} \cdot J^2$$
$$J^{k+1} = 2^{k-1} \cdot (2 \cdot J)$$
$$J^{k+1} = (2^{k-1} \cdot 2) \cdot J$$
$J^{k+1} = 2^k \cdot J$, que é a tese.

b) Consideremos as matrizes M_1 e M_2 de $\urcorner$; demonstremos que $M_1 \cdot M_2 \in \urcorner$. Sejam:
$$M_1 = x_1 \cdot I_2 + y_1 \cdot J, \quad (x_1; y_1) \in \mathbb{R}^2$$
$$M_2 = x_2 \cdot I_2 + y_2 \cdot J, \quad (x_2; y_2) \in \mathbb{R}^2$$

Então:
$$M_1 \cdot M_2 = (x_1 \cdot I_2 + y_1 \cdot J) \cdot (x_2 \cdot I_2 + y_2 \cdot J) = (x_1 \cdot I_2) \cdot (x_2 \cdot I_2) +$$
$$+ (x_1 \cdot I_2) \cdot (y_2 \cdot J) + (y_1 \cdot J) \cdot (x_2 \cdot I_2) + (y_1 \cdot J) \cdot (y_2 \cdot J) \overset{(1)}{=} x_1 x_2 \cdot I_2^2 +$$
$$+ x_1 y_2 \cdot I_2 \cdot J + y_1 x_2 \cdot J \cdot I_2 + y_1 y_2 \cdot J^2 = x_1 x_2 \cdot I_2 + x_1 y_2 \cdot J + y_1 x_2 \cdot J + y_1 y_2 \cdot 2J =$$
$$= \underbrace{x_1 x_2}_{\bar{x}} \cdot I_2 + \underbrace{(x_1 y_2 + y_1 x_2 + 2y_1 y_2)}_{\bar{y}} J$$
$$= \bar{x} \cdot I_2 + \bar{y} \cdot J, \quad (\bar{x}; \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$$

Daí, $M_1 \cdot M_2 \in \urcorner$

c) Calculando $M_2 \cdot M_1$, obtemos analogamente:
$$M_2 \cdot M_1 = \bar{x} \cdot I_2 + \bar{y} \cdot J$$

isto é, $M_2 \cdot M_1 = M_1 \cdot M_2$, e a multiplicação é comutativa em $\urcorner$.

Observação: em (1) **nós nos utilizamos da seguinte propriedade:**

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ e os números reais α e β; então:

$$(\alpha \cdot A) \cdot (\beta \cdot B) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (A \cdot B)$$

De fato,
$$(\alpha \cdot A) \cdot (\beta \cdot B) = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m \times n} \cdot [\beta \cdot b_{jk}]_{n \times p} = \left[\sum_{j=1}^{n} (\alpha a_{ij} \cdot \beta \cdot b_{jk})\right]_{m \times p} =$$
$$= \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha\beta \cdot (a_{ij} \cdot b_{jk})\right]_{m \times p} = (\alpha\beta) \cdot (A \cdot B)$$

Exercícios Propostos

2.37) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$, $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ tais que $a_{ij} = i - j + 2$ e $b_{ij} = 2i + j - i$. Seja $A \cdot B = [c_{ij}]_{3 \times 2}$; determine c_{32} e c_{13}.

2.38) Resolva a equação matricial:
$$3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.39) Determine x, $x \in \mathbb{R}$, sabendo-se que:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -x & -14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 4x & -2x \end{bmatrix} = I$$

2.40) Se as matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *comutam*, qual a relação que "liga" a, b, c e d?

2.41) Mostre que:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^4 = I$$

2.42) Demonstre que uma matriz A, quadrada, é *involutiva* se, e somente se, $(I - A) \cdot (I + A) = O$ (Veja o exercício 2.29.)

2.43) Use o **Método da Indução Matemática** para demonstrar que:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & \text{sen}\,(n\theta) \\ -\text{sen}\,(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

2.44) Para a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ verifique que: $A^2 - 4 \cdot A - 5 \cdot I_3 = O_3$.

2.45) Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $C = [c_{ij}]_{n \times p}$. Demonstre que:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

2.46) A e B são matrizes quadradas de ordem n. Demonstre que:

$$\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$$

2.47) Use o **Método da Indução Matemática** para demonstrar que, respeitada a conformabilidade:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^t = A_n^t \cdot A_{n-1}^t \cdot \ldots \cdot A_3^t \cdot A_2^t \cdot A_1^t, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \geqslant 2.$$

2.48) Utilize a definição dada no exercício 2.28 e demonstre, usando o **Método da Indução Matemática**, que, para a matriz quadrada A:

$$A^{p+q} = A^p \cdot A^q \qquad (p \in \mathbb{N}^* \text{ e } q \in \mathbb{N}^*)$$

(Use o Método para o inteiro p.)

2.49) A e B *comutam*. Demonstre que:

$$A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)$$

2.50) As matrizes A e B são *simétricas*. Mostre que:

a) A^t é *simétrica*.
b) A^2 é *simétrica*.
c) Se A e B *comutam*, então $A \cdot B$ é *simétrica*.

2.51) Se A e B são matrizes quadradas tais que $A \cdot B = -B \cdot A$ dizemos que A e B são **anticomutativas.**

Mostre que as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ são *anticomutativas* e que $(A + B)^2 = A^2 + B^2$.

2.52) A, B e C são matrizes quadradas de ordem n. Se a matriz C é *anti-simétrica*, demonstre que:

$$(A^t \cdot B^t + 3 \cdot C)^t = B \cdot A - 3 \cdot C$$

2.53) Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

Designa-se com $\urcorner$ o conjunto das matrizes do tipo $a \cdot A + b \cdot B$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2$.

a) Verifique que $A^2 = A$ e $B^2 = B$.
b) Calcule $A \cdot B$ e $B \cdot A$.
c) Mostre que se $M_1 \in \urcorner$ e $M_2 \in \urcorner$ então $M_1 \cdot M_2 \in \urcorner$.

2.4 – A MATRIZ INVERSA

Completaremos, agora, o estudo das operações entre matrizes, apresentando a *inversão de uma matriz quadrada.*

Definições

No conjunto dos números reais, para todo $a \neq 0$ existe o número **b**, denominado *inverso de a*, que satisfaz a condição:

$$a \cdot b = b \cdot a = 1$$

É usual indicarmos o inverso de a por a^{-1} ou $\frac{1}{a}$; então:

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{ou} \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Analogamente, coloca-se o problema seguinte: dada uma *matriz quadrada* **A**, existe uma outra matriz **B**, conformável com **A** para a multiplicação, que satisfaz a condição:

$$A \cdot B = B \cdot A = I$$

onde I é a *matriz identidade* de ordem apropriada?

Se essa matriz existe, diremos que é uma matriz inversa de A, e será representada com A^{-1}.

Então, a definição

> Seja **A** uma matriz *quadrada* de ordem **n**. A matriz *quadrada* **B**, de ordem **n**, diz-se **uma inversa da matriz A**, se e somente se:
>
> $$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

A matriz quadrada **A** denomina-se **não singular** se e somente se **A** possui uma inversa. Se **A** não possui uma inversa, **A** denomina-se **singular**. Diz-se também que, se a matriz quadrada **A** possui uma inversa, **A** é **invertível**; se A não possui uma inversa, **A** é **não invertível.**

Exemplo

Sejam as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; então:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Observe que $A \cdot B = B \cdot A = I_2$; então, **B** *é uma inversa de* **A**, ou **A** é *invertível*, ou A *é não singular.*

Teorema

"Se a matriz **A** é invertível, então é única a matriz **B** tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I,$$

isto é, se A possui uma inversa, essa inversa é única."

Demonstração

Admitamos que exista uma matriz **H** tal que:

$$A \cdot H = H \cdot A = I$$

Então:

$$H = I \cdot H = (B \cdot A) \cdot H = B \cdot (A \cdot H) = B \cdot I = B,$$

o que demonstra nossa tese.

Observações

Dada uma matriz quadrada **A**, invertível, de ordem **n**; a **única** matriz, A^{-1}, quadrada de ordem **n**, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

é a matriz inversa de A.

Note que A e A^{-1} *comutam* e que:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Exercícios Resolvidos

2.54) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine A^{-1}, se existir.

Solução

Suponhamos que exista A^{-1}; sua ordem é 2 × 2. Então: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot a + 1 \cdot c & 2 \cdot b + 1 \cdot d \\ 1 \cdot a + 1 \cdot c & 1 \cdot b + 1 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\left.\begin{matrix} 2a + c = 1 & 2b + d = 0 \\ a + c = 0 & b + d = 1 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} a = 1, & b = -1 \\ c = -1, & d = 2 \end{matrix}\right.$$

Devemos verificar a condição: $A^{-1} \cdot A = I_2$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Então, definitivamente, a inversa de A é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.55) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine A^{-1}, se existir.

Solução

Suponhamos que exista A^{-1}; $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Então:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot a + 1 \cdot c & 1 \cdot b + 1 \cdot d \\ 0 \cdot a + 0 \cdot c & 0 \cdot b + 0 \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + c & b + d \\ 0 & \textcircled{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}$$

impossível

Não existe A^{-1}; então a matriz A é singular, ou, ainda, é não invertível.

2.56) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$. Determine A^{-1}, se existir.

Solução

Suponhamos que exista A^{-1}; sua ordem é 3×3. Então:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a + 2d + g & -b + 2e + h & -c + 2f + i \\ 0 + d - 2g & 0 + e - 2h & 0 + f - 2i \\ a + 4d - g & b + 4e - h & c + 4f - i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$\left.\begin{aligned} -a + 2d + g &= 1 \\ d - 2g &= 0 \\ a + 4d - g &= 0 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} a &= -\frac{7}{12} \\ d &= \frac{1}{6} \\ g &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} -b + 2e + h &= 0 \\ e - 2h &= 1 \\ b + 4e - h &= 0 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} b &= -\frac{1}{2} \\ e &= 0 \\ h &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} -c + 2f + i &= 0 \\ f - 2i &= 0 \\ c + 4f - i &= 1 \end{aligned}\right\} \iff \left\{\begin{aligned} c &= \frac{5}{12} \\ f &= \frac{1}{6} \\ i &= \frac{1}{12} \end{aligned}\right.$$

Então,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \end{bmatrix},$$

pois também $A^{-1} \cdot A = I_3$ (o que deve ser verificado!).

Observe que para invertermos uma matriz A, de ordem n, pelo processo exposto acima, devemos resolver n sistemas, cada um deles com n equações e n incógnitas. É exaustivo!

Há outros métodos para a inversão de matrizes, cada um deles com suas vantagens e desvantagens. No capítulo 5 posterior apresentaremos um dos métodos mais conhecidos.

Exercícios Propostos

2.57) Para cada matriz abaixo, determine A^{-1}, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} \sec\theta & \operatorname{tg}\theta \\ \operatorname{tg}\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2.58) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Verifique que $A^{-1} = \frac{1}{9} A$.

2.59) Se $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, determine A.

2.60) Para cada matriz abaixo, determine A^{-1}, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.61) Determine a matriz inversa da matriz quadrada de ordem n:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

A equação matricial A · X = B. Teorema

Seja A uma matriz *invertível*; respeitada a conformabilidade, vale a equivalência:

$$A \cdot X = B \iff X = A^{-1} \cdot B$$

Demonstração

Se A é invertível, existe A^{-1}; então, multiplicando-se por A^{-1}, "à esquerda", ambos os membros da equação $A \cdot X = B$, obtemos sucessivamente:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$
$$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

Então, $A \cdot X = B \implies X = A^{-1} \cdot B$ (I)

Inversamente, para $X = A^{-1} \cdot B$, a equação $A \cdot X = B$ fica satisfeita:

$$A \cdot X = A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I \cdot B = B$$

Então, $X = A^{-1} \cdot B \implies A \cdot X = B$ (II)

De (I) e (II) vem a tese: $A \cdot X = B \iff X = A^{-1} \cdot B$

Exercício Resolvido

2.62) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Resolva a *equação matricial*: $A \cdot X = B$.

Solução

A matriz A é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, (veja o exercício 2.54).

Então:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 & (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercícios Propostos

2.63) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva a equação matricial: $A \cdot X = B$.

2.64) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} \cos a & \operatorname{sen} a \\ -\operatorname{sen} a & \cos a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \cos 2a \\ \operatorname{sen} 2a \end{bmatrix}$. Resolva a equação matricial $A \cdot X = B$.

2.65) Seja **A** uma matriz *invertível*; suponha respeitada a conformabilidade, e demonstre que:

$$X \cdot A = B \iff X = B \cdot A^{-1}$$

2.66) A, B e C são matrizes quadradas de ordem **n**, *invertíveis*. Resolva as equações matriciais:

a) $A \cdot X \cdot B = C$

b) $A \cdot X + B = C$

c) $(A \cdot X)^t = B$

d) $(A + X)^t = B$

e) $(A \cdot X)^{-1} = B$

Teorema

Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de ordem **n**, *invertíveis*; então **A · B** é invertível e:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Demonstração

Temos:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

Das duas igualdades acima concluímos que **A · B** é invertível e sua inversa é $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Teorema

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, *invertível*; então

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Demonstração

Temos:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Então, tomando as transpostas das matrizes iguais acima:

$$(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I_n^t$$

$$(A \cdot A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I_n$$

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = A^t \cdot (A^{-1})^t = I_n$$

A definição de inversa de uma matriz possibilita escrever, da equação acima, que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Teorema

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, *invertível* e α um número real não nulo; então:

$$(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$$

Demonstração

Temos:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Daí: $$(\alpha \cdot A) \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right) = \left(\frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}\right) \cdot (\alpha \cdot A) = I$$

A definição de inversa de uma matriz possibilita escrever, da equação acima, que $(\alpha \cdot A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$.

Exercícios Resolvidos

2.67) **Definição**

Uma matriz quadrada, *não singular*, diz-se ortogonal quando $A^{-1} = A^t$.

a) Verifique que a matriz $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ é *ortogonal*.

b) Se as matrizes, não singulares, **A** e **B**, são *ortogonais* então **A · B** é matriz *ortogonal*.

c) Se a matriz, invertível, **A** é *ortogonal*, então a matriz A^{-1} é *ortogonal*.

Solução

a) Se $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ então $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ e

$A^t = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, e então $A^{-1} = A^t$ e A é uma matriz *ortogonal*.

b) Se **A** e **B** são ortogonais: $A^{-1} = A^t$ e $B^{-1} = B^t$. Devemos verificar que $(A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^t$, isto é, que A · B é *ortogonal*; de fato:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t$$

c) Temos $A^{-1} = A^t$; seja $A^{-1} = M$. Devemos verificar que $M^{-1} = M^t$; de fato:

$$M^{-1} = (A^{-1})^{-1} = A = (A^t)^t = (A^{-1})^t = M^t$$

A é ortogonal

2.68) As matrizes quadradas **A, B** e **C** são *invertíveis*. Respeitada a conformabilidade, demonstre que:

$$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Solução

A propriedade associativa permite-nos escrever: $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$.
Então, aplicando o Teorema da página 52, obtemos:

$$(A \cdot B \cdot C)^{-1} = [(A \cdot B) \cdot C]^{-1} = C^{-1} \cdot (A \cdot B)^{-1} =$$

$$= C^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2.69) Para as matrizes **A, B** e **C**, simplifique:

$$C \cdot B^{-1} \cdot A \cdot (C^{-1} \cdot B \cdot A)^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot C)^{-1} \cdot B$$

Solução

Temos sucessivamente:

$$C \cdot B^{-1} \cdot A \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C) \cdot (C^{-1} \cdot B) \cdot B$$

$$C \cdot B^{-1} \cdot (A \cdot A^{-1}) \cdot B^{-1} \cdot (C \cdot C^{-1}) \cdot B \cdot B$$

$$C \cdot B^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \cdot I \cdot B \cdot B$$

$$C \cdot B^{-1} \cdot (B^{-1} \cdot B) \cdot B$$

$$C \cdot B^{-1} \cdot I \cdot B$$

$$C \cdot (B^{-1} \cdot B)$$

$$C \cdot I$$

$$C$$

2.70) **A** e **B** são matrizes tais que $A \cdot B = A$ e $B \cdot A = B$. Verifique que:

a) $B^t \cdot A^t = A^t$.

b) $A^t \cdot B^t = B^t$

c) $A = B = I$, se **A** é *não singular*.

Solução

a) $B^t \cdot A^t = (A \cdot B)^t = A^t$

hipótese

b) $A^t \cdot B^t = (B \cdot A)^t = B^t$

c) Multiplicando por A^{-1}, "à esquerda", ambos os membros da igualdade $A \cdot B = A$, tem-se:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot A$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = I$$

$$I \cdot B = I$$

$$B = I$$

Se $B = I$, na igualdade $B \cdot A = B$, obtemos $A = I$.

) **A** e **B** são *invertíveis* e *comutam*. Verifique que A^{-1} e B^{-1} também *comutam*.

Solução

Se **A** e **B** *comutam*, tem-se $A \cdot B = B \cdot A$.
Devemos demonstrar que A^{-1} e B^{-1} *comutam*, isto é, que $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
De fato:

$$A^{-1} \cdot B^{-1} = (B \cdot A)^{-1} = (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

A e **B** comutam

2) Se **A** é *não singular* e $A \cdot B = A \cdot C$, então $B = C$.

Solução

Se **A** é não singular, existe A^{-1}. Multiplicando-se por A^{-1} ambos os membros da equação $A \cdot B = A \cdot C$, obtemos sucessivamente:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C$$

$$I \cdot B = I \cdot C$$

$$B = C$$

3) Se **A** é *invertível* e $A^2 - 3 \cdot A + 2 \cdot I = 0$, verifique que:

$$A^{-1} = \frac{3}{2} \cdot I - \frac{1}{2} \cdot A$$

Solução

"Isolando" a matriz **I** no primeiro membro da equação matricial acima:

$$2 \cdot I = -A^2 + 3 \cdot A$$

$$I = -\frac{1}{2} \cdot A^2 + \frac{3}{2} \cdot A$$

Multiplicando-se, agora, ambos os membros da equação por A^{-1}, obtemos:

$$I \cdot A^{-1} = \left(-\frac{1}{2} \cdot A^2 + \frac{3}{2} \cdot A\right) \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \left(-\frac{1}{2} \cdot A^2\right) \cdot A^{-1} + \left(\frac{3}{2} \cdot A\right) \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot A \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right) + \frac{3}{2} \cdot \left(A \cdot A^{-1}\right)$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \left(A \cdot I\right) + \frac{3}{2} \cdot I$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot A + \frac{3}{2} \cdot I$$

2.74) As matrizes I + A e I − A são *invertíveis*. Verifique que se $B = (I + A) \cdot (I - A)^{-1}$, então $B^t = (I - A^t)^{-1} \cdot (I + A^t)$.

Solução

$$B^t = [(I + A) \cdot (I - A)^{-1}]^t = [(I - A)^{-1}]^t \cdot (I + A)^t = [(I - A)^t]^{-1} \cdot (I + A)^t =$$

$$= (I^t - A^t)^{-1} \cdot (I^t + A^t) = (I - A^t)^{-1} \cdot (I + A^t).$$

2.75) A matriz quadrada A é *invertível*. Para p ∈ ℕ*, demonstre que:

$$(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$$

Solução

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática.**

Teorema 1

Para p = 1 a propriedade é válida.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que a propriedade é válida para p = k, isto é:

$$(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$$

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para p = k + 1, isto é:

$$(A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$$

Multiplicando-se, "à direita", ambos os membros da igualdade da hipótese pela matriz A^{-1}:

$$(A^k)^{-1} \cdot A^{-1} = (A^{-1})^k \cdot A^{-1}$$
$$(A \cdot A^k)^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$$
$$(A^{k+1})^{-1} = (A^{-1})^{k+1}$$

2.76) Suponha que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Mostre que $B^m = P^{-1} \cdot A^m \cdot P$, para m ∈ ℕ*.

Solução

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática.**

Teorema 1

Para m = 1 a propriedade é válida: $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que a propriedade é válida para m = k, isto é:

$$B^k = P^{-1} \cdot A^k \cdot P$$

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para m = k + 1, isto é:

$$B^{k+1} = P^{-1} \cdot A^{k+1} \cdot P$$

Multiplicando-se, "à direita", ambos os membros da igualdade da hipótese pela matriz B:

$$B^k \cdot B = (P^{-1} \cdot A^k \cdot P) \cdot B$$
$$B^{k+1} = (P^{-1} \cdot A^k \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot A \cdot P)$$ (dado)
$$B^{k+1} = (P^{-1} \cdot A^k) \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot A \cdot P$$
$$B^{k+1} = P^{-1} \cdot A^k \cdot I \cdot A \cdot P$$
$$B^{k+1} = P^{-1} \cdot A^k \cdot A \cdot P$$
$$B^{k+1} = P^{-1} \cdot A^{k+1} \cdot P$$

Exercícios Propostos

2.77) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, verifique que $A^{-1} = \frac{-1}{3} \cdot (A^2 - 2 \cdot A - 4 \cdot I)$.

2.78) **A** é uma matriz não singular. Se **A** é *simétrica* então A^{-1} é *simétrica*. Demonstre!

2.79) Para as matrizes **A**, **B** e **Q**, tem-se: $B = Q \cdot A \cdot Q^{-1}$; verifique que: $A = Q^{-1} \cdot B \cdot Q$.

2.80) **A** e **B** são matrizes invertíveis, dadas. Determine a matriz X:

$$X = B + (I - B \cdot A) \cdot X$$

2.81) Para as matrizes **P** e **Q** verifique que se $P^{-1} + Q^{-1} = I$ então $P + Q = P \cdot Q$.

2.82) Teorema: Mostre que uma matriz 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é *invertível* se e somente se Δ = ad − bc ≠ 0.

Se Δ ≠ 0, verifique que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observe que o **Teorema** acima dá um método simples que permite inverter, de forma rápida, qualquer matriz de ordem 2×2, **A**, ***não singular***.

Para se obter a sua inversa A^{-1}, procede-se da seguinte forma:

i) *trocam-se os sinais dos elementos* **b e c**

ii) *trocam-se as posições dos elementos* **a e d**

iii) *multiplica-se a matriz resultante por* $\frac{1}{\Delta}$, *onde* Δ = ad − bc

2.83) Se A, B e A + B são *invertíveis*, assuma que $(A^{-1} + B^{-1})^{-1}$ é *invertível*. Então, verifique que:

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A \cdot (A + B)^{-1} \cdot B$$

2.84) A matriz quadrada **K** é *anti-simétrica*. Se as matrizes I + K e I − K são *invertíveis*, a matriz **B**, definida por:

$$B = (I + K) \cdot (I - K)^{-1}$$

é *ortogonal*.

2.85) No conjunto das matrizes de ordem 2 × 2, sejam as matrizes do tipo:

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, \text{ com } a + d = -1 \text{ e } ad - bc = -2$$

Considere o conjunto:

$$\text{⅂} = \{M \mid M = \alpha \cdot A + \beta \cdot I, \ (\alpha;\ \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

a) Verifique que $A^2 = -A + 2 \cdot I$ e deduza que $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot I$. A^{-1} é elemento de ⅂?

b) Demonstre que o produto de dois elementos de ⅂ é também elemento de ⅂.

Exercícios Suplementares

I.1) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+y & 4 & -2 \\ 3 & 2z & 3 \\ 0 & 4 & x-y \\ -6 & z-t & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Se $A^t = B^t$, determine x, y, z e t.

I.2) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X, sabendo-se que:

$$2 \cdot X^t - 3 \cdot A + I_2 = O_2.$$

I.3) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Determine as matrizes **X** e **Y**, de ordem 2 × 3, tais que:

$$2 \cdot X - Y = A$$
$$X + 3 \cdot Y = B$$

I.4) Se $A = \begin{bmatrix} bc & -b^2 \\ c^2 & -bc \end{bmatrix}$, então $A^2 = O$. Verifique!

I.5) Determine todas as matrizes que comutam com a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

I.6) Para cada número real α associa-se a matriz:

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Verifique que $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ e que $T_{-\alpha} = T_\alpha^t$.

I.7) As matrizes quadradas de ordem n, **A** e **B**, *comutam*. Demonstre que:

a) $(A - B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$

b) $(A - B) \cdot (A^2 + A \cdot B + B^2) = A^3 - B^3$

I.8) **A** é uma matriz quadrada. Verifique que:

a) a matriz $S = \frac{1}{2} \cdot (A + A^t)$ é *simétrica.*

b) a matriz $K = \frac{1}{2} \cdot (A - A^t)$ é *anti-simétrica.*

c) Deduza então que toda matriz quadrada pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

I.9) Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de ordem **n**, não nulas, tais que $A \cdot B = O$; dizemos então que **A** e **B** são **divisores de zero.**
Mostre que as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

são *divisores de zero.*

I.10) Seja **A** uma matriz quadrada. Se $A^2 = A$, então dizemos que **A** é **idempotente.**
Mostre que as matrizes **A** e **B** do exercício anterior são *idempotentes.*

I.11) A matriz quadrada **C** é *idempotente* e não nula. Verifique que as matrizes **C** e **C – I** são *divisores de zero.*

I.12) Se a matriz **A** é *involutiva* mostre que $S = \frac{1}{2} \cdot (I + A)$ e $T = \frac{1}{2} \cdot (I - A)$ são matrizes *idempotentes*. Verifique então que $S \cdot T = O$.

I.13) **A, B** e **C** são matrizes de ordem $n \times n$ tais que: $A = B + C$, $C^2 = O$ e $B \cdot C = C \cdot B$. Mostre que para p, $p \in \mathbb{N}^*$, tem-se:

$$A^{p+1} = B^p \cdot [B + (p + 1) \cdot C]$$

I.14) Determine os reais x, y, z para que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x & y & z \end{bmatrix}$$

seja *ortogonal.*

I.15) Existe alguma matriz *invertível* **A**, tal que $A^2 = 0$?

I.16) **A, B** e **C** são matrizes de ordem $n \times n$, *invertíveis.* Determine a matriz X:

$$A \cdot (B^{-1} \cdot X) = C^{-1} \cdot A$$

I.17) **A** e **B** são matrizes quadradas de ordem **n** e **A** é *invertível*. Verifique que:

$$(A + B) \cdot A^{-1} \cdot (A - B) = (A - B) \cdot A^{-1} \cdot (A + B)$$

I.18) Sejam $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}, A_n$ matrizes de ordem $n \times n$, invertíveis. **Utilize o Método da Indução Matemática** para demonstrar que:

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}$$

I.19) X_1 e X_2 são matrizes de ordem 2×2. Determine-as:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X_1 + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X_1 + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$$

I.20) Considere o conjunto $\urcorner$ de todas as matrizes quadradas de ordem 2 da forma:

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

a) Mostre que dois elementos de $\urcorner$, A_α e A_β, comutam se e somente se $\alpha = \beta$.

b) Verifique que $A_\alpha \cdot A_\beta + A_\beta \cdot A_\alpha = (2 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}) \cdot I_2$.

c) Calcule A_α^2.

d) Verifique que $(A_\alpha + A_\beta)^2 = -\frac{(\alpha - \beta)^2}{\alpha\beta} \cdot I_2$.

e) Mostre que para $n \in \mathbb{N}^*$: $(A_\alpha + A_\beta)^{2n} = (-1)^n \frac{(\alpha - \beta)^{2n}}{\alpha^n \cdot \beta^n} \cdot I_2$.

f) Verifique que $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = -\frac{1}{2} I_2$.

PARTE II

Capítulo 3 — **Cálculo de determinantes**

Capítulo 4 — **Propriedades dos determinantes**

Capítulo 5 — **Outros temas importantes**

Capítulo

3

Cálculo de determinantes

3.1 – DEFINIÇÕES

Aqui, vamos descrever como se associa a uma matriz quadrada de ordem n, $A = [a_{ij}]$, um número que se denomina *determinante* de A.

Historicamente, os determinantes surgiram no século XVII, com os estudos sobre a resolução de um sistema de equações lineares.

Para uma matriz quadrada A, há um caminho preciso para se calcular o seu determinante:

1º) Se A é uma matriz quadrada de ordem 1:

$$A = [a_{11}]$$

o seu determinante é a_1.

O determinante de A é notado com det A; então:

$$\det A = \det [a_{11}] = a_{11}$$

Exemplo: $\det [4] = 4$

2º) Se A é uma matriz quadrada de ordem 2:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

o seu determinante é $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Para substituir a notação $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ usa-se a notação $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, na qual se utilizam barras verticais "cercando" os elementos de A.

Então:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Observe então que det A é o produto dos elementos da diagonal principal de A *menos* o produto dos elementos da diagonal secundária de A.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

⊖ ⊕

3º) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

o seu determinante é:

$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

Então:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

A igualdade acima pode ser memorizada com auxílio de uma regra bastante prática, denominada **Regra de Sarrus**; os produtos são obtidos conforme indica o esquema:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \oplus \begin{cases} a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \ominus \begin{cases} a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{cases}$$

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 4 = 18$$

$$\ominus \begin{cases} 2 \cdot 0 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 \cdot 1 \end{cases} \qquad \begin{rcases} (-1) \cdot 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 \cdot 1 \end{rcases} \oplus$$

Exercícios Resolvidos

3.1) Se $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8$, calcule $D = \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$

Solução

Da igualdade $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8$ obtemos $2x - 12 = 8$ e daí $x = 10$.

Então, $D = \begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 66 - (-5) = 71$

3.2) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Determine x, $x \in \mathbb{R}$, para que: $\det(A - x \cdot I) = 0$.

Solução

Temos: $A - x \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{bmatrix}$

Então, $\det(A - x \cdot I) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 0 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(1-4) = 0$. Daí, $x = 1$ ou $x = 4$.

3.3) Resolva a equação: $\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Solução

Temos:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 2 & x & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \cdot x \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot x \cdot 0 - x \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = 0$$

Daí: $x^2 + 2x - 4 = 0$ e, então, $V = \{-1 + \sqrt{5}\ ; -1 - \sqrt{5}\}$

Exercícios Propostos

3.4) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{tg}\alpha \end{vmatrix}$

3.5) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$ b) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 2\operatorname{sen} x \\ 2\operatorname{sen}^2 x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} 4\operatorname{sen} x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$

3.6) Determine θ, $\theta \in \mathbb{R}$, para que a equação em x:

$$\begin{vmatrix} x-\cos\theta & \cos^2\theta - 1 \\ 1 & x-\cos\theta \end{vmatrix} = 0$$

admita raízes reais.

3.7) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3.8) Calcule:

a) $\det I_3$ b) $\det O_{3\times 3}$ c) $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$

3.9) Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\det A = 3$, calcule:

a) $\det(2A)$ b) $\det(A^t)$ c) $\det(A^{-1})$

3.10) Verifique que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ para as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3.11) Resolva as equações:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

3.12) Resolva as inequações:

a) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$ b) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$

3.2 – MENOR E COFATOR

Definição

Seja A uma matriz quadrada, de ordem n, $n \geqslant 2$, e seja a_{ij} um elemento qualquer de A. O *determinante* da matriz de ordem n - 1, obtida de A suprimindo-se sua i-ésima linha e sua j-ésima coluna chama-se menor do elemento a_{ij}, e indica-se-o com M_{ij}.

Exemplos

1º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

2º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad M_{12} = |3| = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad M_{21} = |2| = 2$$

Definição

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**, $n \geqslant 2$, e seja a_{ij} um elemento qualquer de **A**. O *número*:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

chama-se cofator do elemento a_{ij}.

Exemplos

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-7) = 7$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) = -3$$

3.3 – DEFINIÇÃO DE DETERMINANTE

Vimos até aqui a definição de determinante para matrizes quadradas de ordem 1, 2 e 3.

Agora, a partir do conceito de *cofator*, definiremos determinante para uma matriz de ordem **n, qualquer.**

Seja A uma matriz quadrada de ordem *n*. Define-se:

Para n = 1: $A = [a_{11}]$ **e** $\det A = |a_{11}| = a_{11}$

Para $n \geqslant 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \dots + a_{1n} \cdot A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j}$$

Então, o determinante de uma matriz quadrada de ordem **n**, $n \geqslant 2$, *é a soma dos produtos dos elementos da primeira linha da matriz pelos respectivos cofatores.*

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} =$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot |a_{22}| + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot |a_{21}| =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$$

2º) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$

$$= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{31} \cdot a_{22}.$$

Note que o resultado acima coincide com aquele da definição dada anteriormente **(Regra de Sarrus).**

$$3^{\circ})\ \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + (-3) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{13} + 5 \cdot A_{14} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-14) + 3 \cdot (-17) + 2 \cdot (-5) - 5 \cdot (-18) = 1$$

$$4^{\circ})\ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 3 & 0 & 3 \\ 30 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{11} + \underbrace{0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}}_{\text{zero}} =$$

$$= 2 \cdot A_{11} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0$$

Exercícios Propostos

3.13) Usando a definição dada acima, calcule os determinantes das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -2 & 9 \end{bmatrix}$

3.14) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & é \end{vmatrix}$ b) det I_5

3.15) Seja a matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Use a **definição** e calcule det A.
b) Calcule: $a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + a_{41} \cdot A_{41}$
c) Calcule: $a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} + a_{14} \cdot A_{24}$

3.4 – TEOREMA DE LAPLACE

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, $n \geq 2$. O seu determinante é a soma dos produtos dos elementos de uma fila (linha ou coluna) qualquer pelos respectivos cofatores.

A demonstração é mais complexa que instrutiva; não a faremos.

Observações

1ª) Para a matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ podemos escrever:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} \cdot A_{pj} = \sum_{i=1}^{n} a_{iq} \cdot A_{iq}$$

para todo p, $1 \leq p \leq n$ e para todo q, $1 \leq q \leq n$

2ª) A escolha da linha (ou coluna) para o cálculo de um determinante deve ser adequada: *a fila escolhida deve ser aquela que possua mais zeros.* Para cada zero da fila escolhida corresponde um cofator que não precisa ser calculado.

Exemplos

1º) Consideremos a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Utilizando a 2ª linha para a aplicação do **Teorema de Laplace**:

$\det A = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24}$

$\det A = \underbrace{0 \cdot A_{21}}_{\text{zero}} + 3 \cdot A_{22} + \underbrace{0 \cdot A_{23}}_{\text{zero}} + a_{24} \cdot A_{24}$

Note que a escolha feita leva-nos ao cálculo de apenas 2 cofatores; se utilizássemos a 1ª linha, deveríamos calcular 4 cofatores.

2º) Vamos calcular o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

Escolhas apropriadas para o desenvolvimento são a 3ª linha ou a 2ª coluna. Utilizando, então, a 3ª linha:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = a_{31} \cdot A_{31} + \underbrace{a_{32} \cdot A_{32}}_{\text{zero}} + \underbrace{a_{33} \cdot A_{33}}_{\text{zero}} + a_{34} \cdot A_{34} =$$

$$= (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Agora, utilizamos a 1ª coluna para desenvolver o determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + (-1) \cdot 2 \cdot (-1) = 20$$

Analogamente, utilizando a 3ª linha, calculamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{1+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot (-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 8 + 1 \cdot (-2) \cdot 10 = -4$$

Então $D = 1 \cdot 3 \cdot 20 + (-1) \cdot (-3) \cdot (-4) = 48$

Uma aplicação do Teorema de Laplace – Matriz triangular

Seja a matriz *quadrada* de ordem **n**: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

Se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$, **A** denomina-se **matriz triangular superior**.

Então:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que os elementos de **A** que estão "abaixo" da diagonal principal são iguais a zero.

Analogamente, se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$, **A** denomina-se **matriz triangular inferior**:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se **A** é uma matriz triangular, o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal; isto se verifica desenvolvendo o determinante de A através da 1ª linha, se ela for triangular superior, e, através da 1ª coluna, se ela for triangular inferior:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Note que a *matriz diagonal* de ordem n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é *triangular* (veja item 1.6).

Em particular, a *matriz identidade* de ordem n, I_n, que é uma matriz diagonal, é também triangular. Tem-se:

$$\det I_n = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1}_{\text{n fatores}} = 1$$

Então, para a matriz identidade de ordem n:

$$\det I_n = 1$$

Exercícios Propostos

3.16) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -2 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3.17) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & b & -1 & 1 \\ 2 & c & 0 & -1 \\ 0 & d & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 & 0 & a_1 \end{vmatrix}$

3.18) Calcule os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 9 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3.19) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ x_1 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3.20) Dê uma matriz quadrada de ordem 3 cujo determinante é igual a:

$$x \cdot \begin{vmatrix} x & c \\ c & x \end{vmatrix} - a \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & x \end{vmatrix} + b \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & c \end{vmatrix}$$

3.21) Seja A uma matriz *triangular superior*; A^t é uma matriz *triangular*?

3.22) A e B, de mesma ordem, são matrizes *triangulares superiores*. Verifique que A • B é matriz *triangular superior*.

3.23) Calcule o determinante da matriz de ordem n:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

3.24) Seja a matriz quadrada de ordem n:

$$A = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{bmatrix}$$

Verifique que $\det A = (-1)^n \cdot (t^n - a_1 a_2 a_3 \dots a_n)$.

Capítulo 4

Propriedades dos determinantes

4.1 – DETERMINANTE DA MATRIZ TRANSPOSTA

▶ **Propriedade P1**

Seja a matriz quadrada A, de ordem n; então:

$$\det A^t = \det A$$

Demonstração

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática** sobre n:

Teorema 1

Para $n = 1$ a propriedade é imediata.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que para matrizes de ordem $n = p - 1$ a propriedade é válida.

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para $n = p$.

Sejam então as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pp} \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & b_{p2} & b_{p3} & \dots & b_{pp} \end{bmatrix}$$

onde $b_{ij} = a_{ji} \begin{cases} \text{para todo } i, \ 1 \leqslant i \leqslant p \\ \text{para todo } j, \ 1 \leqslant j \leqslant p \end{cases}$

Desenvolvendo det A e det A^t através da 1ª linha:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \dots + a_{1p} \cdot A_{1p}$$

$$\det A^t = b_{11} \cdot B_{11} + b_{12} \cdot B_{12} + b_{13} \cdot B_{13} + \dots + b_{1p} \cdot B_{1p} \qquad \text{(I)}$$

Da definição de matriz transposta:

$$b_{11} = a_{11},\ b_{12} = a_{21},\ b_{13} = a_{31},\ \dots,\ b_{1p} = a_{p1},$$

e, pela hipótese do **Teorema 2**,

$B_{11} = A_{11},\ B_{12} = A_{21},\ B_{13} = A_{31},\ \dots,\ B_{1p} = A_{p1}$ (observe que são determinantes de matrizes de ordem $p - 1$).

Agora, substituindo em (I):

$$\det A^t = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} + \dots + a_{p1} \cdot A_{p1} = \det A$$

(desenvolvimento através da 1ª coluna).

Observações

1ª) A importância da propriedade acima reside no fato de que as propriedades dos determinantes que são válidas para as linhas de uma matriz, também o são para as suas colunas. Então, se uma propriedade é demonstrada para as linhas, poderemos poupar a demonstração para as colunas, e reciprocamente.

2ª) Atenção: Por comodidade de linguagem diremos, às vezes, "a linha, a coluna, ... do determinante D". Quando isto se der, fica estabelecido que se fixou uma matriz quadrada cujo determinante é D; e a linha, a coluna, ... a que nos referimos, são da matriz fixada.

Exemplos

1º) $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

2º) $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -11$

4.2 – TROCA DE FILAS

▶ Propriedade P2

Seja a matriz quadrada **A**, de ordem **n**, $n \geq 2$.
Se uma matriz **B** é obtida de **A**, "trocando-se" nesta as posições de duas *quaisquer* linhas (ou colunas), tem-se:

$$\det B = -\det A$$

Demonstração

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática** sobre **n**, fazendo a "troca" de duas *linhas*:

Teorema 1

Demonstremos a propriedade para n = 2.

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$; então $\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

"Trocando-se" as posições das linhas:

$B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$, e daí $\det B = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = -\det A$

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que para matrizes de ordem $n = p - 1$ a propriedade é válida, isto é, numa matriz A, de ordem $p - 1$, trocam-se as posições de duas *linhas* obtendo-se a matriz B e, então, $\det B = -\det A$.

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para n = p, isto é, numa matriz A, de ordem p, trocam-se as posições de duas *linhas* obtendo-se a matriz B, e então, $\det B = -\det A$.

Sejam as matrizes $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ e B, que se obtém de **A** "trocando-se" nesta as posições de duas linhas.

Em **A** e em **B** seja **i** a ordem de uma linha *diferente das duas que foram trocadas*; então:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \quad \text{e} \quad \det B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot B_{ij}$$

Cada cofator B_{ij}, associado a uma matriz de ordem $p - 1$, é obtido do cofator A_{ij}, "trocando-se" neste as posições de duas linhas; por hipótese do Teorema 2:

$$B_{ij} = -A_{ij}$$

Então,

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-A_{ij}) = -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = -\det A$$

A demonstração é análoga se em **A** fizéssemos a troca de duas colunas.

Exemplos

1º) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & b & a \\ z & y & x \\ r & q & p \end{vmatrix}$

2º) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$

4.3 – FILAS IGUAIS

Elementos correspondentes

Seja a matriz A, de ordem $m \times n$. Dadas duas de suas *linhas*, um elemento de uma delas e um elemento da outra dizem-se **correspondentes** se pertencem à mesma coluna.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 4 & -1 & a \\ 5 & 7 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

os elementos 0, 4, - 1 e a da 2ª linha são os respectivos correspondentes dos elementos 5, 7, 9 e 0 da 3ª linha.

Diremos que numa matriz A **linhas**, de ordens diferentes, **são iguais** se os elementos correspondentes nessas linhas são iguais.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & x & b & c \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & x & b & c \end{bmatrix}$$

as 1ª e 3ª linhas são iguais.

Analogamente definimos *elementos correspondentes em colunas e colunas iguais* para uma matriz; por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

os elementos 1, 5 e 3 da 1ª coluna são os respectivos correspondentes dos elementos 3, 4 e 7 da 2ª coluna; observe que as 1ª e 3ª colunas são iguais.

▶ Propriedade P3

> Seja a matriz quadrada A, de ordem n, $n \geq 2$.
> Se A possui duas linhas (ou colunas) iguais tem-se:
>
> $\det A = 0$

Demonstração

Em $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, suponhamos que a i-ésima e k-ésima *linhas* sejam iguais, isto é:

$$a_{ij} = a_{kj}, \text{ para todo } j,\ 1 \leq j \leq n$$

"Trocando-se", então, as posições dessas duas linhas, obtém-se a matriz **B**, tal que:

$$\det \mathbf{B} = -\det \mathbf{A} \quad \text{(I)}$$

Mas, como as duas linhas "trocadas" são iguais, tem-se:

$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) conclui-se que:

$$\det \mathbf{A} = -\det \mathbf{A}$$

e daí $\det A = 0$.

A demonstração é análoga se em A tivermos duas *colunas* iguais.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ x & 7 & x \\ a & 4 & a \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 1 & 3 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

4.4 – FILA NULA

Definição

Seja a matriz **A** de ordem m × n.

Uma **fila** de **A** (linha ou coluna) diz-se **nula** quando os elementos que a constituem são todos iguais a zero.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & y & c & d \end{bmatrix}$$

a 2ª linha é **nula**.

Propriedade P4

Seja a matriz quadrada **A**, de ordem **n**.
Se **A** possui uma **fila** (linha ou coluna) **nula**, então:

$$\det A = 0$$

Demonstração

Desenvolvendo o determinante de **A** através da fila nula, tem-se a tese.

Exemplos

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 12 \\ 2 & x & 0 & 100 \\ 3 & 7 & 0 & 101 \\ 4 & y & 0 & 200 \end{vmatrix} = 0$$

4.5 – MULTIPLICAÇÃO DE UMA FILA POR UMA CONSTANTE

Definição

Seja a matriz **A** de ordem m × n.

"Multiplicar uma fila (linha ou coluna) por um número k" é multiplicar todos os elementos que a constituem por **k**.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & x & y \\ 1 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

se multiplicarmos a 3ª linha por 5, obtemos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} a & x & y \\ 1 & 3 & 7 \\ 20 & 25 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Propriedade P5

Seja a matriz quadrada **A**, de ordem **n**.
Seja **B** a matriz obtida de **A** multiplicando-se nesta uma linha (ou coluna) pelo número **k**; então:

$$\det B = k \cdot \det A$$

Demonstração

Sejam, então, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \dots & ka_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observe que a matriz **B** foi obtida da matriz **A** multiplicando-se nesta a i-ésima linha ($1 \leqslant i \leqslant n$) pelo número **k**.

Note também que os cofatores dos elementos da i-ésima linha de **B** são iguais aos cofatores dos elementos correspondentes da i-ésima linha de **A**. Então, desenvolvendo o determinante de **B** através de sua i-ésima linha:

$$\det B = k \cdot a_{i1} \cdot A_{i1} + k \cdot a_{i2} \cdot A_{i2} + k \cdot a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + k \cdot a_{in} \cdot A_{in} =$$
$$= k[a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + a_{i3} \cdot A_{i3} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}] = k \cdot \det A$$

Para a multiplicação de uma coluna de A por um número, a demonstração é análoga.

Exemplos

1º)
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & -9 \\ 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} =$$

2 "em evidência"

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -9 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

3 "em evidência"

2º)
$$k\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{k}\begin{vmatrix} a & kb & c \\ kd & k^2e & kf \\ g & kh & i \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a & kb & c \\ \frac{d}{k} & e & \frac{f}{k} \\ g & kh & i \end{vmatrix} = \ldots$$

3º) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \text{ e } B = k\cdot A, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\det B = \det(k\cdot A) = \det\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix} =$$

$$= k\cdot k\cdot k\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k^3\cdot\det A$$

4.6 — FILAS PROPORCIONAIS

Definição

Seja a matriz A de ordem m × n.

Diremos que duas linhas (ou duas colunas) de A **são proporcionais** quando os elementos de uma delas são ordenadamente iguais aos produtos dos elementos correspondentes da outra por mesmo número k.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & z & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

a 1ª linha e a 3ª linha *são proporcionais*. Note que os elementos da 3ª linha são ordenadamente iguais aos elementos correspondentes da 1ª linha multiplicados por 2.

▶ **Propriedade P6**

> Seja a matriz quadrada A, de ordem n.
> Se A possui duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, então:
> $$\det A = 0$$

Demonstração

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ e suponhamos que, nela, as i-ésima e r-ésima linhas são proporcionais.

$$a_{ij} = k\cdot a_{rj}, \text{ para todo } j,\ 1 \leqslant j \leqslant n$$

Então:

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{linha } i \rightarrow \\ \\ \text{linha } r \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{r1} & ka_{r2} & ka_{r3} & \cdots & ka_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

$$\overset{(P5)}{=} k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(P3)}{=} k \cdot 0 = 0$$

A demonstração quando em A duas colunas são proporcionais é análoga.

Exemplo

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4 & b \\ 3 & 6 & c \end{bmatrix} = 0,$$ pois as 1ª e 2ª colunas são proporcionais.

Exercícios Resolvidos

4.1) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$, com det A = – 4

Determine:

a) $\det A^t$

b) $D_1 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix}$

c) $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix}$

Solução

a) A propriedade (P1) dá-nos: $\det A^t = \det A = -4$.

b) $D_1 = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ c_3 & c_2 & c_1 \end{vmatrix} \overset{(P2)}{=} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\det A = -(-4) = 4.$

trocam-se as posições

c) $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \det A = 2 \cdot (-4) = -8.$

4.2) a) Seja a matriz quadrada A, de ordem n; k é um número real. Então:

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$$

b) Seja a matriz $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Calcule: det (5 · A) e 5 · det A.

Solução

a) Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} & \cdots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & \cdots & ka_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & ka_{n3} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicando a propriedade (P5) "n vezes", *nas n linhas da matriz k · A*:

$$\det(k \cdot A) = \underbrace{k \cdot k \cdot k \ldots k \cdot k}_{\text{"n vezes"}} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k^n \cdot \det A$$

b) Temos:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 98$$

Então:

$\det(5 \cdot A) = 5^3 \cdot \det A = 125 \cdot 98 = 12250$

$5 \cdot \det A = 5 \cdot 98 = 490$

4.3) Prove que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Solução

Na matriz $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{bmatrix}$, multiplicando-se a 1ª coluna por a, a 2ª coluna por b e a 3ª coluna por c, o seu determinante fica multiplicado por abc; então

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=} \frac{abc}{abc}\cdot\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(P1)}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^3 & 1 \\ b^2 & b^3 & 1 \\ c^2 & c^3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(P2)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & a^3 & a^2 \\ 1 & b^3 & b^2 \\ 1 & c^3 & c^2 \end{vmatrix} \overset{(P2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

trocam-se as posições   trocam-se as posições

4.4) Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$; a matriz B é obtida de A, multiplicando-se, nesta, cada elemento a_{ij} por α^{i-j}, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Demonstre que det B = det A.

Solução

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ então:

$$B = \begin{bmatrix} \alpha^{1-1}\cdot a_{11} & \alpha^{1-2}\cdot a_{12} & \alpha^{1-3}\cdot a_{13} & \dots & \alpha^{1-n}\cdot a_{1n} \\ \alpha^{2-1}\cdot a_{21} & \alpha^{2-2}\cdot a_{22} & \alpha^{2-3}\cdot a_{23} & \dots & \alpha^{2-n}\cdot a_{2n} \\ \alpha^{3-1}\cdot a_{31} & \alpha^{3-2}\cdot a_{32} & \alpha^{3-3}\cdot a_{33} & \dots & \alpha^{3-n}\cdot a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1}\cdot a_{n1} & \alpha^{n-2}\cdot a_{n2} & \alpha^{n-3}\cdot a_{n3} & \dots & \alpha^{n-n}\cdot a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1\cdot a_{11} & \alpha^{-1}\cdot a_{12} & \alpha^{-2}\cdot a_{13} & \dots & \alpha^{1-n}\cdot a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & 1\cdot a_{22} & \alpha^{-1}\cdot a_{23} & \dots & \alpha^{2-n}\cdot a_{2n} \\ \alpha^2\cdot a_{31} & \alpha\cdot a_{32} & 1\cdot a_{33} & \dots & \alpha^{3-n}\cdot a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1}\cdot a_{n1} & \alpha^{n-2}\cdot a_{n2} & \alpha^{n-3}\cdot a_{n3} & \dots & 1\cdot a_{nn} \end{bmatrix}$$

Em B, multiplicando-se a 2ª coluna por α, a 3ª coluna por α^2, ..., a n-ésima coluna por α^{n-1}, tem-se:

$$\det B = \frac{1}{\alpha\cdot\alpha^2\cdot\ldots\cdot\alpha^{n-1}}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22} & \alpha\cdot a_{23} & \dots & \alpha\cdot a_{2n} \\ \alpha^2\cdot a_{31} & \alpha^2\cdot a_{32} & \alpha^2\cdot a_{33} & \dots & \alpha^2\cdot a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{n-1}\cdot a_{n1} & \alpha^{n-1}\cdot a_{n2} & \alpha^{n-1}\cdot a_{n3} & \dots & \alpha^{n-1}\cdot a_{nn} \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

$$= \frac{\alpha\cdot\alpha^2\ldots\alpha^{n-1}}{\alpha\cdot\alpha^2\cdot\ldots\cdot\alpha^{n-1}}\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A$$

4.5) A matriz quadrada A, de ordem n, é *anti-simétrica*. Se n é ímpar, calcule det A.

Solução

Se A é uma matriz *anti-simétrica*:

$$A^t = -A$$

Então, $\det A^t = \det(-A)$.

Usando a propriedade (P1) e o exercício 4.2a, podemos escrever:

$$\det A = (-1)^n\cdot\det A$$

Se n é ímpar:

$$\det A = -\det A$$
$$2\cdot\det A = 0$$
$$\det A = 0$$

Exercícios Propostos

4.6) Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$, calcule: $\begin{vmatrix} 2g & 2h & 2i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

4.7) Determine o valor de **m** sabendo-se que:

$$\begin{vmatrix} a^2d & 3abc & 3ac \\ -2abd & b^2c & 6bc \\ -acd & 4bc^2 & -9c^2 \end{vmatrix} = m \cdot a^2b^2c^3d \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

4.8) Mostre que:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1a_2a_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2a_3b_1 & a_1a_3b_2 & a_1a_2b_3 \\ a_2a_3c_1 & a_1a_3c_2 & a_1a_2c_3 \end{vmatrix}$$

4.9) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

4.10) Verifique:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

4.11) Se **A** é uma matriz quadrada de ordem **n**, $n \geqslant 2$, determine det **A** sabendo-se que $2 \cdot \det A = \det (2 \cdot A)$.

4.12) Calcule, sem desenvolver, o determinante da matriz:

$$\begin{bmatrix} x^2 - y^2 & x + y & x \\ x - y & 1 & 1 \\ x - y & 1 & y \end{bmatrix}$$

4.13) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ x & x & 1 \\ x^2 - x & x^2 - 1 & x^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

4.7 – ADIÇÃO DE DETERMINANTES

▶ **Propriedade P7**

Sejam as matrizes quadradas de ordem n:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha i}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha i}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & b_{i3} + c_{i3} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \leftarrow \text{linha i}$$

Observe que as matrizes **B** e **C** são idênticas **exceto** na **i-ésima** linha; a matriz **A** é idêntica a **B** e **C** exceto na sua **i-ésima** linha, que é obtida somando-se as **i-ésimas** linhas de **B** e **C**, isto é, somando-se os elementos correspondentes nas **i-ésimas** linhas de **B** e de **C**. Então:

$$\det A = \det B + \det C$$

Demonstração

Os cofatores dos elementos a_{ij} da i-ésima linha da matriz **A** são os mesmos cofatores dos correspondentes elementos, b_{ij} e c_{ij}, das i-ésimas linhas das matrizes **B** e **C**; isto é:

$$A_{ij} = B_{ij} = C_{ij}, \ (1 \leqslant j \leqslant n)$$

Desenvolvendo o determinante da matriz **A** através de sua i-ésima linha:

$$\det \mathbf{A} = (b_{i1}+c_{i1})\cdot A_{i1}+(b_{i2}+c_{i2})\cdot A_{i2}+(b_{i3}+c_{i3})\cdot A_{i3}+\ldots+(b_{in}+c_{in})\cdot A_{in} =$$
$$= (b_{i1}\cdot A_{i1}+b_{i2}\cdot A_{i2}+b_{i3}\cdot A_{i3}+\ldots+b_{in}\cdot A_{in})+(c_{i1}\cdot A_{i1}+c_{i2}\cdot A_{i2}+c_{i3}\cdot A_{i3}+\ldots+$$
$$+ c_{in}\cdot A_{in}) = (b_{i1}\cdot B_{i1}+b_{i2}\cdot B_{i2}+b_{i3}\cdot B_{i3}+\ldots+b_{in}\cdot B_{in})+(c_{i1}\cdot C_{i1}+c_{i2}\cdot C_{i2}+$$
$$+ c_{i3}\cdot C_{i3}+\ldots+c_{in}\cdot C_{in}) = \det \mathbf{B} + \det \mathbf{C}$$

A propriedade também é válida para *colunas*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_{1j}+c_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_{2j}+c_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & b_{3j}+c_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_{nj}+c_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

(coluna j)

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & b_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & b_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & b_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & b_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & c_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & c_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & c_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & c_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(coluna j) (coluna j)

Exemplos

1º)
$$\begin{vmatrix} a_1+x_1 & y & z \\ a_2+x_2 & t & m \\ a_3+x_3 & n & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & y & z \\ a_2 & t & m \\ a_3 & n & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y & z \\ x_2 & t & m \\ x_3 & n & o \end{vmatrix}$$

2º)
$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1+x_1 & a_2+x_2 & a_3+x_3 \\ t & m & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ t & m & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ t & m & n \end{vmatrix}$$

Exercícios Resolvidos

4.14) Calcule:
$$\begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix}$$

Solução

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 3a+2 \\ b & 2 & 3b+4 \\ c & 3 & 3c+6 \end{vmatrix} \overset{(P7)}{=} \begin{vmatrix} a & 1 & 3a \\ b & 2 & 3b \\ c & 3 & 3c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 4 \\ c & 3 & 6 \end{vmatrix} \overset{(P6)}{=} 0 + 0 = 0$$

"proporcionais" "proporcionais"

4.15) Calcule, sem desenvolver os determinantes, a soma:

$$S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 1 & -3 & -5 \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

Solução

$$S = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 1 & -3 & -5 \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ d & e & f \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & -5 \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\left\{\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 3 & 5 \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -3 & -5 \\ d & e & f \end{vmatrix}\right\} \overset{(P7)}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ -1+1 & 3+(-3) & 5+(-5) \\ d & e & f \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{(P4)}{=} 2\cdot 0 = 0$$

4.16) Calcule, sem desenvolver os determinantes, a soma:

$$S = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

Solução

$$S = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{(P7)}{=}$$

$$\overset{(P7)}{=}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 7+5 & -1+1 & 3-3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 12 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -12 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \overset{(P1)}{=}$$

$$\overset{(P1)}{=}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 12 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -12 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix} \overset{(P7)}{=}$$

$$\overset{(P7)}{=}\begin{vmatrix} 4+5 & 3 & 4 \\ 12-12 & 0 & 0 \\ 2+3 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 6 \end{vmatrix} \overset{(P4)}{=} 0$$

Exercícios Propostos

4.17) Verifique que $\begin{vmatrix} x & 1 & 2x+3 \\ y & 3 & 2y+9 \\ z & 5 & 2z+15 \end{vmatrix} = 0$

4.18) Verifique que $\begin{vmatrix} a & -1 & d \\ b & 2 & e \\ c & -3 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & b & a \\ 3 & 6 & 1 \\ f & e & d \end{vmatrix} = 0$

4.19) Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2$, calcule: $\begin{vmatrix} a & b+2c & 3c \\ d & e+2f & 3f \\ g & h+2i & 3i \end{vmatrix}$

4.20) Se $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 5 & 7 \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$, calcule: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 4 & g \\ b & 6 & h \\ c & 8 & i \end{vmatrix}$

4.21) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ x^2 & x^3+x & x^4+2x & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ x^2 & x^3 & x^4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4.22) a) Verifique que: $\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$

b) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+cda \\ 1 & c & c^2 & c^3+dab \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = 0$

4.23) Seja o conjunto de matrizes do tipo:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_j & d & g \\ b_j & e & h \\ c_j & f & i \end{bmatrix}, \; 1 \leqslant j \leqslant p$$

Demonstre que:

$$\det\left(\sum_{j=1}^{p} A_j\right) = p^2 \cdot \sum_{j=1}^{p} (\det A_j)$$

4.24) Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de ordem **n.** Verifique com um exemplo que $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

4.25) Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Se $\det(A+B) = \det A + \det B$, demonstre que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

4.8 – TEOREMA DE CAUCHY

▶ **Propriedade P8**

> Seja A uma matriz quadrada de ordem n, n ⩾ 2.
>
> A soma dos produtos dos elementos de uma linha (ou coluna), ordenadamente, pelos cofatores dos elementos correspondentes de qualquer **outra** linha (ou coluna), é igual a **zero.**

Demonstração

Seja, então, a matriz:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha } p \\ \\ \leftarrow \text{linha } q \\ \\ \\ \end{array}$$

Em A, substituindo a q-ésima linha pela p-ésima linha obtemos a matriz:

$$B = \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{linha } p \\ \leftarrow \text{linha } q \\ \\ \end{array} \Big\} \; b_{qk} = a_{pk},\; 1 \leqslant k \leqslant n$$

Observe que os cofatores dos elementos da q-ésima linha de **B** são ordenadamente iguais aos cofatores dos correspondentes elementos da q-ésima linha de **A**:

$$B_{q1} = A_{q1},\; B_{q2} = A_{q2},\; B_{q3} = A_{q3},\; \dots,\; B_{qn} = A_{qn}$$

Desenvolvendo o determinante da matriz **B** através dos elementos da q-ésima linha:

$$\det B = b_{q1} \cdot B_{q1} + b_{q2} \cdot B_{q2} + b_{q3} \cdot B_{q3} + \dots + b_{qn} \cdot B_{qn}$$

$$\det B = a_{p1} \cdot A_{q1} + a_{p2} \cdot A_{q2} + a_{p3} \cdot A_{q3} + \dots + a_{pn} \cdot A_{qn}$$

Note que $\det B = 0$, pois duas de suas linhas são iguais (P3). Então:

$$a_{p1} \cdot A_{q1} + a_{p2} \cdot A_{q2} + a_{p3} \cdot A_{q3} + \dots + a_{pn} \cdot A_{qn} = 0$$

A demonstração é análoga se considerássemos as colunas de A.

Exemplo

Seja a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Vamos somar os produtos dos elementos da 1ª coluna pelos cofatores dos correspondentes elementos da 2ª coluna:

$$s = a_{11} \cdot A_{12} + a_{21} \cdot A_{22} + a_{31} \cdot A_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

$$s = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-19) + 3 \cdot (13) = 0$$

Observação

Seja a matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, de ordem n. Tem-se, então:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{pj} \cdot A_{qj} = \begin{cases} \det A, \text{ se } p = q \\ 0, \text{ se } p \neq q \end{cases}$$

Ou, tem-se ainda:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ip} \cdot A_{iq} = \begin{cases} \det A, \text{ se } p = q \\ 0, \text{ se } p \neq q \end{cases}$$

Observe, então, que se em **A** *escolhermos uma linha* (*ou coluna*) e somarmos os produtos de seus elementos pelos respectivos cofatores ($p = q$) obteremos det A – é o **Teorema de Laplace**; se somarmos os produtos de seus elementos, ordenadamente, pelos cofatores dos correspondentes elementos de *outra linha* (*ou outra coluna*) obteremos zero – é o **Teorema de Cauchy**.

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

Os cofatores dos elementos da 3ª coluna são:

$$A_{13} = -5,\; A_{23} = 13,\; A_{33} = -1,\; A_{43} = 0$$

Somando-se os produtos dos elementos da 3ª coluna pelos respectivos cofatores:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i3} \cdot A_{i3} = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} =$$

$$= 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (13) + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (0) = 1 = \det A$$

Somando-se os produtos dos elementos da 1ª coluna pelos cofatores dos correspondentes elementos da 3ª coluna:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i1} \cdot A_{i3} = a_{11} \cdot A_{13} + a_{21} \cdot A_{23} + a_{31} \cdot A_{33} + a_{41} \cdot A_{43} =$$

$$= 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (13) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot (0) = 0$$

4.9 – ADIÇÃO DE FILAS

Definição

"Adicionar (ou somar) uma linha a outra (ou uma coluna a outra)" em uma matriz **A**, significa adicionar os elementos de uma delas ordenadamente aos elementos correspondentes da outra.

Por exemplo, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

adicionando-se a 2ª coluna à 4ª coluna, obtemos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5+3 \\ 0 & 4 & 7 & 2+4 \\ 3 & 1 & 7 & 2+1 \end{bmatrix}$$

Combinação linear de filas

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

Nela, consideremos **k** quaisquer de suas linhas (ou colunas), e designemos com $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_k$ as ordens dessas linhas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\ell_1 1} & a_{\ell_1 2} & a_{\ell_1 3} & \ldots & a_{\ell_1 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\ell_2 1} & a_{\ell_2 2} & a_{\ell_2 3} & \ldots & a_{\ell_2 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\ell_3 1} & a_{\ell_3 2} & a_{\ell_3 3} & \ldots & a_{\ell_3 n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\ell_k 1} & a_{\ell_k 2} & a_{\ell_k 3} & \ldots & a_{\ell_k n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{linha } \ell_1 \\ \\ \leftarrow \text{linha } \ell_2 \\ \\ \leftarrow \text{linha } \ell_3 \\ \\ \leftarrow \text{linha } \ell_k \\ \\ \\ \end{matrix}$$

O conjunto de números $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ é uma **combinação linear** das **k** linhas consideradas quando:

$$x_1 = c_1 \cdot a_{\ell_1 1} + c_2 \cdot a_{\ell_2 1} + c_3 \cdot a_{\ell_3 1} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k 1}$$
$$x_2 = c_1 \cdot a_{\ell_1 2} + c_2 \cdot a_{\ell_2 2} + c_3 \cdot a_{\ell_3 2} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k 2}$$
$$x_3 = c_1 \cdot a_{\ell_1 3} + c_2 \cdot a_{\ell_2 3} + c_3 \cdot a_{\ell_3 3} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k 3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = c_1 \cdot a_{\ell_1 n} + c_2 \cdot a_{\ell_2 n} + c_3 \cdot a_{\ell_3 n} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k n}$$

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, de ordem 3×3.

Nela, consideremos as 1ª e 3ª linhas; o conjunto de números:

$$x_1 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 22$$
$$x_2 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 23$$
$$x_3 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12$$

↑ "multiplicador" da 1ª linha — ↑ "multiplicador" da 3ª linha

é uma *combinação linear* das 1ª e 3ª linhas.

De forma análoga podemos tratar combinação linear para k colunas de uma matriz; assim, na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

consideremos as 2ª e 3ª colunas; o conjunto de números:

$$y_1 = 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 8$$
$$y_2 = 5 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 25$$
$$y_3 = 5 \cdot 7 + 1 \cdot 2 = 37$$

↑ "multiplicador" da 2ª coluna — ↑ "multiplicador" da 3ª coluna

é uma *combinação linear* das 2ª e 3ª colunas.

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n:

$$A = [a_{ij}]_{n \times n}$$

Consideremos uma *combinação linear* de k linhas de A:

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Se substituirmos a i-ésima linha de A (distinta das k consideradas na combinação linear):

$$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots, a_{in}$$

ordenadamente, pelas somas

$$a_{i1} + x_1, a_{i2} + x_2, a_{i3} + x_3, \ldots, a_{in} + x_n$$

diremos que "se adicionou à i-ésima linha uma combinação linear das outras linhas".

De forma análoga definiremos "adição à j-ésima coluna de A de uma combinação linear das outras colunas".

Exemplos

1º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

O conjunto de números:

$$x_1 = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 = 8$$
$$x_2 = -1 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 11$$
$$x_3 = -1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$$

é uma combinação linear das 2ª e 3ª linhas. Vamos "somar essa combinação linear à 1ª linha"; obtemos a matriz:

$$a_{11} + x_1 \quad a_{12} + x_2 \quad a_{13} + x_3$$

$$B = \begin{bmatrix} 4+8 & 2+11 & 1+4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

2º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

O conjunto de números:

$$y_1 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 11$$
$$y_2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 = 26$$
$$y_3 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 7 = 21$$

é uma combinação linear das 1ª e 3ª colunas. Vamos "somar essa combinação linear à 2ª coluna"; obtemos a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 13 & 3 \\ 4 & 31 & 6 \\ 0 & 23 & 7 \end{bmatrix}$$

▶ **Propriedade P9**

> Seja A uma matriz quadrada de ordem n.
> Adicionando-se a uma linha (ou coluna) de A uma combinação linear das outras n - 1 linhas (ou n - 1 colunas) obtém-se a matriz B, tal que:
> $$\det B = \det A$$

Demonstração

Seja, então, a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3k} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

↑ coluna k

Vamos somar à k-ésima coluna de A uma combinação linear das demais n - 1 colunas; obtemos:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k}+c_1 \cdot a_{11}+c_2 \cdot a_{12}+\dots+c_{k-1} \cdot a_{1,k-1}+c_{k+1} \cdot a_{1,k+1}+\dots+c_n \cdot a_{1n} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k}+c_1 \cdot a_{21}+c_2 \cdot a_{22}+\dots+c_{k-1} \cdot a_{2,k-1}+c_{k+1} \cdot a_{2,k+1}+\dots+c_n \cdot a_{2n} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3k}+c_1 \cdot a_{31}+c_2 \cdot a_{32}+\dots+c_{k-1} \cdot a_{3,k-1}+c_{k+1} \cdot a_{3,k+1}+\dots+c_n \cdot a_{3n} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk}+c_1 \cdot a_{n1}+c_2 \cdot a_{n2}+\dots+c_{k-1} \cdot a_{n,k-1}+c_{k+1} \cdot a_{n,k+1}+\dots+c_n \cdot a_{nn} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A propriedade (P7) permite-nos escrever:

$$\det B = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3k} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\det A} +$$

(P6)

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & c_1 \cdot a_{11} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & c_1 \cdot a_{21} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & c_1 \cdot a_{31} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & c_1 \cdot a_{n1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{zero}} +$$

(P6)

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & c_2 \cdot a_{12} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & c_2 \cdot a_{22} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & c_2 \cdot a_{32} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & c_2 \cdot a_{n2} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{zero}} + \dots +$$

(P6)

$$+ \dots + \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k-1} & c_n \cdot a_{1n} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,k-1} & c_n \cdot a_{2n} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,k-1} & c_n \cdot a_{3n} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,k-1} & c_n \cdot a_{nn} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{zero}}$$

Então: det B = det A.

A demonstração é análoga se considerarmos as linhas de A.

Exemplo

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; det A = - 55

À 1ª linha vamos somar uma combinação linear das 2ª e 3ª linhas:

$$B = \begin{bmatrix} (1+2 \cdot 2+3 \cdot 4) & (3+2 \cdot 3+3 \cdot 1) & (6+2 \cdot 1+3 \cdot 2) \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então: } \det B = \begin{vmatrix} 17 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -55$$

▶ Propriedade P10 – Teorema de Jacobi

> Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.
> Se em **A** adicionamos a uma linha (ou a uma coluna) uma outra linha (ou coluna) previamente multiplicada por um número, obtemos uma matriz **B**, tal que:
>
> $$\det B = \det A$$

Demonstração

Para demonstrarmos este Teorema, basta que na demonstração do Teorema anterior façamos n – 2 das constantes $c_1, c_2, c_3, \ldots$ iguais a zero.

Exemplos

1º)

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a & b & c+kb \\ d & e & f+ke \\ g & h & i+kh \end{bmatrix}$$

(k) ⟶ (2ª coluna para a 3ª)

Observe que multiplicamos a 2ª coluna por **k** e somamos à 3ª coluna.

2º) A utilidade do **Teorema de Jacobi** reside no fato de que podemos "fazer aparecer" **zeros** em uma fila de uma matriz, o que facilita o cálculo do seu determinante. Por exemplo, vamos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Inicialmente, vamos multiplicar a 1ª coluna por – 2 e somá-la à 3ª coluna e, ainda, multiplicar a 1ª coluna por – 3 e somá-la à 4ª coluna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -9 & -16 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

(–2) ⟶ 3ª coluna; (–3) ⟶ 4ª coluna

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & -9 & -16 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 19 & -2 \\ 2 & 10 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 19 & -2 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 191$$

(4) ⟶ 2ª coluna; (2) ⟶ 3ª coluna

▶ Propriedade P11

> Seja **A** uma matriz quadrada de ordem **n**.
> Em **A** uma linha (ou coluna) é combinação linear das demais linhas (ou colunas); então:
>
> $$\det A = 0$$

Demonstração

Suponhamos, então, que na matriz **A** a i-ésima linha é uma combinação linear de **k** outras linhas; sejam $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ldots, \ell_k$ as ordens dessas linhas. Desenvolvendo o determinante de **A** através da i-ésima linha obtemos:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \{(c_1 \cdot a_{\ell_1 j} + c_2 \cdot a_{\ell_2 j} + c_3 \cdot a_{\ell_3 j} + \ldots + c_k \cdot a_{\ell_k j}) \cdot A_{ij}\} \overset{(P7)}{=}$$

$$= c_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_1 j} \cdot A_{ij} + c_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_2 j} \cdot A_{ij} + c_3 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_3 j} \cdot A_{ij} + \ldots + c_k \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{\ell_k j} \cdot A_{ij} \overset{(P8)}{=}$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 + \ldots + c_k \cdot 0 = 0$$

Exemplo

O determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 12 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix}$ **é nulo,** pois a 3ª coluna é uma combinação linear das outras (1ª coluna multiplicada por 2 somada com a 2ª coluna multiplicada por 3).

4.26) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{P3}{=} 0$$

4.27) Verifique que: $\begin{vmatrix} bc & k^2 & bc(b+c) \\ ca & k^2 & ca(c+a) \\ ab & k^2 & ab(a+b) \end{vmatrix} = 0$

Solução

$$\begin{vmatrix} bc & k^2 & bc(b+c) \\ ca & k^2 & ca(c+a) \\ ab & k^2 & ab(a+b) \end{vmatrix} \overset{P5}{=} \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & ak^2 & abc(b+c) \\ abc & bk^2 & abc(c+a) \\ abc & ck^2 & abc(a+b) \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= \frac{k^2(abc)^2}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = k^2abc\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} \overset{(1)}{=}$$

$$= k^2abc\begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} \overset{P5}{=} k^2abc(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \overset{P3}{=}$$

$$= k^2abc(a+b+c) \cdot 0 = 0$$

4.28) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^3-b^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \overset{(-1)}{=} \begin{vmatrix} 0 & a-b & a^3-b^3 \\ 0 & b-c & b^3-c^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & a^2+ab+b^2 \\ 0 & 1 & b^2+bc+c^2 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & b^2+bc+c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-b)(b-c)(b^2+bc+c^2-a^2-ab-b^2) = (a-b)(b-c)(c^2-a^2+bc-ab) =$$

$$= (a-b)(b-c)[(c-a)(c+a)+b(c-a)] = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

4.29) Se $ax + by = c$, calcule: $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ x^2 & x & 0 \\ -c & -a & -b \end{vmatrix}$

Solução

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ x^2 & x & 0 \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2+y^2-x^2-y^2 & x & y \\ x^2-x^2 & x & 0 \\ -c+\underbrace{ax+ay}_{c} & -a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ 0 & x & 0 \\ 0 & -a & b \end{vmatrix} \overset{P4}{=} 0$$

(coluna 2 multiplicada por $(-x)$ e coluna 3 multiplicada por $(-y)$ somadas à coluna 1)

4.30) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 1 \cdot x \cdot y \cdot z = xyz$$

(coluna 1 multiplicada por (-1) somada às demais)

4.31) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen}\alpha & \operatorname{sen}\beta & \operatorname{sen}\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(\beta-\gamma) + \operatorname{sen}(\gamma-\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\,\alpha & \text{sen}\,\beta & \text{sen}\,\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \text{sen}\,\beta-\text{sen}\,\alpha & \text{sen}\,\gamma-\text{sen}\,\alpha \\ \cos\alpha & \cos\beta-\cos\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

(−1)

$$= \begin{vmatrix} \text{sen}\,\beta-\text{sen}\,\alpha & \text{sen}\,\gamma-\text{sen}\,\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \cos\gamma-\cos\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (\text{sen}\,\beta-\text{sen}\,\alpha)(\cos\gamma-\cos\alpha) - (\text{sen}\,\gamma-\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha) =$$

$$= (\text{sen}\,\beta\cos\gamma - \text{sen}\,\gamma\cos\beta) + (\text{sen}\,\gamma\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\cos\gamma) + (\text{sen}\,\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\beta\cos\alpha) =$$

$$= \text{sen}(\beta-\gamma) + \text{sen}(\gamma-\alpha) + \text{sen}(\alpha-\beta)$$

4.32) Resolva a equação: $\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = 0$

Solução

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6+x & 2 & 3 \\ 6+x & 2+x & 3 \\ 6+x & 2 & x+3 \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

(1) (1)

$$= (6+x)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2+x & 3 \\ 1 & 2 & x+3 \end{vmatrix} = (6+x)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = (6+x)\cdot x^2$$

(−1)

A equação escreve-se:

$$(6+x)\cdot x^2 = 0$$

e daí, $V = \{-6; 0\}$.

4.33) Resolva a equação: $\begin{vmatrix} x-a-b & 2x & 2x \\ 2a & a-b-x & 2a \\ 2b & 2b & b-a-x \end{vmatrix} = 0$

Solução

$$\begin{vmatrix} x-a-b & 2x & 2x \\ 2a & a-b-x & 2a \\ 2b & 2b & b-a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b & x+a+b & x+a+b \\ 2a & a-b-x & 2a \\ 2b & 2b & b-a-x \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

(1) (1)

$$= (x+a+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a-b-x & 2a \\ 2b & 2b & b-a-x \end{vmatrix} = (x+a+b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & -a-b-x & 0 \\ 2b & 0 & -b-a-x \end{vmatrix} =$$

(−1)

$$= (x+a+b)^3$$

A equação escreve-se:

$$(x+a+b)^3 = 0$$

e daí, $V = \{-a-b\}$.

4.34) Verifique que: $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^6$

Solução

$$\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-1)^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ 0 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 0 & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

(−1) (1) (−1)

$$= (a-1)^3\cdot\begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3\cdot\begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

(−1) (−1)

$$= (a-1)^3\cdot\begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 2a-2 & a-1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=} (a-1)^3\cdot(a-1)^2\cdot\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)^5\cdot\begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^5\cdot(a-1) = (a-1)^6$$

4.35) Verifique que: $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$

Solução

$$\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\1&1+b&1&1\\1&1&1+c&1\\1&1&1&1+d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&0&0&-d\\0&b&0&-d\\0&0&c&-d\\1&1&1&1+d\end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

$$= abcd\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\ \frac{1}{a}&\frac{1}{b}&\frac{1}{c}&\frac{1}{d}+1\end{vmatrix} = abcd\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\ \frac{1}{a}&\frac{1}{b}&\frac{1}{c}&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1\end{vmatrix} =$$

$$= abcd\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+1\right)$$

4.36) Uma matriz $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} a, & \text{se } i = j \\ b, & \text{se } i \neq j\end{cases}$$

Determine det A.

Solução

$$\det A = \begin{vmatrix}a&b&b&\dots&b\\b&a&b&\dots&b\\b&b&a&\dots&b\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ b&b&b&\dots&a\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&b&\dots&b\\a+(n-1)b&a&b&\dots&b\\a+(n-1)b&b&a&\dots&b\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ a+(n-1)b&b&b&\dots&a\end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

$$= [a+(n-1)b]\cdot\begin{vmatrix}1&b&b&\dots&b\\1&a&b&\dots&b\\1&b&a&\dots&b\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 1&b&b&\dots&a\end{vmatrix} = [a+(n-1)b]\cdot\begin{vmatrix}1&b&b&\dots&b\\0&a-b&0&\dots&0\\0&0&a-b&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ 0&0&0&\dots&a-b\end{vmatrix} =$$

$$= [a+(n-1)b]\cdot(a-b)^{n-1}$$

Exercícios Propostos

4.37) Verifique que: a) $\begin{vmatrix}c&a&d&b\\a&c&d&b\\a&c&b&d\\c&a&b&d\end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix}a&b&c&d+e\\a&c&d&e+b\\a&d&e&b+c\\a&e&b&c+d\end{vmatrix} = 0$

4.38) Verifique que: $\begin{vmatrix}a-b&b-c&c-a\\b-c&c-a&a-b\\c-a&a-b&b-c\end{vmatrix} = 0$

4.39) Verifique que: a) $\begin{vmatrix}1&1&1\\ \cos A&\cos B&\cos C\\ \operatorname{sen}^2\frac{A}{2}&\operatorname{sen}^2\frac{B}{2}&\operatorname{sen}^2\frac{C}{2}\end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix}1&1&1\\ \operatorname{tg}^2\alpha&\operatorname{tg}^2\beta&\operatorname{tg}^2\gamma\\ \sec^2\alpha&\sec^2\beta&\sec^2\gamma\end{vmatrix} = 0$

4.40) Verifique que: $\begin{vmatrix}a+b+2c&a&b\\c&b+c+2a&b\\c&a&c+a+2b\end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

4.41) a) Verifique que: $\begin{vmatrix}1&a^2&a^3\\1&b^2&b^3\\1&c^2&c^3\end{vmatrix} = (b-a)(c-b)(c-a)(ab+bc+ca)$

b) Verifique que: $\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

4.42) Verifique que: $\begin{vmatrix}1&0&a&a^2\\0&1&b&b^2\\1&0&c&c^2\\0&1&d&d^2\end{vmatrix} = (b-d)(a-c)(b+d-a-c)$

4.43) Verifique que: $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 4 \cdot a^2b^2c^2$

4.44) Se a, b e c são números reais positivos, calcule:

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log \frac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log \frac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log \frac{1}{ca} \end{vmatrix}$$

4.45) Se $x + y = 2a$, $x - y = 2b$ e $x + z = -a$, calcule:

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2a & y \\ 1 & 2b & -y \\ 1 & -a & z \end{vmatrix}$$

4.46) "Fazendo aparecer" zeros em uma fila conveniente, por aplicação do Teorema de Jacobi, verifique que:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & -8 \\ 2 & 5 & -8 & 3 \\ 5 & -8 & 3 & 2 \\ -8 & 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -2912$ b) $\begin{vmatrix} 13 & 3 & -2 & 18 \\ 14 & 4 & 9 & 22 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -8$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -595$ d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 69$

4.47) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\text{sen } 20^\circ & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\text{sen } 40^\circ & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\text{sen } 80^\circ \end{vmatrix}$$ (Veja o exercício 4.31.)

4.48) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & x & 2x+1 & x \\ 1 & x+1 & 2x+3 & x \\ 1 & x+2 & 2x+5 & x \end{vmatrix} = 0$$

4.49) Resolva a inequação:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} > 0$$

4.50) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

4.51) Resolva a inequação:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^4 x & \text{sen}^4 x \\ 1 & (1+\text{sen}^2 x)^2 & \text{sen}^4 x \\ 1 & \cos^4 x & (1+\cos^2 x)^2 \end{vmatrix} \geq 1$$

4.52) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

4.53) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & 1 & -1 \\ -b & -1 & 0 & 1 \\ -c & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)^2$$

4.54) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

4.55) Seja a *matriz quadrada de ordem n*:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$ Deduza que $\det A_n = 1$.

4.56) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n$$

(Veja o exercício 4.30)

4.57) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$$

(Veja o exercício 4.35)

4.10 – ABAIXAMENTO DA ORDEM DE UM DETERMINANTE

Deduziremos agora um mecanismo que permite reduzir o cálculo de um determinante de uma matriz de ordem **n** a outro, de uma matriz de ordem $n - 1$; é a:

Regra de Chiò

Seja, então, a matriz de ordem **n**, $n \geq 2$, na qual $a_{11} = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Aplicamos o **Teorema de Jacobi** sucessivamente:

1) adicionando à 2ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{12}$

2) adicionando à 3ª coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{13}$

. . . .

j - 1) adicionando à j-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1j}$

. . . .

n - 1) adicionando à n-ésima coluna, a 1ª multiplicada por $-a_{1n}$

Então:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-a_{21}\cdot a_{12} & a_{23}-a_{21}\cdot a_{13} & \dots & a_{2j}-a_{21}\cdot a_{1j} & \dots & a_{2n}-a_{21}\cdot a_{1n} \\ a_{31} & a_{32}-a_{31}\cdot a_{12} & a_{33}-a_{31}\cdot a_{13} & \dots & a_{3j}-a_{31}\cdot a_{1j} & \dots & a_{3n}-a_{31}\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2}-a_{n1}\cdot a_{12} & a_{n3}-a_{n1}\cdot a_{13} & \dots & a_{nj}-a_{n1}\cdot a_{1j} & \dots & a_{nn}-a_{n1}\cdot a_{1n} \end{vmatrix}$$

Daí, pelo **Teorema de Laplace:**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{22}-a_{21}\cdot a_{12} & a_{23}-a_{21}\cdot a_{13} & \dots & a_{2j}-a_{21}\cdot a_{1j} & \dots & a_{2n}-a_{21}\cdot a_{1n} \\ a_{32}-a_{31}\cdot a_{12} & a_{33}-a_{31}\cdot a_{13} & \dots & a_{3j}-a_{31}\cdot a_{1j} & \dots & a_{3n}-a_{31}\cdot a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2}-a_{n1}\cdot a_{12} & a_{n3}-a_{n1}\cdot a_{13} & \dots & a_{nj}-a_{n1}\cdot a_{1j} & \dots & a_{nn}-a_{n1}\cdot a_{1n} \end{vmatrix}$$

Então, a **regra:**

1º) Deve-se ter $a_{11} = 1$; suprime-se a 1ª linha e a 1ª coluna.

2º) De cada elemento restante em **A**, subtraímos o produto daqueles elementos que se encontram nas "extremidades das perpendiculares" traçadas, do elemento considerado, sobre a 1ª linha e sobre a 1ª coluna.

Exemplos

1º)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-2\cdot2 & 2-2\cdot4 & 1-2\cdot3 \\ 3-(-3)\cdot2 & -3-(-3)\cdot4 & 2-(-3)\cdot3 \\ 5-2\cdot2 & -2-2\cdot4 & 4-2\cdot3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -6 & -5 \\ 9 & 9 & 11 \\ 1 & -10 & -2 \end{vmatrix}$$

Exercícios Propostos

4.61) Use a **Regra de Chiò** para verificar que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 20 & 9 & 5 \\ 7 & 35 & 2 & -6 \\ 10 & 51 & 51 & 0 \end{vmatrix} = 23$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 270$

c) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -595$

4.62) Use a **Regra de Chiò** para calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ 3 & 3^2 & 3^3 & 3^4 \\ 4 & 4^2 & 4^3 & 4^4 \end{vmatrix}$$

4.63) Use a **Regra de Chiò** para verificar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

4.64) Use a **Regra de Chiò** para verificar que:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a \cdot (b-a)(c-b)(d-c)$$

4.11 – A MATRIZ DE VANDERMONDE

Definição

Toda matriz quadrada de ordem **n**, $n \geq 2$, da forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_j & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_j^2 & \dots & x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_j^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

denomina-se **matriz de Vandermonde.**

Observe que, por exemplo, a j-ésima coluna é formada pelas potências de mesma base x_j, com os expoentes variando de **0** a **n – 1**; os elementos dessa coluna formam uma *progressão geométrica* de **n** termos, cujo 1º elemento é 1 e cuja razão é x_j.

Os elementos da 2ª linha são chamados **elementos de base da matriz.**

Indica-se o **determinante** de uma matriz de Vandermonde cujos elementos de base são $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ por:

$$V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Propriedade

O determinante $V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ é o produto de **todas** as diferenças $x_i - x_j$, para $i > j$:

$V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) =$
$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1) \cdot (x_3-x_2)(x_4-x_2)\dots(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})$, isto é:

$$V(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

Demonstração

Vamos nos utilizar do **Método da Indução Matemática** sobre **n**:

Teorema 1

Para n = 2 a propriedade é válida:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que para matrizes de ordem $n = p - 1$ a propriedade é válida ($p - 1 \geqslant 2$).

Tese: demonstremos que a propriedade é válida para $n = p$.

Na matriz de ordem p:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_p \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{p-2} & x_2^{p-2} & x_3^{p-2} & \dots & x_p^{p-2} \\ x_1^{p-1} & x_2^{p-1} & x_3^{p-1} & \dots & x_p^{p-1} \end{bmatrix}$$

aplicamos o **Teorema de Jacobi** sucessivamente:

1) adicionando à linha de ordem p, a de ordem p - 1 multiplicada por $-x_1$

2) adicionando à linha de ordem p - 1, a de ordem p - 2 multiplicada por $-x_1$

. . . .

p-2) adicionando à linha de ordem 3, a de ordem 2 multiplicada por $-x_1$

p-1) adicionando à linha de ordem 2, a de ordem 1 multiplicada por $-x_1$

obtendo:

$$\det V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_p-x_1 \\ 0 & x_2^2-x_1x_2 & x_3^2-x_1x_3 & \dots & x_p^2-x_1x_p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{p-1}-x_1x_2^{p-2} & x_3^{p-1}-x_1x_3^{p-2} & \dots & x_p^{p-1}-x_1x_p^{p-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_p-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \dots & x_p(x_p-x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2^{p-2}(x_2-x_1) & x_3^{p-2}(x_3-x_1) & \dots & x_p^{p-2}(x_p-x_1) \end{vmatrix}$$

Aplicando o **Teorema de Laplace**, desenvolvendo o determinante através dos elementos da 1ª coluna, e também a propriedade P5:

$$\det V = (x_2-x_1)(x_3-x_1) \dots (x_p-x_1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_p \\ x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_p^2 \\ x_2^{p-2} & x_3^{p-2} & \dots & x_p^{p-2} \end{vmatrix}} \quad \text{(I)}$$

determinante, **D**, de uma matriz de Vandermonde de ordem p - 1

Pela hipótese do **Teorema 2** o determinante **D** escreve-se:

$$D = (x_3-x_2)(x_4-x_2) \dots (x_p - x_2) \dots (x_p - x_{p-1})$$

Portanto, substituindo em (I):

$$\det V = (x_2-x_1)(x_3-x_1) \cdots (x_p-x_1) \cdot \underbrace{(x_3-x_2)(x_4-x_2) \cdots (x_p-x_2) \cdots (x_p-x_{p-1})}_{D},$$

que é a tese.

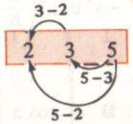
Exercícios Resolvidos

4.65) Calcule o determinante V(2, 3, 5).

Solução

$$V(2, 3, 5) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 5^2 \end{vmatrix} = (3-2) \cdot (5-2) \cdot (5-3) = 6$$

Observe a seqüência das diferenças feitas:



4.66) Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 \end{vmatrix}$

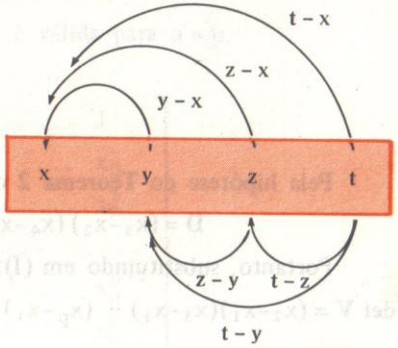
Solução

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \\ x^4 & y^4 & z^4 & t^4 \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

(x) (y) (z) (t)

$$= xyzt \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ x^2 & y^2 & z^2 & t^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & t^3 \end{vmatrix} = xyzt\,(y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$$

Observe a seqüência das diferenças feitas:



4.67) Calcule o determinante: $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 \\ ad & be & cf \end{vmatrix}$

Solução

$$\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ d^2 & e^2 & f^2 \\ ad & be & cf \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=} a^2b^2c^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{d^2}{a^2} & \frac{e^2}{b^2} & \frac{f^2}{c^2} \\ \frac{d}{a} & \frac{e}{b} & \frac{f}{c} \end{vmatrix} \overset{(P2)}{=} -a^2b^2c^2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{d}{a} & \frac{e}{b} & \frac{f}{c} \\ \left(\frac{d}{a}\right)^2 & \left(\frac{e}{b}\right)^2 & \left(\frac{f}{c}\right)^2 \end{vmatrix}}_{V\left(\frac{d}{a},\, \frac{e}{b},\, \frac{f}{c}\right)} =$$

(a^2) (b^2) (c^2)

$$= -a^2b^2c^2\left(\frac{e}{b}-\frac{d}{a}\right)\left(\frac{f}{c}-\frac{d}{a}\right)\left(\frac{f}{c}-\frac{e}{b}\right)$$

4.68) Calcule o determinante: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \end{vmatrix}$

Solução

Lembre-se que $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$; então:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ 2\cos^2 a - 1 & 2\cos^2 b - 1 & 2\cos^2 c - 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ 2\cos^2 a & 2\cos^2 b & 2\cos^2 c \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos^2 a & \cos^2 b & \cos^2 c \end{vmatrix}}_{V(\cos a,\, \cos b,\, \cos c)} = 2\,(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)$$

Exercícios Propostos

4.69) Calcule o determinante $V(2, 3, 1, 5)$.

4.70) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 & (\log 2000)^2 \\ (\log 2)^3 & (\log 20)^3 & (\log 200)^3 & (\log 2000)^3 \end{vmatrix}$$

4.71) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

4.72) O determinante $V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ se anula quando e somente quando os x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ não são dois a dois distintos. Demonstre!

4.73) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -2 & 5 & -4 \\ x^2 & 4 & 25 & 16 \\ x^3 & -8 & 125 & -64 \end{vmatrix} = 0$$

4.74) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0$$

Capítulo 5

Outros temas importantes

5.1 — DETERMINANTE DO PRODUTO DE MATRIZES

Teorema de Binet

Sejam **A** e **B** matrizes quadradas de mesma ordem; então:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$$

Aceitaremos o teorema sem demonstração.

Exemplo

Sejam as matrizes: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\det \mathbf{A} = -2$

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$; $\det \mathbf{B} = -34$

$\det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B} = 68$

Temos: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+6 & 2-8 \\ 21+12 & 6-16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -6 \\ 33 & -10 \end{bmatrix}$; $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = 68$

5.2 — COMATRIZ

Definição

Seja a matriz quadrada de ordem **n**:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$$

Seja **N** a matriz definida por:

$$\mathbf{N} = [A_{ij}]_{n \times n}$$

onde A_{ij} é, em **A**, o cofator do elemento a_{ij}.

Chama-se **comatriz** de **A**, e se indica com **A***, a matriz transposta de **N**:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{N}^t$$

Exemplo

Seja a matriz: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$ $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Note que a matriz **N** é obtida substituindo, em **A**, cada elemento a_{ij} pelo seu cofator A_{ij}:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Por definição:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{N}^t = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriedade

Seja a matriz quadrada de ordem **n**: $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$.
Então:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \cdot \mathbf{I}_n$$

Demonstração

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & A_{j3} & \cdots & A_{n3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

O elemento b_{ij}, qualquer, da matriz $A \cdot A^*$ é:

$$b_{ij} = a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn} = \begin{cases} \det A, \text{ se } i = j \text{ (Laplace)} \\ 0, \text{ se } i \neq j \text{ (Cauchy)} \end{cases}$$

Então:

$$A \cdot A^* = [b_{ij}]_{n \times n} = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \det A \end{bmatrix} = (\det A) \cdot I_n$$

Analogamente demonstramos que $A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_n$

Exemplo

Vimos no exemplo anterior que se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, então:

$$A^* = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

A **Regra de Sarrus** dá-nos $\det A = -1$.

Verifica-se facilmente que $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$

$$= -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \det A \cdot I_3$$

5.3 – MATRIZES INVERTÍVEIS

Teorema

Seja A uma matriz quadrada de ordem **n**.

Para que A seja invertível é necessário e suficiente que $\det A \neq 0$.

Tem-se ainda:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

Demonstração

1ª parte: *necessidade*

Hipótese: A é invertível

Tese: $\det A \neq 0$

Se A é invertível existe, então, a matriz A^{-1} tal que:

$$A \cdot A^{-1} = I_n$$

Então:

$$\det (A \cdot A^{-1}) = \det I_n$$

O **Teorema de Binet** dá-nos:

$$\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \quad \text{(I)}$$

Então, o produto $\det A \cdot \det A^{-1}$ é diferente de zero (é igual a 1); e daí $\det A \neq 0$. É a tese.

Observe que se A é invertível, de (I):

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

2ª parte: *suficiência*

Hipótese: det A $\neq 0$
Tese: A é invertível

A propriedade em 5.2 dá-nos:

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

Sendo det A $\neq 0$:

$$A \cdot \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^*\right) = \left(\frac{1}{\det A} \cdot A^*\right) \cdot A = I_n$$

A definição dada para matriz inversa permite-nos concluir da igualdade acima que A é invertível (é a tese), e que:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*}$$

Exemplo

Retomando o exemplo anterior, concluímos que a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

é invertível, pois det A $= -1 \neq 0$. Além disso:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios Resolvidos

5.1) **Sejam as matrizes** $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}$

Use o Teorema de Binet para verificar que:

$$(a^2+b^2) \cdot (c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$$

Solução

Temos: det A $= a^2+b^2$ e det B $= c^2+d^2$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{bmatrix}$$

Então, $\det(A \cdot B) = (ac-bd)^2 - (bc+ad) \cdot (-bc-ad) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$

O **Teorema de Binet**, $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, permite-nos escrever:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (bc+ad)^2$$

5.2) **Se det A = − 4, determine det A^2.**

Solução

$\det A^2 = \det(A \cdot A) = \det A \cdot \det A = (-4) \cdot (-4) = 16$

5.3) **Seja a matriz** $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Determine: a) A^* b) det A c) A^{-1}

Solução

Os cofatores dos elementos de A são:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1$

a) $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$

b) $\det A = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} = 1 \cdot (-10) + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 28 = -94$

c) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}$

5.4) A é uma matriz não singular, ortogonal. Calcule det A.

Solução

Se A é ortogonal: $A^{-1} = A^t$ (veja exercício 2.66)

Então: $\det A^{-1} = \det A^t$

$$\frac{1}{\det A} = \det A$$

$$(\det A)^2 = 1$$

$$\det A = \pm 1$$

5.5) A, de ordem n, é uma matriz não singular. Verifique que:

$$\det A^* = (\det A)^{n-1}$$

Solução

A propriedade do item 5.2 dá-nos:

$$A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_n$$

Então:

$$\det(A^* \cdot A) = \det[(\det A) \cdot I_n]$$

$$\underbrace{\det A^* \cdot \det A}_{\text{teorema de Binet}} = \underbrace{(\det A)^n \cdot \det I_n}_{\text{exercício 4.2}}$$

A é não singular: $\det A \neq 0$ e $\det I_n = 1$; então:

$$\det A^* = (\det A)^{n-1}$$

5.6) Condição para que a matriz $A = \begin{bmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{bmatrix}$ seja invertível.

Solução

Deve-se ter $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ a & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+1 & a & 1 \\ 2a+1 & 1 & a \\ 2a+1 & a & a \end{vmatrix} \overset{(P5)}{=} (2a+1)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = -(2a+1)(a-1)^2$$

Então, para que A seja invertível deve-se ter $a \neq -\frac{1}{2}$ e $a \neq 1$.

Exercícios Propostos

5.7) A e B são matrizes quadradas de ordem n.
a) É $A \cdot B = B \cdot A$?
b) É $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$?

5.8) Se A é não singular e $A^2 = A$, determine det A.

5.9) A e B são matrizes quadradas de mesma ordem. Verifique que:

$$\det(A^t \cdot B^t) = \det(A \cdot B^t) = \det(A^t \cdot B)$$

5.10) Para as matrizes abaixo, determine A^{-1}, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

5.11) Para as matrizes abaixo, determine A^{-1}, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, $a \neq 0$

5.12) Para as matrizes abaixo, determine A^{-1}, se existir:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

5.13) Se A é invertível e $A = A^{-1}$, calcule det A.

5.14) Sejam as matrizes A e B quadradas de mesma ordem.
a) A e A^* *comutam*?
b) Verifique que $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

Exercícios Suplementares

II.1) Se as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ *comutam*, então: $\begin{vmatrix} b & a-c \\ \beta & \alpha-\gamma \end{vmatrix} = 0$

II.2) Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & e \\ 0 & 0 & c & f \\ d & e & f & x \end{bmatrix}$$

na qual os elementos são números reais e $a > b > c$, com d, e, f não nulos.
Verifique que as raízes da equação em x:

$$\det(A - xI) = 0$$

são reais.

II.3) Se α, β e γ são as medidas dos ângulos internos de um triângulo, verifique que:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{tg}\beta & 1 \\ 1 & 1 & \operatorname{tg}\gamma \end{vmatrix} = 2$$

II.4) Resolva a inequação:

$$\begin{vmatrix} \log x^2 & \log x^2 & 1 \\ \log x^2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

II.5) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} \log a & \log b & \log \frac{1}{ab} \\ \log b & \log c & \log \frac{1}{bc} \\ \log c & \log a & \log \frac{1}{ca} \end{vmatrix}$$

II.6) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 4 \\ y & 2 & 3 & 5 \\ z & 4 & 5 & 7 \\ t & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

II.7) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+x & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3+x & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4+x \end{vmatrix} = 0$$

II.8) Resolva a equação:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$$

II.9) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} a & \operatorname{sen}^3 a & \operatorname{sen} 3a \\ \operatorname{sen} b & \operatorname{sen}^3 b & \operatorname{sen} 3b \\ \operatorname{sen} c & \operatorname{sen}^3 c & \operatorname{sen} 3c \end{vmatrix} = 0$$

II.10) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

II.11) Verifique que:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

II.12) Os números 546, 273 e 169 são divisíveis por 13; verifique que o determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix}$$

é divisível por 13, sem desenvolvê-lo.

II.13) Dada a matriz $n \times n$

$$A = \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

calcule det A.

II.14) **Um texto para interpretação**

Associada a toda matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, de ordem **n**, encontra-se a função:

$$f(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

que se denomina **função característica** de **A**.

A equação:

$$f(x) = \det(A - xI) = 0$$

que pode expressar-se na forma:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

chama-se **equação característica** de **A**.

Ache a equação característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

As **n** raízes $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ da equação característica de uma matriz **A** recebem o nome de **valores próprios** de **A**.

Determine os valores próprios da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifique para uma matriz **A**, de ordem 2×2, que a soma dos valores próprios é igual ao **traço** da matriz.

Teorema de Cayley: "Toda matriz quadrada **A** satisfaz sua própria equação característica: $\det(A - xI) = 0$".

Mais exatamente: se na equação característica de **A**, de ordem **n**, substituímos x por **A** e cada número a_i por $a_i \cdot I$, ela se transforma na equação matricial:

$$a_0 \cdot A^n + a_1 \cdot A^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot A + a_n \cdot I = 0$$

também válida.

Verifique o Teorema de Cayley para uma matriz **A**, de ordem 2×2.

Podemos utilizar o Teorema de Cayley para determinar a **inversa** de uma matriz **A**, não singular. Por exemplo, a matriz invertível:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\det A \neq 0)$$

tem para equação característica:

$$x^2 - 3x - 2 = 0$$

Então: $A^2 - 3 \cdot A - 2 \cdot I = 0$

Daí $\quad I = \frac{1}{2} \cdot A^2 - \frac{3}{2} \cdot A$

Multiplicando-se "à direita" por A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} A - \frac{3}{2} I$$

Substituindo **A** e **I** vem A^{-1}.

Use o processo descrito para determinar a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

PARTE III

Capítulo *6* — **Generalidades**

Capítulo *7* — **Resolução de sistemas lineares: o escalonamento**

Capítulo *8* — **Outros temas importantes**

Capítulo

6 Generalidades

6.1 – EQUAÇÕES LINEARES

Definições

A equação:

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

onde x_1 e x_2 são *incógnitas*, é um exemplo de *equação linear a duas incógnitas*.

Note que os expoentes das incógnitas são iguais a 1.

A equação:

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 10$$

é linear, a três incógnitas.

Numa equação linear não aparecem termos da forma $2x_1^2$ ou $3x_1x_2$ ou $-4x_2^2x_3^3$; os expoentes das incógnitas são iguais a 1, e em cada termo da equação aparece no máximo uma incógnita. Uma equação como:

$$2x_1^2 + 3x_2^{-1} + x_1^2x_2 - x_4 = 6$$

não é linear.

De um modo geral, uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$$

na qual $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ e b são *números conhecidos*, denomina-se **equação linear a n incógnitas**.

Os números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ denominam-se **coeficientes da equação** e b é o seu **termo constante**.

Seja a equação linear:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \quad \text{(I)}$$

Se em (I) fizermos a substituição:

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$$

a sentença:

$$1 + 2 \cdot (-2) - 3 = -6$$

é *verdadeira*.

Então, diremos que o conjunto de valores: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 3$ é uma **solução da equação.**

O conjunto de valores:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$$

não é solução da equação (I) pois a sentença:

$$2 + 2 \cdot 1 - 3 = -6$$

é *falsa*.

De um modo geral, o conjunto de valores:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3,\ \dots,\ x_n = \alpha_n$$

é uma **solução da equação linear:**

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

se a sentença:

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 + \dots + a_n\alpha_n = b$$

é *verdadeira*.

Se não houver dúvidas quanto à posição da incógnita na equação, essa solução pode ser representada por:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$$

Situações particulares

Seja a equação linear a n incógnitas:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

1º) Se $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = b = 0$, a equação escreve-se:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = 0$$

Então, qualquer conjunto de valores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ é solução da equação.

2º) Se $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ e $b \neq 0$, a equação não admite soluções, pois para qualquer conjunto de valores $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ a sentença:

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 + \dots + 0\alpha_n = b$$

é *falsa*.

Por exemplo, a equação $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6$ não admite soluções.

Exercícios Propostos

6.1) Das equações abaixo, diga qual é *linear*:

a) $x_1 + x_2 - 3 = x_3$ b) $x_1 + \frac{1}{x_2} + x_3 = 8$ c) $-\frac{1}{7}x_1x_2 + x_3 = 8$

6.2) Seja a equação linear:

$$x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 3$$

a) Verifique se (3, 2, 1, 0) é solução da equação.
b) Verifique se (4, –2, 1, 3) é solução da equação.
c) Determine k para que (4, –2, 1, k) seja solução da equação.

6.2 – SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Definições

Um par de equações como:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases}$$

denomina-se *sistema de 2 equações lineares a 2 incógnitas.*

Note que o par de valores:

$$x_1 = 2 \ \text{ e } \ x_2 = 1$$

satisfaz cada uma das equações do sistema; diz-se então, que o conjunto de valores $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$ é *solução do sistema*; o par $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$ satisfaz a primeira equação do sistema, mas não satisfaz a segunda; esse par não é solução do sistema.

Generalizando, **um sistema de m equações lineares a n incógnitas** pode ser escrito assim:

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as **incógnitas.**

Os números a_{ij} e b_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$, são conhecidos.

O par de índices (i; j) indica que a_{ij} é o coeficiente da incógnita x_j na i-ésima equação; assim, a_{32} é o coeficiente de x_2 na 3ª equação.

O conjunto de valores:

$$x_1 = \alpha_1,\ x_2 = \alpha_2,\ x_3 = \alpha_3,\ \ldots,\ x_n = \alpha_n$$

é uma **solução do sistema** (S) se for solução das **m** equações de (S), isto é, satisfaz as **m** equações do sistema.

Quando não houver possibilidade de confusão, essa solução pode ser representada com:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$

Observações

1ª) É comum substituir-se a denominação **sistema de equações lineares**, simplesmente por **sistema linear**.

2ª) *Resolver um sistema linear é determinar todas as suas soluções.*

Exemplos

O sistema:

$$(S)\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 14 \\ 3x + 4y + 5z = 26 \\ 5x - 2y + 3z = 10 \end{cases}$$

admite o conjunto de valores $x = 1, y = 2, z = 3$ como solução pois as sentenças:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 14$$
$$3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 26$$
$$5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 10$$

são *verdadeiras*.

O conjunto de valores $x = 22, y = -10, z = 0$ **não é solução de (S):**

$2 \cdot 22 + 3 \cdot (-10) + 2 \cdot 0 = 14$ (sentença *verdadeira*)

$3 \cdot 22 + 4 \cdot (-10) + 5 \cdot 0 = 26$ (sentença *verdadeira*)

$5 \cdot 22 - 2 \cdot (-10) + 3 \cdot 0 = 10$ (sentença *falsa!*)

Sistemas lineares homogêneos e não homogêneos

Se num sistema de equações lineares os termos constantes das equações **não** são todos nulos, ele é chamado **não homogêneo**.

Por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 10x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

← não são todos nulos

é linear, **não homogêneo.**

Se num sistema de equações lineares os termos constantes das equações são todos nulos, ele é chamado **homogêneo.**

Então, um sistema de equações lineares **homogêneo** pode ser expresso na forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Uma solução evidente do sistema linear homogêneo é:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$$

que se denomina **solução trivial.** Excluindo essa solução, e supondo que o sistema homogêneo admita uma outra solução:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$$

onde os α_i não são todos nulos, tal solução denomina-se **não-trivial.**

Exercícios Propostos

6.3) Seja o sistema linear:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 15 \\ 4x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases}$$

Verifique se (3; 2; 1) é solução de (S).

6.4) Seja o sistema de equações lineares:

$$(S)\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 3x - 2y + 2z = 13 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$$

a) Verifique se o conjunto de valores (3; –1; 1) é solução de (S).

b) Verifique se o conjunto de valores (3; 1; 2) é solução de (S).

6.5) a) Sabendo-se que (6; m; 1) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = n \\ 2x_1 + 3x_2 - px_3 = 2 \end{cases}$$

determine m, n e p.

b) Seja o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = k^2 - 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = k - 1 \end{cases}$$

Determine k para que ele seja homogêneo.

6.3 – EXPRESSÃO MATRICIAL DE UM SISTEMA LINEAR

Matrizes associadas a um sistema linear

Dado um sistema (S) de m equações lineares a n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

podemos associar-lhe as seguintes matrizes:

a) matriz completa

É a matriz cujos elementos são os coeficientes das incógnitas mais a coluna dos termos constantes:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

b) matriz incompleta ou matriz dos coeficientes

É a matriz constituída pelos coeficientes das incógnitas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

c) matriz das incógnitas

É a matriz constituída por uma única coluna, cujos elementos são as incógnitas do sistema:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

d) matriz dos termos constantes

É a matriz constituída por uma única coluna, cujos elementos são os termos constantes do sistema:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo

Seja o sistema linear:

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Estão associadas ao sistema (S) as seguintes matrizes:

a) **completa:** $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right]$

b) **incompleta:** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) **das incógnitas:** $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

d) **dos termos constantes:** $B = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

A expressão matricial

Seja o sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Se **A**, **X** e **B** são, respectivamente, as matrizes *incompletas, das incógnitas* e *dos termos constantes* de (S), o sistema pode ser escrito na **forma matricial:**

$$\boxed{A \cdot X = B}$$

Com efeito:

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Da igualdade acima obtém-se o sistema (S) na sua formulação usual.

Exemplo

A formulação matricial do sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 - x_2 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$$

é:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

Exercícios Propostos

6.6) Seja o sistema:

$$(S)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

Dê as matrizes associadas ao sistema.

6.7) Formule os sistemas na notação matricial:

a) $\begin{cases} 4x - 4y = 48 \\ 2x + y = 38 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x_1 + x_3 = 18 \\ 7x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 13x_3 - 7x_2 = 16 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 + x_3 = 7 \\ x_3 + x_1 = 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$

6.8) Um sistema linear (S) tem a seguinte formulação matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quais são as equações que o constituem?

6.4 – CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

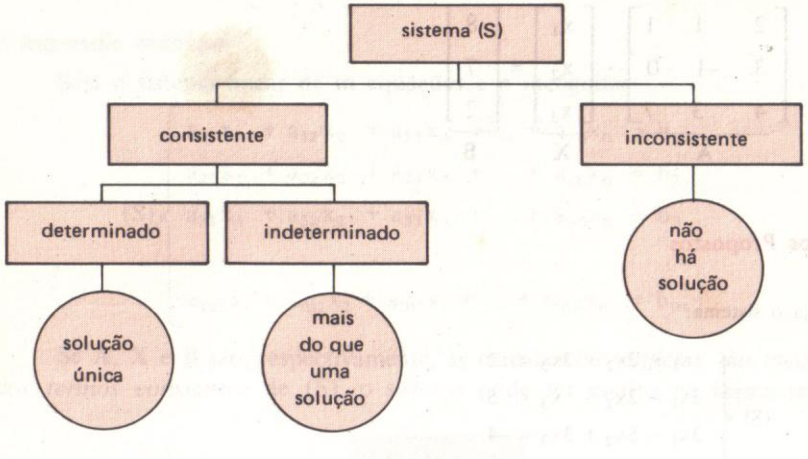
Seja (S) um sistema linear.

Segundo o número de soluções podemos classificá-lo como segue:

(S) consistente se possui pelo menos uma solução.

(S) inconsistente se não possui soluções.

Se (S) é consistente e admite uma e uma só solução ele é determinado; se (S) é consistente e admite mais do que uma solução ele é indeterminado.



6.5 – SISTEMAS DE CRAMER

Definição

Seja (S) um sistema linear de **n** equações a **n** incógnitas:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Se em (S) a *matriz incompleta* **A**, quadrada, é tal que det **A** $\neq 0$, (S) diz-se Sistema de Cramer.

Observe então que se (S) é um sistema de Cramer, o número de equações é igual ao número de incógnitas e, além disso, o determinante da matriz incompleta é diferente de zero.

Exemplo

O sistema:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

é de Cramer. O número de equações é igual ao número de incógnitas: três; e além disso, o determinante da matriz incompleta:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

é diferente de zero.

Propriedade

Um Sistema de Cramer é consistente e determinado.

Demonstração

Seja o Sistema de Cramer:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

que na formulação matricial escreve-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

com det **A** $\neq 0$.

Vamos verificar, então, que a equação matricial

$$A \cdot X = B \qquad (I)$$

admite solução única, o que equivale a demonstrar que (S) admite solução única.

1º) **(I) admite solução.**
Por hipótese, $\det A \neq 0$ e então existe A^{-1}.
A matriz $\overline{X} = A^{-1} \cdot B$ é solução de (I):

$$A \cdot \overline{X} = A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I \cdot B = B$$

2º) **A solução $\overline{X}$ é única.**
Suponhamos que (S) admita uma outra solução $\overline{\overline{X}}$; então:

$$A \cdot \overline{\overline{X}} = B$$

$$\overline{\overline{X}} = I \cdot \overline{\overline{X}} = (A^{-1} \cdot A) \cdot \overline{\overline{X}} = A^{-1} \cdot (A \cdot \overline{\overline{X}}) = A^{-1} \cdot B = \overline{X}$$

Regra de Cramer

Para o sistema (S), de Cramer, tem-se então:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots\ldots & A_{n_1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots\ldots & A_{n_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1i} & A_{2i} & \ldots\ldots & A_{ni} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots\ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Daí:

$$x_i = \frac{A_{1i}}{\det A} b_1 + \frac{A_{2i}}{\det A} b_2 + \ldots + \frac{A_{ni}}{\det A} b_n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Seja agora a matriz:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

obtida de **A** substituindo-se a sua i-ésima coluna pela coluna dos termos constantes de (S).

Se desenvolvermos $\det A_i$ através da i-ésima coluna:

$$\det A_i = A_{1i} \cdot b_1 + A_{2i} \cdot b_2 + \ldots + A_{ni} \cdot b_n$$

Então: $$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Exemplo

Retomemos o Sistema de Cramer, do exemplo anterior:

$$(S) \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

no qual $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det A = -2$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

A única solução do sistema é (2; 3; 4).

Exercícios Propostos

6.9) Utilize a **Regra de Cramer** para resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 4y = 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 16 \\ 2x_1 + 3x_2 = 11 \end{cases}$

6.10) Utilize a **Regra de Cramer** para resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 3y - z = -6 \\ x + 4y + 7z = 17 \\ -x + 6y + 6z = 19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 = 3 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 2x - 4y + 3z = 2 \\ 3x + 8y - 2z = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x - y + 5z = -2 \\ 2x + y - 5z = 3 \\ 2x + 5y + z = 3 \end{cases}$

6.11) Resolva os sistemas abaixo pela **Regra de Cramer**:

a) $\begin{cases} 2x + y + 2z - 3t = 0 \\ 4x + y + z + t = 15 \\ 6x - y - z - t = 5 \\ 4x - 2y + 3z - t = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 27x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 19x_4 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 13x_4 = 5 \end{cases}$

6.12) Seja o sistema (S):

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ -x + ay + 3z = 0 \\ -2x + y + az = 0 \end{cases}$$

Determine a para que (S) seja um **Sistema de Cramer**. Resolva-o em seguida.

6.13) Use a **Regra de Cramer** para resolver o sistema:

$$\begin{cases} x - my = 7 \\ mx + y = 3 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

6.14) Determine **m** para que o sistema

$$\begin{cases} (m-1)x_1 + 4x_2 = 2m \\ (m+1)x_1 - 2x_2 = 1 + 3m \end{cases}$$

seja **de Cramer**. Em seguida, resolva-o.

6.15) Use a **Regra de Cramer** para resolver os sistemas:

a) $\begin{cases} \dfrac{7}{x} - \dfrac{2}{y} = 3 \\ \dfrac{2}{x} + \dfrac{9}{y} = \dfrac{6}{7} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{9}{z} = 28 \\ \dfrac{7}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{6}{z} = -1 \\ \dfrac{7}{x} + \dfrac{9}{y} - \dfrac{9}{z} = 5 \end{cases}$

(Sugestão: $\dfrac{1}{x} = X$, $\dfrac{1}{y} = Y$, $\dfrac{1}{z} = Z$.)

6.16) Use a **Regra de Cramer** para resolver o sistema:

$$\begin{cases} x \cdot \cos\alpha + y \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha \\ -x \cdot \operatorname{sen}\alpha + y \cdot \cos\alpha = \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

6.17) Use a **Regra de Cramer** para determinar os reais **a**, **b** e **c** de tal forma que a função quadrática definida por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

satisfaça às condições: f(1) = 5, f(3) = 13 e f(−5) = 5.

6.18) M é a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine M^{-1} e use o resultado para resolver o sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = -7 \\ -2x + 3y = -3 \end{cases}$$

6.19) Determine a matriz inversa da matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -9 & 5 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Utilize o resultado para resolver o sistema:

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 3x - 9y + 5z = 6 \\ x - 3y + 3z = 13 \end{cases}$$

Capítulo

7

Resolução de sistemas lineares: o escalonamento

Na resolução de sistemas lineares, a **Regra de Cramer** apresenta sérias limitações: é aplicável somente quando o sistema é constituído por igual número de equações e de incógnitas, e também exige que o determinante da matriz incompleta seja diferente de zero.

Além disso, a **Regra de Cramer** torna-se computacionalmente ineficiente quando o número de equações é maior do que 3; por exemplo, na resolução de um sistema linear de 5 equações e 5 incógnitas precisamos calcular 6 determinantes de ordem 5 (!).

Vamos então examinar um outro método para a resolução e discussão de um sistema de equações lineares.

7.1 – SISTEMAS EQUIVALENTES

Definição

Dizemos que os sistemas lineares (S_1) e (S_2) são **equivalentes** quando:

1º) (S_1) e (S_2) são *consistentes* e toda solução de (S_1) é solução de (S_2) e, também, toda solução de (S_2) é solução de (S_1); ou quando:

2º) (S_1) e (S_2) são *inconsistentes*.

Se os sistemas lineares (S_1) e (S_2) são equivalentes, escreve-se:

$$(S_1) \sim (S_2)$$

Observe que:

a) $(S) \sim (S)$, para todo (S)

b) se $(S_1) \sim (S_2)$ então $(S_2) \sim (S_1)$

c) se $(S_1) \sim (S_2)$ e $(S_2) \sim (S_3)$ então $(S_1) \sim (S_3)$

Exemplo

Os sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ \quad\;\; 2x_2 = 4 \end{cases}$$

são *equivalentes*: são consistentes, determinados, e apresentam a mesma solução (3; 2).

As transformações elementares

Dado um sistema linear (S_1), obter-se-á um sistema linear (S_2), *equivalente* a (S_1), se em (S_1) fizermos as seguintes **transformações elementares (te)**:

te 1:	trocarmos as posições de duas equações quaisquer;
te 2:	multiplicarmos todos os termos de uma equação por um número **k**, $k \neq 0$;
te 3:	somarmos, membro a membro, a uma equação uma outra, esta previamente multiplicada por um número.

Exemplos

Seja o sistema linear:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

São **equivalentes** ao sistema (S) os seguintes sistemas:

a) $(S_1)\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$

Observe que em (S) trocamos as posições das duas equações obtendo (S_1); $(S_1) \sim (S)$ pela **te 1**.

Para indicarmos a transformação feita (**te 1**) em (S), usamos a notação:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \leftarrow \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \leftarrow \end{cases}$$

b) $(S_2)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 15x_1 + 20x_2 = 25 \end{cases}$

Observe que em (S) multiplicamos a 2ª equação por 5 obtendo (S_2); $(S_2) \sim (S)$ pela te 2.

Para indicarmos a transformação feita (te 2) em (S), usamos a notação:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \quad (5) \end{cases}$$

c) $$(S_3)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 11x_1 + 0 \cdot x_2 = 13 \end{cases}$$

Observe que em (S) multiplicamos a 1ª equação por 4 e somamos, membro a membro, à 2ª equação obtendo (S_3); $(S_3) \sim (S)$ pela te 3.

Para indicarmos a transformação feita (te 3) em (S), usamos a notação:

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \quad (4) \\ 3x_1 + 4x_2 = 5 \leftarrow \end{cases}$$

Demonstração

1º) A te 1 é imediata.

2º) Para a demonstração da te 2 consideremos o sistema:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \leftarrow \text{i-ésima equação} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e o sistema:

$$(S_1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \dots + ka_{in}x_n = k \cdot b_i \quad \leftarrow \text{i-ésima equação} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

obtido de (S) multiplicando-se neste a i-ésima equação pelo número **k**, $k \neq 0$.

Observe que (S) e (S_1) diferem apenas nas suas i-ésimas equações; portanto é para elas que a nossa demonstração deve se voltar.

1ª parte) Suponhamos que o conjunto de valores $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de (S); demonstremos que também o é de (S_1).

Então, por hipótese a i-ésima equação de (S) dá-nos:

$$a_{i1} \cdot \alpha_1 + a_{i2} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{in} \cdot \alpha_n = b_i$$

Na i-ésima equação de (S_1) fazendo a substituição: x_1 por α_1, x_2 por α_2, ..., x_n por α_n obtemos:

$$(1^\text{o}\text{ membro}) = k \cdot a_{i1} \cdot \alpha_1 + k \cdot a_{i2} \cdot \alpha_2 + \dots + k \cdot a_{in} \cdot \alpha_n =$$

$$= k \cdot \underbrace{(a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n)}_{b_i\text{ (hipótese)}} = k \cdot b_i = (2^\text{o}\text{ membro})$$

o que prova que a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ satisfaz à i-ésima equação de (S_1) e portanto é solução de (S_1).

2ª parte) Suponhamos que o conjunto de valores $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é uma solução de (S_1); demonstremos que também o é de (S).

Então, por hipótese a i-ésima equação de (S_1) dá-nos:

$$ka_{i1}x_1 + ka_{i2}x_2 + \dots + ka_{in}x_n = k \cdot b_i$$

Na i-ésima equação de (S) fazendo a substituição: x_1 por α_1, x_2 por α_2, ..., x_n por α_n obtemos:

$$(1^\text{o}\text{ membro}) = a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n \overset{(k \neq 0)}{=} \frac{k}{k}a_{i1}\alpha_1 + \frac{k}{k}a_{i2}\alpha_2 + \dots +$$

$$+ \frac{k}{k}a_{in}\alpha_n = \frac{1}{k}\underbrace{(ka_{i1}\alpha_1 + ka_{i2}\alpha_2 + \dots + ka_{in}\alpha_n)}_{k \cdot b_i\text{ (hipótese)}} = \frac{1}{k} \cdot k \cdot b_i = b_i =$$

$$= (2^\text{o}\text{ membro})$$

o que prova que a solução $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ satisfaz à i-ésima equação de (S) e portanto é solução de (S).

Fica então completada a demonstração: $(S_1) \sim (S)$.

3º) A demonstração da te 3 será feita no exercício 7.3.

Exercício Resolvido

7.1) Sejam os sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} ax + by = 2 \\ bx + 2ay = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2)\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$$

Determine **a** e **b** sabendo-se que $(S_1) \sim (S_2)$.

Solução

No sistema (S_2) a *matriz incompleta*:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

tem determinante diferente de zero: det A = 5; (S_2) é *Sistema de Cramer*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

Então, (0; 2) é solução de (S_2); se $(S_1) \sim (S_2)$, (0; 2) também é solução de (S_1).
Substituindo em (S_1) x por 0 e y = 2, obtemos o sistema em a e b:

$$\begin{cases} 0 \cdot a + 2b = 2 \\ 0 \cdot b + 4a = 4 \end{cases}$$

e, daí, a = 1 e b = 1.

Exercícios Propostos

7.2) Os sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} 2x - y + 3z = 10 \\ 3x - 2y - z = 22 \\ 4x + 3y - 2z = 13 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} ax + by + cz = -4 \\ x - 2by + 3cz = 8 \\ -ax + by + 4cz = -23 \end{cases}$$

são equivalentes. Determine a, b e c.

7.3) Demonstre a te 3.

7.2 – SISTEMAS ESCALONADOS

Definição

Seja (S) um sistema de equações lineares.

Diz-se que (S) é um **sistema escalonado**, ou ainda, que está na **forma escalonada** quando:

1º) em cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo

2º) o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, cresce "da esquerda para a direita, de equação para equação".

Exemplos

São escalonados, os sistemas:

$$(S_1)\begin{cases} x + y + 2z = 13 \\ 2y + z = 4 \\ 3z = 6 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$(S_3)\begin{cases} x + y + 2z - t = 4 \\ z - t = 5 \end{cases}$$

Resolução

Seja (S) um sistema na **forma escalonada**; para a sua resolução, há dois tipos a serem considerados:

1º tipo: em (S) há tantas equações quanto incógnitas

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Observe que em (S) $a_{ii} \neq 0$ para todo **i**, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Além disso, se A é a *matriz incompleta* de (S) podemos escrever:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\dots a_{nn} \neq 0$$

Então (S) é um *Sistema de Cramer*; (S) é consistente e determinado.

Para obter-se a solução (única) de (S) parte-se da n-ésima equação, que nos dá o valor de x_n; por substituição nas equações anteriores obtemos sucessivamente os valores de $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_3, x_2, x_1$.

Exemplo

Seja o *sistema escalonado*:

$$
(S)\begin{cases} 2x + y - z + t = 0 & (1) \\ \quad y + 2z - t = -1 & (2) \\ \qquad 4z + 3t = 7 & (3) \\ \qquad\quad 2t = 2 & (4) \end{cases}
$$

A equação (4) dá-nos $t = 1$

Em (3): $4z + 3 \cdot 1 = 7$ e daí $z = 1$

Em (2): $y + 2 \cdot 1 - 1 = -1$ e daí $y = -2$

Em (1): $2x - 2 - 1 + 1 = 0$ e daí $x = 1$

A solução do sistema (S) é $(1; -2; 1; 1)$.

2º tipo: em (S) há menos equações do que incógnitas

$$
(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad a_{mj_m}x_{j_m} + a_{m,j_m+1}x_{j_m+1} + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}
$$

Observe que em (S) $1 < j_1 < \dots < j_m$ e que os "coeficientes iniciais" a_{11}, a_{2j_2}, ..., a_{mj_m} não são nulos.

Para a resolução de (S), neste caso, devemos fazê-lo recair no caso anterior.

Inicialmente, as incógnitas que não aparecem "no começo" de nenhuma das equações de (S) – chamadas *variáveis livres* – devem ser "passadas" para os segundos membros das equações.

O "novo" sistema assim obtido, (S'), deve ser considerado como um sistema contendo apenas as incógnitas que "sobraram" nos primeiros membros das equações.

Assim, atribuindo-se à cada *variável livre* dos segundos membros das equações, um determinado valor, teremos um sistema (S') do caso anterior: consistente e determinado. Resolvendo-o obtemos uma solução de (S). Em seguida, atribuindo-se às variáveis livres um outro conjunto de valores obteremos outra solução de (S). O processo estende-se indefinidamente, e para (S) encontraremos **infinitas soluções**: (S) é **consistente e indeterminado**.

Por definição, neste segundo caso, o número de variáveis livres, n–m, chama-se **grau de indeterminação**.

Exemplos

1º) Seja o *sistema escalonado*:

$$
(S)\begin{cases} x + y + 2z = 2 & (1) \\ \quad y + z = 3 & (2) \end{cases}
$$

A única incógnita que não aparece "no começo" de nenhuma das equações de (S) é z: é a única *variável livre* (observe que o grau de indeterminação do sistema é 1).

"Passando" z para os segundos membros das equações:

$$
\begin{cases} x + y = 2 - 2z \\ \quad y = 3 - z \end{cases}
$$

Atribuindo-se a z o valor de α, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema:

$$
\begin{cases} x + y = 2 - 2\alpha & (1) \\ \quad y = 3 - \alpha & (2) \end{cases}
$$

consistente e determinado para cada valor particular de α.

Substituindo (2) em (1):

$$x + 3 - \alpha = 2 - 2\alpha$$
$$x = -1 - \alpha$$

Então, as soluções de (S) são os *infinitos* conjuntos de valores do tipo: $(-1 - \alpha;\ 3 - \alpha;\ \alpha)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$; (S) é **consistente e indeterminado**.

Alguns exemplos de solução:

$\alpha = 0$: $(-1; 3; 0)$
$\alpha = 1$: $(-2; 2; 1)$
$\alpha = 2$: $(-3; 1; 2)$

2º) Seja o *sistema escalonado*:

$$
(S)\begin{cases} x + 2y - 2z + 3t = 2 & (1) \\ \qquad z - 2t = 1 & (2) \end{cases}
$$

Há duas *variáveis livres*: y e t (não aparecem "no começo" de nenhuma equação). O grau de indeterminação de (S) é 2.

"Passando" y e t para os segundos membros das equações:

$$
\begin{cases} x - 2z = 2 - 2y - 3t \\ \quad z = 1 + 2t \end{cases}
$$

Atribuindo-se a **y** e **t**, respectivamente, os valores α e β, reais, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x - 2z = 2 - 2\alpha - 3\beta & (1) \\ z = 1 + 2\beta & (2) \end{cases}$$

consistente e **determinado para cada par** $(\alpha; \beta)$.

Substituindo (2) em (1):

$$x - 2(1 + 2\beta) = 2 - 2\alpha - 3\beta$$

$$x = 4 - 2\alpha + \beta$$

Então, as soluções de (S) são os infinitos conjuntos de valores do tipo: $(4 - 2\alpha + \beta; \alpha; 1 + 2\beta; \beta)$, onde $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$; (S) é **consistente** e **indeterminado**.

Alguns exemplos de solução:

$$(\alpha; \beta) = (-2; 1): (9; -2; 3; 1)$$
$$(\alpha; \beta) = (0; 0) : (4; 0; 1; 0)$$

Exercícios Propostos

7.4) Resolva os *sistemas escalonados*:

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ 2z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$

7.5) Resolva os *sistemas escalonados*:

a) $\begin{cases} x + y - 2z + t = 1 \\ y + z - t = 2 \\ 3z + t = 1 \\ 2t = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y + z + 2t = 4 \\ y - 2z + 5t = 2 \\ z - t = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x - y + z + 2t = 1 \\ z - t = 2 \end{cases}$

7.6) Seja o sistema:

$$\begin{matrix} x - y + z = 1 \\ ay + z = 2 \\ az = b \end{matrix}$$

a) Resolva-o para $a \neq 0$.
b) Resolva-o para $a = b = 0$.

7.3 – MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Para resolvermos um sistema qualquer de equações lineares, utilizaremos um método denominado **método de eliminação de Gauss.**

Esse método consiste em transformar um dado sistema linear (S) em um outro (S_1), **equivalente** a (S), sendo (S_1) um **sistema escalonado**, que é de fácil solução.

A transformação de (S) em (S_1) faz-se com auxílio das *transformações elementares*, descritas em 7.1.

Como escalonar um sistema

Para transformarmos um sistema linear (S) em um outro, *equivalente e escalonado*, seguimos os seguintes passos:

a) Inicialmente, usamos as *transformações elementares* de modo que a 1ª incógnita, x_1, tenha coeficiente $a_{11} = 1$ na 1ª equação.

b) Depois, para $i > 1$, substituímos a i-ésima equação pela soma da mesma com a primeira equação multiplicada por um número conveniente: o número "conveniente" deve ser tal que se anulem os coeficientes da 1ª incógnita, em todas as equações (exceto a primeira). Observe que para anularmos o coeficiente da 1ª incógnita na i-ésima equação, a esta somamos a 1ª equação previamente multiplicada por $-a_{i1}$.

c) Em seguida, "abandonamos" a 1ª equação e repetimos o processo acima para as equações restantes.

Os exercícios que seguem ilustram o procedimento.

Exercícios Resolvidos

7.7) Resolva o sistema:

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 \; 3x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Solução

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 30 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases} \quad (-4) \; (-2) \quad \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ - 7x_2 - 2x_3 = 26 \\ - x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ - x_2 - 4x_3 = 0 \\ - 7x_2 - 2x_3 = 26 \end{cases} \quad (-1) \quad \sim$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \\ - 7x_2 - 2x_3 = 26 \end{cases} \quad (7) \quad \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \\ 26x_3 = 26 \end{cases}$$

O sistema foi colocado na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente e determinado. A sua única solução** é (4; -4; 1); podemos dizer que o **conjunto-solução** de (S) é:

$$V = \{(4; -4; 1)\}$$

7.8) Resolva o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ 2x + y - z + t = 5 \\ -x + y - z - t = -2 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\ \begin{cases} x + y + z + t = 6 \quad \textcircled{-2}\ \textcircled{1} \\ 2x + y - z + t = 5 \\ -x + y - z - t = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ -y - 3z - t = -7 \quad \textcircled{-1} \\ 2y = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ y + 3z + t = 7 \quad \textcircled{-2} \\ 2y = 4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z + t = 6 \\ y + 3z + t = 7 \\ -6z - 2t = -10 \end{cases}$$

O sistema foi colocado na forma escalonada; é do 2º tipo: **consistente e indeterminado.** Há uma só variável livre: t (não aparece no começo de nenhuma equação). Então:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 - t \\ y + 3z = 7 - t \\ -6z = -10 + 2t \end{cases}$$

Atribuindo-se a t o valor α, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 - \alpha & (1) \\ y + 3z = 7 - \alpha & (2) \\ -6z = -10 + 2\alpha & (3) \end{cases}$$

Em (3): $z = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha$; substituindo em (2) obtemos $y = 2$ e em (1) $x = \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\alpha$.

Então, as soluções de (S) são os infinitos conjuntos de valores do tipo: $(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\alpha;\ 2;\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha;\ \alpha)$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$V = \left\{\left(\frac{7}{3} - \frac{2}{3}\alpha;\ 2;\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\alpha;\ \alpha\right),\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

7.9) Resolva o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 7 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\ \begin{cases} x - y + z = 2 \quad \textcircled{-2}\ \textcircled{-1} \\ 2x + y - z = 7 \\ x + 2y - 2z = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y - 3z = 3 \quad \textcircled{\tfrac{1}{3}} \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = 1 \quad \textcircled{-3} \\ 3y - 3z = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = 1 \\ 0y + 0z = 0\ (*) \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Observe que a equação (*) foi abandonada; ela é satisfeita para todo par ordenado $(y; z) \in \mathbb{R}^2$: ***é dispensável para a resolução do sistema.***

Note também que o sistema está na forma escalonada; é do 2º tipo: **consistente e indeterminado.** Há uma só variável livre: z. Então:

$$\begin{cases} x - y = 2 - z \\ y = 1 + z \end{cases}$$

Atribuindo-se a z o valor α, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 2 - \alpha & (1) \\ y = 1 + \alpha & (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1): $x = 3$

Então:

$$V = \{(3;\ 1 + \alpha;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

7.10) Resolva o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\ \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \quad \textcircled{-1}\ \textcircled{-2} \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \quad \textcircled{-1}\ \textcircled{-2} \\ y + 2z = 5 \\ 2y + 8z = 14 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ -2z = -2 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ -2z = -2 \end{cases}$$

O sistema está na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente e determinado.** Resolvendo-o:

$$V = \{(1;\ 3;\ 1)\}$$

7.11) Resolva o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} x + 2y - 2z + 3t = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4t = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11t = 12 \end{cases}$$

7.15) Discuta e resolva o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + 2z = a \end{cases}$$

Solução

$$(S)\ \begin{cases} x + y + z = 4 \quad \textcircled{-2}\ \textcircled{-3} \\ 2x + y + z = 5 \\ 3x + 2y + 2z = a \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y - z = -3 \quad \textcircled{-1} \\ -y - z = a - 12 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z = 3 \quad \textcircled{1} \\ -y - z = a - 12 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z = 3 \\ 0y + 0z = a - 9 \quad (*) \end{cases}$$

Se a = 9, a equação (*) é dispensável para a resolução do sistema. Então:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

que é um sistema escalonado do 2º tipo; é **consistente** e **indeterminado**. Há uma única variável livre: z. Então:

$$\begin{cases} x + y = 4 - z \\ y = 3 - z \end{cases}$$

Atribuindo-se a z o valor α, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y = 4 - \alpha \quad (1) \\ y = 3 - \alpha \quad (2) \end{cases}$$

Substituindo-se (2) em (1): x = 1. Então, as soluções de (S) são os infinitos conjuntos de valores do tipo: $(1; 3 - \alpha; \alpha)$.

Se $a \neq 9$, a equação (*) não possui soluções; o sistema é **inconsistente**.

Resumo

$$\begin{cases} a = 9\text{: (S) é consistente e indeterminado, } V = \{(1;\ 3 - \alpha;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\} \\ a \neq 9\text{: (S) é inconsistente} \end{cases}$$

7.16) Discuta e resolva o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} x + y = 1 \\ x + ay = 2 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\ \begin{cases} x + y = 1 \quad \textcircled{-1} \\ x + ay = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 1 \quad (1) \\ (a - 1)y = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Se $a \neq 1$, o sistema está na forma escalonada, é do 1º tipo: **consistente** e **determinado**.

Em (2): $y = \frac{1}{a-1}$, e substituindo em (1): $x = \frac{a-2}{a-1}$.

Se a = 1, a equação (2) não possui soluções; o sistema é **inconsistente**.

Resumo

$$\begin{cases} a \neq 1\text{: (S) é consistente e determinado, } V = \left\{\left(\frac{a-2}{a-1};\ \frac{1}{a-1}\right)\right\} \\ a = 1\text{: (S) é inconsistente, } V = \emptyset \end{cases}$$

Uma solução alternativa

Observe que a *matriz incompleta* **A**, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a - 1$$

Se $a \neq 1$, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado**:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix}}{a - 1} = \frac{a - 2}{a - 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{a - 1} = \frac{1}{a - 1}$$

Se a = 1, o sistema (S) fica:

$$(S)\ \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Então, escalonando o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} x + y = 1 \quad \textcircled{-1} \\ x + y = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 1 \\ 0x + 0y = 1 \quad (*) \end{cases}$$

A equação (*) *não possui soluções; o sistema é* ***inconsistente***.

7.17) Discuta o sistema:

$$(S)\ \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} x + y - z = 1 & \textcircled{-2}\ \textcircled{-1} \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 & \textcircled{-(a-1)} \\ (a-1)y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (-a^2 - a + 6)z = 2 - a \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ -(a+3)(a-2)z = 2 - a & (*) \end{cases}$$

Observe a equação (*).

Se $a \neq -3$ e $a \neq 2$ o sistema está na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente e determinado.**

Se $a = 2$, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

Está na forma escalonada e é do 2º tipo: **consistente e indeterminado.**

Se $a = -3$, a equação (*) escreve-se:

$$0z = 5$$

e não possui soluções: o sistema é **inconsistente.**

Resumo

$$\begin{cases} a \neq -3 \text{ e } a \neq 2\text{: (S) é consistente e determinado} \\ a = 2\text{: (S) é consistente e indeterminado} \\ a = -3\text{: (S) é inconsistente} \end{cases}$$

Uma solução alternativa

Observe que a matriz incompleta **A**, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 6 = -(a+3)(a-2)$$

Se $a \neq -3$ e $a \neq 2$, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado.**

Se $a = -3$ temos:

$$(S)\begin{cases} x + y - z = 1 & \textcircled{-2}\ \textcircled{-1} \\ 2x + 3y - 3z = 3 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 & \textcircled{4} \\ -4y + 4z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y - z = 1 \\ 0y + 0z = 5 & (*) \end{cases}$$

A equação (*) não possui soluções: o sistema é **inconsistente.**

Se $a = 2$ temos:

$$(S)\begin{cases} x + y - z = 1 & \textcircled{-2}\ \textcircled{-1} \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 & \textcircled{-1} \\ y + 4z = 1 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ 0y + 0z = 0 & (*) \end{cases}$$

Para efeito de resolução do sistema a equação (*) pode ser abandonada; então, o sistema está na forma escalonada e é do 2º tipo: **consistente e indeterminado.**

7.18) Discuta o sistema:

$$(S)\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = b^2 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = b^2 \end{cases} \sim \begin{cases} x + ay = b^2 & \textcircled{-a} \\ ax + y = b \end{cases} \sim \begin{cases} x + ay = b^2 \\ (1 - a^2)y = b - ab^2 & (*) \end{cases}$$

Fixe sua atenção na equação (*).

Se $a \neq 1$ e $a \neq -1$ o sistema está na forma escalonada, é do 1º tipo: **consistente e determinado.**

Se $a = 1$, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} x + y = b^2 \\ 0y = b - b^2 & (*) \end{cases}$$

Se, então, $b = 0$ ou $b = 1$, a equação (*) escreve-se:

$$0y = 0$$

dispensável para a resolução do sistema, que é então **consistente e indeterminado.**

Se, entretanto, $b \neq 0$ e $b \neq 1$, a equação (*) não possui soluções; o **sistema é inconsistente.**

Se $a = -1$, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} x - y = b^2 \\ 0y = b + b^2 & (*) \end{cases}$$

Se, então, $b = 0$ ou $b = -1$, a equação (*) escreve-se:

$$0y = 0$$

dispensável para a resolução do sistema, que é então **consistente e indeterminado.**

Se, entretanto, $b \neq 0$ e $b \neq -1$, a equação (*) não possui soluções; o sistema é **inconsistente.**

Resumo

$$\begin{cases} a \neq 1 \text{ e } a \neq -1\text{: (S) é consistente e determinado} \\ a = 1 \begin{cases} b = 0 \text{ ou } b = 1\text{: (S) é consistente e indeterminado} \\ b \neq 0 \text{ e } b \neq 1\text{: (S) é inconsistente} \end{cases} \\ a = -1 \begin{cases} b = 0 \text{ ou } b = -1\text{: (S) é consistente e indeterminado} \\ b \neq 0 \text{ e } b \neq -1\text{: (S) é inconsistente} \end{cases} \end{cases}$$

Resolva agora o mesmo problema utilizando-se da *Regra de Cramer*.

7.19) Discuta o sistema:

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + ay + 5z = b \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

Solução

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + ay + 5z = b \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 & (-5) \; (-3) \\ 5x + ay + 5z = b \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ (5 + a)y - 5z = b - 10 \\ 5y - 5z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 5y - 5z = -2 & \left(\frac{1}{5}\right) \\ (5 + a)y - 5z = b - 10 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = \frac{-2}{5} & (-(5+a)) \\ (5 + a)y - 5z = b - 10 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = \frac{-2}{5} \\ az = \frac{2}{5}(5 + a) + b - 10 \quad (*) \end{cases}$$

Observe a equação (*).

Se $a \neq 0$, o sistema está na forma escalonada, é do 1º tipo: consistente e determinado.

Se $a = 0$, o sistema escreve-se:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = -\frac{2}{5} \\ 0z = b - 8 \quad (*) \end{cases}$$

Se $b = 8$, a equação (*) é:

$$0z = 0$$

dispensável para a resolução do sistema, que é então consistente e indeterminado.

Se, entretanto, $b \neq 8$, a equação (*) não possui soluções; o sistema é inconsistente.

Resumo

$$\begin{cases} a \neq 0\text{: (S) é consistente e determinado} \\ a = 0 \begin{cases} b = 8\text{: (S) é consistente e indeterminado} \\ b \neq 8\text{: (S) é inconsistente} \end{cases} \end{cases}$$

Uma solução alternativa

Observe que a matriz incompleta A, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & a & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5a$$

Se $a \neq 0$, (S) é um *Sistema de Cramer*: consistente e determinado.

Se $a = 0$, o sistema escreve-se:

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + 5z = b \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(S) \begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ 5x + 5z = b \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 & (-5) \; (-3) \\ 5x + 5z = b \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 5y - 5z = b - 10 & \left(\frac{1}{5}\right) \\ 5y - 5z = -2 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = \frac{b - 10}{5} & (-5) \\ 5y - 5z = -2 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ y - z = \frac{b - 10}{5} \\ 0y + 0z = -b + 8 \quad (*) \end{cases}$$

Se $b = 8$, a equação (*) é dispensável para a resolução do sistema que, então, está na forma escalonada e é do 2º tipo: **consistente e indeterminado**.

Se $b \neq 8$, a equação (*) não possui soluções: o sistema é **inconsistente**.

7.4 – SISTEMAS HOMOGÊNEOS DE EQUAÇÕES LINEARES

Vimos em 6.2 que um **sistema linear homogêneo** é aquele em que os *termos constantes são todos iguais a zero*:

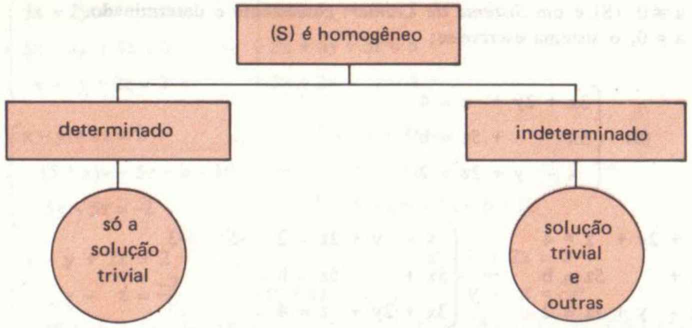
$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{array}\right.$$

Vimos também que uma solução evidente do sistema é a **solução trivial:**

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ \dots,\ x_n = 0$$

Então, **um sistema linear homogêneo é sempre consistente.**

Se o sistema linear homogêneo for determinado possuirá uma única solução: a trivial; se for indeterminado, possuirá infinitas soluções: a trivial e outras, distintas da trivial.



Exercícios Resolvidos

7.20) Resolva o sistema:

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{array}\right.$$

Solução

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \quad (-2)\ (-3) \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -y - 3z = 0 \quad (-1) \\ -y - 3z = 0 \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \quad (1) \\ -y - 3z = 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ 0y + 0z = 0 \quad (*) \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y + 3z = 0 \end{array}\right.$$

Observe que a equação (*) foi abandonada; ela é satisfeita para todo par ordenado $(y; z) \in \mathbb{R}^2$; *é dispensável para a resolução do sistema.*

Note também que o sistema está na forma escalonada; é do 2º tipo: **consistente** e **indeterminado.** Há uma só variável livre: z. Então:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y = -z \\ y = -3z \end{array}\right.$$

Atribuindo-se a z o valor α, $\alpha \in \mathbb{R}$, obtém-se o sistema:

$$\left\{\begin{array}{ll} x + y = -\alpha & (1) \\ y = -3\alpha & (2) \end{array}\right.$$

Substituindo (2) em (1): $x = 2\alpha$.

Então:

$$V = \{(2\alpha;\ -3\alpha;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Exemplos de soluções:

$\alpha = 0$: (0; 0; 0), a trivial
$\alpha = 1$: (2; –3; 1), não-trivial
$\alpha = 2$: (4; –6; 2), não-trivial

7.21) Resolva o sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right.$$

Solução

$$(S)\left\{\begin{array}{l} 3x + 2y - z = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x - y - z = 0 \quad (-4)\ (-3) \\ 4x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 3y + 7z = 0 \quad \left(\frac{1}{3}\right) \\ 5y + 2z = 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ y + \frac{7}{3}z = 0 \quad (-5) \\ 5y + 2z = 0 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ y + \frac{7}{3}z = 0 \\ -\frac{29}{3}z = 0 \end{array}\right.$$

O sistema está na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente** e **determinado**; possui somente a solução trivial:

$$V = \{(0;\ 0;\ 0)\}$$

Uma solução alternativa

Observe que a matriz incompleta A, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 29$$

Então, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado**; e como é homogêneo, sua única solução é a trivial.

7.22) Discuta o sistema:

$$(S)\begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ -mx + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Solução

$$(S)\begin{cases} mx + y + 2z = 0 \\ -mx + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \quad (m) \quad (-m) \\ -mx + 2y + 3z = 0 \\ mx + y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \quad (^{**}) \\ (m + 2)y + 3z = 0 \quad \left(\frac{1}{m+2}\right) \\ (-m + 1)y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \frac{3}{m+2}z = 0 \\ (-m + 1)y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$m \neq -2$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \frac{3}{m+2}z = 0 \\ \boxed{\frac{5m+1}{m+2}z = 0} \quad (^*) \end{cases}$$

Observe que estamos supondo $m \neq -2$.

Se $m \neq -\frac{1}{5}$, o sistema está na forma escalonada e é do 1º tipo: **consistente e determinado** (somente a solução trivial).

Se $m = -\frac{1}{5}$, a equação (*) pode ser abandonada; o sistema está na forma escalonada e é do 2º tipo: **consistente e indeterminado** (infinitas soluções: a trivial e outras).

Mas, o que acontece com o sistema se $m = -2$? Veja-o em (**) "antes" da multiplicação por $\frac{1}{m+2}$:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3z = 0 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

O sistema está na forma escalonada; é do 1º tipo: **consistente e determinado** (somente a solução trivial).

Resumo

$b = -\frac{1}{5}$: (S) é consistente e indeterminado; possui somente a solução trivial.

$b \neq -\frac{1}{5}$: (S) é consistente e determinado; possui infinitas soluções: a trivial e outras, distintas da trivial.

Uma solução alternativa

Observe que a matriz incompleta A, do sistema (S), é quadrada e que:

$$\det A = \begin{vmatrix} m & 1 & 2 \\ -m & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5m - 1$$

Se $m \neq -\frac{1}{5}$, (S) é um *Sistema de Cramer*: **consistente e determinado**; e como é homogêneo, *sua única solução é a trivial*.

Se $m = -\frac{1}{5}$ o sistema escreve-se:

$$(S)\begin{cases} -\frac{1}{5}x + y + 2z = 0 \\ \frac{1}{5}x + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{5}x + y + 2z = 0 \\ \frac{1}{5}x + 2y + 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \quad \left(\frac{-1}{5}\right) \left(\frac{1}{5}\right) \\ \frac{1}{5}x + 2y + 3z = 0 \\ \frac{-1}{5}x + y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \\ \frac{9}{5}y + 3z = 0 \quad \left(\frac{5}{9}\right) \\ \frac{6}{5}y + 2z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \frac{5}{3}z = 0 \quad \left(\frac{-6}{5}\right) \\ \frac{6}{5}y + 2z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \frac{5}{3}z = 0 \\ 0y + 0z = 0 \quad (*) \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 0 \\ y + \frac{5}{3}z = 0 \end{cases}$$

E, o sistema na forma escalonada é do 2º tipo: **consistente e indeterminado**; além da trivial, possui infinitas soluções não-triviais.

7.23) Determine o número real a para que o sistema:

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + ay - 4z = 0 \end{cases}$$

admita soluções distintas da trivial.

Solução

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 0 \quad (-2)\ (-1) \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x + ay - 4z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3y - 5z = 0 \quad \left(\frac{1}{3}\right) \\ (a+1)y - 5z = 0 \end{cases} \sim$$

$$\sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - \frac{5}{3}z = 0 \quad (-(a+1)) \\ (a+1)y - 5z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - \frac{5}{3}z = 0 \\ \frac{5a - 10}{3}z = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Para que o sistema (S) admita soluções distintas da trivial, ele deve ser indeterminado. Para que isto se dê, em sua forma escalonada o sistema deve apresentar menos equações do que incógnitas, isto é, deve ser do 2º tipo, (veja página 174). Então, em (*) fazemos $\frac{5a - 10}{3} = 0$, isto é, $a = 2$. Observe que para $a = 2$ a equação (*) pode ser abandonada para a resolução do sistema. (Veja o problema 7.24.)

7.24) Demonstre o seguinte teorema:

> Seja (S) um sistema linear homogêneo, de n equações e n incógnitas. A condição necessária e suficiente para que (S) admita solução não-trivial é que a matriz incompleta de (S) seja singular.

Solução

Em sua formulação matricial seja (S):

$$A \cdot X = 0$$

1ª parte

Hipótese: (S) admite solução não-trivial, isto é, (S) é indeterminado.
Tese: A é singular, isto é, det A = 0.

De fato, devemos ter det A = 0, pois se det A ≠ 0 o sistema seria de Cramer: determinado, contra a hipótese.

2ª parte

Hipótese: A é singular, isto é, det A = 0.
Tese: (S) admite solução não-trivial, isto é, (S) é indeterminado.

(S) é consistente, e pode ser colocado na forma escalonada; **não pode ser um sistema escalonado do 1º tipo**:

$$A'X = 0$$

pois este é de Cramer, e det $A' \neq 0$; como A' se obtém de A através das transformações elementares também det A ≠ 0, contra a hipótese. Então o sistema escalonado é do 2º tipo: **indeterminado**.

Observe que este resultado facilita a solução de um problema como o 7.23.

Exercícios Propostos

7.25) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 6x + 3y = 7 \end{cases}$

7.26) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 4x - 3y + 3z = 0 \\ 6x + y - 9z = 9 \\ 2x - 5y - 6z = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$

7.27) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x - y = 2 \\ 4x + y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

7.28) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3t = 9 \\ 3x + 6y - z + 8t = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13t = 3 \\ 3x - y + 2z + 5t = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4t = 1 \end{cases}$

7.29) Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 7x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 0 \\ 4x - 7y + z - 6t = 0 \end{cases}$

7.30) Discuta e resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - my = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = m \end{cases}$

7.31) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ y + kz = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 3y = 8 \\ x - my = 3 \end{cases}$

7.32) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}$

7.33) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 3z = -3 \\ 2x + ky - z = -2 \\ x + 2y + kz = 1 \end{cases}$

7.34) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y + kz = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = kx \\ 2x + 3y + z = ky \\ 3x + y + 2z = kz \end{cases}$

7.35) Determine o número real a para que o sistema:

$\begin{cases} x + ay + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ ax + y + z = 0 \end{cases}$

admita soluções distintas da trivial.

7.36) Verifique que se a, b e c não são nulos, o sistema:

$\begin{cases} (b + c)x + (c - a)y + (b - a)z = 0 \\ (c - b)x + (c + a)y + (a - b)z = 0 \\ (b - c)x + (a - c)y + (a + b)z = 0 \end{cases}$

admite somente a solução trivial.

7.37) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x - 2y + 5z = 5 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 5x - 10y - 7z = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 7x + y - 3z = 10 \\ 4x + y + az = b \end{cases}$

7.38) Para $ab \neq 0$, discuta o sistema:

$\begin{cases} a^2x + ay + z = 1 \\ ax + y + bz = 1 \\ x + by + b^2z = 1 \end{cases}$

7.39) Discuta o sistema:

$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

7.40) Resolva o sistema:

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$

sabendo-se que a, b e c são distintos dois a dois.

7.41) Discuta os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ ax + by = ab \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ ax - y = 0 \\ ax - 2y = \frac{3}{8} \\ x - 3y = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2my = m \\ mx + 2y = p \end{cases}$

7.42) Discuta o sistema:

$$\begin{cases} x\cos\alpha - y\,\text{sen}\,\alpha - z = 0 \\ x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha = 1 \\ x\cos\alpha + y\,\text{sen}\,\alpha - z\cos 2\alpha = 0 \end{cases}$$

7.43) Para que valores de k o sistema:

$$\begin{cases} x + y = k \\ x + y = \text{sen}\,k \end{cases}$$

é indeterminado? é inconsistente?

7.44) a) Determine os valores de k para que tenha solução a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 4 & 10 & 2 \\ 6 & 15 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ k \end{bmatrix}$$

b) Resolva a equação na condição do item anterior.

7.45) Para que valores de a e de b o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 44 \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 = 134 \\ -x_1 - 6x_2 - 15x_3 = a \\ x_1 - 2x_2 - 15x_3 = b \end{cases}$$

é consistente?

7.46) Para que valores de a e de b o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = a + b \end{cases}$$

é consistente e indeterminado?

Capítulo 8

Outros temas importantes

8.1 – OPERAÇÕES ELEMENTARES SOBRE LINHAS

Definição

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$.

Chamam-se operações elementares sobre linhas (oe) quaisquer das seguintes transformações feitas sobre as linhas de A:

oe 1: trocarmos as posições de duas linhas quaisquer;
oe 2: multiplicarmos todos os elementos de uma linha por um número k, $k \neq 0$;
oe 3: somarmos a uma linha uma outra, esta previamente multiplicada por um número.

8.2 – MATRIZES EQUIVALENTES POR LINHAS

Definição

Uma matriz B, de ordem $m \times n$, é **equivalente por linha** à matriz A, de ordem $m \times n$, se B for obtida de A através de uma seqüência *finita* de operações elementares, feitas sobre as linhas de A. Se B é equivalente por linha à A, indica-se:

B ~ A

Observe que:

a) A ~ A, para qualquer A
b) se A ~ B então B ~ A
c) se A ~ B e B ~ C então A ~ C

Exemplos

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix}$$

São equivalentes por linha à matriz A, as seguintes matrizes:

a) $B = \begin{bmatrix} x & y & z & t \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$

Observe que em A trocamos as posições de duas linhas obtendo B; $B \sim A$ pela oe 1.

Para indicarmos a transformação feita (oe 1) em A, usamos a notação:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}$$

b) $C = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 3x & 3y & 3z & 3t \end{bmatrix}$

Observe que em A multiplicamos a 2ª linha por 3 obtendo C; $C \sim A$ pela oe 2.

Para indicarmos a transformação feita (oe 2) em A, usamos a notação:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (3) \end{matrix}$$

c) $D = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x + 2a & y + 2b & z + 2c & t + 2d \end{bmatrix}$

Observe que em A multiplicamos os elementos da 1ª linha por 2 e somamos, ordenadamente, aos elementos da 2ª linha obtendo D; $D \sim A$ pela oe 3.

Para indicarmos a transformação feita (oe 3) em A, usamos a notação:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{bmatrix} \begin{matrix} (2) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

8.3 – MATRIZ ESCALONADA

Definição

Seja a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Diz-se que A é uma **matriz escalonada**, ou ainda, que está na **forma escalonada** quando:

1º) em cada uma das k primeiras linhas ($1 \leqslant k \leqslant m$) há pelo menos um elemento não nulo; e se $k < m$ as linhas de ordem $k + 1, k + 2, ..., m$ são constituídas inteiramente por zeros, (se $k = m$ não há linha cujos elementos são todos iguais a zero).

2º) o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo nas k primeiras linhas cresce "da esquerda para a direita, de linha para linha".

Exemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix} \text{ k primeiras linhas (k = m)}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{k primeiras linhas (k < m)} \\ \\ \leftarrow \text{linha nula} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \text{k primeiras linhas (k < m)} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha nula} \end{matrix}$$

As operações elementares sobre linhas permitem transformar qualquer matriz A, não nula, em uma outra B, escalonada, e tal que:

$$A \sim B$$

Exemplo

Observe no exemplo abaixo, que os passos executados para a transformação de uma matriz A em uma outra B, escalonada, guardam uma semelhança com os passos descritos para a transformação de um sistema (S) em um outro (S'), escalonado.

Seja então a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} (-2)\,(1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} (-1) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -10 \end{bmatrix}$$

A matriz acima está na forma escalonada; compare as transformações feitas, com aquelas executadas no escalonamento do sistema do exercício 7.8; note que são análogas.

Esta analogia permite-nos enunciar o seguinte:

Teorema

Sejam $A \cdot X = B$ e $C \cdot X = D$ sistemas lineares com m equações e n incógnitas. Se as respectivas matrizes completas: $[A \mid B]$ e $[C \mid D]$ são *equivalentes por linhas* então os sistemas são *equivalentes*.

8.4 – CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ

Definição

Seja A uma matriz não nula.

Seja A′ a matriz escalonada, equivalente por linha à matriz A.

O número de linhas não nulas da matriz A′ é, por definição, a **característica** da matriz A; indica-se com:

$$p(A)$$

Se $A = 0$ define-se $p(A) = 0$.

Exemplos

1º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; escalonando-a obtemos:

$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e, portanto $p(A) = 2$.

2º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$; escalonando-a obtemos:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto $p(A) = 2$.

3º) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$; escalonando-a obtemos:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, portanto $p(A) = 1$.

Exercícios Resolvidos

8.1) Determine a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Devemos colocar a matriz na forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O número de linhas não nulas na matriz escalonada é 3; então $p(A) = 3$.

8.2) Discuta, segundo os valores de a, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a^2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução

Escalonando a matriz obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a^2 & 4 \end{bmatrix} (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 0 & a^2-1 & 3 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{a-1}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & a^2-1 & 3 \end{bmatrix} -(a^2-1) \sim$$

(**) $\quad a \neq 1$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & -a+2 \end{bmatrix}$$

(*)

Observe que admitimos $a \neq 1$.

Se, além disso, $a \neq 2$: $p(A) = 3$.

Se $a = 2$, a matriz (*) escreve-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, $p(A) = 2$.

E qual a característica, se $a = 1$?

Retomando a matriz (**); "antes" da multiplicação por $\frac{1}{a-1}$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} (-3) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, $p(A) = 2$.

Resumo

$$\begin{cases} a \neq 1 \text{ e } a \neq 2 & p(A) = 3 \\ a = 2: & p(A) = 2 \\ a = 1: & p(A) = 2 \end{cases}$$

8.3) Determine a para que a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & a \end{bmatrix}$$

seja igual a 2.

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & a \end{bmatrix} (-2)(-3) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & a-12 \end{bmatrix} (-1) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & a-12 \end{bmatrix} (1) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a-9 \end{bmatrix}$$

Para que $p(A)$ seja 2, deve-se ter $a = 9$.

Exercícios Propostos

8.4) Determine as características das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 \\ 5 & 1 & 23 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 3 & 0 \\ 6 & 1 & -9 & 9 \\ 2 & -5 & -6 & 5 \end{bmatrix}$

8.5) Determine as características das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

8.6) Determine as características das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 6 & 2 & 3 \\ 3 & -8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

8.7) Determine as características das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

8.8) Discuta, segundo os valores de a, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ a & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

8.9) Discuta, segundos os valores de **k**, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & k & 3 \end{bmatrix}$$

8.10) Discuta, segundo os valores de **k**, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ k & 1 & 3 & 0 \\ 1 & k & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

8.11) Discuta, segundo os valores de **m** e de **n**, a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & m & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & n \end{bmatrix}$$

8.12) Determine α para que a característica da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & \alpha \end{bmatrix}$$

seja igual a 2.

8.5 – TEOREMA DE ROUCHÉ-CAPELLI

Teorema

Seja um sistema linear de **m** equações e **n** incógnitas:

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Consideremos as matrizes incompleta e completa de (S):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

e sejam p(A) e p([A ¦ B]), respectivamente, as suas características.

Então:

(S) é consistente se e somente se p(A) = p([A ¦ B]).

Demonstração

Seja (S′) o sistema escalonado equivalente a (S) e sejam A′ e [A′ ¦ B′] as matrizes incompleta e completa de (S′); então:

$$A' \sim A$$

$$[A' \mid B'] \sim [A \mid B]$$

Suponhamos que (S) é consistente; (S′) pode ser de dois tipos:

$$1^{\circ}\ \text{tipo} \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad a'_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{onde} \begin{cases} a_{ii} \neq 0 \text{ para todo } i \\ 1 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

$$2^{\circ}\ \text{tipo} \begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \quad a'_{2j_2}x_{j_2} + a'_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad a'_{mj_m}x_{j_m} + a'_{m,j_m+1}x_{j_m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \quad \text{onde} \begin{cases} 1 < j_1 < j_2 < \ldots < j_m \\ \text{e “os coeficientes iniciais não nulos”} \\ m < n \end{cases}$$

Se (S′) é do 1º ou do 2º tipo o número de linhas nulas em A′ e em [A′ ¦ B′] é o mesmo, isto é:

$$p(A) = p([A \mid B])$$

Inversamente, se p(A) = p([A ¦ B]) = n, (S′) será do **1º tipo** e (S) será consistente e determinado; se p(A) = p([A ¦ B]) < n, (S′) será do **2º tipo** e (S) será consistente e indeterminado.

Resumo

Considere o sistema linear (S), de **m** equações e **n** incógnitas, que na notação matricial escreve-se:

$$A \cdot X = B$$

Então:

p(A) = p([A ¦ B]) = n :	S é consistente e determinado
p(A) = p([A ¦ B]) < n :	S é consistente e indeterminado
p(A) < p([A ¦ B]) :	S é inconsistente

8.13) Classifique, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 2z = 2 \\ 4x - 3y + 2z = 30 \end{cases}$$

Solução

Devemos escalonar a matriz completa de (S) (estaremos escalonando também a matriz incompleta):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 30 \end{array}\right] \begin{matrix} (-2) & (-4) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 26 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 26 \end{array}\right] (7) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 26 \end{array}\right]$$

Usando a notação do teorema acima, observe que:

1º) O número de linhas não nulas em A′ é 3; daí p(A) = 3.

2º) *O número de linhas não nulas em [A′ ¦ B′] é 3; daí p([A B]) = 3.*

Então, como p(A) = p([A ¦ B]) = n = 3, **(S) é consistente e determinado.**

8.14) Classifique, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

O número de linhas não nulas em A′ é 2; daí p(A) = 2.

O número de linhas não nulas em [A′ ¦ B′] é 3; daí p([A ¦ B]) = 3.

Como p(A) < p([A ¦ B]), (S) é inconsistente.

8.15) Classifique, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$(S)\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 4 \end{cases}$$

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right] \begin{matrix} (-2) & (-4) \end{matrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] (-1) \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right] (-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O número de linhas não nulas em A′ é 2; daí p(A) = 2.

O número de linhas não nulas em [A′ ¦ B′] é 2; daí p([A ¦ B]) = 2.

Então p(A) = p([A ¦ B]) < n = 3: (S) é consistente e determinado.

8.16) Discuta, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$(S)\begin{cases} 3z - 4y = 1 \\ 4x - 2z = 2 \\ 2y - 3x = 3 - k \end{cases}$$

segundo os valores de **k**.

Solução

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 3-k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3-k \end{array}\right] \left(\frac{1}{4}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3-k \end{array}\right] (3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{-3}{2} & \frac{9}{2}-k \end{array}\right] \left(-\frac{1}{4}\right) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{2}-k \end{array}\right] (-2) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 5-k \end{array}\right]$$

Observe que se k ≠ 5 o número de linhas não nulas em A′ é 2 e daí p(A) = 2, e o número de linhas não nulas em [A′ ¦ B′] é 3 e daí p([A ¦ B]) = 3: (S) é inconsistente.

Se k = 5, em A′ e em [A′ ¦ B′] o número de linhas não nulas é 2 < n = 3: (S) é consistente e indeterminado.

Resumo

$$\begin{cases} k \neq 5: \text{(S) é inconsistente.} \\ k = 5: \text{(S) é consistente e indeterminado} \end{cases}$$

Exercícios Propostos

8.17) Use o Teorema de Rouché-Capelli para classificar os sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 10 \end{cases}$

8.18) Use o Teorema de Rouché-Capelli para classificar os sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

8.19) Use o Teorema de Rouché-Capelli para classificar os sistemas:

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$

8.20) Discuta, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax + y = 1 \\ 4x + ay = 2a \end{cases}$

segundo os valores de a.

8.21) Discuta, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli, o sistema:

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = -2 \end{cases}$$

segundo os valores de m.

Exercícios Suplementares

III.1) Para quais valores de λ o sistema:

$$\begin{cases} x - \lambda y = 1 \\ 4x + \lambda y = 0 \\ 2x + 3y = -2\lambda \end{cases}$$

admite soluções? Resolvê-lo em seguida para os valores encontrados de λ.

III.2) Discuta, segundo os valores de λ, o sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ 2y + \lambda z = 0 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$$

III.3) Determine m para que as duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} m & 1 & -1 \\ 0 & 2 & m \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} m & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & m & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tenham a mesma característica.

III.4) Determine m para que as duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \\ m & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & m \\ m & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tenham a mesma característica.

III.5) Seja (S) um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas. Demonstre que se $m < n$, isto é, o número de incógnitas excede o número de equações, (S) admite solução não-trivial.

III.6) Mostre que se $ad - bc \neq 0$ a matriz I_2 é equivalente por linha à matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

III.7) Reduza a matriz

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right]$$

à forma escalonada.

Suponha que M é a matriz completa de um sistema linear $A \cdot X = B$ de 3 equações e 3 incógnitas. Discuta-o.

Capítulo

9

Processos básicos de contagem

9.1 – INTRODUÇÃO

A *Análise Combinatória* tem por finalidade determinar o **número de possibilidades** de ocorrer um dado evento, **a quantidade de maneiras** de se realizar uma certa experiência, sem, necessariamente, *descrever* cada uma das possibilidades, cada uma das maneiras. É, em síntese, um estudo de regras de contagem.

Uma grande variedade de problemas puramente matemáticos, ou que surgem em diversos setores profissionais, em atividades esportivas ou de lazer, pode ser resolvida sem que sejam *formalizados* conceitos algébricos para sua solução, bastando uma **contagem direta** ou uma simples operação aritmética. É muito comum aparecer esse tipo de problema durante a resolução de exercícios mais complicados; isso mostra a necessidade de estarmos familiarizados com os raciocínios (elementares) exigidos para a sua solução. Vamos, então, a um treino através de exercícios.

Exercícios Resolvidos

9.1) Quantos anos governou um ditador que tomou o poder em dezembro de 1936 e foi deposto em dezembro de 1949?

Solução

1º) podemos fazer uma *contagem direta*: os anos de governo foram 1 937, 1 938, 1 939, . . . , 1 949

Temos, então, 13 anos de governo

2º) observando que 1 936 *não* se inclui nos anos de governo, podemos entender o problema sob o seguinte enunciado: "quantos números inteiros há no intervalo]1936; 1949]?"

A resposta é dada pela diferença:

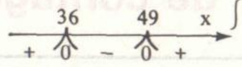
$1\,949 - 1\,936 = 13$ (anos)

9.2) Determine o número de soluções inteiras da inequação $(x - 36)(x - 49) \leqslant 0$.

Solução

Resolvemos, inicialmente, a inequação:

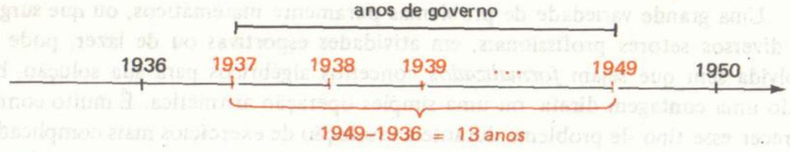
$(x - 36)(x - 49) \leqslant 0$ $\quad V = \{x \in \mathbb{Z} \mid 36 \leqslant x \leqslant 49\}$

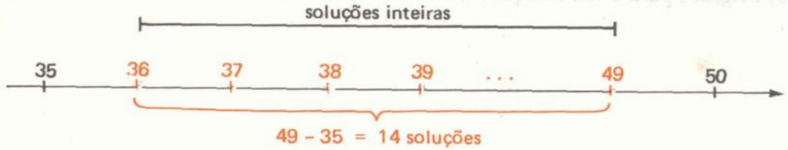


A exemplo do que fizemos no exercício anterior, o número de soluções inteiras pode ser obtido por contagem direta (36, 37, 38, ..., 49 → 14 soluções) ou determinando, por diferença, quantos números inteiros há no intervalo [36; 49]; nesse caso, no entanto, devemos notar que apenas a diferença 49 − 36 **não** fornece o total correto pois, ao contrário do exercício anterior, o extremo inferior do intervalo (36) *está incluído* entre as soluções, devendo, por isso, ser acrescentado como um elemento a mais. Portanto, o número de soluções é dado por

$49 - 36 + 1 = 14$ ou ainda: $49 - 35 = 14$

Os diagramas abaixo ilustram as soluções dos dois exercícios:





9.3) Quantos anos bissextos houve entre 1839 e 1978?

Solução

Lembremos que um ano bissexto é representado por um múltiplo de 4, ou seja, é da forma 4k, onde $k \in \mathbb{Z}$. Devemos, então, determinar quantos valores pode k assumir, de modo que

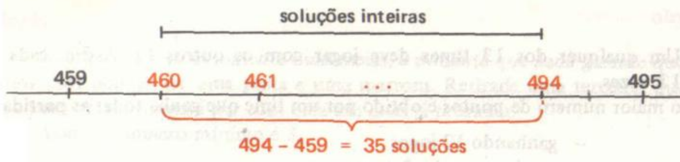
$$1839 < 4k < 1978$$

(note que isso nos leva de volta ao exercício anterior: "quantas soluções inteiras tem a inequação acima?")

Temos, então:

$$\frac{1839}{4} < k < \frac{1978}{4}$$

$$459{,}75 < k < 494{,}50$$



Assim, obtemos k = 35, ou seja, houve 35 anos bissextos entre 1839 e 1978.

9.4) Determine a quantidade de múltiplos de 7 existentes entre os 450 primeiros números naturais.

Solução

O problema fica resolvido com a seguinte interpretação: "quantas vezes 7 'cabe' em 450?". Uma simples divisão nos fornece a resposta:

```
450 | 7
 30   64
  2
```

Logo, temos 64 múltiplos de 7 entre os 450 primeiros naturais.

Observação − Para um leitor (matematicamente) bem informado, os quatro exercícios acima poderiam ser resolvidos com os conceitos de **progressão aritmética** pois, em todos eles, as seqüências de números que constituem as soluções são progressões aritméticas. Por exemplo, no exercício 3, os anos bissextos (múltiplos de 4) entre 1 839 e 1978 constituem uma PA de razão 4:

$$1839 < 1840;\ 1844;\ 1848;\ \ldots;\ 1976 < 1978$$

onde $a_1 = 1840$ é o múltiplo de 4 imediatamente superior a 1839, e $a_n = 1976$ é o múltiplo de 4 imediatamente inferior a 1978.

Então, o número de termos n da progressão pode ser determinado pela expressão do termo geral de uma progressão aritmética:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Assim:

$$1976 = 1840 + (n - 1) \cdot 4,$$

e daí:

$$n = 35$$

9.5) Treze times disputam um campeonato de futebol em um único turno (isto é, dois times se defrontam uma única vez). Ao vencer uma partida, um time ganha 2 pontos; ao empatar, ganha 1 ponto. Pergunta-se:

a) quantas vezes cada time deve jogar?
b) qual o máximo número de pontos que um time pode obter?
c) qual o maior valor possível para a soma dos pontos de dois times?

Exercícios Propostos

9.9) Quantos anos viveu uma pessoa que:

a) nasceu em dezembro de 1910 e morreu em dezembro de 1977?
b) nasceu em janeiro de 1893 e morreu em dezembro de 1949?
c) nasceu em dezembro de 1898 e morreu em janeiro de 1979?

9.10) Sendo a e b números inteiros e a $<$ b, determine a quantidade de elementos inteiros que há em cada um dos intervalos seguintes:

a) $]a;\ b]$
b) $[a;\ b[$
c) $[a;\ b]$
d) $]a;\ b[$

9.11) Determine o número de soluções inteiras de cada uma das seguintes inequações:

a) $2 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 11$
b) $4 < \sqrt[3]{x+3} < 7$

9.12) Quantos anos bissextos houve entre 1589 e 1725?

9.13) Quantas semanas completas há em:

a) 1 ano?
b) 1000 dias?

9.14) *Numa urna há 500 bolas numeradas de 1 a 500. De quantos modos é possível retirar uma bola que tenha um:*

a) múltiplo de 2?
b) múltiplo de 3?
c) múltiplo de 11?

9.15) Suponha que, no início de um jogo de azar, você tenha Cr\$ 15,00. A cada jogada, se você vencer, ganha Cr\$ 1,00 e, se perder, paga Cr\$ 2,00. Ao final de cinco jogadas, quais os possíveis valores máximo e mínimo do dinheiro que você pode ter?

9.16) No exercício anterior, suponha que você tenha direito a, *no máximo*, dez jogadas. Se você nunca vencer, em quantas das dez você não pode participar?

9.17) Ainda no exercício 9.15, admita que após três jogadas você esteja com os mesmos Cr\$ 15,00 do início. Chamando de V e P as jogadas vencida e perdida, respectivamente, descreva as possíveis ordens em que ocorreram os resultados dessas três jogadas.

9.18) Numa gaveta há 5 pares de abotoaduras. Não existem dois pares iguais, mas as peças não são diferenciáveis pelo tato. Operando no escuro, quantas abotoaduras deve uma pessoa retirar, *no mínimo*, para ter a certeza de formar:

a) um par?
b) dois pares?

9.19) Uma caixa contém n etiquetas, numeradas de 1 a n. De quantos modos é possível retirar três etiquetas que possuam números consecutivos?

9.20) Nas junções dos elos de uma corrente foram fixadas n etiquetas, numeradas de 1 a n (uma etiqueta em cada intersecção). Quantos elos tem essa corrente?

9.2 – DIAGRAMAS DE ÁRVORE

Um dispositivo muito útil na determinação do número de possibilidades de um evento é o **diagrama de árvore**, que consiste na construção de uma *figura* na qual cada possibilidade é descrita, obtendo-se, ao final, o total de possibilidades de ocorrência do evento.

Vejamos alguns exemplos.

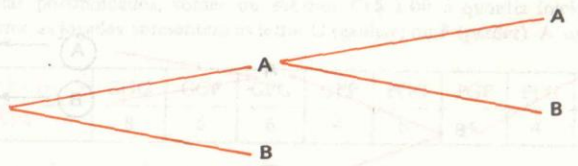
Exercícios Resolvidos

9.21) Dois indivíduos A e B vão disputar um torneio de tênis. O primeiro a vencer dois jogos vencerá o torneio. De quantos modos diferentes poderá desenrolar-se o torneio? Qual o número máximo de partidas que podem ser realizadas?

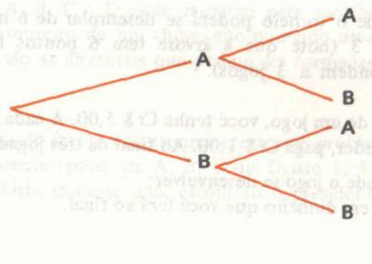
Solução

Ao final de cada jogo, as possibilidades são apenas: vencer A ou vencer B; o diagrama de árvore representa essas hipóteses da seguinte maneira:

onde o *vértice* do ângulo representa o *início* de um jogo e as *extremidades* dos segmentos representam o *final* com o respectivo vencedor. Se a figura acima for o diagrama correspondente ao 1º jogo, continuaríamos assim: se A venceu o 1º, o 2º jogo pode ser vencido por A ou por B; temos, então:



mas, devemos pensar na hipótese de B ter vencido o 1º jogo; então desenhamos:



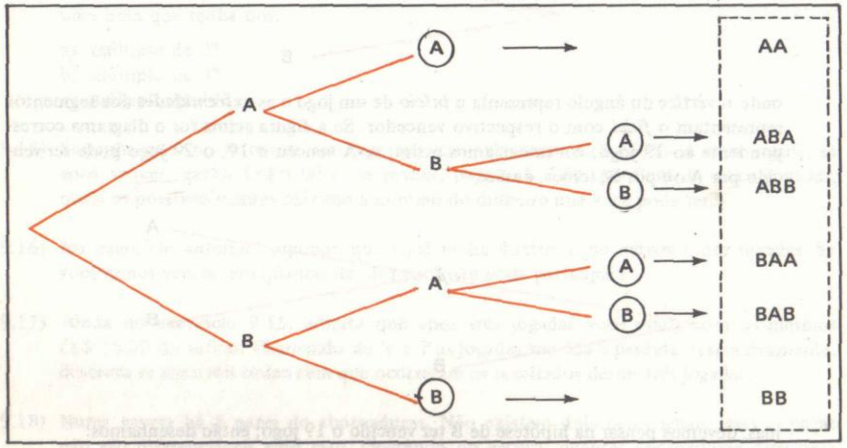
Assim, vamos *ramificando* a árvore com as hipóteses de vencedor para cada novo jogo.

Quando parar – O final de um ramo é determinado pelo enunciado do exercício; nesse exemplo, o torneio se encerra no momento em que um dos jogadores ganhou a partida pela *segunda* vez. Na última figura, o diagrama nos mostra as seguintes situações:

1º JOGO	2º JOGO
A	A
A	B
B	A
B	B

onde vemos que, na primeira hipótese, A venceu os dois jogos e, na quarta hipótese, B venceu os dois jogos. Em ambos os casos o torneio se encerra. Para a visualização desse fato no diagrama, colocaremos uma "moldura" em torno do elemento final.

Com essas considerações, podemos agora construir o diagrama de árvore completo, acrescentando ao término de cada ramo a leitura daquela possibilidade:



Temos, então, que o torneio poderá se desenrolar de 6 modos e que o *número máximo* de partidas é 3 (note que a árvore tem 6 pontos finais e que os ramos "mais longos" correspondem a 3 jogos).

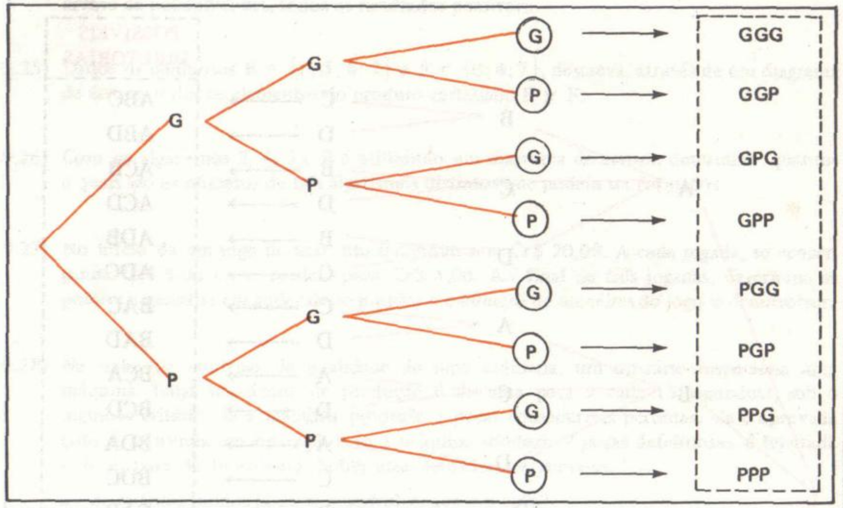
9.22) Suponha que, no início de um jogo, você tenha Cr$ 5,00. A cada jogada, se você ganhar, recebe Cr$ 1,00 e, se perder, paga Cr$ 1,00. Ao final de três jogadas, determine:

a) de quantos modos pode o jogo se desenvolver;

b) as possíveis quantias em dinheiro que você terá ao final.

Solução

a) Para construirmos o diagrama de árvore correspondente aos resultados do jogo, vamos adotar as letras G e P para representar, respectivamente, as hipóteses: *ganhar* e *perder*. (Notemos que o ponto final de cada ramo deve ocorrer após a *terceira* jogada.)



Como o diagrama apresenta 8 pontos finais, existem 8 maneiras diferentes do jogo se desenvolver. (Deve ser observado que o que diferencia, *por exemplo*, a ocorrência GGP da ocorrência GPG é a **ordem** dos resultados, já que, em ambas, o jogador ganhou duas vezes e perdeu uma.)

b) Para a determinação das possíveis quantias finais em dinheiro devemos, para cada uma das possibilidades, somar ou subtrair Cr$ 1,00 à quantia inicial (Cr$ 5,00), conforme as jogadas apresentem as letras G (ganhar) ou P (perder). Assim, temos:

OCORRÊNCIA	GGG	GGP	GPG	GPP	PGG	PGP	PPG	PPP
Cr$	8	6	6	4	6	4	4	2

ou seja, as possíveis quantias (distintas) são:

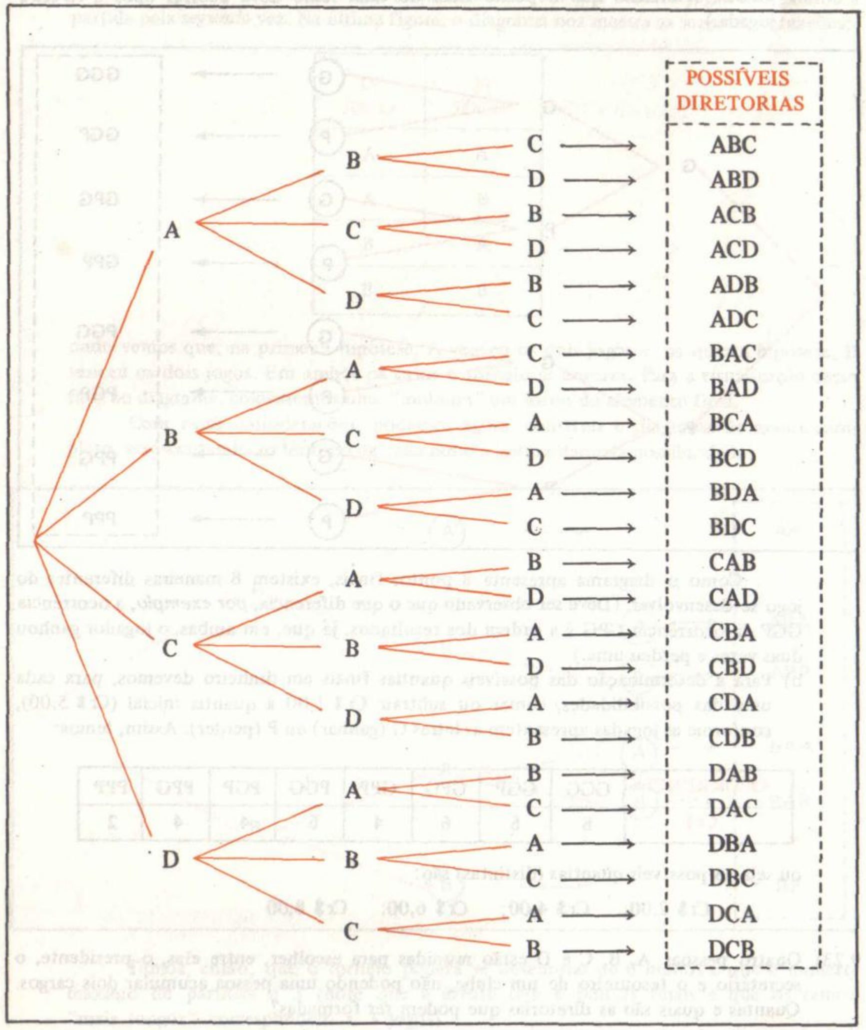
Cr$ 2,00; Cr$ 4,00; Cr$ 6,00; Cr$ 8,00

9.23) Quatro pessoas A, B, C e D estão reunidas para escolher, entre elas, o presidente, o secretário e o tesoureiro de um clube, não podendo uma pessoa acumular dois cargos. Quantas e quais são as diretorias que podem ser formadas?

Solução

O diagrama de árvore correspondente a esse problema tem três fases: primeiro, a escolha do presidente (pode ser A, B, C ou D, isto é, 4 possibilidades); em seguida, a escolha do secretário (note-se que, escolhido o presidente, há apenas 3 possibilidades

para a escolha do secretário); finalmente a escolha do tesoureiro (para esse, restarão apenas 2 possíveis, já que os outros dois já foram escolhidos). Assim, temos:



Há, portanto, 24 possibilidades de compor a chapa de diretores. (Note-se que a diretoria ABC, por exemplo, é *diferente* de BAC, apesar de participarem delas os *mesmos* elementos: a ordem designa: 1º – Presidente, 2º – Secretário e 3º – Tesoureiro.

Exercícios Propostos

9.24) Um jogo é realizado lançando-se inicialmente um dado (seis faces, numeradas de 1 a 6) e, em seguida, uma moeda, sendo cada resultado desse jogo formado, portanto, por um par ordenado (resultado no dado; resultado na moeda). Descreva, através de uma **árvore de possibilidades**, todos os resultados possíveis.

9.25) Dados os conjuntos $E = \{1; 5; 6; 7\}$ e $F = \{0; 4; 7\}$, descreva, através de um diagrama de árvore, todos os elementos do produto cartesiano $E \times F$.

9.26) Com os algarismos 2, 4, 5 e 8 e utilizando um diagrama de árvore, determine quantos e quais são os números de três algarismos **distintos** que podem ser formados.

9.27) No início de um jogo de azar, um indivíduo tem Cr$ 20,00. A cada jogada, se vencer, ganha Cr$ 3,00 e, se perder, paga Cr$ 4,00. Ao final de três jogadas, determine as possíveis quantias em poder desse jogador e o número de maneiras do jogo se desenvolver.

9.28) Na linha de controle de qualidade de uma indústria, um operário inspeciona uma máquina (cuja velocidade de produção é de uma peça a cada 15 segundos), sob o seguinte critério: se a máquina produzir 3 peças consecutivas perfeitas, ela é aprovada (isto é, continua em operação); se a máquina produzir 2 peças defeituosas, é rejeitada (isto é, pára de funcionar). Sobre essa máquina, pergunta-se:

a) de quantos modos pode se desenvolver sua inspeção?
b) em quantos desses modos ela é aprovada? e rejeitada?
c) qual o número máximo de peças que devem ser observadas?
d) qual o tempo máximo de duração da inspeção?

9.29) Um indivíduo tem oportunidade, num jogo, de lançar um dado no máximo cinco vezes. Em cada lançamento, ele ganha ou perde Cr$ 20,00. Começará com Cr$ 20,00 e parará de jogar antes de completar cinco vezes se ficar sem dinheiro ou se quadruplicar seu capital inicial (isto é, quando tiver Cr$ 80,00). Determine de quantos modos pode o jogo se desenvolver.

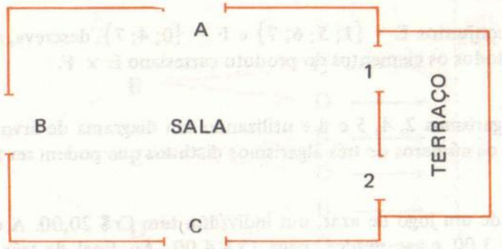
9.3 – PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM (REGRA DO PRODUTO)

Neste item vamos formalizar um dos principais conceitos da **Análise Combinatória**: a Regra do Produto. Afirmamos, sem exagero, que o entendimento dessa *Regra* é fundamental para a resolução da maioria dos problemas que enfrentaremos nos próximos capítulos.

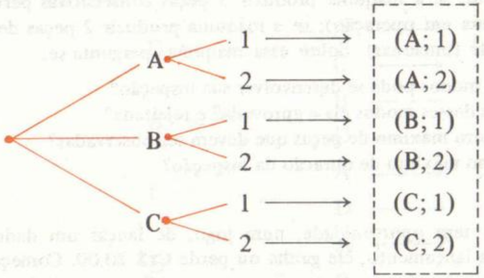
Consideremos, inicialmente, os seguintes exemplos.

Exemplos

a) Uma sala tem 3 portas de entrada e, nessa sala, há outras duas portas que dão para um terraço. De quantos modos uma pessoa pode atingir o terraço passando pela sala?



É evidente que podemos resolver o problema construindo um diagrama de árvore:

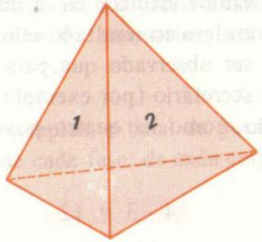


Temos, então, 6 possibilidades. No entanto, podemos chegar a esse resultado bem mais rapidamente (e com pouco trabalho) se observarmos que, para *cada* porta escolhida para se entrar na sala há duas possibilidades de se chegar ao terraço; assim, como podemos escolher qualquer das três portas para iniciarmos o percurso, temos

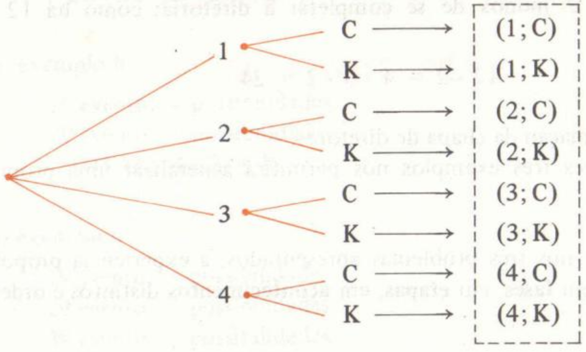
$$3 \cdot 2 = 6$$

possibilidades de completá-lo.

b) Um jogo é realizado lançando-se um dado de quatro faces e, em seguida, uma moeda (um dado de quatro faces é um tetraedro, com as faces numeradas de 1 a 4 – veja a figura). Cada resultado, portanto, é um par ordenado onde o primeiro elemento é o número obtido no dado e o segundo elemento é a face obtida na moeda (cara ou coroa). Quantos resultados são possíveis?



Também aqui é possível construir um diagrama de árvore; representando as faces da moeda por C (cara) e K (coroa), temos:



Existem, portanto, 8 resultados possíveis.

Mas, sem o auxílio da árvore, podemos chegar ao mesmo número: notemos que, para cada número obtido no dado é possível formar dois resultados finais (por exemplo, ocorrendo o número 3, os resultados podem ser (3; C) ou (3; K)); como há 4 possibilidades para o número, então há

$$4 \cdot 2 = 8$$

possibilidades finais.

c) Quatro pessoas A, B, C e D estão reunidas para escolher, entre elas, o presidente, o secretário e o tesoureiro de um clube, não podendo uma pessoa acumular dois cargos. Quantas diretorias diferentes podem ser formadas?

No exercício 9.23, já construímos o diagrama de árvore correspondente a esse problema, dando-nos as **24** possibilidades existentes. Esse é um bom exemplo para percebermos que, à medida que os números e as condições do problema aumentam de dificuldade, o diagrama de árvore se torna trabalhoso em demasia e, na maioria dos casos que vamos estudar, ele é impraticável. Devemos, por isso, aprimorar o raciocínio que nos leva ao resultado sem utilizarmos tal diagrama.

Nesse exemplo, deve ser observado que, para *cada* presidente escolhido, há três maneiras de escolher o secretário (por exemplo, se A é presidente, o secretário pode ser B, C ou D; então, como há quatro possibilidades de escolher o presidente, há

$$4 \cdot 3 = 12$$

modos de escolher presidente e secretário.

Escolhidos o presidente e o secretário, restam apenas duas possibilidades de escolha do tesoureiro (por exemplo, se A é presidente e C é secretário, o tesoureiro pode ser B ou D). Isto quer dizer que, para *cada* dupla presidente – secretário escolhida, há 2 modos de se completar a diretoria; como há 12 dessas duplas, há

$$12 \cdot 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

possibilidades de formação da chapa de diretores.

A análise desses três exemplos nos permitirá generalizar uma propriedade que lhes é comum.

1ª observação: nos três problemas apresentados, a experiência proposta em cada um é dividida em **fases**, em **etapas**, em **acontecimentos** distintos e ordenados; veja:

No **exemplo a**, a experiência *ir até o terraço passando pela sala* se subdivide em

1ª fase: entrar na sala
2ª fase: passar da sala ao terraço

no **exemplo b**, a experiência *lançar um dado e uma moeda* se subdivide em

1ª etapa: lançar o dado
2ª etapa: lançar a moeda

no **exemplo c**, a experiência *escolher uma diretoria* se subdivide em

1º acontecimento: escolher o presidente
2º acontecimento: escolher o secretário
3º acontecimento: escolher o tesoureiro

Cada fase, etapa, acontecimento em que se divide uma experiência pode ser chamado de **evento**. Note que um certo evento pode ou não depender do evento que o precedeu: a escolha da porta para se entrar no terraço *não depende* da porta utilizada para se entrar na sala; a face obtida no lançamento da moeda *não depende* do eventual número obtido com o dado; a escolha do secretário *depende* do presidente escolhido; a escolha do tesoureiro *está condicionada* às escolhas anteriores.

2ª observação: nos três exemplos, o total de possibilidades, o número final, é o **produto das possibilidades** de cada fase, de cada etapa, de cada acontecimento, **de cada evento**; enfim:

no exemplo a

1º evento: 3 possibilidades
2º evento: 2 possibilidades
TOTAL: $3 \cdot 2 = 6$

no exemplo b

1º evento: 4 possibilidades
2º evento: 2 possibilidades
TOTAL: $4 \cdot 2 = 8$

no exemplo c

1º evento: 4 possibilidades
2º evento: 3 possibilidades
3º evento: 2 possibilidades
TOTAL: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Podemos, agora, enunciar a **Regra do Produto** ou o **Princípio Fundamental da Contagem**.

Princípio Fundamental da Contagem

Se um evento A_1 pode ocorrer de n_1 modos diferentes e se para cada um desses n_1 modos um segundo evento A_2 pode ocorrer de n_2 modos diferentes, então o número de modos em que esses eventos podem ocorrer na ordem indicada é:

$$n_1 \cdot n_2$$

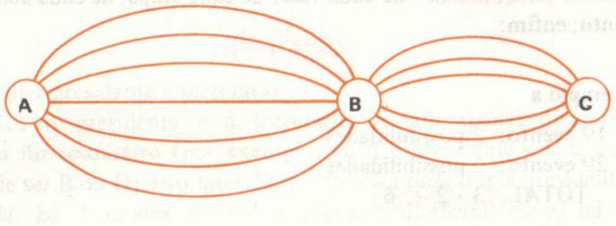
Exercícios Resolvidos

9.30) **Ligando as cidades A e B, há 7 linhas de ônibus e, ligando as cidades B e C há 6 linhas. Não há ligação direta entre A e C. Determine o número de modos de se ir de ônibus:**

a) de A para C
b) de A a C e, em seguida, voltar para A

Solução

a) para se ir de A para C, deve-se, obrigatoriamente, passar por B.



Temos, então, dois eventos distintos:

1º evento: ir de A a B → 7 possibilidades
2º evento: ir de B a C → 6 possibilidades

Logo, pela **Regra do Produto**, temos um total de:

$$7 \cdot 6 = 42$$

modos de se ir de A para C.

b) para se ir de A para C e voltar para A, passa-se por B na ida e na volta; há, portanto, quatro fases distintas no percurso:

1º evento: ir de A a B → 7 possibilidades
2º evento: ir de B a C → 6 possibilidades
3º evento: ir de C a B → 6 possibilidades
4º evento: ir de B a A → 7 possibilidades

Logo, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, temos um total de

$$7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 = 1764$$

modos diferentes de realizar o percurso.

9.31) **No exercício anterior, de quantos modos pode-se ir de A a C e voltar para A utilizando, na volta, linhas de ônibus diferentes das utilizadas na ida?**

Solução

Temos, ainda, 4 fases de percurso; as duas primeiras não sofreram alteração:

1º) ir de A a B → 7 possibilidades
2º) ir de B a C → 6 possibilidades

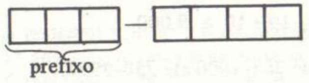
As duas últimas, no entanto, sofrem a restrição de não utilizar as linhas de ônibus escolhidas na ida; assim, para se ir de C a B, temos apenas 5 possibilidades pois a 6ª corresponde à linha utilizada na ida, e, para se ir de B a A, temos 6 possibilidades, pois a 7ª corresponde à linha usada no percurso de A para B.

3º) ir de C a B → 5 possibilidades
4º) ir de B a A → 6 possibilidades

Logo, o total de modos é

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 6 = 1260$$

9.32) **Numa cidade, os números de telefones são formados de 7 algarismos sendo os 3 primeiros correspondentes ao prefixo de uma estação telefônica:**

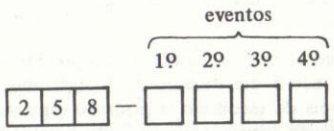


Pergunta-se:

a) Quantos telefones existem com o prefixo 258?
b) Em quantos números de telefone com prefixo 258 o primeiro dos quatro últimos algarismos não é zero?

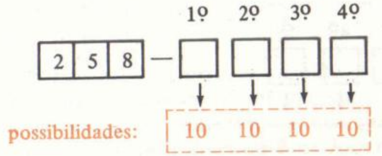
Solução

Estando determinado o prefixo (258), devemos notar que a formação de um número completo de telefone se desenvolve em 4 etapas sucessivas: a colocação do primeiro, do segundo, do terceiro e do quarto algarismos restantes:



Temos, para a formação, um "estoque" de 10 algarismos (de 0 a 9).

a) Como um número de telefone pode ter algarismos repetidos (por exemplo 258-4334), para o 1º temos 10 possibilidades; para o 2º, temos novamente 10 possibilidades – pois pode haver repetição do algarismo usado na primeira posição –, e assim por diante:



Assim, temos um total de

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10\,000$$

telefones (desde 258-0000 até 258-9999).

b) Como o 1º dos quatro algarismos finais não pode ser zero, temos, para esse algarismo, 9 possibilidades (de 1 a 9); já para o 2º, voltamos a ter 10 possibilidades (pois o zero já pode ser usado); assim:

1º 2º 3º 4º

2 5 8 — ☐ ☐ ☐ ☐

↓ ↓ ↓ ↓

possibilidades: 9 10 10 10

Logo, temos um total de

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$$

números desses telefones (desde 258-1000 até 258-9999).

9.33) Quantos números de 5 algarismos distintos há em nosso sistema de numeração?

Solução

Temos 5 eventos que completam a experiência: escolha do 1º algarismo, escolha do 2º, do 3º, do 4º e do 5º:

1º 2º 3º 4º 5º

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Não podemos esquecer que os números não podem começar por zero pois, por exemplo, 05487 = 5487 não é um número de 5 algarismos. Portanto, temos 9 possibilidades para o 1º. Depois de escolhido o primeiro algarismo, já podemos utilizar o zero para o 2º; no entanto, como queremos algarismos distintos (não pode haver repetição), não podemos contar com o algarismo escolhido para a 1ª posição; assim, temos novamente 9 possibilidades, agora para o 2º evento.

Para o 3º evento, temos 8 possibilidades (os 10 algarismos do sistema menos o algarismo usado no primeiro e menos o algarismo usado no segundo). Finalmente, para o 4º e o 5º eventos, temos, respectivamente, 7 e 6 possibilidades.

1º 2º 3º 4º 5º

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

possibilidades: 9 9 8 7 6

Logo, o total de números é

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$$

9.34) Quantos números ímpares, de 5 algarismos distintos, há em nosso sistema de numeração?

Solução

1º 2º 3º 4º 5º

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Para que o número formado seja ímpar, devemos iniciar o problema satisfazendo essa exigência: o algarismo final deve ser ímpar, podendo, portanto, ser o 1, o 3, o 5, o 7 ou o 9, o que nos dá 5 possibilidades para a escolha do algarismo que pode ocupar a 5ª posição.

Já para a 1ª casa, temos 8 possibilidades, pois dos 10 algarismos de que dispomos, não podemos utilizar o zero (veja o exercício anterior) nem o algarismo escolhido para a 5ª casa.

Para a 2ª, já podemos utilizar o zero; mas não podemos usar os algarismos escolhidos para a 5ª e 1ª posições, o que nos dá, novamente, 8 possibilidades.

Da mesma forma, para a 3ª posição temos 7 possibilidades e, para a 4ª, 6 possibilidades.

1º 2º 3º 4º 5º

☐ ☐ ☐ ☐ ÍMPAR

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

possibilidades: 8 8 7 6 5

Assim, temos um total de

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 13\,440$$

números

9.35) Num país, as placas dos automóveis são constituídas de duas letras, seguidas de três algarismos. Zeros podem aparecer em qualquer posição, mas placas com três zeros são excluídas. Se é usado um alfabeto de 26 letras, quantas placas diferentes podem ser formadas?

Solução

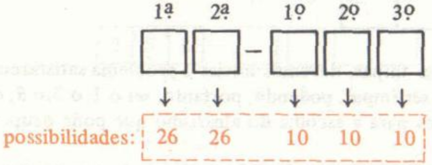
letras: ☐ ☐ — algarismos: ☐ ☐ ☐

Resolvemos esse problema da seguinte maneira: primeiro calculamos o total de placas, *sem considerar a restrição dos três zeros*; em seguida, calculamos o número de placas que *têm três zeros*; evidentemente, essa quantidade representa as placas que não devem ser contadas. Assim, a *diferença* entre esses totais nos dará o resultado final.

1º) *cálculo do total de placas (sem a restrição)*

Como o enunciado não exige que letras e algarismos sejam distintos, supomos que pode haver repetição (por exemplo, KK-288)

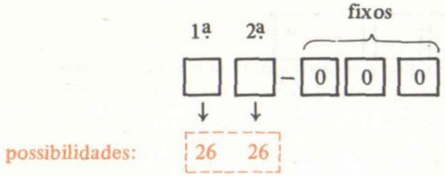
Assim, para a primeira letra, há 26 possibilidades; *depois* de escolhida a primeira letra, temos novamente 26 possibilidades para a segunda (pois pode haver repetição); escolhida a segunda letra, temos 10 possibilidades para o primeiro algarismo, 10 para o segundo e 10 para o terceiro; assim:



Isso nos dá 26 • 26 • 10 • 10 • 10 = 676 000 placas

2º) *cálculo do número de placas com três zeros*

Notando que, se as placas devem ter três zeros, ***não haverá variação de algarismos,*** devemos apenas calcular as possibilidades de variação das letras (por exemplo, AA–000, AB–000 etc.). Para a primeira, temos 26 possibilidades; para a segunda, também temos 26 possibilidades:



Temos, então, 26 • 26 = 676 placas com três zeros.

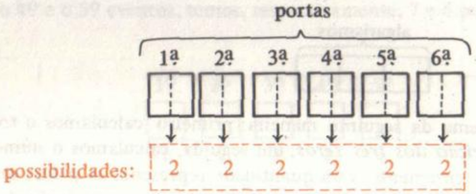
Finalmente, o número de placas que podem ser formadas é

676 000 – 676 = 675 324

9.36) Um salão de baile tem 6 portas. De quantos modos esse salão pode estar aberto?

Solução

Para cada porta, há apenas duas possibilidades: ou está aberta ou está fechada.



Então, o total de possibilidades para a situação das portas é

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

(note que essas 64 possibilidades descrevem as situações: todas abertas, ou todas fechadas, ou uma aberta e as outras fechadas, e assim por diante)

Para que o salão esteja aberto, é necessário que haja pelo menos uma porta aberta. Como *uma* das 64 possibilidades corresponde a *todas as portas fechadas,* a resposta correta é

64 – 1 = 63

modos do salão estar aberto.

9.37) De quantos modos podemos pintar 7 casas enfileiradas, dispondo de 4 cores, sendo que cada casa é pintada de uma só cor e duas casas vizinhas não são pintadas com a mesma cor?

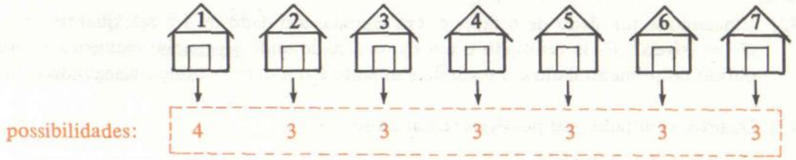
Solução

Para a pintura da primeira casa, podemos escolher qualquer uma das cores disponíveis; temos, então, 4 possibilidades.

Para a segunda, temos 3 possibilidades, pois não podemos usar a mesma cor da primeira.

Já para a terceira casa, também temos 3 possibilidades, pois só não podemos utilizar a cor da **segunda** casa, podendo novamente usar a cor da primeira, já que primeira e terceira *não são vizinhas.*

Assim, para cada uma das outras quatro casas, temos 3 possibilidades



Logo, o número total de modos de se pintar as casas é

4 • 3 • 3 • 3 • 3 • 3 • 3 = 2916

9.38) Dispõe-se de 3 livros, 5 cadernos e 8 canetas para se distribuir entre dois estudantes. Todos os objetos devem ser distribuídos, mas não há necessidade de uma divisão equânime. De quantos modos isso pode ser feito?

Solução

Na distribuição dos livros, o primeiro estudante pode receber *nenhum, um, dois* ou *três* livros (note que, fixada a quantidade que o primeiro recebe, automaticamente fica fixada a quantidade que o segundo recebe (por exemplo se o primeiro não recebe nenhum, o segundo recebe três, se o primeiro recebe um, o segundo recebe dois). Temos, então, 4 possibilidades para os livros (0; 1; 2; 3).

Da mesma forma, dos 5 cadernos o primeiro pode receber as quantidades 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, dando, portanto, 6 possibilidades.

Analogamente, temos 9 possibilidades para distribuir as 8 canetas.

Logo, pela regra do produto, o total de modos de efetuarmos a distribuição é

4 • 6 • 9 = 216

9.39) Dispondo-se de 10 bolas, 7 apitos e 12 camisas, de quantos modos estes objetos podem ser distribuídos entre duas pessoas, de modo que cada uma receba, ao menos, 3 bolas, 2 apitos e 4 camisas?

9.56) De quantos modos podemos preencher um volante de loteria esportiva, se em cada jogo fazemos um palpite simples? (Um volante de loteria esportiva é uma matriz de 13 linhas e 3 colunas onde cada linha representa um jogo entre dois times e a primeira coluna representa a vitória do primeiro time desse jogo, a segunda coluna representa o empate e a terceira representa a vitória do segundo time.)

9.57) Num quadro de controle eletrônico há 5 dispositivos de segurança enfileirados. Cada um deles pode estar apagado, estar emitindo luz amarela ou estar emitindo luz vermelha. Quantos sinais diferentes podem ser emitidos pelo *conjunto* de dispositivos se pelo menos um deles estiver aceso?

9.58) Dispõe-se de 7 cores para pintar uma bandeira de 7 faixas. Cada faixa deve ser pintada com uma só cor e, na bandeira, não deve haver duas faixas da mesma cor. Quantos modos há de se realizar a pintura?

9.59) Dispõe-se de 6 cores para pintar uma bandeira de 4 faixas. Cada faixa deve ser pintada de uma só cor e duas faixas consecutivas não podem ter a mesma cor. De quantos modos pode ser feita a pintura?

9.60) Um cubo de papelão é desdobrado em torno de uma face, obtendo-se uma cruz formada por 6 quadrados. Quer-se pintar a frente dessa cruz, cada quadrado de uma cor. Pintado um quadrado, **não** se pode pintar, *em seguida*, um quadrado que não tenha ao menos um ponto em comum com o que se acabou de pintar (isto é, dois quadrados pintados um após o outro devem ter, obrigatoriamente, um vértice ou um lado em comum).

Dispondo-se de 5 cores, de quantos modos pode ser pintada a cruz se dois quadrados ligados por um vértice ou por um lado não podem ter a mesma cor e a pintura é iniciada pela *cabeça* da cruz?

9.61) Temos 4 carrinhos, 6 bolas e 2 bonés para distribuir entre duas crianças. Todos os objetos vão ser distribuídos, mas não há necessidade de uma distribuição equânime. Quantas são as maneiras de se fazer a divisão?

9.62) De quantos modos podemos distribuir 10 cigarros, 8 charutos e 6 cachimbos entre duas pessoas, se cada uma deve receber no mínimo três objetos de cada tipo?

9.63) Dispõe-se de n_1 objetos A_1, n_2 objetos A_2 e n_3 objetos A_3 para distribuir entre duas pessoas. Todos os objetos devem ser distribuídos, sem necessidade de uma distribuição igual entre as pessoas. De quantos modos isso pode ser feito?

9.64) Dispõe-se de n objetos A e m objetos B para se colocar em duas caixas, de modo que em cada caixa haja, no mínimo, p objetos A e q objetos B ($2p \leqslant n$ e $2q \leqslant m$). Determine o número de possibilidades de se fazer a colocação.

9.4 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE SUBCONJUNTOS

Já é certamente do conhecimento do leitor que, se um conjunto E tem n elementos, então existem 2^n subconjuntos de E.

Por exemplo, se $E = \{a; b; c\}$, há $2^3 = 8$ subconjuntos:

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}, \{a; b; c\}, \emptyset$

O **Princípio Fundamental da Contagem** permite-nos agora provar esse resultado.

Verifiquemos, inicialmente, para o caso do exemplo acima, onde $E = \{a; b; c\}$: seja F um subconjunto qualquer de E; é fácil notar que *para cada elemento* de E temos apenas *duas possibilidades* em relação ao subconjunto F: ou pertence a F ou não pertence a F; assim

elemento:	a	b	c
	↓	↓	↓
possibilidades:	2	2	2

Então pela **regra do produto**, temos

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

possibilidades.

Note que essas 8 possibilidades descrevem aquelas em que:

- ou os três elementos pertencem a F, isto é $F = \{a; b; c\}$
- ou nenhum elemento pertence a F, isto é, $F = \emptyset$.
- ou um dos elementos pertence a F e os outros não, isto é, $F = \{a\}$ ou $F = \{b\}$ ou $F = \{c\}$
- ou dois dos elementos pertencem a F e o outro não, isto é, $F = \{a; b\}$ ou $F = \{a; c\}$ ou $F = \{b; c\}$

Logo, essas 8 possibilidades correspondem aos 8 subconjuntos que E possui.

(O leitor notou que esse problema é idêntico ao exercício do *salão de baile* (36). O que lá era a possibilidade *todas as portas fechadas* – que não queríamos – aqui corresponde ao *conjunto vazio* – que é subconjunto de E.)

Podemos agora generalizar. Se o conjunto E tem n elementos

$$E = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}$$

e F é um subconjunto de E, para *cada* elemento de E temos *duas* possibilidades: pertencer ou não a F.

elementos:	a_1	a_2	a_3	...	a_n
	↓	↓	↓		↓
possibilidades:	2	2	2	...	2

E, pelo **princípio fundamental**, temos:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{\text{n fatores}} = 2^n$$

possibilidades, que correspondem aos subconjuntos de E.

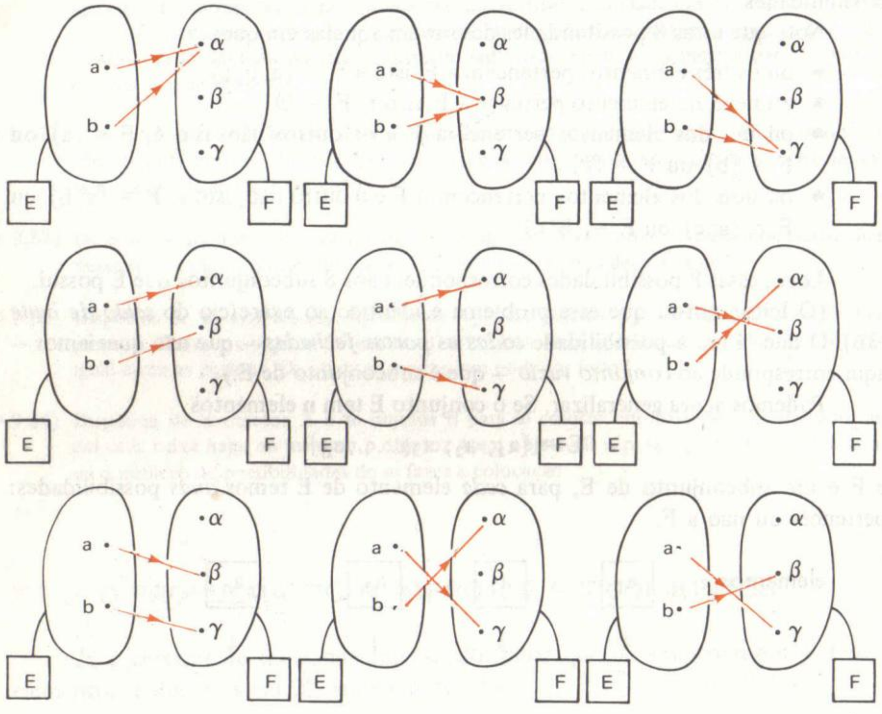
9.5 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE FUNÇÕES

Consideremos, de início, um problema como exemplo.

Um conjunto E possui dois elementos: E = $\{a; b\}$; e um conjunto F possui 3 elementos: F = $\{\alpha; \beta; \gamma\}$. Quantas **funções** de E em F podem ser construídas?

Devemos nos lembrar do conceito de função: *é uma correspondência que associa, a cada elemento de E, um único elemento de F.* Os elementos de F que estão associados a algum elemento de E são chamados *imagens* da função. **E** é o domínio da função. **F** é o contradomínio.

Nesse nosso exemplo, dado o pequeno número de elementos em E e F, podemos construir todas as funções de E em F através de *diagramas de flechas*:



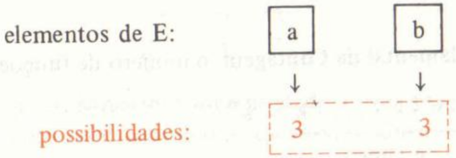
Temos, assim, **9** funções.

Podemos, no entanto, chegar a esse resultado sem a construção dos diagramas.

Como se forma uma função?

Note que uma função é formada tomando *cada* elemento de E e associando a ele um elemento de F, isto é, escolhendo, entre os elementos de F, uma imagem para aquele elemento de E.

Então, para o elemento **a**, temos 3 possibilidades de escolha da imagem: ou α, ou β, ou γ; para o elemento **b**, também temos 3 possibilidades, pois nada impede que **b** tenha a mesma imagem de **a**.



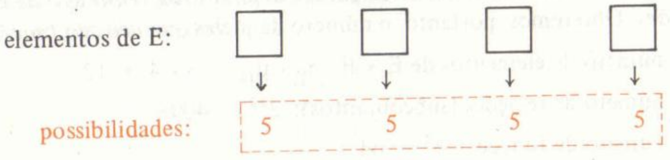
Logo, pela regra do produto, o número de possibilidades de **a** e **b** escolherem suas imagens (o que corresponde ao número de funções) é

$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

Tomemos outro exemplo.

Quantas funções de E em F podem ser construídas, se E tem 4 elementos e F tem 5 elementos?

Seguindo o raciocínio do exemplo anterior, temos para o primeiro elemento de E 5 possibilidades de escolha da sua imagem (qualquer um dos elementos de F); como pode haver repetição da imagem, para o segundo elemento de E, também temos 5 possibilidades, o mesmo ocorrendo para o terceiro e o quarto elementos.



Logo, o total de funções é

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$$

Podemos, agora, resolver o problema no caso geral:

E e F são conjuntos finitos, o primeiro com n *elementos e o segundo com* **k** *elementos. Quantas funções de E em F podem ser construídas?*

Uma função está construída quando todos os elementos de E têm sua imagem escolhida.

Para *cada* elemento de E escolhemos *um* elemento qualquer de F como sua imagem.

Então, se $E = \{a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n\}$ temos:

elementos de E:	a_1	a_2	a_3	...	a_n
	↓	↓	↓		↓
possibilidades de escolha da imagem:	k	k	k	...	k

Logo, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, o número de funções é

$$\underbrace{k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n \text{ fatores}} = k^n$$

isto é, é o número de elementos do contradomínio elevado ao número de elementos do domínio.

Exemplos

a) Se E tem 10 elementos e F tem 2 elementos, o número de funções de E em F é $2^{10} = 1024$.

b) Os conjuntos E e F têm, respectivamente, 3 e 4 elementos. Quantas das **relações** de E em F não são funções?

Lembremos que uma relação é qualquer **subconjunto** do $E \times F$. *Devemos então calcular o número total de relações, e dele subtrair o número de relações que são funções*. Obteremos, portanto, o número daquelas que *não são funções*:

- número de elementos de $E \times F$: $n_E \cdot n_F = 3 \cdot 4 = 12$
- número de relações (subconjuntos): $2^{12} = 4096$
- número de funções: $4^3 = 64$

Logo, temos $4096 - 64 = 4032$ relações que não são funções.

9.6 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE DIVISORES

Um problema importante na **Teoria dos Números** é o da determinação da quantidade de *divisores naturais* de um número natural **a**.

Consideremos o exemplo: quantos divisores naturais tem o número a = 144?

Nesse caso, não é difícil fazer a relação: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 36; 48; 72; 144.

Isso nos dá os 15 divisores naturais de 144.

Como chegar a esse resultado sem fazer a lista de divisores?

Observemos que decompondo 144 em fatores primos:

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$$144 = 2^4 \cdot 3^2$$

se, em seguida, **somarmos uma unidade a cada expoente da decomposição** (4 e 2), o **produto** dos resultados dessas somas dá o número de divisores procurados:

$$(4 + 1) \cdot (2 + 1) = 5 \cdot 3 = 15$$

Mágica? Casualidade? Não. Mostraremos em mais dois exemplos que essa é a regra prática.

Exemplos

a) Consideremos o número $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

Notemos, inicialmente, que 360 é constituído pelo produto dos fatores primos 2, 3 e 5, sendo que, na decomposição, o 2 comparece três vezes, o 3 comparece duas vezes e o 5 uma só vez:

$$360 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (5)$$

Também devemos notar que qualquer divisor de 360 é um produto formado por alguns desses fatores; por exemplo, os números 1, 2, 3, 10, 36 e 120 são divisores de 360 e podem ser escritos:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\ 2 &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \\ 3 &= 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \\ 10 &= 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \\ 36 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 \\ 120 &= 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \end{aligned}$$

Sendo assim, os divisores de 360 podem ser representados pela expressão

$$2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$$

onde:

x pode assumir um dos 4 valores: 0, 1, 2 ou 3

y pode assumir um dos 3 valores: 0, 1 ou 2
e z pode assumir um dos 2 valores: 0 ou 1

Com isso, podemos determinar a quantidade de números $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$ ou seja, o total de divisores naturais de 360. Temos:

divisor:	2^x	3^y	5^z
	↓	↓	↓
possibilidades:	4	3	2

o que nos dá

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \text{ divisores}$$

Confirmando a regra sugerida anteriormente:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \rightarrow (3+1)(2+1)(1+1) = 24 \text{ divisores}$$

b) Consideremos o número natural:

$$a = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 11^{\gamma}$$

Qualquer divisor de a pode ser obtido pela expressão

$$2^x \cdot 5^y \cdot 11^z$$

onde **x, y** e **z** são expoentes naturais tais que

$0 \leqslant x \leqslant \alpha$ (isto é, x pode assumir $\alpha + 1$ valores)
$0 \leqslant y \leqslant \beta$ (isto é, y pode assumir $\beta + 1$ valores)
$0 \leqslant z \leqslant \gamma$ (isto é, z pode assumir $\gamma + 1$ valores)

e, sendo assim, o total de números $2^x \cdot 5^y \cdot 11^z$ que podem ser formados representa o total de divisores naturais de a. Temos:

divisor:	2^x	5^y	11^z
	↓	↓	↓
possibilidades:	$\alpha + 1$	$\beta + 1$	$\gamma + 1$

e, portanto, o número de divisores de $a = 2^{\alpha} \cdot 5^{\beta} \cdot 11^{\gamma}$ é igual a

$$\boxed{(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)}$$

De modo análogo, poderíamos mostrar a validade da regra para o caso geral, que enunciamos a seguir:

Seja a um número natural ($a \neq 0$) cuja decomposição em fatores primos distintos é:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

O número de divisores **naturais** de a é dado pelo produto

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \ldots (\alpha_n + 1)$$

Exemplos

c) O número de **divisores naturais** de 12 600 é obtido fatorando-se esse número

$$12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

e efetuando-se o produto

$$(3+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2$$

Assim, 12 600 tem 72 divisores naturais.

d) O número de **divisores inteiros** de $20\,000 = 2^5 \cdot 5^4$ é obtido multiplicando-se a quantidade de divisores naturais por 2 (pois, para cada divisor natural há o seu oposto que também é divisor: 2 e −2, 1 000 e −1 000).

$$2 \cdot (5+1)(4+1) = 60 \text{ divisores inteiros.}$$

Capítulo 10

Fatorial

10.1 – DEFINIÇÃO

Em muitos dos problemas estudados no capítulo anterior, surgiram, nos cálculos, produtos de números naturais consecutivos, tais como

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$$
$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Sendo muito comuns no cálculo combinatório expressões desse tipo, torna-se conveniente adotar uma *notação* que simplifique sua representação; surge, então, a *notação fatorial*.

Definimos **fatorial de um número natural n ⩾ 2** como sendo o produto de todos os números naturais de **n** até **1**; representamo-lo com a notação **n**!. Assim:

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$$

Também definimos, para os casos n = 0 e n = 1, os valores

$$1! = 1 \quad \text{e} \quad 0! = 1$$

Exemplos

a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
c) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$
d) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$
e) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7!$
f) $6 \cdot 5 \cdot 4 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{6!}{3!}$

g) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 1} = \dfrac{10!}{6!}$
h) $(3!)^2 = (3 \cdot 2 \cdot 1)^2 = (6)^2 = 36$
i) $(3^2)! = (9)! = 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$

Observações

1ª) Consideremos, por exemplo, o número 6!

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Como $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$, podemos escrever

$$6! = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot (5!)$$

Da mesma forma, também podemos escrever

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!} = 6 \cdot 5 \cdot 4!$$

Isso nos mostra que, sendo necessário, podemos "interromper" o desenvolvimento de um fatorial antes de atingirmos o número **1**. Para tanto, basta colocarmos o símbolo de fatorial no número "escrito por último":

$$n! = n \cdot (n-1)! = n(n-1) \cdot (n-2)! \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$$

Exemplos

j) $10! = 10 \cdot 9!$
k) $15! = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!$
l) $(n+2)! = (n+2)(n+1)(n) \cdot (n-1)!\ (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1)$
m) $(k-1)! = (k-1) \cdot (k-2)!\ (k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 2)$
n) $\dfrac{12!}{9!} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$

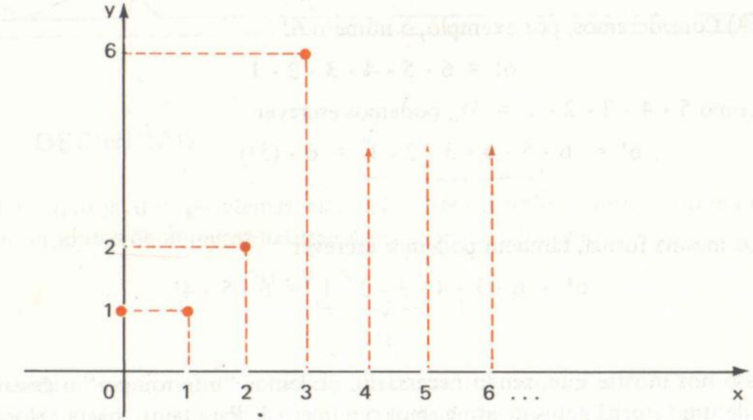
10.2 – FUNÇÃO FATORIAL

Da definição de fatorial é imediato que, dado um número natural **n**, existe e é único o número n!

Podemos, então, definir uma função f, de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, tal que

$$f(x) = x!$$

Essa função é chamada **função fatorial**. Seu domínio é $\mathbb{N}$. Seu gráfico é



Analisando alguns valores (e levando em conta a 1ª observação):

$$\begin{aligned} f(0) &= 0! = 1 \\ f(1) &= 1! = 1 = 1 \cdot f(0) \\ f(2) &= 2! = 2 = 2 \cdot f(1) \\ f(3) &= 3! = 6 = 3 \cdot f(2) \\ f(4) &= 4! = 24 = 4 \cdot f(3) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

vemos que, para todo número natural $x \geqslant 1$, tem-se:

$$f(x) = x \cdot f(x - 1)$$

Exercícios Resolvidos

10.1) Determine o domínio da função definida por $f(x) = (x - 3)!$

Solução

Da definição, sabemos que só existe fatorial de um número inteiro e não negativo. Assim, devemos ter

$$x - 3 \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad x - 3 \geqslant 0$$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 3\}$

10.2) Determine o domínio da função definida por $f(x) = (x + 4)!$

Solução

Devemos ter

$$x + 4 \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad x + 4 \geqslant 0$$

Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -4\}$

10.3) Resolva a equação $x! = 24$

Solução

Uma equação do tipo $x! = a$ só pode ser resolvida "por tentativas", isto é, *descobrindo* qual é o número cujo fatorial vale a. É evidente que, mesmo sendo a um número natural, em muitos casos o conjunto-solução da equação será vazio pois, por exemplo, como sabemos que $24 = 4!$ e $6 = 3!$, todos os inteiros entre 24 e 6 não são valores de nenhum fatorial. Assim, equações como $x! = 23$, $x! = 9$ ou $x! = 13$ têm conjunto-solução $V = \phi$.

No nosso caso, fazemos

$$x! = 4!$$

Logo, $x = 4$ e $V = \{4\}$

10.4) Resolva a equação $(2x + 5)! = 720$

Solução

Temos que $720 = 6!$

Escrevemos, então

$$(2x + 5)! = 6!$$

e daí, $2x + 5 = 6$, donde $x = \frac{1}{2}$ e $V = \{\frac{1}{2}\}$

(Note que não importa o fato de termos encontrado uma raiz não natural, pois o que deve ser natural é a expressão $2x + 5$.)

10.5) Simplifique a expressão $\frac{(k + 1)!}{(k - 1)!}$.

Solução

Para simplificarmos expressões desse tipo, devemos, sempre, *reduzir a ordem* do fatorial maior até o outro fatorial. Assim:

$$\frac{(k + 1)!}{(k - 1)!} = \frac{(k + 1)(k)(k - 1)!}{(k - 1)!} = (k + 1)k = k^2 + k$$

10.6) Simplifique a expressão $\frac{(n - 2)!}{(n - 4)!}$

Solução

Como $(n - 2)!$ é o maior dos dois fatoriais da expressão, fazemos:

$$\frac{(n - 2)!}{(n - 4)!} = \frac{(n - 2)(n - 3)(n - 4)!}{(n - 4)!} = (n - 2)(n - 3)$$

10.7) Simplifique a expressão

$$\frac{(n+1)! - (n+2)!}{(n+1)!}$$

Solução

$$\frac{(n+1)! - (n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)! - (n+2)\cdot(n+1)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!\,[1-(n+2)]}{(n+1)!} = 1 - n - 2 = -(n+1)$$

10.8) Resolva a equação

$$\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = 17n$$

Solução

Inicialmente, simplificamos a expressão do primeiro membro:

$$\frac{(n+1)! - n!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)\,(n)\,(n-1)! - n(n-1)!}{(n-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,[n(n+1) - (n)]}{(n-1)!} = n^2 + n - n = n^2$$

Resolvemos, então, a equação

$$n^2 = 17n:$$

$$n^2 = 17n \Longrightarrow n^2 - 17n = 0 \Longrightarrow n(n-17) = 0$$

obtendo $n = 0$ ou $n = 17$

A solução $n = 0$, evidentemente, não convém (note que para $n = 0$, surge, no denominador, o fatorial de um número negativo). Logo, $V = \{17\}$.

10.9) Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix} = (1!)\cdot(2!)\cdot(3!)\cdot(4!)$$

Solução

Temos, no primeiro membro, um determinante de Vandermonde, cujos *elementos de base* são 1, 2, 3, 4 e 5. Então:

$$\boxed{1^{\underline{o}} \text{ membro}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix} =$$

$$= (2-1)\,(3-1)\,(4-1)\,(5-1)\,(3-2)\,(4-2)\,(5-2)\,(4-3)\,(5-3)\,(5-4) =$$

$$= \underbrace{1\cdot2\cdot3\cdot4}_{4!}\cdot\underbrace{1\cdot2\cdot3}_{3!}\cdot\underbrace{1\cdot2}_{2!}\cdot\underbrace{1}_{1!} = (4!)\,(3!)\,(2!)\,(1!) = \boxed{2^{\underline{o}} \text{ membro}}$$

10.10) Mostre que $\frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Em seguida, calcule o valor da soma

$$S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k-1}{k!}$$

Solução

1ª parte: ***prova da identidade***

$$\boxed{1^{\underline{o}} \text{ membro}} = \frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{n}{n(n-1)!} - \frac{1}{n!} =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} = \boxed{2^{\underline{o}} \text{ membro}}$$

2ª parte: ***cálculo da soma S***

Notemos, inicialmente, que qualquer parcela da soma é uma fração da forma

$$\frac{n-1}{n!}$$

que é o primeiro membro da nossa identidade. Por exemplo, a parcela

$$\frac{3}{4!}$$

é da forma $\frac{n-1}{n!}$, onde $n = 4$

Como mostramos na 1ª parte que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, a fração $\frac{n-1}{n!}$ é igual à diferença $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$, apliquemos essa decomposição em todas as parcelas da soma desejada:

$$\frac{1}{2!} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \qquad \text{(usamos } n = 2\text{)}$$

$$\frac{2}{3!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \qquad \text{(usamos } n = 3\text{)}$$

$$\frac{3}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} \qquad \text{(usamos } n = 4\text{)}$$

. . . .

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \qquad \text{(usamos } n = k\text{)}$$

Vamos agora somar membro a membro todas essas igualdades. Resulta, no primeiro membro, a soma S desejada. No segundo membro, é fácil observar que quase todos os termos são *cancelados*, restando somente a primeira parcela da 1ª igualdade e a segunda parcela da última igualdade. Assim:

$$\underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{k-1}{k!}}_{S} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{k!}$$

Logo, encontramos $S = 1 - \dfrac{1}{k!}$

Exercícios Propostos

• 10.11) Determine o domínio de cada uma das seguintes funções $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = (x-1)!$

b) $f(x) = (x+5)!$

c) $f(x) = \dfrac{(x+3)!}{(x+4)!}$

d) $f(x) = (-x^2+1)!$

• 10.12) Resolva as seguintes equações ($n \in \mathbb{R}$):

a) $(n+6)! = 120$

b) $(3n-2)! = 720$

c) $(n^2-n)! = 720$

d) $\left(n^2 - \dfrac{3}{2}n\right)! = 1$

e) $(2n^2+7)! = 100$

• 10.13) Escreva os produtos a seguir utilizando a notação fatorial:

a) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

b) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

c) $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

d) $(n+2)(n+1)n(n-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$

e) $(k-3)(k-4)(k-5)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$, $k \in \mathbb{N}$ e $k > 5$

• 10.14) Escreva os produtos a seguir utilizando a notação fatorial:

a) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

b) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

c) $21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18$

d) $100 \cdot 99 \cdot 98 \ldots 51$

e) $n(n-1)(n-2)$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

f) $(n+1)(n)(n-1)(n-2)$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

g) $k(k-1)(k-2)\ldots(k-8)$, $k \in \mathbb{N}$ e $k \geqslant 9$

• 10.15) Escreva, em uma só expressão fatorial, os produtos:

a) $10 \cdot 9!$

b) $13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!$

c) $6! 7 \cdot 8 \cdot 9$

d) $(n+1) \cdot n!$, $n \in \mathbb{N}$

e) $(k+3)(k+2)(k+1)k!$, $k \in \mathbb{N}$

f) $(n-1)(n-2)(n-3)!$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$

g) $(n-p)(n-p-1)!$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p+1$

h) $(n-p+1)(n-p)!$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p$

• 10.16) Simplifique e calcule:

a) $\dfrac{8!}{6!}$

b) $\dfrac{12!}{9!}$

c) $\dfrac{11!}{3!\,8!}$

d) $\dfrac{21!}{3!\,18!}$

• 10.17) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

b) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$

c) $\dfrac{(k+2)!}{(k-1)!}$

d) $\dfrac{(k-1)!}{(k-2)!}$

e) $\dfrac{(k-4)!}{(k-2)!}$

f) $\dfrac{(n-p)!}{(n-p-1)!}$

• 10.18) Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{(n-3)!\,(n+3)}{(n-5)!\,(n-4)}$

b) $\dfrac{4n! - 3n(n-1)!}{n!}$

c) $\dfrac{(n+2)! - (n+1)!}{(n+2)n! - n!}$

d) $\dfrac{(n+1)! - (n+1) \cdot (n-1)!}{n! + (n-1)!}$

• 10.19) Resolva as equações:

a) $(n+2)! + (n+1)! = 15n!$

b) $(n-2)! - 3(n-3)! - 8(n-4)! = 0$

c) $\dfrac{(2n)!\,(2n+1)! + (2n+1)\,(2n)!\,(2n-1)!}{(2n+1)!\,(2n-1)\,(2n-2)!} = n^2 - 14$

• 10.20) Mostre que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 6!$$

• 10.21) Mostre que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 10 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & \ldots & 10^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & \ldots & 10^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2^9 & 3^9 & 4^9 & \ldots & 10^9 \end{vmatrix} = \prod_{n=1}^{9} (n!)$$

10.22) Mostre que $n \cdot n! = (n+1)! - n!$, com $n \in \mathbb{N}$.
Em seguida, calcule o valor da soma

$$S = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k!$$

10.23) Mostre que $(n+2)n! = (n+1)! + n!$, com $n \in \mathbb{N}$.
Em seguida calcule o valor de:

$$S = 3 \cdot 1! - 4 \cdot 2! + 5 \cdot 3! - \ldots + (k+2)k! \text{ onde } k \text{ é ímpar.}$$

10.24) Suponha que se defina **fatorial** da seguinte maneira:

Fatorial de um número natural n é o número f(n) definido por

$$f(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 0 \\ n \cdot f(n-1), & se\ n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Utilizando essa definição, calcule fatorial de 1, fatorial de 2, fatorial de 3, fatorial de 4 e fatorial de 5.
b) Utilizando essa definição, mostre que

$$(\text{fatorial de } n) = f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n$$

10.25) Ainda utilizando a definição do exercício anterior, mostre que, com $a \in \mathbb{N}$,

a) $f(a+2) - f(a+1) = (a+1) \cdot f(a+1) = (a+1)^2 \cdot f(a)$
b) $2f(a) - (a-1) \cdot f(a-1) = f(a-1) + f(a),\ a > 1$

Capítulo 11

Combinações simples e arranjos simples

11.1 – INTRODUÇÃO E CONCEITOS INICIAIS

Neste capítulo faremos o estudo de dois tipos de *agrupamentos* que podem ser formados dispondo-se de um certo número de elementos: as combinações simples e os arranjos simples.

A palavra **simples** significa que trabalharemos com **elementos distintos**, isto é, em cada agrupamento formado não haverá repetição de elementos. Posteriormente estudaremos os agrupamentos com repetição.

Os conceitos de combinação e arranjo são muito fáceis. O fundamental – e cuidaremos disso ainda nesta introdução – é saber distinguir um do outro. Analisemos um exemplo esclarecedor:

Com os elementos do conjunto E = {a; b; c}, pede-se formar
1º) todos os subconjuntos com dois elementos
2º) todos os pares ordenados, de elementos distintos

Temos, então:

1º) subconjuntos com dois elementos:

{a; b} ; {a; c} ; {b; c}

2º) pares ordenados (com elementos distintos):

(a; b); (a; c); (b; c);
(b; a); (c; a); (c; b)

Formamos, assim, com os três elementos de E, dois tipos de agrupamentos: *subconjuntos* e *pares ordenados*, sendo que estes podem ser considerados *subconjuntos ordenados* de E.

Vamos, agora, responder às seguintes perguntas:

Em que diferem entre si os agrupamentos do primeiro tipo?
Em que diferem entre si os agrupamentos do segundo tipo?

Vemos, então, que é possível formar uma combinação *que não tem elemento* (existe **um só** subconjunto de E que não tem elemento algum: o conjunto vazio). Podemos escrever, portanto:

$$C_{4,0} = \binom{4}{0} = 1$$

Nota. O número $C_{4,0} = 1$ pode aqui ser interpretado como a resposta à seguinte pergunta:

"De quantos modos podemos, de um conjunto E de 4 elementos, não escolher nenhum elemento?"

É claro que existe **um só modo**: não escolher!

Arranjos – Seja E um conjunto com **n** elementos; imaginemos que são formados todos os seus **subconjuntos ordenados**, incluindo o próprio E, o conjunto ∅ e os subconjuntos com um só elemento.

> Um **arranjo** dos **n** elementos de E, tomados **p** a **p** (de classe p) é qualquer **subconjunto ordenado** de E que tenha **p** elementos ($0 \leqslant p \leqslant n$).

O **número de arranjos**, dos n elementos, de classe p é indicado por:

$$A_{n,p}$$

Exemplos

Consideremos o conjunto $E = \{6; 7; 8; 9\}$. Com os elementos de E, vamos formar *números de algarismos distintos* (note que, quando formamos um número, por exemplo 68, estamos tomando um subconjunto *ordenado* pois, trocada a ordem, 86, *o número se modifica*). Estaremos, assim, fazendo **arranjos** com os 4 elementos de E. Então:

f) os números de 1 algarismo são:

6; 7; 8; 9

Temos, então, 4 **arranjos** de classe 1, e podemos escrever:

$$A_{4,1} = 4$$

g) os números de 2 algarismos são:

67, 68, 69, 78, 79, 89
76, 86, 96, 87, 97, 98

Temos, então, 12 **arranjos** de classe 2, e podemos escrever:

$$A_{4,2} = 12$$

h) os números de 3 algarismos são:

678	768	867	967
679	769	869	968
687	786	876	976
689	789	879	978
697	796	896	986
698	798	897	987

Temos, então, 24 **arranjos** de classe 3, e podemos escrever:

$$A_{4,3} = 24$$

i) os números de 4 algarismos são:

6789	7689	8679	9678
6798	7698	8697	9687
6879	7869	8769	9768
6897	7896	8796	9786
6978	7968	8967	9867
6987	7986	8976	9876

Temos, então, 24 **arranjos** de classe 4, e podemos escrever:

$$A_{4,4} = 24$$

Observação: evidentemente, não tem significado formar um número com "zero algarismo". No entanto, para estender a noção de arranjo a todos os casos, devemos incluir o do subconjunto de zero elemento. Então, se considerarmos o conjunto vazio como um *subconjunto ordenado que não tem elementos*, temos um único arranjo de classe zero dos 4 elementos de E: ∅. Portanto, podemos escrever:

$$A_{4,0} = 1$$

11.3 – ARRANJO OU COMBINAÇÃO?

Através de uma série de exemplos, faremos um treino que nos levará a sedimentar os conceitos de combinação e arranjo, bem como o critério para diferenciá-los.

Não é ainda nossa preocupação o cálculo do número de combinações ou de arranjos; portanto, deixaremos indicadas essas quantidades através das notações $C_{n,p}$ e $A_{n,p}$.

Exemplos

1º) Consideremos 5 pontos distintos, A, B, C, D e E, dos quais três quaisquer nunca estão alinhados. Com esses pontos, devemos formar

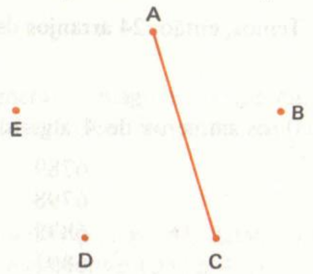
a) segmentos
b) segmentos orientados.

Vejamos de quantos modos isso pode ser feito.

Para a construção de um segmento (orientado ou não), devemos tomar dois dos pontos dados; estamos, então, em ambos os casos, fazendo *agrupamentos* de classe 2.

Vamos verificar, em cada caso, se se trata de arranjos ou de combinações.

No **caso a**, escolhendo 2 pontos, por exemplo A e C, formamos um segmento ($\overline{AC}$). Trocando a **ordem** dos pontos, o segmento *não se modifica*:



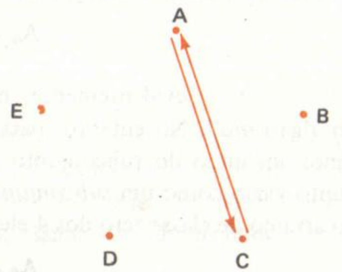
$$\overline{AC} = \overline{CA}$$

Assim, os *agrupamentos*

$$\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{AD}\ \text{etc.}$$

são as **combinações** de classe 2 dos 5 pontos, e o número de segmentos que podem ser formados é o total dessas combinações, que representamos por $C_{5,2}$.

No **caso b**, escolhendo, por exemplo, os pontos A e C e formando o segmento orientado $\overrightarrow{AC}$, é evidente que, ao trocarmos a **ordem** dos pontos, temos um *novo* segmento orientado $\overrightarrow{CA}$, pois uma das características de um segmento orientado é o seu *sentido*; por isso, como



$$\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{CA}$$

é um fato típico dos subconjuntos *ordenados*, os *agrupamentos*

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{CA}\ \text{etc.}$$

são os **arranjos** de classe 2 dos 5 pontos, e o número de segmentos orientados que podem ser formados é o total desses arranjos, que representamos por $A_{5,2}$.

2º) Numa sala estão reunidas 8 pessoas.

Determinemos de quantos modos pode ser escolhida:

a) uma comissão de 3 representantes com poderes iguais;
b) uma diretoria com um presidente, um vice-presidente e um tesoureiro.

Evidentemente, nos dois casos, estamos trabalhando com agrupamentos de classe 3.

No **caso a**, se formarmos uma comissão com as pessoas A, B e C, a troca da ordem dos elementos não modifica a comissão, pois os 3 elementos tem os mesmos poderes:

$$\underbrace{\{A;B;C\} = \{A;C;B\} = \{B;A;C\} = \{B;C;A\} = \{C;A;B\} = \{C;B;A\}}_{\text{uma só comissão}}$$

Estamos, então, compondo subconjuntos de 3 elementos, isto é, **combinações** de classe 3. Assim, o número de comissões possíveis é dado por $C_{8,3}$.

No **caso b**, formada uma diretoria em que A é o presidente, B é o vice-presidente e C é o tesoureiro, é claro que uma troca na posição de apenas dois desses elementos acarreta modificação no grupo, já que os cargos ocupados têm atribuições diferentes; logo,

$$ABC;\ ACB;\ BAC;\ BCA;\ CAB;\ CBA$$

representam 6 diretorias diferentes.

Uma diretoria é, por isso, um subconjunto *ordenado*, tratando-se de **arranjos** de classe 3. O número de diretorias possíveis é, então, dado por $A_{8,3}$.

De modo geral, os problemas que encontraremos podem ser resumidos no seguinte enunciado:

Dispondo de um conjunto com **n** *elementos, de quantos modos podemos escolher* **p** *elementos distintos desse conjunto?*

Os exemplos acima nos mostraram como proceder para identificar o tipo de agrupamento envolvido nesse problema: arranjo ou combinação? Retiramos, como exemplo, **p** elementos do conjunto dado, formando um agrupamento.

– se, modificando a ordem dos elementos escolhidos, o agrupamento não se modificar, trata-se de um problema de **combinações**, *e responderemos* $C_{n,p}$

– se, modificando a ordem dos elementos escolhidos, criamos um novo agrupamento, diferente do inicial, trata-se de um problema de **arranjos**, *e responderemos* $A_{n,p}$.

Exercícios Propostos

Utilizando, para as respostas, as notações $C_{n,p}$ ou $A_{n,p}$, resolva as seguintes questões:

• 11.1) Dispondo de 5 pontos distintos, dos quais três quaisquer nunca estão alinhados, quantos triângulos podem ser formados?

11.2) Dez clubes participam de um campeonato de futebol em um só turno, isto é, dois times jogam entre si uma única vez. Quantos jogos terá esse campeonato?

11.3) Dez atletas disputam uma prova olímpica. De quantos modos diferentes o *podium* (lugares diferentes para o 1º, 2º e 3º colocados) pode ser ocupado?

11.4) Com um baralho de 52 cartas (4 naipes de 13 cartas cada) quantos jogos de 3 cartas quaisquer podem ser feitos? E de 3 cartas de copas?

11.5) Quantos números de 5 algarismos podem ser formados com os algarismos de 1 a 8?

11.6) Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. De quantos modos podem ser retiradas duas bolas, sorteando-se uma primeira e em seguida uma segunda dentre as 9 restantes?

11.7) Em uma sala há 6 cadeiras e 4 pessoas. De quantos modos distintos as pessoas podem ocupar as cadeiras?

11.8) Em uma estante, há 9 lugares vagos. De quantos modos podem 5 livros diferentes ser colocados na estante?

11.9) Uma caixa contém n etiquetas numeradas de 1 a n. De quantos modos podem ser retiradas 5 etiquetas, não importando a sua ordem?

11.10) Vinte tenistas disputam um torneio regional para se escolher os 5 que participarão de um torneio internacional. De quantos modos pode ocorrer essa escolha?

Capítulo 12

Cálculo do número de arranjos e de combinações

12.1 – INTRODUÇÃO

Entendidos os conceitos, podemos agora nos interessar pelo cálculo das quantidades de arranjos e de combinações. Em outras palavras, estudaremos as regras e fórmulas para $A_{n,p}$ e $C_{n,p}$.

12. 2 – CÁLCULO DO NÚMERO DE ARRANJOS

Consideremos, inicialmente, alguns exemplos.

Exemplos

a) Vamos determinar quantos arranjos de classe 3 podem ser feitos com os 5 elementos do conjunto E = {a; b; c; d; e}, isto é, vamos calcular $A_{5,3}$.

Sabemos que um arranjo de classe 3 é um subconjunto *ordenado* de 3 elementos:

1º	2º	3º

O número de possibilidades de escolher esses três elementos é o número de arranjos $A_{5,3}$, e a escolha se desenvolve em 3 etapas sucessivas.

Para a escolha do 1º elemento, temos 5 possibilidades: ou a, ou b, ou c, ou d, ou e.

Como, nos arranjos simples, não podemos repetir elementos, para as escolhas do 2º e 3º temos, respectivamente, 4 e 3 possibilidades.

	1º	2º	3º
	↓	↓	↓
possibilidades:	5	4	3

Então, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, o total de arranjos é

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

(Observe que $A_{5,3}$ é igual ao produto de 3 fatores, consecutivos e decrescentes, iniciados por 5.)

b) Vamos determinar quantos números de telefones podem ser formados (prefixo de 3 algarismos seguido de outros 4 algarismos) com o prefixo 721, sendo os algarismos seguintes distintos entre si.

7	2	1	–				

4 algarismos distintos

É evidente que, ao escolhermos 4 entre os 10 algarismos do nosso sistema de numeração estamos fazendo um **arranjo**, pois, modificada a ordem dos algarismos, o número de telefone se modifica. Por exemplo, 721-2584 ≠ 721-2548

Assim, o total de telefones é dado por $A_{10,4}$.

Por outro lado, esse tipo de problema já é nosso conhecido, do estudo do **Princípio Fundamental da Contagem**:

	7	2	1	☐	☐	☐	☐
				↓	↓	↓	↓
possibilidades:				10	9	8	7

Temos, portanto:

$$A_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

(Observe que $A_{10,4}$ é igual ao produto de 4 fatores, consecutivos e decrescentes, iniciados por 10.)

Esses dois exemplos nos mostram que a formação de um arranjo, isto é, de um subconjunto **ordenado**, segue exatamente o Princípio Fundamental da Contagem: a ocorrência de eventos sucessivos e ordenados.

1º evento: escolha do 1º elemento do subconjunto
2º evento: escolha do 2º elemento
3º evento: escolha do 3º elemento

e assim por diante.

Podemos, então, resolver o caso geral, ou seja, calcular $A_{n,p}$:

Dispondo de um conjunto E com **n** *elementos, quantos arranjos simples de* **p** *elementos podem ser formados?* **($0 \leqslant p \leqslant n$).**

1º caso: p = 0

Sabemos que existe **um** único arranjo de classe zero: o conjunto ∅ (veja a observação que precede o item 3.3).

Então, temos:

$$A_{n,0} = 1$$

2º caso: p = 1

Se dos **n** elementos de E devemos escolher 1, temos **n** possibilidades, pois *cada elemento de E é um arranjo de classe 1* (veja o exemplo f, no capítulo 3).

Então, temos:

$$A_{n,1} = n$$

3º caso: p ⩾ 2

Devemos escolher **p** dos **n** elementos:

– para a escolha do 1º, temos **n** possibilidades
– para a escolha do 2º, temos **n - 1** possibilidades (pois não podemos repetir elementos)
– para a escolha do 3º, temos n - 2 possibilidades
. . . .
– para a escolha do pº, temos n - (p - 1) possibilidades

	1º	2º	3º	4º	···	pº
	↓	↓	↓	↓		↓
possibilidades:	n	n - 1	n - 2	n - 3		n - (p - 1)

Portanto, o **Princípio Fundamental da Contagem** dá-nos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-p+1)$$

Observe que *$A_{n,p}$ é igual a um produto de* **p** *fatores, consecutivos e decrescentes, iniciados por* **n**.

Exemplos

$$A_{6,3} = \underbrace{6 \cdot 5 \cdot 4}_{\text{3 fatores}} = 120$$

$$A_{10,2} = \underbrace{10 \cdot 9}_{\text{2 fatores}} = 90$$

$$A_{8,5} = \underbrace{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}_{\text{5 fatores}} = 6720$$

$$A_{n,2} = \underbrace{n(n-1)}_{\text{2 fatores}}$$

$$A_{n+2,3} = \underbrace{(n+2)(n+1)n}_{\text{3 fatores}}$$

$$A_{7,0} = 1$$

$$A_{13,1} = 13$$

Em certas situações, é conveniente escrever a expressão do número de arranjos utilizando a *notação fatorial*. Por exemplo:

$$A_{6,2} = 6 \cdot 5 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6!}{4!} = \frac{6!}{(6-2)!}$$

$$A_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8!}{3!} = \frac{8!}{(8-5)!}$$

Assim, no caso geral, temos:

$$A_{n,p} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots 2 \cdot 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Podemos, então, utilizar a *fórmula*

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Observação: devemos notar que a expressão acima é válida para os casos $p = 0$ e $p = 1$:

$$A_{n,0} = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad A_{n,1} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Exercícios Resolvidos

12.1) Resolva a equação $A_{n,2} = 56$:

Solução

Como $A_{n,2} = n(n-1)$, temos:

$n(n-1) = 56$ que é o mesmo que $n^2 - n - 56 = 0$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$$n = 8 \text{ ou } n = -7$$

Como n deve ser um número natural (representa o número de elementos de um conjunto), $n = -7$ não convém. Assim, $S = \{8\}$.

12.2) Resolva a equação $A_{n-1,6} = 30\, A_{n-3,4}$

Solução

É conveniente, nesse caso, usarmos a expressão $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ para não escrever produtos extensos. Assim, temos:

$$\begin{cases} A_{n-1,6} = \dfrac{(n-1)!}{[(n-1)-6]!} = \dfrac{(n-1)!}{(n-7)!} \\ A_{n-3,4} = \dfrac{(n-3)!}{[(n-3)-4]!} = \dfrac{(n-3)!}{(n-7)!} \end{cases}$$

A equação, então, fica:

$$\frac{(n-1)!}{(n-7)!} = 30\, \frac{(n-3)!}{(n-7)!}$$

e daí,

$$(n-1)! = 30 \cdot (n-3)!$$

$$(n-1)(n-2)(n-3)! = 30 \cdot (n-3)!$$

que é o mesmo que $n^2 - 3n - 28 = 0$ cujas raízes são $n = 7$ ou $n = -4$ (não convém). Logo, $S = \{7\}$.

12.3) Mostre que $A_{n,\,k} \cdot A_{n-k,\,p-k} = A_{n,\,p}$, com $k \leqslant p \leqslant n$.

Solução

Utilizando a expressão:

$A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, escrevemos:

$$\boxed{\text{1º membro}} = A_{n,\,k} \cdot A_{n-k,\,p-k} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{[(n-k)-(p-k)]!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-p+k)!} = \frac{n!}{(n-p)!} = A_{n,\,p} = \boxed{\text{2º membro}}$$

Exercícios Propostos

12.4) Calcule:

a) $A_{10,4}$ b) $A_{6,3}$ c) $A_{6,6}$ d) $A_{n,3}$

e) $A_{n+2,2}$ f) $A_{10,0}$ g) $A_{7,1}$ h) $A_{15,1}$

12.5) Determine as condições de existência de cada expressão dada, onde $n \in \mathbb{Z}$.

a) $A_{n,3}$ b) $A_{3,n}$ c) $A_{n+2,4}$

d) $A_{n+8,3}$ e) $A_{2n+10,\,n+5}$ f) $A_{n-3,\,3-n}$

12.6) Resolva as equações:

a) $A_{n+1,2} = 90$ b) $A_{n-1,\,2} = 110$

12.7) Resolva as equações:

a) $A_{n,3} = 14\,A_{n,2}$

b) $A_{n+3,7} = 63\,A_{n+1,5}$

c) $A_{n+1,6} - 55\,A_{n-1,4} = 7\,A_{n,5}$

12.8) Determine n nas equações abaixo. Em seguida, para esses valores de n, determine os possíveis valores de p.

a) $A_{n,\,p} = 3\,A_{n-1,\,p-1}$

b) $A_{n+2,\,p} + 20\,A_{n,\,p-2} = 10\,A_{n+1,\,p-1}$

12.9) Mostre que:

$$(n+1)\,A_{n,\,p-1} + \frac{A_{n+1,\,p+1}}{n-p+1} = 2\,A_{n+1,\,p}$$

12.3 – CÁLCULO DO NÚMERO DE COMBINAÇÕES

Consideremos, inicialmente, os exemplos.

Exemplos

c) Vamos determinar quantas combinações de classe 3 podem ser feitas com 5 elementos do conjunto E = {a; b; c; d; e}.

Sabemos que existem $C_{5,3}$ dessas combinações. Tomando, por exemplo, uma delas:

{a; c; d}

vamos verificar quantos **arranjos** de classe 3 podem ser **formados a partir dela**; para isso, basta escrevermos os elementos **a, c e d** em todas as ordens possíveis:

Combinação	Arranjos *gerados* pela combinação
{a; c; d}	(a; c; d), (a; d; c), (c; a; d), (c; d; a), (d; a; c), (d; c; a)

Temos 6 *arranjos gerados pela combinação.*

Para concluir que a combinação {a; c; d} gera 6 arranjos de classe 3 sem formar todos eles, basta aplicar a fórmula correspondente ao número de arranjos de 3 elementos, tomados 3 a 3:

$$A_{3,3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

Tomada outra combinação, evidentemente o resultado se repetirá.

Vemos, então, que *cada combinação de classe 3 gera 3! = 6 arranjos de classe 3.*

O **total** de combinações de classe 3 ($C_{5,3}$) gera o **total** de arranjos de classe 3 ($A_{5,3}$).

$$\begin{array}{lll} 1 \text{ combinação} & \longrightarrow & 3! = 6 \text{ arranjos} \\ C_{5,3} \text{ combinações} & \longrightarrow & A_{5,3} \text{ arranjos} \end{array}$$

Dessa proporcionalidade tiramos o total de combinações:

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!}$$

Logo, $C_{5,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

De fato, existem 10 combinações dos 5 elementos de E, tomados 3 a 3:

{a; b; c}, {a; b; d}, {a; b; e}, {a; c; d}, {a; c; e}

{a; d; e}, {b; c; d}, {b; c; e}, {b; d; e}, {c; d; e}

d) Vamos determinar de quantos modos podemos escolher, entre 6 pessoas, uma comissão de 4 pessoas.

Evidentemente, trata-se de um problema de combinações pois, numa *comissão* podemos trocar a ordem de seus elementos que ela não se modifica.

Assim, o total de comissões é dado por $C_{6,4}$.

Vamos considerar uma dessas comissões, por exemplo aquela formada pelas pessoas

$$X, Y, W, Z$$

e calcular quantas **diretorias** com presidente, vice-presidente, secretário e tesoureiro podem ser formadas a partir *dessa* comissão.

Sabemos que a formação de uma diretoria corresponde a construir um **arranjo**, pois a ordem em que os cargos são ocupados é importante.

Assim, como dispomos de 4 elementos X, Y, W e Z, o número de arranjos que podem ser formados usando os 4 elementos é:

$$A_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

É claro que uma outra comissão também daria origem a outras 24 diretorias.

Vemos, então, que *cada* comissão gera 4! = 24 diretorias.

Como existem $C_{6,4}$ comissões e o total de diretorias é $A_{6,4}$, temos a proporcionalidade:

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{comissão} \longrightarrow 4! = 24 & \text{diretorias} \\ C_{6,4} & \text{comissões} \longrightarrow A_{6,4} & \text{diretorias} \end{array}$$

donde tiramos $C_{6,4} = \dfrac{A_{6,4}}{4!}$

Logo, $C_{6,4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

Ora, o fato de nos exemplos **c** e **d** termos encontrado que

$$C_{5,3} = \frac{A_{5,3}}{3!} \quad \text{e} \quad C_{6,4} = \frac{A_{6,4}}{4!}$$

está nos sugerindo **que o número de combinações simples, de classe p, é igual ao número de arranjos simples, de classe p,** dividido pelo fatorial de p, ou, em outras palavras:

O número de combinações simples de **p** *elementos que podem ser formadas com os* **n** *elementos de um conjunto E* $(0 \leqslant p \leqslant n)$ *é dado por*

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Demonstração

1º) para $p = 0$

Existe uma única combinação de classe zero: o conjunto $\emptyset$ (veja o exemplo e do capítulo anterior). Assim, $C_{n,0} = \binom{n}{0} = 1$.

Mas, para p = 0, temos $\dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dfrac{A_{n,0}}{0!} = \dfrac{1}{1} = 1$

Logo, $C_{n,0} = \binom{n}{0} = \dfrac{A_{n,0}}{0!}$

2º) para $p \geqslant 1$

Vamos supor que o conjunto

$$\{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_p\}$$

seja uma qualquer das $C_{n,p}$ combinações dos **n** elementos de E, *tomados* **p** *a* **p**.

A partir *dessa* combinação podemos formar um certo número de **arranjos** de **p** elementos; basta para isso escrever os elementos em todas as ordens possíveis.

Como temos **p** elementos e os arranjos devem usar todos eles, esse número é

$$A_{p,p} = \frac{p!}{(p-p)!} = \frac{p!}{0!} = p!$$

Temos, então, que cada combinação de classe **p** gera p! arranjos de classe p. O total de combinações $(C_{n,p})$ gera o total de arranjos $(A_{n,p})$.

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{combinação } \textit{gera} & p! \text{ arranjos} \\ C_{n,p} & \text{combinações } \textit{geram} & A_{n,p} \text{ arranjos} \end{array}$$

Portanto, $C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!}$

Exemplos

$$C_{8,3} = \frac{A_{8,3}}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$C_{7,4} = \frac{A_{7,4}}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

$$C_{10,2} = \frac{A_{10,2}}{2!} = \frac{10 \cdot 9}{2 \cdot 1} = 45$$

Lembrando que $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, a expressão de $C_{n,\,p}$ pode ser escrita:

$$C_{n,\,p} = \frac{A_{n,\,p}}{p!} = \frac{\dfrac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Podemos, então, recorrer à fórmula:

$$\boxed{C_{n,\,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

Observação: são bastante úteis os valores de $C_{n,\,p}$ nos casos particulares em que $p = 0$, $p = 1$ e $p = n$. Devemos, por isso, conhecê-los:

$$\boxed{C_{n,\,0} = \binom{n}{0} = 1}$$

$$C_{n,\,1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

Assim, $\boxed{C_{n,\,1} = \binom{n}{1} = n}$

$$C_{n,\,n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Assim, $\boxed{C_{n,\,n} = \binom{n}{n} = 1}$

Exemplos

$C_{7,\,0} = 1$ $\qquad \binom{13}{13} = 1$

$\binom{8}{1} = 8$ $\qquad C_{25,\,1} = 25$

Exercícios Resolvidos

12.10) Resolva a equação $C_{n,\,5} = 4C_{n-1,\,4}$

Solução

Utilizando a fórmula

$C_{n,\,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, a equação se escreve:

$$\frac{n!}{5!(n-5)!} = 4\,\frac{(n-1)!}{4!(n-1-4)!}$$

$$\frac{n(n-1)!}{5 \cdot 4!(n-5)!} = 4\,\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!}$$

donde $\dfrac{n}{5} = 4$, isto é, $n = 20$

Logo, $S = \{20\}$

12.11) Mostre que $\dfrac{p+1}{n-p}\,C_{n,\,p+1} = C_{n,\,p}$ onde $n > p$.

Solução

$$\boxed{1^{\text{o}}\text{ membro}} = \frac{p+1}{n-p}\,C_{n,\,p+1} = \frac{p+1}{n-p} \cdot \frac{n!}{(p+1)!\,[n-(p+1)]!} =$$

$$= \frac{p+1}{n-p} \cdot \frac{n!}{(p+1)\,p!(n-p-1)!} = \frac{n!}{p!\underbrace{(n-p)(n-p-1)!}_{(n-p)!}} =$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,\,p} = \boxed{2^{\text{o}}\text{ membro}}$$

Exercícios Propostos

• 12.12) Calcule:

a) $C_{10,\,5}$ b) $\binom{11}{3}$ c) $C_{20,\,2}$ d) $\binom{12}{4}$

e) $C_{15,\,15}$ f) $\binom{17}{0}$ g) $\binom{17}{1}$ h) $\binom{100}{100}$

• 12.13) Resolva as equações:

a) $C_{n,\,2} + 2\,C_{n,\,1} = 9$

b) $11\,A_{n,\,2} = 3C_{n+1,\,4}$

13.2) Quantos subconjuntos de 4 elementos tem o conjunto E = {2; 4; 6; 7; 8; 9}?

Solução

Cada subconjunto de 4 elementos é uma combinação dos 6 elementos de E, tomados 4 a 4. Assim, o número desses subconjuntos é:

$$C_{6,4} = \frac{A_{6,4}}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

13.3) Quantos jogos foram realizados em um campeonato de futebol, disputado em um só turno (isto é, dois times se enfrentaram uma única vez), do qual participaram 16 times?

Solução

É claro que, por exemplo, o jogo Santos *versus* Corinthians é o mesmo que Corinthians *versus* Santos. Por isso, o número de jogos é o total de **combinações** das 16 equipes formadas duas a duas:

$$C_{16,2} = \frac{A_{16,2}}{2!} = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120 \text{ jogos}$$

13.4) Dez equipes de basquete vão disputar um campeonato em três turnos (isto é, duas equipes vão jogar entre si três vezes). Supondo que um mesmo time ganhe os três turnos, não havendo, por isso, necessidade de nenhum outro jogo, quantas partidas serão disputadas?

Solução

A exemplo do exercício anterior, trata-se de um problema de **combinações**.
Em *cada turno*, o número de jogos é dado por $C_{10,2}$. Como teremos três turnos, o total de jogos será:

$$3 \cdot C_{10,2} = 3 \cdot \frac{A_{10,2}}{2!} = 3 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} = 135$$

13.5) Doze atletas (4 sul-americanos, 4 africanos e 4 asiáticos) disputam uma prova. Serão premiados, conforme a classificação, os cinco primeiros colocados. De quantas maneiras pode ser feita a premiação?

Solução

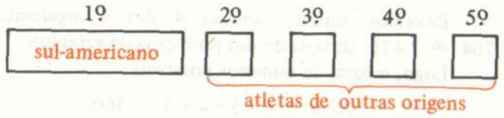
Se a premiação é feita conforme o atleta seja primeiro, segundo, . . . , ou quinto colocado, cada vez que se forma a lista dos 5 primeiros, tem-se um **subconjunto ordenado.**

Logo, o total de maneiras é:

$$A_{12,5} = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$$

13.6) No exercício anterior, qual o número de maneiras de se fazer a premiação, se o único sul-americano classificado é o primeiro colocado?

Solução



Solução

Temos, então, 4 possibilidades de escolher o 1º colocado (qualquer dos atletas sul-americanos). Restam-nos, portanto, 8 atletas para a escolha dos 4 outros premiados, já que não há outro sul-americano classificado. Assim, o total de maneiras é, pela Regra do Produto

$$4 \cdot A_{8,4} = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 6\,720$$

13.7) Uma equipe de inspeção tem um chefe, escolhido entre 4 engenheiros e 10 técnicos, escolhidos entre 15 outros profissionais. De quantas maneiras pode ser composta essa equipe?

Solução

Para a escolha do chefe, temos 4 possibilidades.
Para a escolha dos técnicos, dispomos de 15 elementos para escolher 10; como esses profissionais têm atribuições iguais, cada grupo de técnicos é uma **combinação.**
Logo, o número de modos de compor a equipe é:

$$4 \cdot C_{15,10} = 4 \cdot \frac{15!}{10!5!} = 4 \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12\,012$$

13.8) Quantos números de 3 algarismos distintos, começando por algarismo ímpar, podem ser formados com os elementos 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8?

Solução

É um problema de **arranjos** pois, por exemplo, 345 ≠ 534.

Para a escolha do primeiro algarismo, temos 3 possibilidades: os algarismos 3, 5, 7.

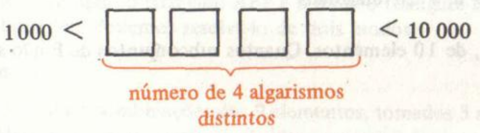
Escolhido o primeiro, restam-nos 6 elementos, dos quais devemos escolher 2.
Logo, a quantidade desses números é:

$$3 \cdot A_{6,2} = 3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$$

13.9) Quantos números, entre 1 000 e 20 000, de algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos de 1 a 9?

Solução

Calculamos, primeiro, a quantidade de números entre 1 000 e 10 000, isto é, números de 4 algarismos



Como dispomos de 9 elementos para escolher 4, essa quantidade é dada por $A_{9,4}$.
Calculamos, agora, a quantidade de números entre 10 000 e 20 000. Devemos

notar que são números de 5 algarismos que, para serem menores que 20 000, devem ter o 1 como primeiro algarismo:

10 000 < [1] [ ] [ ] [ ] [ ] < 20 000

Fixado, então, o número 1, restam-nos 8 algarismos para escolher os 4 que se seguirão ao 1. Temos, então, $A_{8,4}$ números.

Logo, o total de números é a soma das duas quantidades:

$$A_{9,4} + A_{8,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 4\,704$$

13.10) Qual o número de subconjuntos com 2, 3 ou 4 elementos que tem um conjunto de 9 elementos?

Solução

O número de subconjuntos de 2 elementos é dado por $C_{9,2}$.
O número de subconjuntos de 3 elementos é dado por $C_{9,3}$.
O número de subconjuntos de 4 elementos é dado por $C_{9,4}$.
Assim, o total de subconjuntos pedidos é:

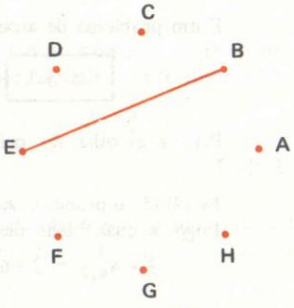
$$C_{9,2} + C_{9,3} + C_{9,4} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 246$$

13.11) Unindo-se os vértices de um octógono regular, formam-se quantos segmentos? Quantas diagonais tem o octógono?

Solução

Dispomos de 8 pontos para a escolha de 2. Como a ordem em que unimos os pontos não modifica o segmento formado, podemos construir

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \text{ segmentos.}$$



$\overline{EB} = \overline{BE}$

Notemos, agora, que dos 28 segmentos que podem ser formados, alguns são lados do octógono e outros são diagonais. Logo, subtraindo o número de lados (que é 8), obtemos o número de diagonais:

$$C_{8,2} - 8 = 28 - 8 = 20 \text{ diagonais}$$

13.12) É dado um conjunto E, de 10 elementos. Quantos subconjuntos de E não são conjuntos de 4 elementos?

Solução

É evidente que a solução do problema pode ser feita calculando-se o número de subconjuntos de 0, 1, 2, 3, 5, . . . 10 elementos e somando-se todos esses resultados.

No entanto, é muito mais simples calcular o total de subconjuntos de E e dele subtrair o número de subconjuntos que têm 4 elementos. Teremos, assim, a quantidade de subconjuntos que não são de 4 elementos. Então:

– o número total de subconjuntos de E é 2^{10}
– o número de subconjuntos de 4 elementos é dado por $C_{10,4}$.

Portanto, a solução é:

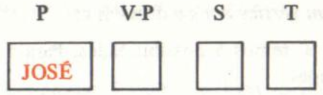
$$2^{10} - C_{10,4} = 1024 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 814$$

13.13) Dez pessoas, entre elas José, estão reunidas para escolher a diretoria de um clube, formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Em quantas das diretorias que podem ser formadas José não é o presidente?

Solução

Calculando, primeiramente, o total de diretorias possíveis e, em seguida, o número de diretorias em que José é presidente, a diferença entre esses resultados nos dá o número de diretorias nas condições do problema.

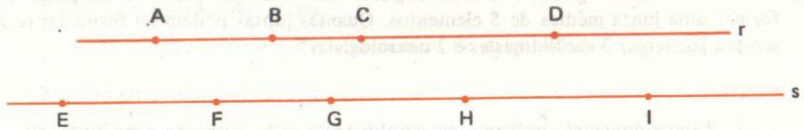
– O total de diretorias é dado por $A_{10,4}$.
– Fixado José na presidência, os três outros diretores devem ser escolhidos entre as 9 pessoas restantes.



O número dessas diretorias é, então, dado por $A_{9,3}$.
Portanto, o número de diretorias em que José não é presidente é:

$$A_{10,4} - A_{9,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 - 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$$

13.14) Quantos triângulos podem ser construídos usando-se, como vértices, os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I da figura?



Solução

Para a construção de um triângulo, devemos escolher 3 pontos entre os 9 dados. Como, por exemplo, o triângulo ABF é o mesmo triângulo BFA, trata-se de um problema de combinações. Podemos resolvê-lo de dois modos:

1º modo:

O total de combinações dos 9 elementos, tomados 3 a 3, é dado por $C_{9,3}$.

Mas, por certo, estão incluídos nesse total, agrupamentos de 3 pontos que, absolutamente, *não determinam triângulos* por serem grupos de pontos que pertencem à mesma reta, como, por exemplo, ABC, ACD, FGH.

Devemos, então, subtrair desse total, o número de *falsos* triângulos. Para isso, basta calcularmos o número de combinações de classe 3 existentes com os 4 pontos da reta r e com os 5 pontos da reta s:

– número de *falsos* triângulos em r: $C_{4,3}$.
– número de *falsos* triângulos em s: $C_{5,3}$.

Portanto, o número de triângulos é:

$$C_{9,3} - C_{4,3} - C_{5,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

2º modo:

Os triângulos que podem ser construídos são de dois tipos: com um vértice em r e dois em s ou com um vértice em s e dois em r.

– *Número de triângulos com um vértice em r e dois em s:*

Para a escolha do vértice em r, temos 4 possibilidades (A, B, C, D). Para a escolha de dois vértices em s, temos $C_{5,2}$ possibilidades.

Assim, o número desses triângulos é:

$$4 \cdot C_{5,2} = 4 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 40$$

– *Número de triângulos com um vértice em s e dois em r:*

Para a escolha do ponto sobre s, temos 5 possibilidades. Para a escolha de dois pontos sobre r, temos $C_{4,2}$ possibilidades.

Assim, o número desses triângulos é:

$$5 \cdot C_{4,2} = 5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 30$$

Logo, o total de triângulos é:

$$4 \cdot C_{5,2} + 5 \cdot C_{4,2} = 40 + 30 = 70$$

13.15) Com os 7 cardiologistas e 6 neurologistas que trabalham em um hospital, quer-se formar uma junta médica de 5 elementos. Quantas juntas podem ser formadas se devem sempre participar 3 cardiologistas e 2 neurologistas?

Solução

Temos aqui um problema de **combinações** pois, formada uma junta, ela não se modifica quando se altera a ordem de seus elementos.

É evidente que não podemos formar os 13 médicos e combiná-los 5 a 5: desta forma estaríamos formando muitas comissões que não satisfazem as condições do problema.

Devemos notar que, para termos certeza de formar juntas com 3 cardiologistas e 2 neurologistas, precisamos resolver o problema em duas fases: primeiro, escolher os 3 cardiologistas; **em seguida**, escolher os 2 neurologistas. São, portanto, dois eventos.

1º evento: *escolha dos cardiologistas*

Dispomos de 7 elementos para escolher 3. O número de possibilidades é, então, $C_{7,3}$.

2º evento: *escolha dos neurologistas*

Dispomos de 6 elementos para escolher 2. O número de possibilidades é, então, $C_{6,2}$.

1º evento: | C | C | C | → $C_{7,3}$
2º evento: | N | N | → $C_{6,2}$

possibilidades: $C_{7,3}$ $C_{6,2}$

Finalmente, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de juntas é:

$$C_{7,3} \cdot C_{6,2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 525$$

13.16) Dispondo de um baralho de 52 cartas (4 naipes com 13 cartas cada), determine quantos jogos de 5 cartas podem ser formados nas seguintes condições:

a) 5 cartas quaisquer;
b) jogos com 3 reis e 2 valetes;
c) jogos com 3 cartas de copas e 2 cartas de ouro;
d) jogos com exatamente 2 ases.

Solução

Escolhidas 5 cartas, o jogo formado não se modifica quando se altera a ordem dessas cartas; trata-se, então, de **combinações**.

a) O número de jogos com 5 cartas quaisquer é:

$$C_{52,5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2\,598\,960$$

b) jogos com 3 reis e 2 valetes; resolvemos o problema em 2 fases:

1º evento: *escolha de 3 reis*

No baralho, existem 4 reis. O número de possibilidades é, então, $C_{4,3}$.

2º evento: *escolha de 2 valetes*

Também dispomos de 4 valetes. Assim, o número de possibilidades é $C_{4,2}$.

1º evento: | R | R | R | → $C_{4,3}$
2º evento: | V | V | → $C_{4,2}$

possibilidades: $C_{4,3}$ $C_{4,2}$

Logo, pelo **Princípio Fundamental**, o total de jogos é:

$$C_{4,3} \cdot C_{4,2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 24$$

c) Jogos com 3 cartas de copas e 2 de ouro:

1º evento 2º evento

1º evento: *3 cartas de copas*

número de possibilidades: $C_{13,3}$

2º evento: *2 cartas de ouro*

número de possibilidades: $C_{13,2}$

Total de jogos desse tipo:

$$C_{13,3} \cdot C_{13,2} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 22\,308$$

d) Jogos com *exatamente* 2 ases

Iniciamos escolhendo 2 ases; para termos certeza de que não ocorrerá outro ás entre as 3 cartas seguintes, para a escolha destas 3 eliminamos os 4 ases do baralho, restando-nos 48 cartas:

1º evento: | A | A | 2º evento: | | | |

1º evento: *escolha de 2 ases*

número de possibilidades: $C_{4,2}$

2º evento: *escolha de 3 outras cartas*

número de possibilidades: $C_{48,3}$

Total de jogos com exatamente 2 ases:

$$C_{4,2} \cdot C_{48,3} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{48 \cdot 47 \cdot 46}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 103\,776$$

13.17) Dez objetos diferentes devem ser guardados em 3 gavetas A, B e C, sendo 4 objetos em A, 3 em B e 3 em C. De quantas maneiras isso pode ser feito?

Solução

Iniciamos pela escolha dos 4 objetos para a gaveta A; em seguida, dos 6 objetos restantes, escolhemos 3 para a gaveta B, ficando assim, automaticamente escolhidos os objetos para C: os últimos 3.

1º evento: *escolha para A*

número de possibilidades: $C_{10,4}$

2º evento: *escolha para B*

número de possibilidades: $C_{6,3}$

Total de maneiras:

$$C_{10,4} \cdot C_{6,3} = 210 \cdot 20 = 4200$$

13.18) Trabalham, em uma firma, 8 engenheiros e 6 economistas. Quantas comissões de 5 desses profissionais podem ser formadas de modo que em cada comissão haja, no mínimo, 3 engenheiros?

Solução

Ter no mínimo 3 engenheiros significa que as comissões podem ter *exatamente* 3 engenheiros, ou 4 engenheiros ou 5 engenheiros, isto é, podemos formar comissões de 3 tipos:

I. com 3 engenheiros e 2 economistas
II. com 4 engenheiros e 1 economista
III. com 5 engenheiros

A soma das quantidades de cada um dos tipos nos dará o total de comissões.

I. *comissões com 3 engenheiros e 2 economistas*

1º evento: | Eng | Eng | Eng | → 2º evento: | Eco | Eco |

possibilidades: $C_{8,3}$ $C_{6,2}$

Total dessas comissões: $C_{8,3} \cdot C_{6,2} = 56 \cdot 15 = 840$

II. *comissões com 4 engenheiros e 1 economista*

1º evento: | Eng | Eng | Eng | Eng | 2º evento: | Eco |

possibilidades: $C_{8,4}$ 6

Total dessas comissões: $C_{8,4} \cdot 6 = 70 \cdot 6 = 420$

III. *comissões com 5 engenheiros*

| Eng | Eng | Eng | Eng | Eng |

possibilidades: $C_{8,5}$

Total dessas comissões: $C_{8,5} = 56$

Assim, o número de comissões com, no mínimo, 3 engenheiros é:

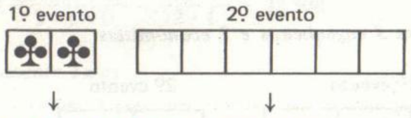
$$C_{8,3} \cdot C_{6,2} + 6 \cdot C_{8,4} + C_{8,5} = 840 + 420 + 56 = 1316$$

13.19) Considere um baralho de 28 cartas (os 4 naipes, com 7 cartas cada). Quantos jogos de 8 cartas, com, no mínimo, 3 cartas de paus, podem ser formados?

Solução

Como no exercício anterior, temos vários casos a considerar: são os jogos com exatamente 3 cartas de paus, com 4, 5, 6 ou 7. Podemos, entretanto, conduzir o problema por um outro caminho, calculando inicialmente o total de jogos possíveis e, depois, subtrair desse total as quantidades de jogos com duas cartas de paus, com uma e também com nenhuma carta de paus. Assim:

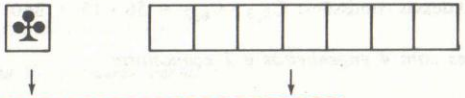
- *Total de jogos de 8 cartas:* $C_{28,8} = 3\,108\,105$
- *Jogos com duas cartas de paus:*



possibilidades: $C_{7,2}$ $C_{21,6}$

Total desses jogos: $C_{7,2} \cdot C_{21,6} = 1\,139\,544$

- *Jogos com uma só carta de paus:*



possibilidades: 7 $C_{21,7}$

Total desses jogos: $7 \cdot C_{21,7} = 813\,960$

- *Jogos sem nenhuma carta de paus:*

Retirando do baralho as 7 cartas de paus, restam-nos 21 cartas para escolher 8:

$C_{21,8} = 203\,490$ jogos

Finalmente, o número de jogos com pelo menos 3 cartas de paus é:

$C_{28,8} - C_{7,2} \cdot C_{21,6} - 7 \cdot C_{21,7} - C_{21,8} = 951\,111$

Exercícios Propostos

13.20) Numa urna há 20 bolas, sendo 11 brancas, 5 azuis e 4 vermelhas. De quantos modos podemos retirar:

a) uma bola
b) duas bolas
c) duas bolas brancas
d) três bolas, sendo nenhuma branca

13.21) Dez estudantes prestam um exame. De quantas maneiras pode ser composta a lista dos 4 primeiros colocados?

13.22) Entre 10 condôminos presentes a uma reunião devem ser eleitos 1 síndico e 3 conselheiros. De quantos modos pode se dar a escolha?

13.23) Quantos números, de 3 algarismos distintos, maiores que 499, podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

13.24) Uma confeitaria produz 8 tipos de doces e dispõe de embalagens para 3 quaisquer dos tipos. Se as embalagens podem ser apresentadas em 5 cores diferentes, quantas são as alternativas de escolha de um consumidor?

13.25) Participam de um torneio de xadrez 5 russos, 5 americanos e 4 cubanos. De quantos modos pode ser feita a premiação dos 3 primeiros colocados se o único americano classificado ficar em terceiro lugar?

13.26) Numa livraria há 15 coleções diferentes de livros, com 6 volumes em cada coleção. Um cidadão quer presentear um amigo com 3 volumes de uma mesma coleção. Quantas são as maneiras de escolha?

13.27) Dado o conjunto E = {a; b; c; d; e; f; g}, determine em quantos dos seus subconjuntos de 5 elementos comparecem **a** e **b**.

13.28) No exercício anterior, em quantos dos subconjuntos de 5 elementos não comparecem a nem b?

13.29) Sete pessoas, entre elas José e Eustáquio, estão reunidas para formar uma chapa com presidente, secretário, segundo-secretário e tesoureiro. Determine em quantas das possíveis chapas:

a) José é presidente e Eustáquio tesoureiro
b) José não é o presidente e Eustáquio não é o tesoureiro

13.30) No exercício anterior, em quantas das possíveis chapas pelo menos um deles (José ou Eustáquio) faz parte da diretoria?

13.31) Um deputado quer convocar 5 entre 8 políticos de seu grupo para uma reunião. No entanto, dois desses políticos têm forte rixa pessoal. De quantos modos pode ser feita a convocação de maneira que não compareçam simultaneamente os dois citados?

13.32) Considere um conjunto de 10 elementos e determine o número de seus subconjuntos com:

a) 6 elementos
b) 2, 3 ou 4 elementos
c) qualquer quantidade de elementos, com exceção daqueles de 2 ou 3 elementos.

13.33) Com os algarismos de 1 a 9, quantos números naturais **x**, de algarismos distintos, podem ser formados se:

a) $10\,000 < x < 100\,000$
b) $100 < x < 2\,000$
c) $1\,000 < x < 30\,000$
d) $1\,000 < x < 25\,000$

13.34) Considere os vértices de um hexágono regular.

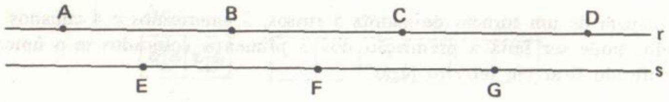
a) Quantas retas ficam por eles determinadas?
b) Quantos triângulos com vértices nesses 6 pontos podem ser construídos?

13.35) Considere os vértices de um decágono regular.

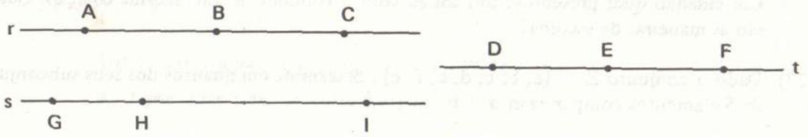
a) Quantos segmentos podem ser traçados unindo esses vértices?
b) Quantas diagonais tem o decágono?

13.36) Deduza, pelo processo combinatório, a expressão D_n do número de diagonais de um polígono regular de n lados.

13.37) Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos pontos da figura:



13.38) Quantos triângulos podem ser construídos com vértices nos pontos da figura:



13.39) Sobre os lados de um triângulo marcam-se 3, 4 e 5 pontos, respectivamente, distintos dos vértices. Determine o número de triângulos que podem ser construídos com vértices nos pontos marcados.

13.40) O corpo docente de uma escola é formado por 4 diretores e 6 livres-docentes. De quantas maneiras pode ser composta uma banca de exames com 2 diretores e 4 livres-docentes?

13.41) Trabalham em uma firma 6 engenheiros e 6 arquitetos. Quantas comissões com 4 engenheiros e 3 arquitetos podem ser formadas?

13.42) De quantas maneiras diferentes podemos vestir 2 meninos (de mesmo tamanho) dispondo de 5 camisas e 4 calças?

13.43) Doze pessoas dispõem, para viajar, de 3 carros: um de 6 lugares, um de 4 lugares e um de 2 lugares. Determine o número de maneiras de distribuir as pessoas nos carros.

13.44) De quantos modos podemos distribuir 10 brinquedos entre 4 crianças, de modo que a primeira receba 3, a segunda 3, a terceira 2 e a quarta 2?

13.45) Para um desfile em que 3 modelos se apresentam, um costureiro dispõe de 4 vestidos, 6 pares de sapatos e 5 bolsas, sendo esteticamente possível formar qualquer conjunto. De quantas maneiras diferentes pode o costureiro vestir os modelos?

13.46) Determine, dando a resposta na notação fatorial, de quantos modos uma classe de 25 alunos pode ser separada em 5 grupos de 5 alunos.

13.47) Determine de quantos modos podem n pessoas serem separadas em α grupos de p pessoas cada, sendo $n = \alpha p$.

13.48) Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, dispondo de 10 deputados e 6 senadores, de modo que, em cada comissão, haja pelo menos 3 deputados?

13.49) Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, dispondo de 10 deputados e 6 senadores, de modo que, em cada comissão, haja no mínimo 2 senadores?

13.50) De um baralho de 52 cartas são eliminadas as cartas de 2 a 9, dos 4 naipes. Com as cartas restantes, determine o número de jogos (que podem ser formados)

a) de 5 cartas quaisquer
b) de 5 cartas, com 3 ases e dois reis
c) de 5 cartas, com 3 iguais entre si e outras duas iguais entre si (por exemplo, 3 ases e dois reis ou 3 damas e 2 ases)

13.51) Ainda nas condições do exercício anterior, determine o número de jogos de 5 cartas com:

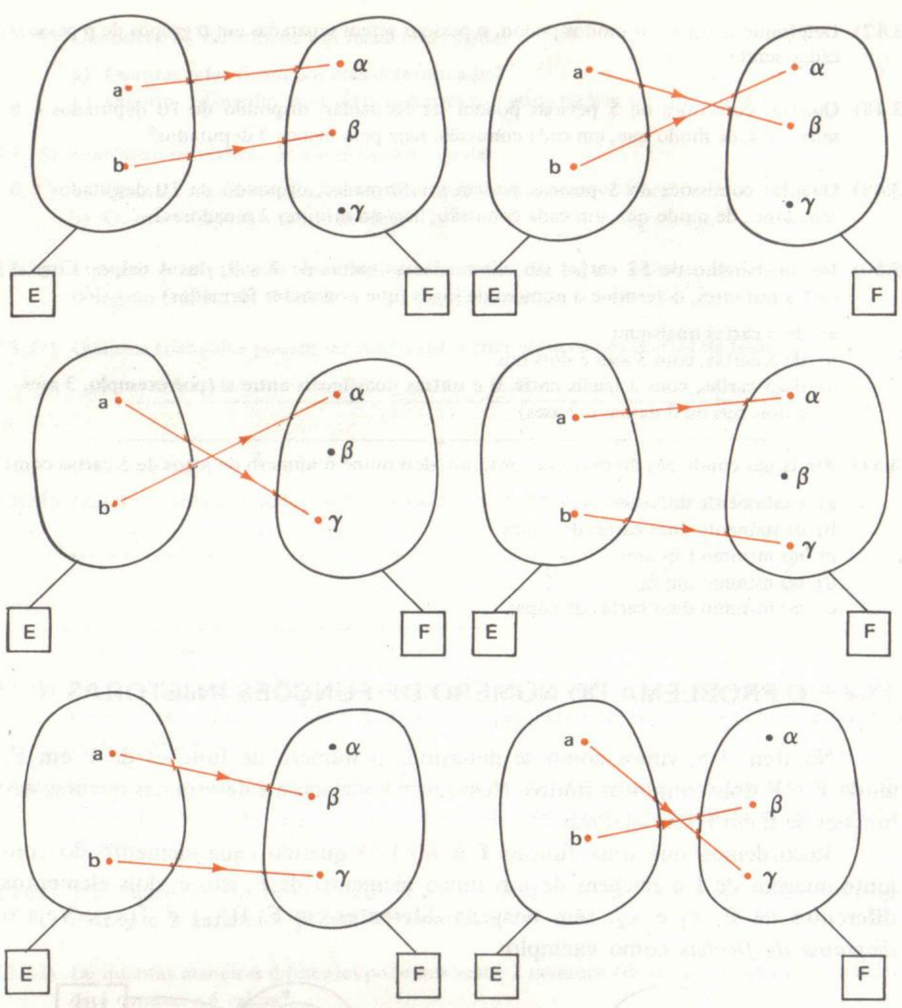
a) exatamente dois ases
b) exatamente duas cartas de copas
c) no mínimo três ases
d) no mínimo um ás
e) no mínimo duas cartas de copas

13.2 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE FUNÇÕES INJETORAS

No item 1.5, vimos como se determina o número de funções de E em F, sendo E e F dois conjuntos finitos. Nosso problema agora é determinar quantas das funções de E em F são **injetoras**.

Recordemos que uma função **f** é **injetora** quando cada elemento do conjunto-imagem de f é imagem de um único elemento de E, isto é, dois **elementos diferentes** de E, x_1 e x_2, **têm imagens diferentes** em F: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Veja o *diagrama de flechas* como exemplo:

Então, para compreendermos o cálculo do número de funções injetoras, comecemos com um exemplo: sejam $E = \{a; b\}$ e $F = \{\alpha; \beta; \gamma\}$; vamos construir todas as funções injetoras de E em F (lembrando que **a** e **b** não podem ter a mesma imagem):



Temos, então, 6 dessas funções.

Notemos, agora, que a formação dessas funções se deu pela escolha em F, de 2 de seus 3 elementos e, ainda mais, que a **ordem** dessa escolha foi importante pois, por exemplo, as duas primeiras funções *usam* os mesmos elementos α e β de F, mas em **ordens diferentes** sendo, por isso, funções diferentes.

Tudo isso nos diz que ao escolhermos (como imagens) **ordenadamente** 2 dos 3 elementos de F, estamos formando **arranjos**. Portanto, o número de funções injetoras é

$$A_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$$

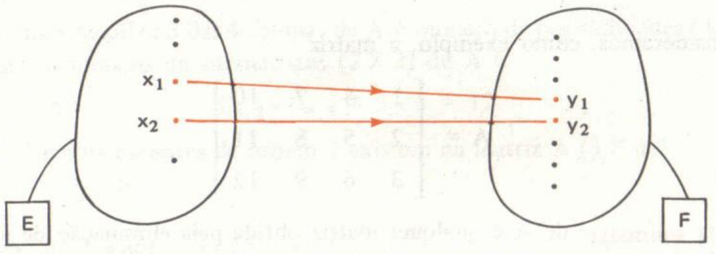
Vamos, então, ao caso geral:

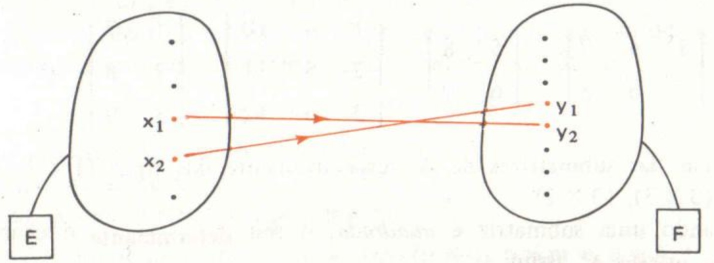
Sendo E e F dois conjuntos finitos, o primeiro com **n** elementos e, o segundo, com **k** elementos ($k \geqslant n$), quantas funções injetoras de E em F podem ser formadas?

Solução

Sabemos que a formação de uma função injetora se dá escolhendo, sem repetir, **n** dos **k** elementos de F para serem, cada um, imagem dos **n** elementos de E.

Também sabemos que essa escolha deve ser ordenada pois, se trocarmos a posição de duas imagens, modificamos a função:





Trata-se, então, de um problema de **arranjos** dos **k** elementos de F, tomados **n a n**.

Logo, o número de funções injetoras é:

$$A_{k,\,n} = \frac{k!}{(k-n)!}$$

Exemplos

a) O número de funções injetoras de E = {a; b; c; d; e} em F = {1; 2; 3; 4; 8; 12; 24; 36} é:

$$A_{8,5} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$$

b) Os conjuntos E e F têm, respectivamente, 4 e 10 elementos. Quantas funções de E em F não são injetoras?

O número de funções de E em F é $10^4 = 10\,000$

O número de funções injetoras de E em F é $A_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$.

Logo, o número de funções não injetoras é:

$$10^4 - A_{10,4} = 4\,960$$

13.3 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE SUBMATRIZES E MENORES

Consideremos, como exemplo, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

Uma **submatriz** de A é qualquer matriz obtida pela eliminação de linhas ou colunas de A; assim, as matrizes

$$[5 \quad 8], \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

são algumas das submatrizes de A, respectivamente dos tipos (1 X 2), (2 X 3), (2 X 2), (3 X 3), (3 X 2).

Quando uma submatriz é *quadrada*, o seu **determinante** é chamado de **menor da matriz A**; assim,

$$\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 2 & 5 & 11 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

são dois dos menores de A.

Notemos que a formação de uma submatriz se faz escolhendo um certo número de linhas e, em seguida, um certo número de colunas da matriz dada, *mantendo* a posição relativa das filas escolhidas, pois se esta posição for trocada, a matriz formada não é submatriz de A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \text{ é submatriz de A} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ não é submatriz de A}$$

Trata-se, então, de **combinar** as linhas e as colunas da matriz dada.

Podemos, por isso, resolver os problemas:

1º) Quantas **submatrizes** do tipo (2 X 3) tem a matriz A (3 X 4)?

Solução

Temos dois *eventos:*

1º evento: *escolha das linhas*

Devemos escolher 2 das 3 linhas de A; o número de possibilidades é $C_{3,2} = 3$.

2º evento: *escolha das colunas*

Devemos escolher 3 das 4 colunas de A; o número de possibilidades é $C_{4,3} = 4$.

Logo, o número de submatrizes (2 X 3) de A é:

$$C_{3,2} \cdot C_{4,3} = 3 \cdot 4 = 12$$

2º) Quantos **menores** de ordem 2 existem na matriz A (3 X 4)?

Solução

Como um **menor** é um determinante de uma submatriz quadrada, o número de menores de ordem 2 é o próprio número de submatrizes do tipo (2 X 2); isto nos diz que devemos repetir a solução do 1º problema para o caso em que o número de colunas que devem ser escolhidas é igual ao número de linhas:

$$C_{3,2} \cdot C_{4,2} = 3 \cdot 6 = 18$$

Logo, existem 18 menores de ordem 2 em A.

No caso geral, temos:

sendo A uma matriz do tipo (m X n),

– o número de suas submatrizes do tipo (p X q), $p \leq m$ e $q \leq n$, é:

$$\boxed{C_{m,p} \cdot C_{n,q}}$$

– o número de seus menores de ordem r, $r \leq m$ e $r \leq n$, é:

$$\boxed{C_{m,r} \cdot C_{n,r}}$$

Exemplos

a) Sendo A(5 X 7), o número de submatrizes (3 X 4) é:

$$C_{5,3} \cdot C_{7,4} = 10 \cdot 35 = 350$$

b) Sendo A (4 X 5) o *total* de menores de A é dado pela soma das quantidades de menores de ordem 1, de ordem 2, de ordem 3 e de ordem 4:

$$C_{4,1} \cdot C_{5,1} + C_{4,2} \cdot C_{5,2} + C_{4,3} \cdot C_{5,3} + C_{4,4} \cdot C_{5,4} =$$
$$= 4 \cdot 5 + 6 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 1 \cdot 5 = 125$$

Capítulo

14 Permutações simples

14.1 – DEFINIÇÃO

Consideremos, por exemplo, o conjunto E = {5; 7; 8}. Sabemos que é possível formar, com os elementos de E, **arranjos** de **classe** zero, de **classe** 1, de **classe** 2; mas, a **classe máxima** que podem ter esses arranjos é 3: são os subconjuntos ordenados que utilizam **todos** os 3 elementos de E.

Assim, se com esses elementos, quisermos formar *números de 3 algarismos distintos*, somos obrigados a usar, na composição de cada número, os **3** algarismos (5, 7 e 8):

578 587 758 785 857 875

Temos, então, 6 **arranjos de classe máxima** e esse número se confirma pelo cálculo:

$$A_{3,3} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Este exemplo mostra-nos que, quando formamos arranjos de classe máxima com os elementos de um conjunto, nada mais estamos fazendo que tomar **todos** os elementos do conjunto e ir **permutando** suas posições. Podemos, por isso, chamar tais arranjos de **permutações**. Daí a **definição**:

Permutações são arranjos de classe máxima ou, com maior rigor:

> Uma permutação dos **n** elementos de um conjunto E é qualquer arranjo de classe **n** desses elementos.

O **número** de permutações é indicado por:

$$P_n$$

Da definição, é imediato que $P_n = A_{n,n}$.

Utilizando a igualdade $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$,

vem $$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1}$$

Logo, o número de permutações é

$$P_n = n!$$

Assim, no caso do exemplo inicial, temos $P_3 = 3! = 6$.

Exemplos

a) O conjunto E = {6; 7; 8; 9} tem 4 elementos. Para formarmos, com eles, números de 4 algarismos distintos, devemos utilizar todos. *Alguns* desses números são: 6 789, 8 679, 6 798, 9 768.

A quantidade deles é o total de permutações de 4 elementos

$$P_4 = 4! = 24$$

b) Vamos calcular o número de anagramas da palavra TRANCO (anagrama é qualquer palavra, com significado ou não, que pode ser formada com as letras da que foi dada). Alguns dos anagramas são TARONC, CNRTAO, CRATON, CONTRA, NRATOC.

Para esse cálculo, basta determinarmos o total de permutações das 6 letras T, R, A, N, C, O:

$$P_6 = 6! = 720$$

Exercícios Resolvidos

14.1) O horário de uma classe, num certo dia da semana, deve conter 8 aulas, sendo 2 de História, 2 de Matemática, 2 de Português e 2 de Física, todas de *assuntos* diferentes (por exemplo, das duas aulas de História, uma é de História Geral e outra de História do Brasil). Determine de quantas maneiras pode ser feito o horário desse dia em cada uma das seguintes condições:

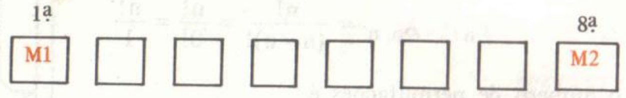
a) aulas em qualquer ordem;
b) a primeira e a última aula de Matemática;
c) a primeira e a última aula de matérias da área de exatas (Física ou Matemática).

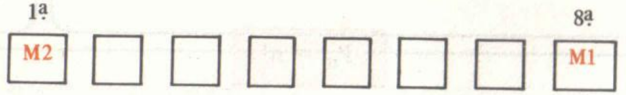
Solução

a) como as 8 aulas são diferentes, o total de maneiras de fazer o horário é o total de permutações das 8:

$$P_8 = 8! = 40\,320$$

b) como as duas aulas de Matemática são diferentes, vamos chamá-las de M1 e M2; para serem a primeira e a última, temos duas possibilidades: M1 a primeira e M2 a última, ou o contrário:



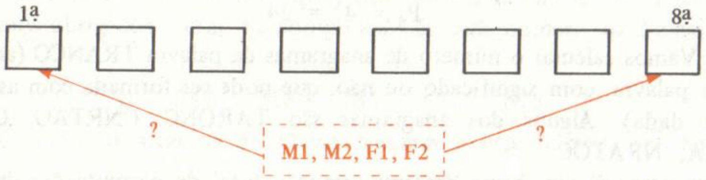


Para cada uma dessas 2 possibilidades, temos outras 6 aulas para distribuir: o número de modos possíveis é P_6.

Logo, o total é

$$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6! = 1\,440$$

c) Em primeiro lugar, determinamos de quantos modos podemos escolher, entre as aulas M1, M2, F1 e F2, duas para serem a primeira e a última:



É claro que, por exemplo, F2 na 1ª e M1 na 8ª é diferente de M1 na 1ª e F2 na 8ª. Por isso, temos arranjos:

$$A_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ possibilidades}$$

Para cada uma dessas possíveis escolhas, temos outras 6 aulas para distribuir. Isso nos dá:

$$P_6 = 6! = 720 \text{ possibilidades}$$

Logo, o total de maneiras é:

$$A_{4,2} \cdot P_6 = 12 \cdot 720 = 8\,640$$

14.2) Considere a palavra VESTIBULAR:

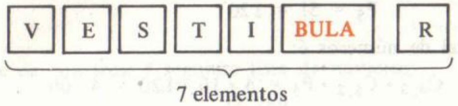
a) quantos são seus anagramas?
b) em quantos de seus anagramas as letras B, U, L e A aparecem juntas e nessa ordem?
c) em quantos de seus anagramas as letras B, U, L e A aparecem juntas?

Solução

a) o número de anagramas é:

$$P_{10} = 10! = 3\,628\,800$$

b) para *obrigarmos* as letras B, U, L e A a estarem sempre juntas e nessa ordem, basta "prendermos as 4 numa caixa", considerando-as como **um só** elemento



Assim, toda vez que formarmos uma permutação desses 7 elementos (a "caixa" e as outras 6 letras), teremos, ao abrir a caixa, um anagrama da palavra VESTIBULAR em que B, U, L e A estão juntas e nessa ordem.

Logo, o total desses anagramas é:

$$P_7 = 7! = 5\,040$$

c) agora, B, U, L e A, estando juntas, podem estar em *qualquer* ordem.

Então, calculamos primeiro o número de anagramas em que elas estão juntas e *nessa ordem*, isto é, repetimos o item anterior:

$$P_7 = 7! = 5\,040$$

Em seguida, notamos que para **cada um** desses 5 040 anagramas podemos "abrir a caixa" e trocar a posição das 4 letras; o número de maneiras em que isso pode ser feito é:

$$P_4 = 4! = 24$$

Logo, o total de anagramas em que B, U, L e A estão juntas, mas em qualquer ordem, é:

$$P_7 \cdot P_4 = 5\,040 \cdot 24 = 120\,960$$

14.3) Com os algarismos de 1 a 9, sem repeti-los, quantos números de 3 algarismos pares e 2 algarismos ímpares podem ser formados?

Solução

Em primeiro lugar, escolhemos os cinco algarismos (3 pares e 2 ímpares) sem levarmos em consideração a ordem de escolha:

– *escolha dos pares*

Dispomos de 4 elementos (2; 4; 6; 8) para escolher 3. O número de maneiras é:

$$C_{4,3} = 4$$

– *escolha dos ímpares*

Dispomos de 5 elementos (1; 3; 5; 7; 9) para escolher 2. O número de maneiras é:

$$C_{5,2} = 10$$

Há, portanto, $C_{4,3} \cdot C_{5,2}$ modos de escolher.

Notamos, então, que, feitas essas escolhas, ainda não formamos os **números** pedidos, mas apenas **subconjuntos** com três pares e dois ímpares. Por exemplo:

$$\{2; 4; 6; 1; 3\}, \{2; 6; 8; 5; 9\}, \{4; 6; 8; 1; 7\}$$

Para que cada um desses **conjuntos** dê origem a **números** de 5 algarismos, devemos permutar os 5 elementos:

$$P_5 = 5! = 120$$

Logo, o total de números é:

$$C_{4,3} \cdot C_{5,2} \cdot P_5 = 4 \cdot 10 \cdot 120 = 4\,800$$

14.4) Em quantos anagramas da palavra COLEGA as consoantes aparecem intercaladas com as vogais?

Solução

Devemos, de início, escolher com que tipo de letra começa o anagrama; temos 2 possibilidades: vogal ou consoante

vogal **cons.** **vogal** **cons.** **vogal** **cons.**

cons. **vogal** **cons.** **vogal** **cons.** **vogal**

Para cada uma dessas possibilidades, temos 3 lugares para distribuir as consoantes. O número de modos é:

$$P_3 = 3! = 6$$

Em seguida, distribuímos as 3 vogais nas 3 vagas restantes. Número de modos:

$$P_3 = 3! = 6$$

Logo, o total de anagramas é:

$$2 \cdot P_3 \cdot P_3 = 2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$$

14.5) Em quantos anagramas da palavra SIDERAL as consoantes estão em ordem alfabética?

Solução

A situação das consoantes nos anagramas deve ser: D à esquerda de L, L à esquerda de R e R à esquerda de S:

$$\ldots, D, \ldots L, \ldots, R, S$$

Devemos, então, escolher 4 das 7 posições possíveis e colocar, nessas posições, as letras D, L, R, S sem modificar a sua ordem. Por isso o número de possibilidades dessa escolha é:

$$C_{7,4} = 35$$

Para cada uma dessas possibilidades, restam 3 vagas para as 3 vogais, e o número de modos de ocupá-las é:

$$P_3 = 3! = 6$$

Logo, o número desses anagramas é:

$$C_{7,4} \cdot P_3 = 35 \cdot 6 = 210$$

14.6) Escrevendo-se em ordem crescente a lista de todos os números de 5 algarismos distintos, formados com os algarismos 5, 6, 7, 8 e 9, que lugar ocupa o número 78 695?

Solução

Trata-se de construir a seguinte lista de números:

56 789
56 798
56 879
56 897
⋮
78 695
⋮
98 675
98 756
98 765

O nosso trabalho é calcular quantos são os números que *precedem* 78 695, isto é, todos aqueles que:

1º) começam com 5
2º) começam com 6
3º) começam com 75
4º) começam com 76
5º) têm 785 no início
6º) têm 7865 no início

1º) fixado o 5, temos 6, 7, 8 e 9 para as outras 4 vagas:

5				

total destes números: $P_4 = 4! = 24$

2º) fixado o 6 temos 5, 7, 8 e 9 para as outras 4 vagas:

6				

total destes números: $P_4 = 4! = 24$

3º) fixados o 7 e o 5, temos 6, 8 e 9 para as outras 3 vagas:

7	5			

total destes números: $P_3 = 3! = 6$

4º) fixados o 7 e o 6, temos 5, 8 e 9 para as outras 3 vagas:

7	6			

total destes números: $P_3 = 3! = 6$

5º) fixados o 7, o 8 e o 5, restam 6 e 9 para as outras 2 vagas:

7	8	5		

total destes números: $P_2 = 2! = 2$

6º) fixados o 7, o 8, o 6 e o 5, resta apenas o 9 para ocupar a última casa:

7	8	6	5	9

1 só número

Somando essas quantidades, vem o total de números que precedem 78 695:

$$P_4 + P_4 + P_3 + P_3 + P_2 + 1 = 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 63$$

Portanto, nosso número é o 64º da lista.

14.7) Com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 6 formam-se todos os números de 5 algarismos distintos. Determine a soma de todos eles.

Solução

Trata-se de formar $P_5 = 5! = 120$ números conforme a tabela:

23 456
23 465
23 546
23 564
. . . . .
34 625
. . . . .
45 362
. . . . .
54 623
. . . . .
65 423
65 432

e *somar* todas essas parcelas.

Observe que em cada uma das colunas (coluna das unidades, das dezenas, das centenas, . . .) cada algarismo aparece tantas vezes quantas são as permutações dos demais algarismos restantes, isto é, 4! = 24 vezes.

Nestas condições, a soma de todos os algarismos de cada coluna é:

$$\underbrace{(2 + 2 + \ldots + 2)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(3 + 3 + \ldots + 3)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(4 + 4 + \ldots + 4)}_{24 \text{ vezes}} + \underbrace{(5 + 5 + \ldots + 5)}_{24 \text{ vezes}} +$$

$$+ \underbrace{(6 + 6 + \ldots + 6)}_{24 \text{ vezes}} = 24 \cdot (2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 480$$

Então, somando-se as unidades da coluna das unidades, obtemos 480; somando-se as unidades da coluna das dezenas obtemos 4 800, e assim por diante, de acordo com o esquema:

coluna das unidades ________	480
coluna das dezenas ________	4 800
coluna das centenas ________	48 000
coluna das milhares ________	480 000
coluna das dezenas de milhares ____	4 800 000
	5 333 280

Observação

Para o problema resolvido acima há um *artifício* que nos fornece o resultado mais rapidamente. Tomemos o **primeiro** e o **último** números da lista e façamos a sua soma:

$$\begin{array}{r} 23\,456 \\ +\ 65\,432 \\ \hline 88\,888 \end{array}$$

Verifica-se que os demais números da lista também podem ser escolhidos aos pares, de modo que a soma seja sempre 88 888:

$$\begin{array}{r} 34\,265 \\ 54\,623 \\ \hline 88\,888 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52\,436 \\ 36\,452 \\ \hline 88\,888 \end{array}$$

Como os 120 números formam 60 desses pares, a soma total é $60 \cdot (88\,888) = 5\,333\,280$.

O aluno não deve se entusiasmar excessivamente com o *artifício*; ele só resolve o problema quando os algarismos dados são *consecutivos*.

Exercícios Propostos

14.8) Determine, para cada palavra a seguir, quantos de seus anagramas começam com a sílaba TO:

a) TEDIO
b) PACOTE
c) BUTANOL

14.9) Determine quantos anagramas da palavra PALMITO:

a) começam e terminam por vogal;
b) começam por vogal e terminam por consoante;
c) apresentam primeiro todas as vogais e, em seguida, as consoantes.

14.10) Numa repartição, a classificação de cada documento confidencial se faz com 8 dígitos: 4 letras (A, B, C, D) e 4 algarismos (1, 2, 3, 4), podendo, letras e algarismos serem misturados (por exemplo 1 • A • B • 4 • 2 • D • 3 • C). Pergunta-se:

a) quantos documentos podem ser classificados com esse código?
b) quantos documentos apresentam classificação começando com duas letras, podendo o dígito seguinte ser letra ou número?
c) quantos documentos apresentam classificação começando com exatamente duas letras?
d) quantos documentos apresentam classificação começando exatamente com duas letras e terminando com exatamente dois números?

14.11) O horário de uma classe, num certo dia da semana, deve conter 10 aulas, sendo 3 de Matemática, (1 de álgebra, 1 de trigonometria e 1 de geometria), 2 de Física (1 de mecânica e 1 de termologia), 3 de Português (1 de gramática, 1 de literatura, 1 de redação)

e 2 de História (geral e do Brasil). Determine o número de maneiras de se formar esse horario com:

a) as 3 aulas de Matemática consecutivas e na ordem descrita acima;
b) as 3 aulas de Matemática consecutivas e em qualquer ordem;
c) as aulas de Matemática não surgindo consecutivamente.

14.12) No exercício anterior, quantos modos há de se fazer o horário, de maneira que as aulas da área de exatas (Física e Matemática) estejam intercaladas com as da área de humanas (História e Português)?

14.13) Ainda no exercício 14.11, de quantos modos as aulas de Português surgem, não necessariamente consecutivas, mas na ordem: gramática antes de literatura e esta antes de redação?

14.14) Num sistema de códigos em que são usados 5 sinais (+, −, •, ÷, *) misturados as 7 letras (α, β, γ, δ, ϵ, λ, μ), quantos símbolos diferentes podem ser formados com 3 sinais e 4 letras?

14.15) Em quantos dos anagramas da palavra PASTICHO

a) as letras P, A e S aparecem juntas e nessa ordem?
b) as consoantes vêm em ordem alfabética?

14.16) De quantos modos podem ser colocados em fila 6 homens e 6 mulheres de forma que nunca fiquem juntas pessoas de mesmo sexo?

14.17) Em quantos dos anagramas da palavra SABUGOL as vogais e as consoantes estão intercaladas?

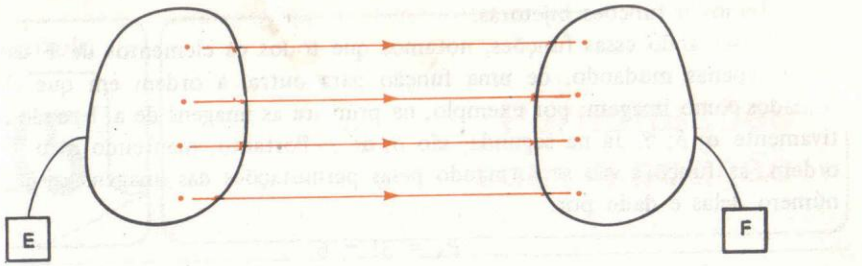
14.18) Relacionando em ordem crescente todos os números obtidos com as permutações simples dos algarismos 4, 5, 6, 7, 8 e 9, que lugar ocupa 687945?

14.19) Determine a soma de todos os números de 5 algarismos distintos formados com 1, 2, 3, 4, 5.

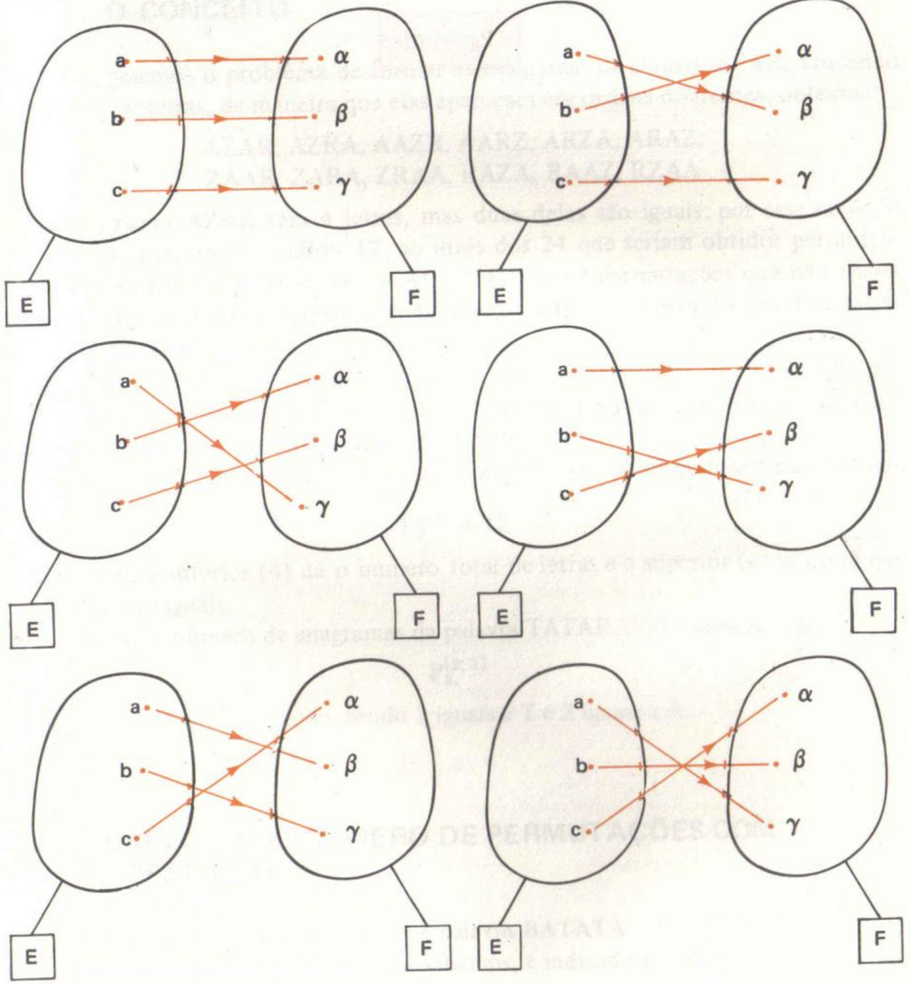
14.20) Determine a soma de todos os números de 4 algarismos distintos formados com 2, 3, 7, 9.

14.2 – O PROBLEMA DO NÚMERO DE FUNÇÕES BIJETORAS

Vamos, primeiramente, recordar: uma função é **bijetora** quando é, simultaneamente, sobrejetora e injetora. Em termos mais simples, sendo E e F dois conjuntos finitos, uma função de E em F é bijetora quando, além de a cada elemento de E corresponder um único elemento de F (requisito para ser função), a cada elemento de F corresponde um único elemento de E, isto é, todos elementos de F são imagens cada um uma única vez. Isso exige que E e F tenham o mesmo número de elementos. Veja o diagrama:



Tomemos, então, como exemplo, E = {a; b; c} e F = {α; β; γ} e vamos formar todas as bijeções de E em F:



Temos 6 funções bijetoras.

Observando essas funções, notamos que todos os elementos de F são utilizados, apenas mudando, de uma função para outra, a ordem em que eles são tomados como imagem; por exemplo, na primeira as imagens de a; b; c são respectivamente α; β; γ. Já na segunda, são β; α; γ. Portanto, mantendo a; b; c nessa ordem, as funções vão se formando pelas permutações das imagens α; β; γ, e o número delas é dado por:

$$P_3 = 3! = 6$$

É imediata a confirmação para o caso geral. Assim, sendo E e F conjuntos de n elementos cada, o **número de funções bijetoras de E em F é:**

$$P_n = n!$$

Capítulo

15

Permutações com repetição

15.1 — O CONCEITO

Imaginemos o problema de formar os anagramas da palavra AZAR. Trocando a posição das letras, de maneira que elas apareçam em ordens diferentes, obtemos:

AZAR, AZRA, AAZR, AARZ, ARZA, ARAZ,
ZAAR, ZARA, ZRAA, RAZA, RAAZ, RZAA

A palavra AZAR tem 4 letras, mas duas delas são iguais; por essa razão, o número de anagramas resultou 12, ao invés dos 24 que seriam obtidos permutando-se 4 elementos *diferentes* ($P_4 = 4! = 24$). As 12 permutações que não apareceram corresponderiam àquelas encontradas pela troca da posição das duas letras iguais, o que é inútil.

O tipo de permutação que vimos ao fazer os anagramas deste exemplo é o que se chama **permutação com repetição**: permutação de um certo número de elementos entre os quais há alguns repetidos.

O **número de permutações** obtidas com a palavra AZAR pode ser indicado por

$$P_4^{(2)} = 12$$

onde o índice inferior (4) dá o número total de letras e o superior (2) informa que duas delas são iguais.

Assim, o número de anagramas da palavra TATARAVÔ é indicado por

$$P_8^{(2;3)}$$

porque temos 8 letras ao todo, sendo 2 iguais a T e 3 iguais a A.

15.2 — CÁLCULO DO NÚMERO DE PERMUTAÇÕES COM REPETIÇÃO

Consideremos, como exemplo, a palavra BATATA.

O número de seus anagramas, já sabemos, é indicado por $P_6^{(3;2)}$.

Para o cálculo desse número podemos seguir o raciocínio:

Nas 6 vagas de que dispomos

___ ___ ___ ___ ___ ___

devemos distribuir as 3 letras A, as 2 letras T e a letra B em todas as posições possíveis.

Como *não podemos trocar* a posição de *letras iguais*, o número de maneiras das letras A ocuparem 3 **quaisquer** das 6 posições é dado por: $C_{6,3}$.

Para cada uma dessas escolhas, restam 3 vagas para as duas letras T. O número de modos delas ocuparem essas vagas é $C_{3,2}$. Automaticamente, a vaga restante é para a letra B.

O total de maneiras de ser feita a distribuição é

$$C_{6,3} \cdot C_{3,2} = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{3!}{2!1!} = \frac{6!}{3!2!}$$

Podemos, então, escrever que

$$P_6^{(3;2)} = \frac{6!}{3!2!}$$

o que nos dá 60 anagramas.

Vamos, agora, enfrentar o caso geral. Seja um grupo de **n** elementos

$$(\underbrace{A_1, A_1, \ldots, A_1}_{n_1}, \underbrace{A_2, A_2, \ldots, A_2}_{n_2}, \ldots, \underbrace{A_k, A_k, \ldots, A_k}_{n_k})$$

contendo
n_1 elementos são iguais a A_1
n_2 elementos são iguais a A_2
n_3 elementos são iguais a A_3
. . . .
n_k elementos são iguais a A_k

(portanto, $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$).

O número de permutações desses elementos é indicado por

$$P_n^{(n_1; n_2; n_3; \ldots; n_k)}$$

e, para calculá-lo, seguimos o raciocínio:

Dispomos de **n** vagas para distribuir os elementos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_k$ em todas as posições possíveis.

Para A_1, devemos escolher n_1 das **n** vagas: temos C_{n, n_1} possibilidades.

Restam então $n - n_1$ vagas para os n_2 elementos iguais a A_2: C_{n-n_1, n_2} possibilidades.

Restam, então, $n - n_1 - n_2$ vagas para os n_3 elementos A_3: $C_{n-n_1-n_2, n_3}$ possibilidades.

E assim sucessivamente, até que restam n_k vagas para os n_k elementos A_k: $C_{n_k, n_k} = 1$ possibilidade.

Logo, pelo **Princípio Fundamental da Contagem**, o total de modos de se fazer a distribuição é:

$$P_n^{(n_1; n_2; n_3; \ldots; n_k)} = C_{n, n_1} \cdot C_{n-n_1, n_2} \cdot C_{n-n_1-n_2, n_3} \cdot \ldots 1 =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \cdot \ldots 1 =$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

Temos, assim, a expressão do número de permutações com repetição:

$$P_n^{(n_1; n_2; n_3; \ldots; n_k)} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

Exercícios Resolvidos

15.1) Quantos anagramas tem a palavra BARBARIDADE?

Solução

Temos 11 elementos, entre os quais 2 iguais a B, 3 iguais a A, 2 iguais a R e 2 iguais a D. O número de anagramas é:

$$P_{11}^{(2;3;2;2)} = \frac{11!}{2!3!2!2!} = 831\,600$$

15.2) Um grupo em que **n** elementos são iguais a A e 2 elementos são iguais a B tem 21 permutações. Determine **n**.

Solução

Se temos **n** elementos A e 2 elementos B, temos um total de n + 2 elementos. Portanto,

$$P_{n+2}^{(n;2)} = 21$$

donde

$$\frac{(n+2)!}{n!2!} = 21 \qquad \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!2} = 21$$

obtemos, então, a equação $n^2 + 3n - 40 = 0$, cujas raízes são $n = -8$ ou $n = 5$. Como $n = -8$ não convém, nossa resposta é $n = 5$.

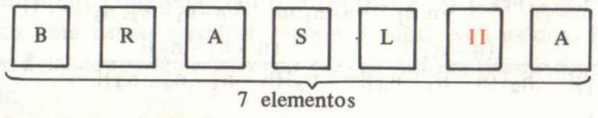
15.3) Em quantos anagramas da palavra BRASILIA as letras iguais a I:

a) aparecem juntas?

b) não aparecem juntas?

Solução

a) Para mantermos as letras I juntas, devemos considerá-las como um só elemento (prendê-las numa caixa)



O número desses anagramas é, então, o total de permutações desses 7 elementos, entre os quais dois são iguais a A:

$$P_7^{(2)} = \frac{7!}{2!} = 2\,520$$

b) O número de anagramas em que II não estão juntas é o total de anagramas de BRASILIA menos o número de anagramas em que II estão juntas.

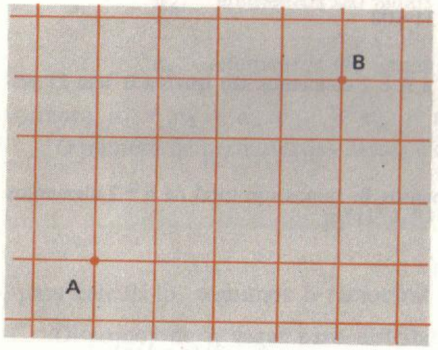
Como BRASÍLIA tem 8 letras, 2 iguais a A e 2 iguais a I, temos:

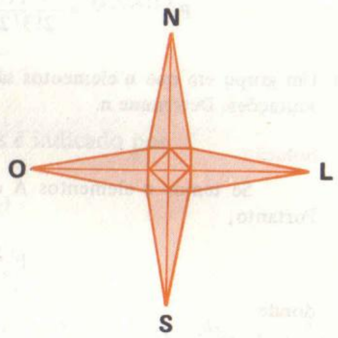
$$P_8^{(2;2)} = \frac{8!}{2!2!} = 10\,080$$

e assim,

$$P_8^{(2;2)} - P_7^{(2)} = 10\,080 - 2\,520 = 7\,560$$

15.4) O diagrama abaixo representa algumas ruas de uma cidade. De quantos modos uma pessoa pode dirigir-se do ponto A ao ponto B utilizando-se, sempre, dos caminhos mais curtos?

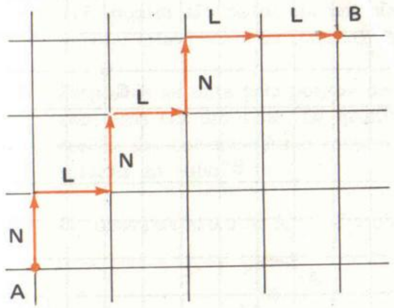




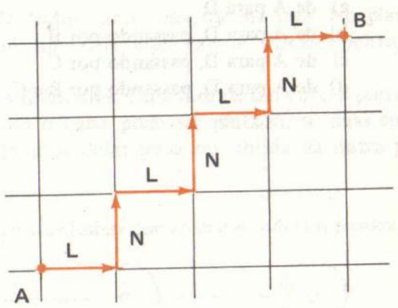
Solução

Primeiro, observamos que o cidadão não pode tomar os sentidos oeste e sul, pois assim aumentaria seu percurso; portanto seu caminho deve se restringir aos percursos possíveis determinados pelo retângulo de que A e B são vértices.

Notamos, agora, que qualquer que seja o itinerário, ele deverá percorrer 4 quarteirões no sentido leste e 3 no sentido norte, dando um total de 7 quarteirões. Vamos, como exemplo, descrever 2 percursos possíveis.



percurso: NLNLNLL



percurso: LNLNLNL

Percebemos que um percurso difere de outro pela posição em que as *atitudes* N (norte) e L (leste) são tomadas.

É fácil, então, verificar que cada percurso é uma permutação de 7 elementos, sendo 4 iguais a L e 3 iguais a N. Logo, o total de trajetos possíveis é:

$$P_7^{(4;3)} = \frac{7!}{4!3!} = 35$$

Exercícios Propostos

15.5) Determine o número de anagramas de:

a) CARNAVAL

b) COCORECO

c) REPRESENTANTE

15.6) Numa livraria, devem ser colocados numa prateleira 3 exemplares de *Dom Casmurro*, 2 de *O Guarani* e 4 de *O Crime do Padre Amaro*. De quantos modos podem ser dispostos esses 9 livros? De quantos modos essa disposição apresenta todos os exemplares iguais juntos?

15.7) Um grupo de **n** elementos iguais a A, 1 elemento B e 1 elemento C dá origem a um total de 72 permutações. Determine **n**.

15.8) Com **n** elementos iguais a A e 3 iguais a B forma-se um total de 7n + 7 permutações. Determine **n**.

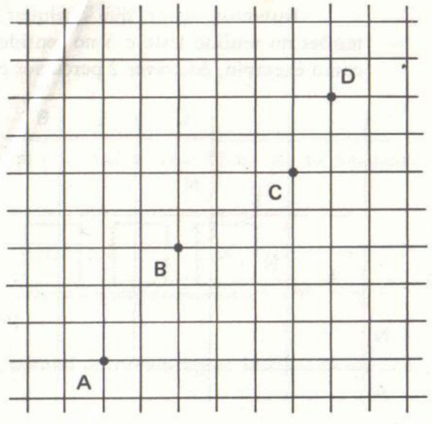
15.9) Em quantos anagramas da palavra COMPETENTE as letras T:

a) estão juntas?

b) não estão juntas?

15.10) Seguindo as linhas do diagrama ao lado, sempre pelos caminhos mais curtos, determine de quantos modos pode-se ir:

a) de A para D
b) de A para D, passando por B
c) de A para D, passando por C
d) de A para D, passando por B e C.

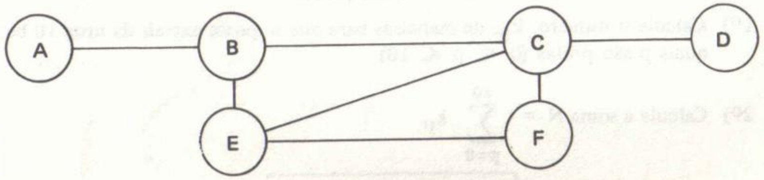


Exercícios Suplementares

IV.1) Três pontos são dados em um plano, não todos sobre uma mesma reta. No plano, quantas retas podem ser traçadas, sendo cada uma delas eqüidistante dos três pontos?

IV.2) Dispomos de tinta para pintura de 6 cores diferentes. Cada face de um cubo é pintada com uma cor diferente. De quantas formas o cubo pode ser pintado, se duas colorações são consideradas a mesma quando uma delas pode ser obtida da outra por rotação do cubo?

IV.3) No diagrama baixo A, B, . . . F indicam ilhas e as linhas que as unem indicam pontes:



Um homem, começando em A, vai de ilha em ilha. Ele pára para almoçar quando não é possível continuar a viajar sem cruzar a mesma ponte duas vezes. Determinar o número de maneiras que ele pode fazer a sua viagem antes de almoçar.

IV.4) Uma camioneta possui nove assentos. De quantas formas podem sentar-se cinco pessoas?

IV.5) Resolva a equação:

$$\frac{(x+4)! + (x+2)!}{3 \cdot [(x+3)!]} = \frac{7}{6}$$

IV.6) Determine os números a, b e c tais que se tenha:

$$(n+3)! - n! = n!(n^3 + an^2 + bn + c)$$

para $n \in \mathbb{N}$.

IV.7) Demonstre que o produto:

$$P = (n+1)(n+2)\dots(2n)$$

de n números inteiros consecutivos é divisível pelo produto dos n primeiros números ímpares. Qual é o quociente?

IV.8) Com n letras distintas a, b, . . . , k, ℓ, quantos monômios do tipo $a^4b^2c^5$ podem ser formados?

IV.9) Considere o conjunto dos números de três algarismos, formados com três algarismos diferentes.

1º) Qual é o número, N, desses números?
2º) Qual é a soma, S, desses números?

IV.10) Em $\mathbb{N}$, quantos números existem?
Em $\mathbb{N}$, existem quantos números menores do que 10^p e cuja soma dos algarismos é 3?

IV.11) Dão-se n números distintos:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

Designa-se por E_p o conjunto das combinações p a p desses n números.
Quantos elementos de E_p possuem um número determinado a_i?

IV.12) Um destacamento de 12 soldados tem de dar cada noite uma guarda de 4 homens. Durante quantas noites podem formar guardas que difiram pelo menos num soldado?

IV.13) Numa urna há 10 bolas brancas e 10 bolas pretas.

1º) Calcule o número, k_p, de maneiras para que se possa extrair da urna 10 bolas, das quais p são pretas ($0 \leqslant p \leqslant 10$)

2º) Calcule a soma $N = \sum_{p=0}^{10} k_p$

IV.14) Quantos números de 6 algarismos podem ser formados usando-se duas vezes o algarismo 1, três vezes o algarismo 2 e uma vez o algarismo 3?

IV.15) Seja P_n o número de permutações com n elementos distintos. Demonstre que:

$$P_n - P_{n-1} = (n-1) P_{n-1}$$

Deduza a igualdade:

$$P_n = 1 + P_1 + 2 P_2 + \ldots + (n-1) P_{n-1}$$

IV.16) De todas as permutações das 9 letras:

xxx yyy zzz

quantas não possuem duas letras x, duas letras y e duas letras z juntas?

PARTE V

Capítulo 16 — **Números binomiais**

Capítulo 17 — **O triângulo de Pascal**

Capítulo 18 — **Binômio de Newton**

Capítulo

16

Números binomiais

16.1 – INTRODUÇÃO

Quando, no capítulo 12, fizemos a determinação do **número** de combinações simples de **n** elementos classe **p** ($o \leqslant p \leqslant n$), tendo chegado à expressão

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

só tínhamos a intenção de obter as respostas numéricas dos problemas que envolvessem combinações.

No entanto, esse **número** apresenta propriedades e aplicações importantíssimas, merecendo um estudo especial – objeto deste capítulo – onde ele é denominado **número binomial.**

A notação comumente usada é $\binom{n}{p}$, mas é evidente que podemos utilizar, também, $C_{n,p}$.

Devemos observar que sendo $\binom{n}{p}$ um número **natural** (pois representa número de combinações), *ele possui todas as propriedades dos números naturais.*

16.2 – DEFINIÇÃO DE NÚMERO BINOMIAL

Sejam **n** e **p** dois números inteiros tais que $0 \leqslant p \leqslant n$. Chama-se **número binomial**, de **numerador n** e **classe p**, todo número dado pela expressão:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Casos particulares – São imediatos os seguintes valores:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

Exemplos

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \qquad \binom{12}{0} = 1$$

$$\binom{12}{1} = 12 \qquad \binom{12}{12} = 1$$

16.3 – SOMA DOS NÚMEROS BINOMIAIS DE MESMO NUMERADOR

Um primeiro problema interessante é o do cálculo da soma de todos os números binomiais de mesmo numerador.

Determinemos, como exemplo, o valor de $\sum_{p=0}^{3} \binom{3}{p}$.

É um caso bastante simples, pois

$$\sum_{p=0}^{3} \binom{3}{p} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$$

onde temos

$$\binom{3}{0} = 1;\ \binom{3}{1} = 3;\ \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = 3;\ \binom{3}{3} = 1$$

Portanto,

$$\sum_{p=0}^{3} \binom{3}{p} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 8 = 2^3$$

É evidente, no entanto, que o cálculo de cada número binomial, no caso em que o numerador seja maior que 3, é por demais trabalhoso. Por isso, vamos determinar o resultado através de uma simples interpretação da notação $\binom{3}{p}$.

Sabemos que $\binom{3}{p}$ é o mesmo que $C_{3,p}$, ou seja, representa o número de combinações de 3 elementos tomados **p** a **p**. Como combinação é **subconjunto**, $\binom{3}{p}$ é o número de subconjuntos de **p** elementos que tem um conjunto de 3 elementos.

Por isso,

$$\binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3}$$

nada mais é do que o total de subconjuntos de um conjunto de 3 elementos, isto é, $2^3 = 8$.

Assim, para o caso geral:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

damos a mesma interpretação: é o total de subconjuntos de um conjunto com n elementos. Logo:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplos

a) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5 = 32$

b) $\sum_{p=0}^{8} \binom{8}{p} = 2^8 = 256$

Exercícios Propostos

• 16.1) Determine n para que exista:

a) $\binom{n-1}{n-3}$ b) $\binom{n+2}{n-2}$

• 16.2) Determine o domínio da função definida por $f(x) = \binom{x+4}{4-x}$

16.3) Sendo $n \in \mathbb{N}^*$, calcule

$$D = \begin{vmatrix} \binom{5}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} \\ \binom{6}{0} & \binom{n+1}{1} & \binom{n+2}{1} \\ \binom{16}{16} & \binom{n+2}{1} & \binom{n+3}{1} \end{vmatrix}$$

16.4) Calcule:

a) $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}$

b) $\sum\limits_{p=0}^{12}\binom{12}{p}$

c) $\sum\limits_{p=0}^{7}\binom{7}{p} + \sum\limits_{p=0}^{11}\binom{11}{p}$

16.5) Calcule:

a) $\sum\limits_{p=1}^{10}\binom{10}{p}$ b) $\sum\limits_{p=2}^{9}\binom{10}{p}$

16.4 – NÚMEROS BINOMIAIS COMPLEMENTARES

Consideremos, por exemplo, os binomiais $\binom{18}{13}$ e $\binom{18}{5}$. Eles apresentam as seguintes particularidades:

1º) têm o mesmo numerador (18)
2º) a soma das classes é igual ao numerador (13 + 5 = 18)

Por isso, $\binom{18}{13}$ e $\binom{18}{5}$ são chamados **binomiais complementares**. Temos, então, a definição:

> Dois números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são complementares se $p + q = n$

Assim, são complementares os seguintes números:

$$\binom{12}{7} \text{ e } \binom{12}{5}; \binom{n}{0} \text{ e } \binom{n}{n}; \binom{n}{3} \text{ e } \binom{n}{n-3} \quad (n \geqslant 3)$$

$$\binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{n-p} \quad (n \geqslant p), \binom{2k+1}{k-1} \text{ e } \binom{2k+1}{k+2} \quad (k \geqslant 1)$$

Propriedade – Consideremos novamente os binomiais $\binom{18}{13}$ e $\binom{18}{5}$

Da definição, vem:

$$\binom{18}{13} = \frac{18!}{13!\,(18-13)!} = \frac{18!}{13!\,5!}$$

$$\binom{18}{5} = \frac{18!}{5!\,(18-5)!} = \frac{18!}{5!\,13!}$$

É evidente que $\binom{18}{13} = \binom{18}{5}$. Então, enunciamos a seguinte propriedade:

> Dois números binomiais complementares são iguais.

De fato, se $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são complementares, tem-se $p + q = n$, donde $p = n - q$. Então:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-q} = \frac{n!}{(n-q)!\,[n-(n-q)]!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-q)!\,q!} = \binom{n}{q}$$

Exemplos

a) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!}$; $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,4!}$

Logo, $\binom{7}{4} = \binom{7}{3}$

b) $\binom{2k}{k-1} = \binom{2k}{k+1}$, pois $(k-1) + (k+1) = 2k$. Temos

$$\binom{2k}{k-1} = \frac{(2k)!}{(k-1)!(k+1)!} \quad \text{e} \quad \binom{2k}{k+1} = \frac{(2k)!}{(k+1)!(k-1)!}$$

Agora, se consideramos como ponto de partida uma igualdade do tipo

$$\binom{18}{x} = \binom{18}{5}$$

como exemplo, percebemos que ela é verdadeira não apenas para o valor x = 13 correspondente ao complementar de $\binom{18}{5}$, mas também para x = 5:

$$\binom{18}{x} = \binom{18}{5}$$

$$\binom{18}{5} = \binom{18}{5} \qquad\qquad \binom{18}{13} = \binom{18}{5}$$

Pode-se, então, notar que:

se dois números binomiais de mesmo numerador são iguais, então ou eles têm classes iguais, ou são complementares, e reciprocamente

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \iff p = q \text{ ou } p + q = n$$

Exemplos

c) $\binom{25}{p} = \binom{25}{q} \iff p = 9$ ou $p = 16$

d) $\binom{20}{x+1} = \binom{20}{12} \iff \begin{cases} x + 1 = 12 \Rightarrow x = 11 \\ \text{ou} \\ x + 1 + 12 = 20 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$

Exercícios Resolvidos

16.6) Resolva a equação $\binom{18}{x^2-1} = \binom{18}{3}$.

Solução

Da igualdade de números binomiais de mesmo numerador vem

$x^2 - 1 = 3$ ou $x^2 - 1 + 3 = 18$

Da primeira equação: $x = 2$ ou $x = -2$

Da segunda, $x = 4$ ou $x = -4$

Como, para esses quatro valores encontrados, o binomial $\binom{18}{x^2-1}$ **está definido,** temos: $V = \{-4; -2; 2; 4\}$

16.7) Resolva a equação $\binom{16x-2}{6x-1} = \binom{16x-2}{2x+1}$

Solução

Da igualdade de números binomiais de mesmo numerador vem:

$6x - 1 = 2x + 1$ ou $6x - 1 + 2x + 1 = 16x - 2$

donde obtemos $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{1}{4}$

Observando que para $x = \frac{1}{4}$ **os binomiais não estão definidos, temos** $V = \{\frac{1}{2}\}$

16.8) Sendo $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, onde $n \geqslant k \geqslant 0$, mostre que n é *par*.

Solução

Da igualdade dada, vem:

$k = k + 1$ **(impossível) ou** $k + k + 1 = n + 1$

Logo, temos $n = 2k$ **ou seja, n é par.**

Exercícios Propostos

•16.9) Dê os números binomiais complementares de:

a) $\binom{0}{0}$ b) $\binom{10}{10}$ c) $\binom{100}{39}$ d) $\binom{n}{1}$

e) $\binom{n}{n-3}$ f) $\binom{n+1}{n-1}$ g) $\binom{2n-2}{n+3}$

16.10) O determinante

$$\begin{vmatrix} \binom{12}{3} & \binom{12}{9} & 6! \\ \binom{13}{6} & \binom{13}{7} & 1! \\ \binom{14}{9} & \binom{14}{5} & 4! \end{vmatrix}$$

vale zero. Justifique.

16.11) Resolva as equações

a) $\binom{15}{x^2 - 2} = \binom{15}{7}$ b) $\binom{26}{2x - 4} = \binom{26}{3x - 5}$

c) $\binom{x^2}{x + 3} = \binom{x^2}{x + 5}$ d) $\binom{90x^2 + 3}{3x + 7} = \binom{90x^2 + 3}{9x + 5}$

e) $\binom{10}{x + 1} = \binom{10}{2x - 11}$

16.12) Resolva os sistemas

a) $\begin{cases} \binom{x}{y} = \binom{x}{3} \\ \binom{78}{x + y} = \binom{78}{y} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \binom{x + y}{5} = \binom{x + y}{7} \\ \binom{16}{2x - y} = \binom{16}{2x + y} \end{cases}$

16.13) Sendo $\binom{n + 2}{k} = \binom{n + 2}{k + 1}$, mostre que n é ímpar.

16.14) Considere os números binomiais

$$\binom{n}{p + q} \text{ e } \binom{n}{p - q}$$

onde, n, p e q são números naturais e $q \neq 0$.
a) Determine as condições para que esses binomiais estejam simultaneamente definidos.
b) Mostre que, se esses binomiais são iguais, então n é par.

16.15) Sendo $\binom{n}{3k - 1} = \binom{n}{2k + 1}$, mostre que n é múltiplo de 5, sendo $k \neq 2$ (k inteiro).

16.5 – NÚMEROS BINOMIAIS CONSECUTIVOS

Consideremos, por exemplo, os números $\binom{23}{13}$ e $\binom{23}{14}$. Eles apresentam as seguintes particularidades:

1º) têm o mesmo numerador (23);

2º) suas classes são números consecutivos (13 e 14).

Por isso, $\binom{23}{13}$ e $\binom{23}{14}$ são chamados **binomiais consecutivos**. Temos, então, que:

dois números binomiais $\binom{n}{p}$ e $\binom{n}{q}$ são consecutivos se p e q são números consecutivos.

Assim, são consecutivos os seguintes binomiais:

$$\binom{18}{7} \text{ e } \binom{18}{8};\ \binom{26}{16} \text{ e } \binom{26}{15};\ \binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{p + 1};\ \binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{p - 1}$$

Propriedade 2 – (RELAÇÃO DE FERMAT)

Para dois *números binomiais consecutivos* $\binom{n}{p + 1}$ e $\binom{n}{p}$, com $p \geq 0$, tem-se:

$$\binom{n}{p + 1} = \frac{n - p}{p + 1} \cdot \binom{n}{p}$$

Demonstração:

$$\boxed{2^{\underline{o}} \text{ membro}} = \frac{n - p}{p + 1} \cdot \binom{n}{p} = \frac{n - p}{p + 1} \cdot \frac{n!}{p!(n - p)!} =$$

$$= \frac{n - p}{(p + 1)p!} \cdot \frac{n!}{(n - p)(n - p - 1)!} = \frac{n!}{(p + 1)![n - (p + 1)]} =$$

$$= \binom{n}{p + 1} = \boxed{1^{\underline{o}} \text{ membro}}$$

Exemplos

a) $\binom{18}{8} = \binom{18}{7} \cdot \frac{18-7}{7+1} = \frac{11}{8}\binom{18}{7}$

b) $\binom{26}{16} = \binom{26}{15} \cdot \frac{26-15}{15+1} = \frac{11}{16}\binom{26}{15}$

c) $\binom{19}{4} = \binom{19}{3} \frac{19-3}{3+1} = 4\binom{19}{3}$

Exercícios Resolvidos

16.16) Resolva a equação $\binom{x}{7} = 5\binom{x}{6}$

Solução

Da propriedade 2, vem que $\binom{x}{7} = \binom{x}{6}\frac{x-6}{6+1}$. Então, a equação se escreve:

$$\binom{x}{6} \cdot \frac{x-6}{7} = 5\binom{x}{6}$$

donde $\frac{x-6}{7} = 5$ ou seja, $x = 29$

Logo, $V = \{29\}$

16.17) Resolva a equação $\binom{x}{10} = \frac{136}{45}\binom{x}{8}$

Solução

Devemos *reduzir* a classe do número $\binom{x}{10}$ para 8; para isso, fazemos duas aplicações sucessivas da propriedade 2:

$$\binom{x}{10} = \binom{x}{9}\frac{x-9}{9+1} = \binom{x}{8}\frac{x-8}{8+1} \cdot \frac{x-9}{10}$$

Então, a equação dada se escreve

$$\binom{x}{8}\frac{x-8}{9} \cdot \frac{x-9}{10} = \frac{136}{45}\binom{x}{8}$$

que, simplificada, resulta em $x^2 - 17x - 200 = 0$. As raízes dessa última equação são $x = 25$ ou $x = -8$.

Como $x = -8$ não convém, temos $V = \{25\}$

16.18) Mostre que $(n+2)\binom{2n}{n+2} = (n-1)\binom{2n}{n-1}$

Solução

Vamos aplicar a propriedade 2 ao primeiro membro:

$$(n+2)\binom{2n}{n+2} = (n+2)\binom{2n}{n+1}\frac{2n-(n+1)}{n+1+1} = \binom{2n}{n+1}(n-1) = A$$

É evidente que poderíamos ir reduzindo a classe do binomial que encontramos na expressão A até chegarmos à classe $n - 1$ do binomial do segundo membro. Mas, se lembrarmos dos *binomiais complementares*, podemos escrever

$$\binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n-1}$$

Então,

$$A = \binom{2n}{n+1}(n-1) = \binom{2n}{n-1}(n-1)$$

que é o segundo membro.

Exercícios Propostos

16.19) Resolva as equações

a) $\binom{x}{10} = 3\binom{x}{9}$

b) $\binom{x}{6} = \frac{3}{2}\binom{x}{5}$

16.20) Resolva as equações

a) $\binom{x}{7} = \frac{15}{7}\binom{x}{5}$

b) $\binom{x}{8} = \frac{13}{4}\binom{x}{6}$

16.21) Mostre que $n\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} = p\binom{n+1}{p+1}$

16.6 – RELAÇÃO DE STIFEL

A propriedade 2, que acabamos de estudar, nos dá uma *relação* entre dois binomiais consecutivos. Vamos, agora, ver como efetuar a *soma de dois números binomiais consecutivos* ou, invertendo o sentido de leitura, como *decompor* um número binomial numa soma de binomiais. É a seguinte a **Relação de Stifel:**

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Demonstração

$$\boxed{1^{\circ} \text{ membro}} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p}\frac{n-p}{p+1} =$$

$$= \binom{n}{p}\left[1 + \frac{n-p}{p+1}\right] = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{n+1}{p+1} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} =$$

$$= \binom{n+1}{p+1} = \boxed{2^{\circ} \text{ membro}}$$

Exemplos

a) $\binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \binom{11}{6}$

b) $\binom{21}{11} + \binom{21}{10} = \binom{22}{11}$

c) $\binom{13}{8} = \binom{12}{8} + \binom{12}{7}$

d) $\binom{17}{10} = \binom{16}{10} + \binom{16}{9}$

e) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2} = \binom{n}{k-1}$

f) $\binom{k-1}{m} = \binom{k-2}{m} + \binom{k-2}{m-1}$

Exercícios Resolvidos

16.22) Resolva a equação $\binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \binom{11}{x}$

Solução

Da Relação de Stifel, temos que

$$\binom{10}{5} + \binom{10}{6} = \binom{11}{6}$$

Então, a equação fica $\binom{11}{6} = \binom{11}{x}$

Da igualdade de binomiais de mesmo numerador: $x = 6$ ou $x + 6 = 11$

Logo, $V = \{5; 6\}$

16.23) Resolva a equação $\binom{24}{7} + \binom{24}{16} = \binom{25}{x^2}$

Solução

Em primeiro lugar, lembramos da igualdade de binomiais complementares:

$$\binom{24}{16} = \binom{24}{8}$$

e reescrevemos a equação como:

$$\binom{24}{7} + \binom{24}{8} = \binom{25}{x^2}$$

Aplicando a Relação de Stifel ao primeiro membro, vem

$$\binom{25}{8} = \binom{25}{x^2}$$

donde $x^2 = 8$ ou $8 + x^2 = 25$

e daí, $x = \pm 2\sqrt{2}$ ou $x = \pm\sqrt{17}$

Como o binomial $\binom{25}{x^2}$ está definido para esses 4 valores de x,

$V = \{-\sqrt{17}, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \sqrt{17}\}$

16.24) Resolva a equação $\binom{17}{5} + \binom{17}{x} = \binom{18}{6}$

Solução

Nesse caso é conveniente decompormos, pela Relação de Stifel, o segundo membro da equação

$$\binom{18}{6} = \binom{17}{6} + \binom{17}{5}$$

Podemos, então, escrever

$$\binom{17}{5} + \binom{17}{x} = \binom{17}{6} + \binom{17}{5}$$

donde

$$\binom{17}{x} = \binom{17}{6}$$

e daí, $x = 6$ ou $x + 6 = 17$

Logo, $V = \{6; 11\}$

16.25) Mostre que

$$\binom{n+2}{p} + \binom{n+1}{p-1} = \frac{n+p+2}{p}\binom{n+1}{p-1}$$

Solução

Da Relação de Stifel, temos

$$\binom{n+2}{p} = \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p-1}$$

e escrevemos

$$\boxed{1^{\underline{o}} \text{ membro}} = \binom{n+2}{p} + \binom{n+1}{p-1} = \binom{n+1}{p} + \binom{n+1}{p-1} + \binom{n+1}{p-1} =$$

$$= \binom{n+1}{p-1}\frac{n+1-(p-1)}{p} + 2\binom{n+1}{p-1} = \binom{n+1}{p-1}\left[\frac{n-p+2}{p} + 2\right] =$$

$$= \binom{n+1}{p-1}\frac{n+p+2}{p} = \boxed{2^{\underline{o}} \text{ membro}}$$

Exercícios Propostos

•16.26) Dê o valor verdadeiro (V) ou falso (F):

a) $\binom{18}{11} + \binom{18}{12} = \binom{19}{12}$

b) $\binom{20}{8} + \binom{20}{7} = \binom{21}{13}$

c) $\binom{15}{5} = \binom{14}{5} + \binom{14}{10}$

d) $\binom{23}{8} + \binom{23}{9} + \binom{24}{10} = \binom{25}{10}$

•16.27) Resolva as equações

a) $\binom{18}{10} + \binom{18}{9} = \binom{19}{2x+3}$

b) $\binom{29}{21} + \binom{29}{22} = \binom{30}{x^2-3}$

•16.28) Resolva as equações

a) $\binom{13}{x} + \binom{13}{7} = \binom{14}{8}$

b) $\binom{20}{13} + \binom{20}{2x} = \binom{21}{8}$

•16.29) Resolva a equação

$$\binom{102}{51} = 2\binom{100}{x-1} + 2\binom{100}{50}$$

•16.30) Mostre que

$$\binom{n+1}{p} - \binom{n-1}{p-2} = \frac{n+p}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Capítulo

17

O Triângulo de Pascal

17.1 – O TRIÂNGULO DE PASCAL

Os números binomiais, como vimos, apresentam uma série de propriedades interessantes.

Vamos, agora, construir uma **tabela**, com os números binomiais, onde algumas das propriedades já conhecidas serão visualizadas, e outras poderão ser encontradas.

Essa tabela é formada de modo que, em cada **linha**, tem-se uma seqüência de todos os números binomiais de **mesmo numerador e classes crescentes** e, em cada **coluna**, tem-se números binomiais de **mesma classe**, com **numeradores crescentes**:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0} \quad \binom{6}{1} \quad \binom{6}{2} \quad \binom{6}{3} \quad \binom{6}{4} \quad \binom{6}{5} \quad \binom{6}{6}$$

....

Essa tabela é conhecida por **Triângulo de Pascal**.

Se calcularmos os valores dos números binomiais, o Triângulo se escreve:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1
...	...	...	...	...	...	...

Notamos que:

– o primeiro elemento da tabela é $1 = \binom{0}{0}$;

– cada nova linha possui um elemento a mais que a linha anterior;

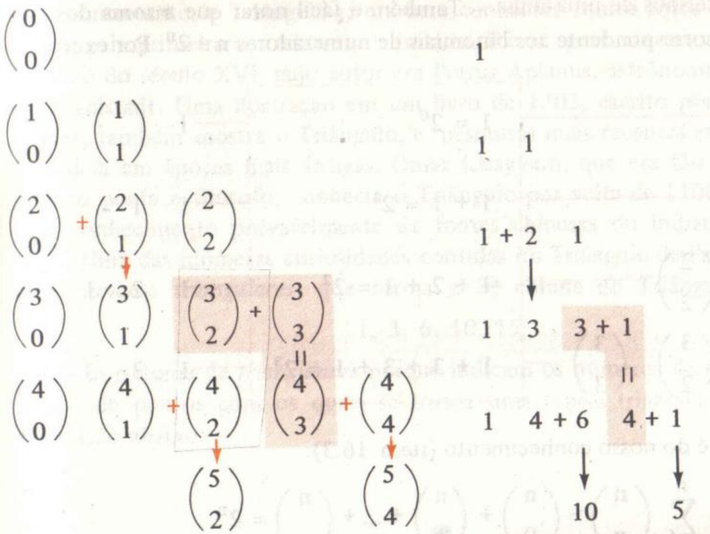
– todas as linhas começam e terminam pelo número 1 (pois $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$).

A primeira questão que surge ao escrevermos o Triângulo com os **valores** dos números binomiais é como evitar o trabalho de cálculo desses números pela fórmula $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Isso é facilmente resolvido com as observações acima e com a

Relação de Stifel no Triângulo. Já sabemos que, por exemplo,

$$\binom{3}{2} + \binom{3}{3} = \binom{4}{3}$$

Notando que $\binom{3}{2}$ e $\binom{3}{3}$ são dois termos consecutivos de uma linha do Triângulo, sua **soma é igual ao termo, da linha seguinte, que está abaixo da segunda parcela dessa soma**, isto é, $\binom{4}{3}$ está abaixo de $\binom{3}{3}$. Observe esse e outros exemplos, todos garantidos pela Relação de Stifel:

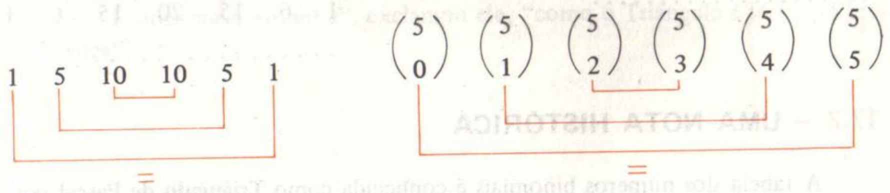


Então, podemos, a partir dessa observação, construir o Triângulo, linha por linha, sem lançar mão da fórmula de cálculo de números binomiais.

Por exemplo, a partir da última linha completa acima, temos

1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1
...	...	...	...	...	...	...	...

Números binomiais complementares – É bastante fácil notar que, em cada linha do triângulo, os **termos equidistantes dos extremos são iguais**. Por exemplo, na 6ª linha



Justificativa imediata: são números binomiais **complementares**.

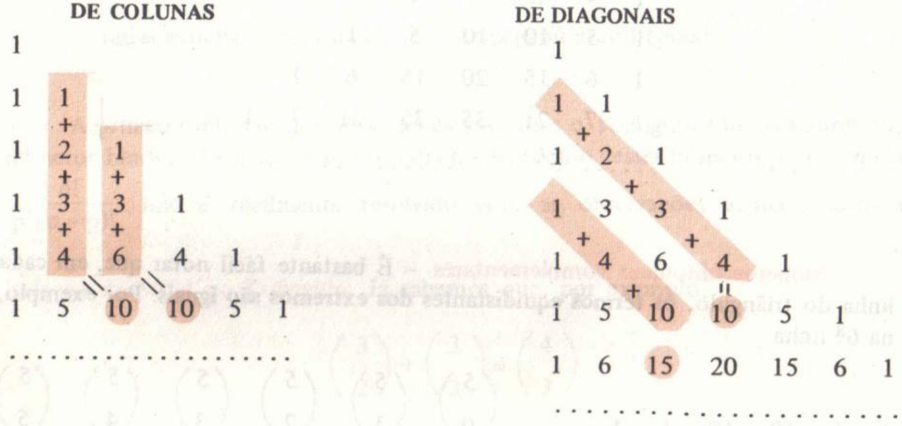
Soma dos termos de uma linha – Também é fácil notar que a **soma dos elementos da linha** correspondente aos binomiais de numeradores **n** é 2^n. Por exemplo,

$\binom{0}{0}$	$1 = 2^0$	1
$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	$1 + 1 = 2^1$	1 1
$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	$1 + 2 + 1 = 2^2$	1 2 1
$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	$1 + 3 + 3 + 1 = 2^3$	1 3 3 1

Esse fato já é do nosso conhecimento (item 16.3):

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Outras propriedades – Podemos ainda notar as seguintes propriedades (observe o esquema com exemplos):



17.2 – UMA NOTA HISTÓRICA

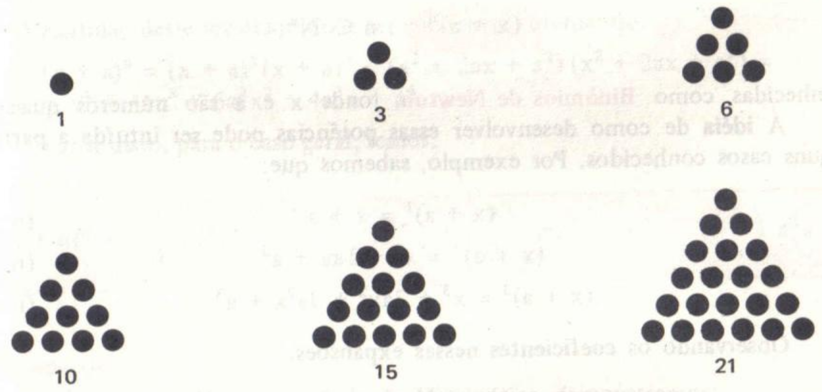
A tabela dos números binomiais é conhecida como **Triângulo de Pascal** porque foi **Blaise Pascal**, matemático e filósofo francês do século XVII, quem primeiro escreveu um tratado sobre ela: *Traité du triangle arithmétique*.

Entretanto, o Triângulo já era bem conhecido muito antes de 1653, quando Pascal pela primeira vez editou seu tratado. Ele já aparecera em uma aritmética do começo do século XVI, cujo autor era Petrus Apianus, astrônomo da Universidade de Ingolstadt. Uma ilustração em um livro de 1303, escrito por um matemático chinês, também mostra o Triângulo, e pesquisas mais recentes encontraram vestígios dela em épocas mais antigas. Omar Khayyam, que era tão bom matemático quanto poeta e filósofo, conhecia o Triângulo por volta de 1100, tendo recebido esse conhecimento provavelmente de fontes chinesas ou indianas, mais antigas.

Uma das inúmeras curiosidades contidas no Triângulo de Pascal é a seqüência dos *números triangulares*, que forma a **3ª coluna** do Triângulo. Os números:

1, 3, 6, 10, 15, ...

recebem o nome de *triangulares* porque indicam os números de elementos de conjuntos de pontos com os quais se forma uma tabela triangular, como sugere a ilustração abaixo:



Qualquer um de nós pode estudar o Triângulo e nele descobrir mais propriedades, mas é improvável que elas serão novas, pois o que foi citado aqui nem sequer arranha a superfície de uma vasta literatura. O próprio Pascal, no seu tratado a respeito do Triângulo, disse que estava deixando de publicar muito mais do que incluía. "É uma coisa estranha", exclamou ele, "como o Triângulo é fértil em propriedades!".

Capítulo

18 Binômio de Newton

18.1 – INTRODUÇÃO: COMO DESENVOLVER $(x + a)^n$

Entre as aplicações dos números binomiais, damos destaque especial ao desenvolvimento de potências do tipo

$$(x + a)^n \quad , n \in \mathbb{N}^*,$$

conhecidas como **Binômios de Newton,** onde **x** e **a** são números quaisquer.

A **idéia** de como desenvolver essas potências pode ser intuída a partir de alguns casos conhecidos. Por exemplo, sabemos que:

$$(x + a)^1 = x + a \qquad (n = 1)$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \qquad (n = 2)$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \qquad (n = 3)$$

Observando os **coeficientes** nessas expansões:

1	1			(n = 1)
1	2	1		(n = 2)
1	3	3	1	(n = 3)

vemos reproduzidas algumas linhas do **Triângulo de Pascal** e podemos, portanto, escrever esses coeficientes na notação binomial $\binom{n}{p}$.

Repetindo, então, aqueles exemplos, temos:

$$(x + a)^1 = \binom{1}{0} a^0x^1 \binom{1}{1} a^1x^0$$

$$(x + a)^2 = \binom{2}{0} a^0x^2 + \binom{2}{1} a^1x^1 + \binom{2}{2} a^2x^0$$

$$(x + a)^3 = \binom{3}{0} a^0x^3 + \binom{3}{1} a^1x^2 + \binom{3}{2} a^2x^1 + \binom{3}{3} a^3x^0$$

Esses casos particulares *sugerem* que ao desenvolvermos $(x + a)^n$, **os coeficientes do desenvolvimento são (todos) os números binomiais de numerador n**; em cada parcela, a recebe como expoente **a classe do binomial** e x recebe como expoente **a diferença entre o numerador e a classe do binomial.**

Vamos aplicar essa idéia para $(x + a)^4$:

$$(x + a)^4 = \binom{4}{0} a^0x^4 + \binom{4}{1} a^1x^3 + \binom{4}{2} a^2x^1 + \binom{4}{3} a^3x^1 + \binom{4}{4} a^4x^0$$

Substituindo os binomiais pelos seus valores (que podem ser tomados na linha do numerador 4 do **Triângulo de Pascal**), temos

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

A exatidão deste resultado pode ser confirmada efetuando:

$$(x + a)^4 = (x + a)^2(x + a)^2 = (x^2 + 2ax + a^2)(x^2 + 2ax + a^2) =$$
$$= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

A partir disto, para o caso geral, temos:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0x^n + \binom{n}{1} a^1x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n} a^nx^0$$

Demonstração

Recorrendo ao **Método da Indução Matemática**, demonstramos:

Teorema 1

Para n = 1, já verificamos que é verdadeira.

Teorema 2

Admitindo que a fórmula é verdadeira para n - 1, isto é, que:

$$(x + a)^{n-1} = \binom{n-1}{0} a^0x^{n-1} + \binom{n-1}{1} a^1x^{n-2} + \binom{n-1}{2} a^2x^{n-3} + \dots +$$
$$+ \binom{n-1}{n-1} a^{n-1}x^0 \qquad \text{(I)}$$

Vamos provar que também é para **n**.

Sendo $(x+a)^n = (x+a)^{n-1}\cdot(x+a) = \underbrace{(x+a)^{n-1}}_{(I)}\cdot x + \underbrace{(x+a)^{n-1}}_{(I)}\cdot a,$

temos:

$(x+a)^{n-1}\cdot x =$

$$= \binom{n-1}{0}a^0x^n + \binom{n-1}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n-1}{2}a^2x^{n-2} + \dots + \binom{n-1}{n-1}a^{n-1}x^1 \quad \text{(II)}$$

$(x+a)^{n-1}\cdot a =$

$$= \binom{n-1}{0}a^1x^{n-1} + \binom{n-1}{1}a^2x^{n-2} + \binom{n-1}{2}a^3x^{n-3} + \dots + \binom{n-1}{n-1}a^nx^0 \quad \text{(III)}$$

Somando, membro a membro, (II) e (III), obtemos:

$$(x+a)^n = \binom{n-1}{0}a^0x^n + \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right]a^1x^{n-1} +$$

$$+ \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right]a^2x^{n-2} + \dots + \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1}\right]a^{n-1}x^1 +$$

$$+ \binom{n-1}{n-1}a^nx^0$$

Lembrando que $\binom{n-1}{0} = \binom{n}{0}$ e $\binom{n-1}{n-1} = \binom{n}{n}$, e aplicando a **Relação de Stifel** nas expressões entre colchetes, vem

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}a^0x^n + \binom{n}{1}a^1x^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n}a^nx^0$$

que é a tese do **Teorema 2.**

Observações – Tomemos mais um exemplo:

$(x+a)^5 =$

$$= \binom{5}{0}a^0x^5 + \binom{5}{1}a^1x^4 + \binom{5}{2}a^2x^3 + \binom{5}{3}a^3x^4 + \binom{5}{4}a^4x^1 + \binom{5}{5}a^5x^0$$

Notemos que cada termo desse desenvolvimento tem a forma $\binom{5}{p}a^px^{5-p}$, onde **p** pode assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5. Por isso, podemos escrever, compactamente:

$$(x+a)^5 = \sum_{p=0}^{5}\binom{5}{p}a^px^{5-p}$$

Também percebemos que o desenvolvimento de $(x+a)^5$ tem 6 termos. Então, fazemos as observações:

1ª) O desenvolvimento de $(x+a)^n$ é

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^px^{n-p}$$

2ª) Esse desenvolvimento tem **n + 1** termos

18.2 – DESENVOLVIMENTO DE $(x - a)^n$

Vimos acima que cada parcela do desenvolvimento de $(x + a)^n$ tem a forma

$$\binom{n}{p}a^px^{n-p}$$

No caso de $(x - a)^n$, se observarmos que

$$(x-a)^n = [x + (-a)]^n$$

percebemos que suas parcelas serão do mesmo tipo que as de $(x+a)^n$, apenas substituindo a por (-a). Assim:

$$\binom{n}{p}(-a)^px^{n-p}$$

Mas, como $(-a)^p = [(-1)a]^p = (-1)^pa^p$, temos

$$\binom{n}{p}(-a)^px^{n-p} = (-1)^p\binom{n}{p}a^px^{n-p}$$

A interpretação é muito simples: para desenvolvermos $(x - a)^n$ usamos o mesmo processo de $(x+a)^n$, precedendo, cada termo, com o sinal **+ quando p é par** e **– quando p é ímpar** (pois $(-1)^p = 1$, se **p** é par e $(-1)^p = -1$ se **p** é ímpar).

Exercícios Propostos

18.5) Desenvolva

a) $(x - a)^5$ b) $(x + 2)^4$

c) $(x - 2)^6$ d) $(x + \frac{1}{x})^5$

18.6) Calcule o valor de:

a) $2^5 + \binom{5}{1} 2^4 \cdot 7 + \binom{5}{2} 2^3 \cdot 7^2 + ... + 7^5$

b) $5^6 - \binom{6}{1} 5^5 \cdot 3 + \binom{6}{2} 5^4 \cdot 3^2 - ... + 3^6$

c) $7^4 + 4 \cdot 7^3 \cdot 3 + 6 \cdot 7^2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 7 \cdot 3^3 + 3^4$

d) $101^5 - 5 \cdot 101^4 + 10 \cdot 101^3 - 10 \cdot 101^2 + 5 \cdot 101 - 1$

18.7) Calcule

a) $\sum_{p=0}^{8} \binom{8}{p} 2^p \cdot 3^{8-p}$

b) $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 11^p \cdot 2^{2n-2p}$

c) $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p\, 21^p \cdot 11^{n-p} \binom{n}{p}$

d) $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} 11^{n-p}$

e) $\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} 11^p$

18.8) Calcule

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + ... + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Sugestão: idéia do exercício 18.4

18.9) Calcule

a) $\sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2p}$, n par b) $\sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2p}$, n ímpar

Sugestão: utilize os resultados dos exercícios 18.4 e 18.8

18.3 – FÓRMULAS DO TERMO GERAL

Um problema bastante comum é o de se obter um determinado termo do desenvolvimento de $(x + a)^n$ ou de $(x - a)^n$, sem que haja necessidade de se efetuar a expansão.

Já sabemos que em

$$(x + a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n + \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} + ... + \binom{n}{n} a^n x^0$$

cada parcela tem a forma $\binom{n}{p} a^p x^{n-p}$

Notemos que, para p = 0, obtemos o **primeiro termo** do desenvolvimento; vamos representá-lo por T_1:

$$T_1 = \binom{n}{0} a^0 x^n$$

Para p = 1, temos o **segundo termo** T_2:

$$T_2 = \binom{n}{1} a^1 x^{n-1}$$

Para p = 2, temos o **terceiro termo** T_3:

$$T_3 = \binom{n}{2} a^2 x^{n-2}$$

e assim por diante. Vemos, então, que o número que representa a **posição** do termo na expansão é uma unidade **maior** que a classe do coeficiente binomial. Por isso podemos escrever genericamente que:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

Essa expressão é conhecida como **termo geral** de $(x + a)^n$ pois, como **x**, **a** e **n** são números fixados pelo binômio, para cada valor que dermos a **p** obteremos uma determinada parcela do desenvolvimento.

Analogamente, para $(x - a)^n$

$$(x - a)^n = \binom{n}{0} a^0 x^n - \binom{n}{1} a^1 x^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 x^{n-2} - ...$$

como a única modificação é o sinal (-) precedendo os coeficientes binomiais de classe ímpar, a expressão do **termo geral** é

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

Exemplos

a) Considere o binômio $(x + 2y)^{15}$. Comparando com $(x + a)^n$, temos $a = 2y$ e $n = 15$.

A expressão do *termo geral* é, então:

$$T_{p+1} = \binom{15}{p} (2y)^p x^{15-p}$$

Para acharmos o 5º termo de seu desenvolvimento, fazemos $p + 1 = 5$ e obtemos $p = 4$:

$$T_5 = \binom{15}{4} (2y)^4 x^{15-4} = \binom{15}{4} \cdot 16y^4x^{11} = 21\,840y^4x^{11}$$

b) Considere o binômio $(x^2 - 2x)^{12}$. Comparando com $(x - a)^n$, temos x^2 no lugar de x, $a = 2x$ e $n = 12$.

A expressão do *termo geral* é:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{12}{p} (2x)^p (x^2)^{12-p}$$

que pode ser simplificada:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{12}{p} 2^p x^p x^{24-2p} = (-1)^p \binom{12}{p} 2^p x^{24-p}$$

Para obtermos, por exemplo, o 10º termo do desenvolvimento, fazemos $p + 1 = 10$, vindo $p = 9$:

$$T_{10} = (-1)^9 \binom{12}{9} 2^9 x^{24-9}$$

Logo, $T_{10} = -112\,640x^{15}$

Exercícios Resolvidos

18.10) Determine o termo em x^{10} do desenvolvimento de $(x - \frac{1}{x})^{20}$

Solução

Devemos, em primeiro lugar, escrever a expressão do *termo geral* desse binômio. Comparando-o com $(x - a)^n$, temos $a = \frac{1}{x}$ e $n = 20$. Então,

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p} = (-1)^p \binom{20}{p} (\frac{1}{x})^p x^{20-p}$$

Simplificando-o, temos

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{20}{p} x^{20-2p}$$

Como queremos o expoente de x igual a 10, fazemos

$$20 - 2p = 10 \quad \text{donde} \quad p = 5$$

Substituindo esse valor em T_{p+1}, vem

$$T_{5+1} = (-1)^5 \binom{20}{5} x^{20-2\cdot5} = -15\,504x^{10}$$

18.11) Calcule o *termo independente* de x no desenvolvimento de $(\sqrt{x} + \frac{2}{x})^9$

Solução

Comparando o binômio dado com $(x + a)^n$, temos $\sqrt{x}$ no lugar de x, $a = \frac{2}{x}$ e $n = 9$. Seu *termo geral*, então, se escreve:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p} = \binom{9}{p} (\frac{2}{x})^p (\sqrt{x})^{9-p}$$

Simplificando: $T_{p+1} = \binom{9}{p} 2^p x^{\frac{9-3p}{2}}$

O *termo independente* de x é obtido fazendo o expoente de x igual a zero. Assim:

$$\frac{9 - 3p}{2} = 0 \quad \text{donde} \quad p = 3$$

Substituindo esse valor em T_{p+1}, vem

$$T_{3+1} = \binom{9}{3} 2^3 x^{\frac{9-3\cdot3}{2}} = 672$$

18.12) Calcule o *termo médio* do desenvolvimento de $(3x^2 - \frac{2}{x})^8$

Solução

Usando a fórmula do *termo geral* de $(x - a)^n$:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$$

onde temos $3x^2$ no lugar de x, $a = \frac{2}{x}$ e n = 8, vem:

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{8}{p} (\frac{2}{x})^p (3x^2)^{8-p}$$

que, simplificado, é igual a

$$T_{p+1} = (-1)^p \binom{8}{p} 2^p \cdot 3^{8-p} \cdot x^{16-3p}$$

Lembremos, agora, que nas expansões de $(x \pm a)^n$ surgem n + 1 termos; no nosso caso (n = 8) temos 9 termos e, portanto, o *termo médio* procurado é o 5º:

Então, fazemos, na expressão de T_{p+1}, p + 1 = 5:

$$T_5 = (-1)^4 \binom{8}{4} 2^4 \cdot 3^{8-4} \cdot x^{16-3\cdot 4} = \binom{8}{4} 2^4 \cdot 3^4 \cdot x^4 = 362\ 880x^4$$

18.13) Sabendo que no desenvolvimento de $(x + a)^n$ são iguais os coeficientes binomiais do 6º e 20º termos, determine n.

Solução

Na expressão $T_{p+1} = \binom{n}{p} a^p x^{n-p}$ vemos que:

a) para o 6º termo, p + 1 = 6, temos o coeficiente binomial $\binom{n}{5}$

b) para o 20º termo, p + 1 = 20, temos o coeficiente binomial $\binom{n}{19}$

Então, devemos ter $\binom{n}{5} = \binom{n}{19}$; isto só é possível se forem números binomiais complementares. Logo,

$$5 + 19 = n \Longrightarrow n = 24$$

18.14) Ao elevarmos a expressão ax + b, a > 0, a um expoente $n \in \mathbb{N}^*$, uma das parcelas encontradas é $26\ 730 b^7x^4$. Determine a e n.

Solução

O *termo geral* do desenvolvimento de $(ax + b)^n$ é dado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p} b^p (ax)^{n-p}$$

Para que um desses possíveis termos seja $26\ 730 b^7x^4$, devemos ter

$$\binom{n}{p} b^p a^{n-p} x^{n-p} = 26\ 730 b^7x^4$$

Dessa igualdade é imediato que

$$\begin{cases} p = 7 & \text{(I)} \\ n - p = 4 & \text{(II)} \\ \binom{n}{p} a^{n-p} = 26\ 730 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I) e (II) vem n = 11.
Como p = 7 e n = 11, a igualdade (III) se escreve:

$$\binom{11}{7} a^{11-7} = 26\ 730$$

isto é

$$330 a^4 = 26730$$

donde $a^4 = 81$, ou seja, $a = \pm 3$. Como a > 0, vem a = 3.

18.15) Quantos *termos racionais* surgem no desenvolvimento de $(\sqrt[3]{5} + \sqrt{2})^8$?

Solução

O termo geral desse binômio é

$$T_{p+1} = \binom{8}{p} (\sqrt{2})^p (\sqrt[3]{5})^{8-p}$$

Esse termo será um número racional quando os radicais forem *cancelados*, o que ocorrerá quando, simultaneamente, p for par e 8 – p for múltiplo de 3, com $0 \leq p \leq 8$. Então, as possibilidades são:

Para p = par: p = 0; 2; 4; 6; 8
Para 8 – p = múltiplo de 3: p = 2; 5; 8

Assim, para ocorrerem ambas as condições, tomamos os valores comuns, isto é, a intersecção dos conjuntos {0; 2; 4; 6; 8} e {2; 5; 8}.

Portanto, p = 2 ou p = 8, o que quer dizer que existem dois termos racionais no desenvolvimento:

$$p = 2: \quad T_{2+1} = \binom{8}{2} (\sqrt{2})^2 (\sqrt[3]{5})^{8-2} = 1400$$

$$p = 8: \quad T_{8+1} = \binom{8}{8} (\sqrt{2})^8 (\sqrt[3]{5})^{8-8} = 16$$

18.16) Calcule o *termo em* x^{21} do desenvolvimento de $(x^2 + x + a)^{12}$

Solução

O trinômio dado pode ser escrito na forma de um binômio $(X + A)^n$ se percebermos que

$$(x^2 + x + a)^{12} = [\underbrace{x^2}_{X} + \underbrace{(x + a)}_{A}]^{12}$$

O termo geral de $(X + A)^n$ é

$$T' = \binom{n}{p} A^p X^{n-p}$$

Obtemos, então, um *desenvolvimento parcial* em que o termo geral se escreve

$$T' = \binom{12}{p} (x + a)^p \cdot (x^2)^{12-p}$$

Mas T′ encerra a expressão $(x + a)^p$ que se expande através de termos do tipo

$$\binom{p}{k} a^k x^{p-k} \qquad (k = 0; 1; 2; \dots ; p)$$

Portanto, a expressão T′ também será desenvolvida em uma soma de termos cujo termo geral é

$$T = \binom{12}{p}\binom{p}{k} a^k \cdot x^{p-k} \cdot (x^2)^{12-p}$$

ou, simplificando:

$$T = \binom{12}{p}\binom{p}{k} a^k x^{24-p-k}$$

(note que devemos ter $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant 12$)

Deste modo, T representa um termo qualquer do desenvolvimento de $(x^2 + x + a)^{12}$.

Como queremos x^{21}, devemos impor:

$$24 - p - k = 21$$

ou seja,

$$p + k = 3$$

As possíveis duplas (p; k) são

$$p = 0;\ k = 3$$
$$p = 1;\ k = 2$$
$$p = 2;\ k = 1$$
$$p = 3;\ k = 0$$

Como $p \geqslant k$, apenas as duas últimas duplas nos convêm.

O fato de termos encontrado dois pares (p; k) significa que no desenvolvimento de $(x^2 + x + a)^{12}$ surgem duas parcelas com x^{21}:

para $p = 2$ e $k = 1$, temos

$$T = \binom{12}{2}\binom{2}{1} a^1 x^{24-2-1} = 132ax^{21}$$

para $p = 3$ e $k = 0$, temos

$$T = \binom{12}{3}\binom{3}{0} a^0 x^{24-3-0} = 220x^{21}$$

No caso de se querer, após o desenvolvimento, reduzi-los a um único termo em x^{21}, teremos:

$$132ax^{21} + 220x^{21} = 44\,(3a + 5)\,x^{21}$$

Exercícios Propostos

18.17) Calcule, dos desenvolvimentos dados,

a) o 6º termo de $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{10}$

b) o 14º termo de $(\frac{2}{x} - x^4)^{16}$

18.18) Calcule, dos desenvolvimentos dados,

a) o termo em x^8 de $(x^2 + \frac{1}{x^3})^{14}$

b) o termo em x^{11} de $(x^2 - 5x)^7$

c) o termo em x^{13} de $(\sqrt{x} - x^2)^{16}$

18.19) Calcule o termo independente de x do desenvolvimento de:

a) $(2x - \frac{3}{x^2})^9$

b) $(x^2 - \frac{4}{x^3})^{15}$

c) $(x^3 + \frac{1}{x})^{11}$

18.20) Calcule o termo médio do desenvolvimento de

a) $(2x^3 - \sqrt[3]{x})^{12}$ b) $(\sqrt{x} + \frac{1}{x})^{10}$

18.21) Sabendo que, no desenvolvimento de $(x - a)^n$, são iguais os coeficientes binomiais do 13º e 18º termos, determine n

18.22) Sabendo que, no desenvolvimento de $(2x + a)^9$ são iguais os coeficientes de x^3 e x^7, determine a real

18.23) Ao elevarmos a expressão ax − b a um expoente $n \in \mathbb{N}^*$, uma das parcelas é $-28\,500b^{17}x^3$. Determine a e n (a real)

•18.24) Quantos termos racionais tem o desenvolvimento de $(\sqrt[4]{3} - \sqrt[3]{2})^{22}$?
Determine a posição desses termos no desenvolvimento

• 18.25) Determine o termo em

a) x^{16} do desenvolvimento de $(x^2 + x + 2)^{10}$

b) x^{44} do desenvolvimento de $(x^3 - x^2 - 1)^{16}$

18.4 – ALGUMAS APLICAÇÕES DO BINÔMIO DE NEWTON

Mostraremos, neste item, algumas das aplicações do desenvolvimento de $(x + a)^n$

Exercícios Resolvidos

18.26) **Aproximação usando o Teorema do Binômio**

Quando a é "pequeno" comparado com x, uma primeira aproximação para $(x + a)^n$ é dada pelos dois primeiros termos do desenvolvimento binomial, isto é:

$$(x + a)^n \cong x^n + nx^{n-1} \cdot a$$

Uma segunda e melhor aproximação é dada pelos três primeiros termos do desenvolvimento binomial, isto é:

$$(x + a)^n \cong x^n + nx^{n-1} \cdot a + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} \cdot a^2$$

e assim sucessivamente...

A aproximação escolhida em um problema particular é feita no processo de trabalho, e depende da exatidão exigida no resultado.

Problema : calcular com aproximação de 4 casas decimais $(0{,}99)^5$

$$(0{,}99)^5 = (1 - 0{,}01)^5 = 1 - 5 \cdot (0{,}01) + 10 \cdot (0{,}01)^2 - 10(0{,}01)^3 + 5(0{,}01)^4 - (0{,}01)^5 =$$
$$= (1 - 0{,}05 + 0{,}001 - \underbrace{0{,}00001 + 0{,}00000005 - \dots}_{\substack{\text{negligenciável} \\ \text{para aproximação} \\ \text{de 4 casas decimais}}}) \cong 0{,}95099$$

A aproximação acima tem 5 casas decimais exatas; para uma aproximação com 4 casas decimais, abandonamos a 5ª casa, obtendo:

$$0{,}9510$$

Observe que ao abandonarmos a 5ª casa obtivemos:

$$0{,}9509$$

Mas, o valor 0,9510 é uma melhor aproximação para 4 casas decimais (aproximação "por excesso")

18.27) Calcule, utilizando o binômio de Newton, a soma S_n dos n primeiros números naturais.

Solução

Considerando o desenvolvimento

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

fazemos x assumir, sucessivamente, os valores 1, 2, 3, 4, ... , n. Assim:

$$\begin{array}{ll}
x = 1: & 2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 \\
x = 2: & 3^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 \\
x = 3: & 4^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 \\
\vdots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x = n: & (n + 1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1
\end{array}$$

Somando todas essas igualdades, obtemos

$$(n + 1)^2 = 1^2 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

Como $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = S_n$, temos

$$(n + 1)^2 = 1 + 2\,S_n + n$$

donde $$S_n = \frac{(n + 1)^2 - n - 1}{2}$$

que simplificada fornece

$$S_n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

18.28) Calcule a soma

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

É dado que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

Solução

Para o cálculo da soma dos cubos dos n primeiros números naturais (positivos), consideramos o desenvolvimento de $(x + 1)^4$:

$$(x + 1)^4 = \binom{4}{0} x^4 + \binom{4}{1} 1^1 \cdot x^3 + \binom{4}{2} 1^2 \cdot x^2 + \binom{4}{3} 1^3 x^1 + \binom{4}{4} 1^4$$

Temos, então:

$$(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

Fazemos, agora, x assumir sucessivamente os valores 1, 2, 3, ... , n. Assim:

$$\begin{array}{ll}
x = 1: & 2^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1 \\
x = 2: & 3^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1 \\
x = 3: & 4^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1 \\
\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x = n: & (n + 1)^4 = n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1
\end{array}$$

Somando todas essas igualdades, obtemos

$$(n + 1)^4 = 1^4 + 4 \cdot [1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3] + 6 \cdot [1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2] + $$
$$+ 4 \cdot [1 + 2 + 3 + ... + n] + n$$

Nessa última igualdade, temos que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = C_n \quad \text{(a soma pedida)}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \quad \text{(dado do exercício)}$$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2} \quad \text{(resultado obtido no exercício anterior)}$$

Podemos, então, escrever:

$$(n + 1)^4 = 1 + 4\,C_n + 6 \cdot \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + 4 \cdot \frac{n(n + 1)}{2} + n$$

Donde tiramos

$$C_n = \frac{(n + 1)^4 - (n + 1) - n(n + 1)(2n + 1) - 2n(n + 1)}{4}$$

Simplificando, vem

$$C_n = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Observação: os dois últimos exercícios resolvidos nos mostram que para o cálculo de somas da forma

$$1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

podemos utilizar o desenvolvimento do binômio

$$(x + 1)^{k+1}$$

e nele fazer sucessivamente $x = 1, 2, 3, ..., n$.

Exercícios Propostos

18.29) Calcule, com aproximação de 3 casas decimais:

a) $(1{,}04)^{20}$ b) $(2{,}002)^8$

18.30) Calcule a soma Q_n dos quadrados dos n primeiros números naturais.

18.31) Conhecidos os resultados

$$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$Q_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$C_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

calcule

a) $\sum_{p=1}^{20} (p^2 + 1)$ b) $\sum_{p=1}^{n} (p^3 - 3p)$ c) $\sum_{p=1}^{19} p^4$

Exercícios Suplementares

V.1) Para os inteiros n e p, $0 \leqslant p \leqslant n$, calcule:

$$\prod_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$$

V.2) O inteiro n ($n > 2$) permanece constante quando p assume todos os valores inteiros de 1 a n. Qual é o menor e qual é o maior valor de $\binom{n}{p}$?

V.3) Mostre que:

$$\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right]\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right]\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right] \cdots \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] =$$
$$= \frac{(n + 1)^n}{n!}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\binom{n}{3}\cdots\binom{n}{n}$$

V.4) 1º) Escreva o desenvolvimento de $(1 + x)^n$ pela fórmula do binômio. Observe que $\binom{n}{q}$ é o coeficiente de x^q ($q = 0, 1, ... n$)

2º) Calcule o coeficiente de x^q ($q \leqslant n$ e $q \leqslant p$) no desenvolvimento de cada um dos dois membros da igualdade:

$$(1 + x)^n \cdot (1 + x)^p = (1 + x)^{n+p}$$

Deduza a fórmula:

$$\binom{n}{0}\binom{p}{q} + \binom{n}{1}\binom{p}{q-1} + ... + \binom{n}{q}\binom{p}{0} = \binom{n+p}{q}$$

Fazendo $n = p = q$ na fórmula acima, deduza que:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + ... + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

V.5) Seja a um número real positivo e n um inteiro positivo.

1º) Escreva o desenvolvimento de $(1 + a)^n$ segundo as potências crescentes de a.

2º) Designa-se por u_p o termo desse desenvolvimento que contém a^p.

Calcule $\frac{u_{p+1}}{u_p}$. Para que valores de p tem-se $u_{p+1} \geqslant u_p$?

3º) Qual é o *maior termo* do desenvolvimento de $(1 + a)^n$? Determinar esse maior termo para os desenvolvimentos de $(1 + \pi)^{1000}$ e de $(1 + \frac{51}{50})^{100}$

V.6) Determine n para que os coeficientes de x^4, x^5 e x^6 no desenvolvimento de $(1 + x)^n$ estejam em P.A.

V.7) A razão entre o terceiro e o quarto termos no desenvolvimento de $(2 + 3x)^n$, segundo potências crescentes de x, é $\frac{5}{14}$ quando $x = \frac{2}{5}$. Determine n.

V.8) Sabe-se que a, b e n são inteiros positivos e que os três primeiros termos na expansão binomial de $(a + b)^n$ são 729, 2 916 e 4 860 respectivamente. Determine a, b e n.

V.9) Desenvolva $(c + 2y)^5$ pela fórmula do binômio. Aplique o resultado para calcular $(1{,}02)^5$ com 4 casas decimais corretas.

V.10) Prove que se x e y são inteiros positivos, o número $(x + y)^5 - x^5 - y^5$ é divisível por 5.

V.11) No desenvolvimento de $(1 - 2x + ax^2)^4$ como um polinômio em x, o coeficiente de x^3 é zero. Calcule a, e determine o coeficiente de x^4.

V.12) Os três primeiros termos no desenvolvimento, segundo as potências crescentes de x, de $(1 + 2x + ax^2)^n$, $n \in \mathbb{Z}_+^*$, são: $1 + 2nx + \lambda x^3$. Calcule a e λ em função de n.

V.13) Determine o inteiro positivo p para que os coeficientes de x e de x^2 no desenvolvimento de $(1 + x)^{2p} \cdot (1 - x)^p$ sejam iguais.

V.14) O desenvolvimento de $(1 + x)^{10}(1 + ax + bx^2)$, segundo potências crescentes de x, começa com $1 + x + x^2$. Determine a e b.

PARTE VI

Capítulo 19 — Complementos da análise combinatória

Capítulo

19

Complementos da análise combinatória

19.1 – PERMUTAÇÕES CIRCULARES

O tipo de problema que vamos estudar neste item trata, em síntese, de determinar de quantas maneiras podemos dispor **n** elementos distintos *em torno de um círculo.*

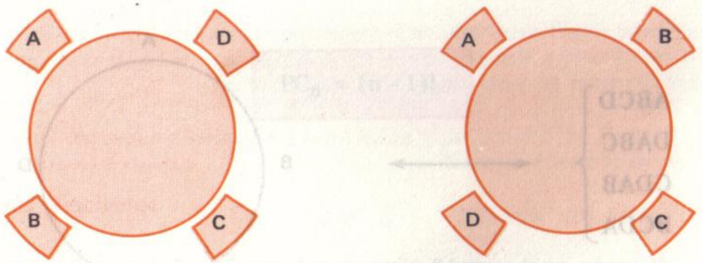
Cada uma dessas maneiras é chamada de uma **permutação circular** dos **n** elementos, e indicaremos o total desses agrupamentos por:

$$PC_n$$

Para melhor entendermos o conceito, vamos imaginar, como exemplo, que quatro pessoas A, B, C e D vão sentar-se em volta de uma mesa redonda, *não havendo lugares preferenciais.*

O número de modos de dispor essas pessoas é indicado, então, por PC_4.

Inicialmente, devemos compreender o que diferencia as possíveis disposições. Consideremos duas quaisquer:

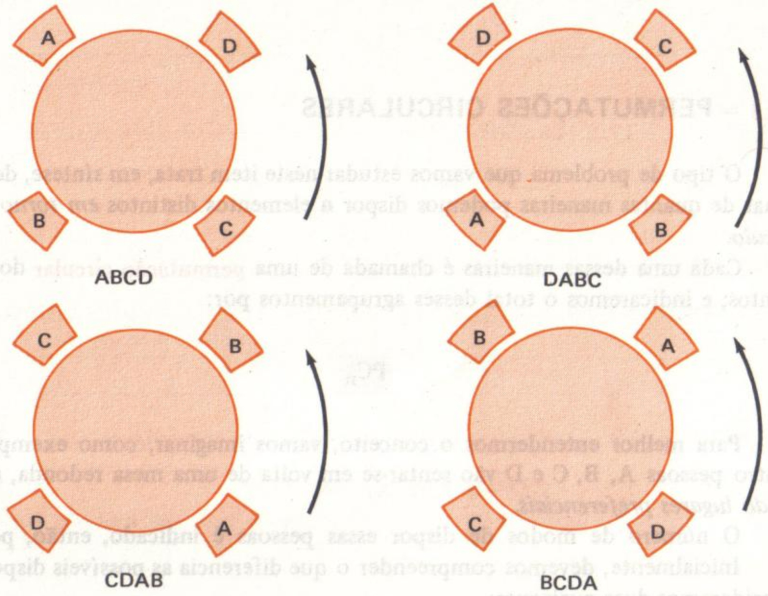


É fácil notar que houve, de uma para outra, uma mudança na *posição relativa* das pessoas; por exemplo, em ambas, A e D estão lado a lado mas, na primeira, D está *à esquerda* de A e, na segunda, D está *à direita* de A.

Dizemos, aqui, que duas permutações circulares são diferentes quando a posição relativa dos elementos é diferente.

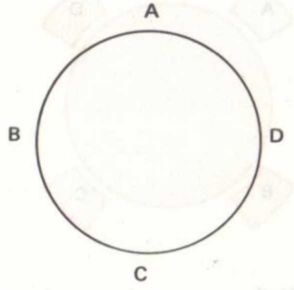
É preciso, então, observar que, se a partir de uma das disposições possíveis, apenas fizermos os elementos *girarem em conjunto* ao redor do círculo, sem alterar a posição de *uns em relação aos outros*, todas as distribuições assim obtidas são equivalentes e por isso consideradas como uma única permutação circular.

Assim, no caso do nosso exemplo, as seguintes 4 figuras

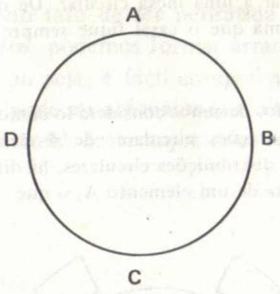


definem 4 permutações **simples** que constituem uma só permutação **circular**:

ABCD
DABC
CDAB
BCDA



É evidente que a uma outra disposição qualquer dessas pessoas também correspondem 4 permutações simples:



ADCB
BADC
CBAD
DCBA

Essa observação nos leva a estabelecer uma proporção: *como a uma permutação circular de 4 elementos corresponde um grupo de 4 permutações simples*, temos:

$$1 \text{ (circular)} \longrightarrow 4 \text{ (simples)}$$
$$PC_4 \longrightarrow P_4$$

e daí, que

$$PC_4 = \frac{P_4}{4} = \frac{4!}{4} = 6$$

De modo análogo, concluímos que *a cada permutação circular de* n *elementos corresponde um grupo de* n *permutações simples.* Então, temos:

$$1 \text{ (circular)} \longrightarrow n \text{ (simples)}$$
$$PC_n \longrightarrow P_n$$

Portanto,

$$PC_n = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n}$$

donde

$$PC_n = (n-1)!$$

Exercícios Resolvidos

19.1) **De quantas maneiras 8 crianças podem ocupar os 8 lugares de um carrossel?**

Solução

Tratando-se de dispor as 8 crianças em um círculo, o total de modos é

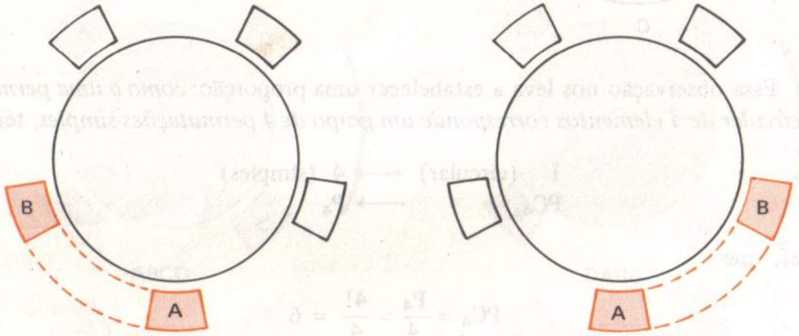
$$PC_8 = (8-1)! = 7! = 5\,040$$

19.2) Cinco pessoas (entre elas um casal) devem sentar a uma mesa circular. De quantos modos pode ser feita a sua disposição, de tal forma que o casal fique sempre junto?

Solução

É evidente que para mantermos o casal *unido*, devemos considerá-lo como *um só elemento* e, portanto, calcular o total de permutações circulares de 4 elementos.

No entanto, não devemos esquecer que, nas distribuições circulares, há diferença entre um elemento B estar à esquerda ou à direita de um elemento A, o que nos dá 2 possibilidades:



Assim, o total de modos é

$$2\,PC_4 = 2(4-1)! = 2 \cdot 3! = 2 \cdot 6 = 12$$

Exercícios Propostos

19.3) De quantos modos podem 6 crianças se colocarem em roda?

19.4) Das 8 pessoas que devem sentar-se à uma mesa, A e B nunca podem ser vizinhas. Quantas são as disposições possíveis?

19.5) Um joalheiro dispõe de 4 tipos de pedras preciosas para confeccionar broches (com as pedras em círculo) e alianças, usando em cada jóia uma pedra de cada tipo. Quantos broches diferentes ele pode construir? E quantas alianças?

19.6) Os 8 lugares de um carrossel serão ocupados por 4 meninos e 4 meninas. Quantas são as maneiras de se fazer a ocupação de modo que meninos e meninas fiquem intercalados?

19.2 – ARRANJOS COM REPETIÇÃO

Neste item, voltamos a formar, com os elementos de um conjunto E, **agrupamentos ordenados**, podendo agora permitir que um elemento compareça mais de uma vez em cada grupo: são os arranjos com repetição.

Pelo fato de ser permitida a repetição, se por exemplo o conjunto E tem 3 elementos, podemos formar arranjos desses elementos tomados 4 a 4, tomados 5 a 5 etc., ou seja, é fácil compreendermos que agora a **classe** de um arranjo com repetição **pode ser até maior que o número de elementos de E.**

O total de arranjos com repetição de **n** elementos classe **k** é indicado por

$$AR_{n,k}$$

Exemplos

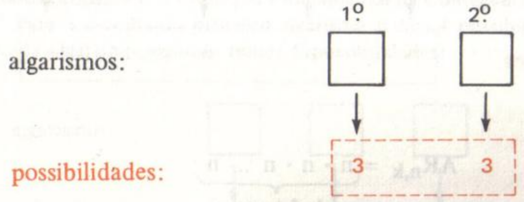
a) Consideremos $E = \{6; 8; 9\}$. Os **números de 2 algarismos** que podemos formar com esses elementos são

66	86	96
68	88	98
69	89	99

Temos, então, 9 arranjos de 3 elementos tomados 2 a 2, e podemos escrever

$$AR_{3,2} = 9$$

A esse resultado também se chega através do Princípio Fundamental da Contagem: para a escolha do primeiro algarismo temos 3 possibilidades e, como podemos repetir, para a escolha do segundo temos 3 possibilidades:



Então, o total desses números é

$$AR_{3,2} = 3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

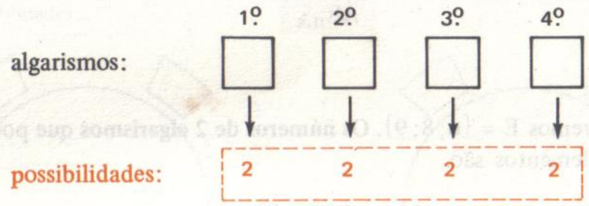
b) Seja $E = \{5; 7\}$. Os números de 4 algarismos que podemos formar com esses elementos são

5555	5755	7555	7755
5557	5757	7557	7757
5575	5775	7575	7775
5577	5777	7577	7777

Temos, então, 16 arranjos de 2 elementos tomados 4 a 4, e podemos escrever

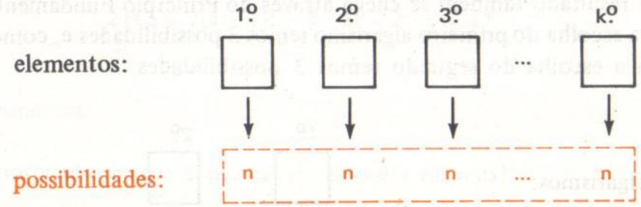
$$AR_{2,4} = 16$$

Ou, como fizemos no exemplo anterior:



$$AR_{2,4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$$

Se procedermos de modo análogo para o cálculo do número de arranjos com repetição de **n** elementos tomados **k** a **k**:



Obtemos

$$AR_{n,k} = \underbrace{n \cdot n \cdot n \ldots n}_{k \text{ fatores}}$$

ou seja

$$\boxed{AR_{n,k} = n^k}$$

Observação. Para os casos em que $k = 0$ e $k = 1$, temos

$$AR_{n,0} = n^0 = 1$$

$$AR_{n,1} = n^1 = n$$

A exemplo do que fizemos nos arranjos simples, consideramos o conjunto ϕ como um arranjo de classe zero e os conjuntos unitários como arranjos de classe 1.

Exercício Resolvido

19.7) Quantos números de 3 algarismos podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 8?

Solução

Podemos resolver de duas maneiras:

1º modo: (utilizando o conceito de arranjo)

Cada número é um arranjo com repetição de 5 elementos classe 3; seu total é, então

$$AR_{5,3} = 5^3 = 125$$

Nesse total, no entanto, estão incluídos os agrupamentos que começam com o zero e que não são números de 3 algarismos:

Fixando o zero, temos 5 elementos para ocupar as duas casas restantes, dando-nos

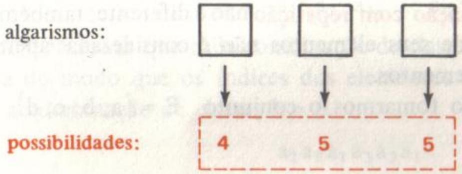
$$AR_{5,2} = 5^2 = 25 \text{ agrupamentos}$$

Logo, o total de números é

$$AR_{5,3} - A_{5,2} = 125 - 25 = 100$$

2º modo: (utilizando o Princípio Fundamental da Contagem)

Para a escolha do primeiro algarismo temos 4 possibilidades (excluímos o zero); para cada algarismo seguinte temos 5 possibilidades:



Logo, o total de números é

$$4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$$

Nota – O leitor percebeu, com esse exercício, que muitos dos problemas do capítulo 9 referentes ao Princípio Fundamental da Contagem podem ser resolvidos com o conceito de arranjos com repetição e, pela própria exposição desse conceito, que os problemas de arranjos com repetição podem, todos, ser resolvidos por aquele Princípio. Por isso, os exercícios propostos a seguir não constituem novidade.

Exercícios Propostos

19.8) Dispondo de 3 cores, de quantos modos podemos pintar, cada uma de uma só cor, 5 casas dispostas em fila?

19.9) Cada *sinal* do Código Morse é formado por pontos e traços. Determine o número de sinais que podem ser formados com

a) 4 desses dois símbolos
b) até 4 desses dois símbolos

19.10) Quantos são os números naturais de 5 algarismos nos quais aparecem algarismos repetidos?

19.11) Num país as placas dos automóveis são constituídas de 2 letras (escolhidas de um alfabeto de 26 letras) seguidas de dois algarismos, sendo excluídas as placas que têm dois zeros e, também, as placas que têm duas letras O. Determine o total de automóveis que podem ser emplacados nesse país.

19.3 – COMBINAÇÕES COM REPETIÇÃO

Quando estudamos as combinações *simples*, aprendemos que elas são agrupamentos (de elementos distintos) que não se modificam quando se altera a ordem de seus elementos. Por exemplo, sabemos que as combinações de classe 3

$$\{7; 8; 9\}, \{8; 7; 9\}, \{9; 8; 7\}$$

são todas **iguais**.

O conceito de **combinação com repetição** não é diferente: também é um agrupamento em que a ordem de seus elementos não é considerada; apenas, agora, é permitida a repetição de elementos.

Assim, se por exemplo tomarmos o conjunto $E = \{a; b; c; d\}$, os agrupamentos

aa			
ab	bb		
ac	bc	cc	
ad	bd	cd	dd

são as combinações (com repetição), de classe 2, dos 4 elementos de E.

É evidente, então, que aqui os agrupamentos **ab** e **ba** são iguais, o mesmo acontecendo com **bd** e **db**; e os agrupamentos **ab** e **bd** são diferentes porque têm elementos diferentes.

O número de combinações com repetição dos **n** elementos de um conjunto E tomados **k** a **k** é indicado por

$$CR_{n,k}$$

No exemplo acima, temos $n = 4$, $k = 2$ e $CR_{4,2} = 10$.

Exemplos

a) Consideremos $E = \{a; b; c\}$. As combinações de classe 3 desses elementos são

aaa	aab	aac
abb	abc	acc
bbb	bbc	bcc
ccc		

Temos, então, que $CR_{3,3} = 10$.

b) Seja $E = \{\alpha; \beta\}$. As combinações de classe 4 desses elementos são

$$\alpha\alpha\alpha\alpha \quad \alpha\alpha\alpha\beta \quad \alpha\alpha\beta\beta \quad \alpha\beta\beta\beta \quad \beta\beta\beta\beta$$

Temos, então, que $CR_{2,4} = 5$.

Cálculo de $CR_{n,k}$

Para determinarmos o número de combinações com repetição no caso geral, consideremos o conjunto

$$E = \{a_1; a_2; a_3; ...; a_n\}$$

e vamos convencionar que cada combinação de classe k de seus elementos será sempre escrita de modo que os índices dos elementos fiquem em ordem natural; por exemplo, a combinação de classe $k = 6$

$$a_2\,a_5\,a_1\,a_3\,a_3\,a_1$$

deve ser apresentada na forma

$$a_1\,a_1\,a_2\,a_3\,a_3\,a_5 \qquad \text{(I)}$$

Em seguida, trocamos cada elemento da combinação pela letra x afetada de um novo índice, que é obtido somando-se o índice antigo com o número de elementos que precedem o elemento considerado. Por exemplo na combinação (I), o elemento a_2 será substituído por x_4, o segundo dos elementos a_3 será substituído por x_7; essa combinação passa então a

$$x_1\,x_2\,x_4\,x_6\,x_7\,x_{10}$$

Para reforçar, outro exemplo: a combinação de classe $k = 6$

$$a_4 a_4 a_4 a_6 a_8 a_n \quad \text{(II)}$$

passa a

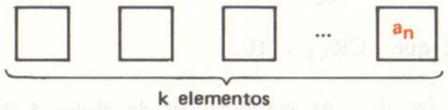
$$x_4 x_5 x_6 x_9 x_{12} x_{n+5}$$

Devemos observar que, com esse recurso, cada combinação de classe k acaba tendo todos os seus elementos com índices diferentes.

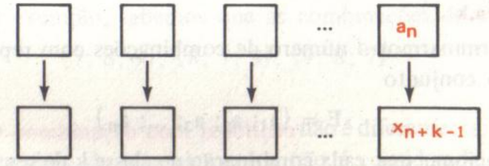
É fundamental notar, também, que a letra x terá índice máximo quando o elemento a_n ocupar a última posição da combinação. Por exemplo, na combinação (II) o elemento a_n é substituído por x_{n+5}; o índice $n + 5$ é o maior possível quando se tem uma combinação de classe $k = 6$.

Qual é, então, o índice máximo de x no caso de uma combinação de classe k qualquer?

Fazendo a_n ser o último dos k elementos da combinação



ele deve ser trocado por x com o índice n somado aos $k - 1$ elementos que o precedem.



Assim, o índice máximo é $n + k - 1$.

Com tudo isso percebemos que cada combinação com repetição de classe k com os elementos de

$$E = \{a_1; a_2; a_3; \ldots, a_n\}$$

é representada por uma combinação simples de classe k dos elementos de

$$F = \{x_1; x_2; x_3; \ldots; x_{n+k-1}\}$$

o que nos leva a concluir que

$$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k}$$

Exemplos

$$CR_{4,2} = C_{4+2-1,2} = C_{5,2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

$$CR_{3,4} = C_{3+4-1,4} = C_{6,4} = C_{6,2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$$

$$CR_{5,5} = C_{5+5-1,5} = C_{9,5} = 126$$

Exercícios Resolvidos

19.12) Podendo escolher entre os sabores hortelã, laranja e limão, de quantos modos uma criança pode comprar 5 balas?

Solução

Notando que cada grupo de 5 balas é uma combinação de elementos repetidos escolhidos entre os 3 sabores, o total de modos é

$$CR_{3,5} = C_{3+5-1,5} = C_{7,5} = 21$$

19.13) Podendo escolher entre 5 tipos de queijo e 4 marcas de vinho de quantos modos é possível comprar 2 formas de queijo e 3 garrafas de vinho?

Solução

O problema se resolve em duas etapas:

1º) *escolha das formas de queijo*

Como se dispõe de 5 tipos para escolher 2 (iguais ou não), o número de possibilidades é $CR_{5,2} = C_{6,2} = 15$.

2º) *escolha das garrafas de vinho*

Como se dispõe de 4 marcas para escolher 3 garrafas (iguais ou não) o número de possibilidades é $CR_{4,3} = C_{6,3} = 20$.

Finalmente, o número de possibilidades de compra de queijo e vinho é

$$CR_{5,2} \cdot CR_{4,3} = 15 \cdot 20 = 300$$

19.14) Determine o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

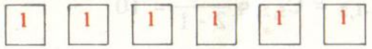
Solução

É evidente que para se obter uma soma de 3 números inteiros não negativos igual a 6, tais números devem ser escolhidos convenientemente entre os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Por exemplo, as trincas

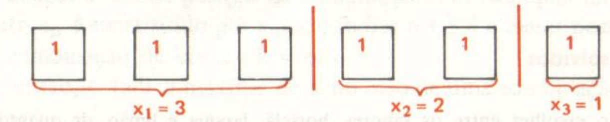
$$(0; 2; 4), \quad (2; 2; 2), \quad (0; 0; 6)$$

são *algumas* das soluções da equação.

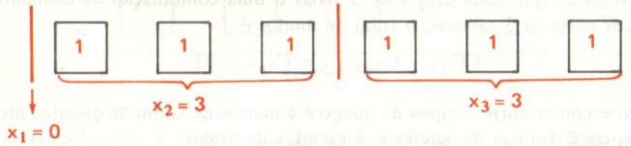
Para obtermos todas as soluções, vamos recorrer ao seguinte processo: como a soma deve ser 6, escrevemos 6 vezes o número 1:



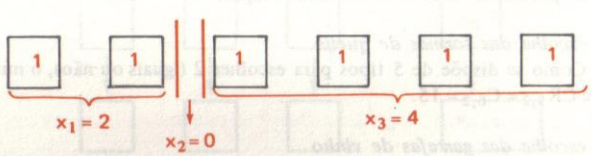
Como temos 3 incógnitas, separamos a fila acima em 3 grupos. Para isso, precisamos de apenas **duas** barras. Assim, as somas das unidades até a primeira barra, da primeira até a segunda e da segunda até o fim da fila nos dão valores de x_1, x_2 e x_3 que satisfazem a equação. Por exemplo



$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 + 2 + 1 = 6$$



$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 + 3 + 3 = 6$$



$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 + 0 + 4 = 6$$

Deste modo, se calcularmos o total de maneiras de se colocar as duas barras nas 7 posições possíveis, teremos o número de soluções da equação.

Como se trata de escolher 2 das 7 posições, não havendo modificação se trocarmos as 2 barras entre si, e podendo colocar as 2 na mesma posição, cada escolha é uma combinação **com repetição** de 7 elementos **tomados 2 a 2**. Então, temos:

$$CR_{7,2} = C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28 \quad \text{soluções}$$

19.15) Determine o número de soluções inteiras e positivas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$$

Solução

Não podemos, agora, aceitar soluções em que alguma variável seja igual a zero; no entanto, vamos observar que subtraindo uma unidade de cada elemento das soluções pedidas, por exemplo

$$(3;\ 4;\ 1;\ 2;\ 3) \xrightarrow{-1} (2;\ 3;\ 0;\ 1;\ 2)$$

$$(6;\ 1;\ 3;\ 2;\ 1) \xrightarrow{-1} (5;\ 0;\ 2;\ 1;\ 0)$$

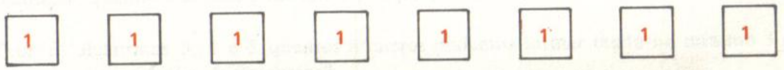
$$(2;\ 5;\ 2;\ 2;\ 2) \xrightarrow{-1} (1;\ 4;\ 1;\ 1;\ 1)$$

obtemos as soluções inteiras **não negativas** da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \qquad \text{(I)}$$

Portanto, basta determinar o número dessas soluções da equação (I), o que fazemos como no exercício anterior.

Como devemos ter soma 8, escrevemos



Tendo 5 incógnitas, precisamos de 4 barras para separar essa fila em 5 grupos. Dispomos de 9 posições para colocar 4 barras, podendo haver mais de uma na mesma posição. Assim, cada escolha é uma combinação com repetição, de classe 4, de 9 elementos.

Logo, o total de soluções inteiras e positivas da equação dada é

$$CR_{9,4} = C_{12,4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

Exercícios Propostos

19.16) Calcule

a) $CR_{8,3}$ b) $CR_{5,7}$ c) $CR_{6,6}$

19.17) Verifique que $CR_{n,k} = CR_{k+1,n-1}$

19.18) Um vendedor de livros quer comprar, para revenda, 5 volumes. O fornecedor dispõe de vários exemplares de 6 romances e de 6 livros técnicos. Determine o número de compras diferentes que pode o vendedor fazer, obtendo:

a) 5 livros quaisquer
b) 3 romances e 2 livros técnicos

19.19) Com os elementos do conjunto $E = \{a;\ b;\ c;\ d\}$ formam-se as combinações com repetição de classe 5. Quantas delas tem o elemento d? Quantas não tem o elemento a?

19.20) Determine o número de soluções inteiras e não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

19.21) Determine o número de soluções inteiras e positivas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$$

19.22) Considere a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = \alpha$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}$ e $\alpha \geqslant m$. Determine o número de soluções inteiras e

a) não negativas
b) positivas

Exercícios Suplementares

VI.1) Quantos são os números de 3 algarismos em nosso sistema, em que aparecem algarismos repetidos?

VI.2) De quantos modos podemos repartir 17 livros, entre 4 alunos, admitindo que alguns possam ficar sem livros?

VI.3) Nas faces de um tetraedro regular de quantas maneiras podemos aplicar 4 cores distintas ou não, usando-se 7 cores?

VI.4) Numa urna existem muitas bolas brancas e vermelhas. Retirando-se 3 bolas sucessivamente, de quantas maneiras pode sair a distribuição das cores?

VI.5) Com os algarismos 3, 4 e 5 quantos números podemos formar tendo no mínimo 3 algarismos e no máximo 6 algarismos?

VI.6) Com os algarismos 1, 3, 5 e 7 quantos números de 4 algarismos podemos formar começando com 1 e terminando com o 7?

VI.7) Quantas palavras diferentes se podem formar, batendo-se 5 vezes ao acaso, em uma das 26 teclas de letras da máquina de escrever?

VI.8) Escrevendo-se todos os números inteiros de 1 a 1 000, quantas vezes os algarismos (de zero a nove) foram utilizados?

PARTE VII

Capítulo 20 — **Noções de probabilidade**

Capítulo 21 — **Soma de probabilidades**

Capítulo 22 — **Produto de probabilidades**

Capítulo 23 — **Distribuição binomial**

Capítulo

20

Noções de probabilidade

20.1 – EXPERIMENTO ALEATÓRIO – RESULTADOS EQUIPROVÁVEIS

Quando lançamos um dado e observamos o número obtido na face superior, sabemos de antemão que o resultado poderá ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. No entanto, **não podemos garantir** que irá ocorrer, por exemplo, o número 4; é *possível* que ocorra, como também é possível ocorrer qualquer outro número em jogo. Essa impossibilidade de prever o resultado se deve ao que chamamos de *acaso*.

Formamos, assim, a idéia de **experimento aleatório**: uma experiência que, embora executada repetidas vezes, em condições aparentemente idênticas, pode apresentar resultados variados, não sendo possível a previsão lógica de cada resultado.

Os lançamentos de dados ou moedas, a distribuição das cartas de um baralho, os sorteios em geral, são exemplos de experimentos aleatórios.

Os vários resultados desse tipo de experiência podem ou não ser **igualmente prováveis,** isto é, a *oportunidade* de se obter um determinado resultado pode ser igual ou diferente da *oportunidade* de um outro resultado da mesma experiência. Por exemplo, ao lançarmos um dado, a *chance* de ocorrer o número 4 é **igual** à de ocorrer o 1, o 2, o 3, o 5 ou o 6. Isso já não acontece no seguinte experimento: em dez etiquetas iguais e enfileiradas, escrevemos a palavra MATEMÁTICA, uma letra em cada etiqueta:

M	A	T	E	M	Á	T	I	C	A

em seguida, misturamos as dez em uma urna e retiramos uma delas. É fácil perceber que as *chances* das letras M, A, T, E, I, C não são todas iguais, pois há mais etiquetas com a letra A do que com a letra T, mais com M do que com E etc.

Muitas vezes, o **processo** de realização de um experimento pode tornar seus resultados equiprováveis ou não. Admita-se, como exemplo, que desejamos escolher um animal de uma jaula onde há um elefante, um macaco, um cavalo, um gato sel-

vagem e uma zebra. Se simplesmente sorteamos o animal entrando na jaula e escolhendo aquele que primeiro nos morder, é evidente que o gato terá maior oportunidade de ser escolhido. No entanto, se marcarmos o nome de cada bicho em um cartão (cinco cartões iguais) e sortearmos um, podemos garantir que todos os animais têm a mesma chance de serem escolhidos, isto é, os resultados da experiência se tornam igualmente prováveis.

Nesta obra, restringiremos nosso estudo aos **experimentos aleatórios de resultados equiprováveis.**

20.2 – ESPAÇO AMOSTRAL – EVENTO

Ao realizarmos um experimento aleatório, com a finalidade de observar a ocorrência de um determinado tipo de resultado, dois conjuntos traduzem nossa expectativa: um, formado por todos os resultados possíveis da experiência; outro, formado pelos resultados que desejamos observar. Assim, se num jogo lançamos um dado e nosso sucesso depender da obtenção de um número maior que 4, nos fixamos no conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, que descreve *tudo* que pode acontecer, e no conjunto $\{5; 6\}$, que descreve o que *queremos* que aconteça. É claro que o segundo conjunto será, sempre, um **subconjunto** do primeiro. Adotamos, então, as seguintes definições:

Espaço Amostral – Ao conjunto E formado por **todos os resultados possíveis** de um experimento aleatório damos o nome de **espaço amostral.**

Em nosso estudo, vamos considerar apenas **espaços amostrais finitos e não vazios**, e indicaremos o número de resultados por n_E.

Evento – Damos o nome de **evento** a **qualquer subconjunto** do espaço amostral.

Em termos práticos, o evento é um conjunto formado pelos resultados cuja ocorrência desejamos observar, pelos resultados que queremos *ver acontecer.*

Indicaremos por n_A o número de elementos de um evento A.

Exemplos

Experimento 1: lançar um dado; o resultado é o número obtido na face superior.

- *espaço amostral*:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; \quad n_E = 6$$

- *alguns eventos*:

a) observar a ocorrência do número 2:

$$A = \{2\}; \quad n_A = 1$$

b) observar a ocorrência de número par:

$$B = \{2; 4; 6\}; \quad n_B = 3$$

c) observar a ocorrência de número maior que 6:

$$C = \phi; \quad n_C = 0$$

d) observar a ocorrência de número inteiro:

$$D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = E; \quad n_D = 6$$

Experimento 2: lançar duas moedas diferentes; o resultado é o par de faces superiores.

- *espaço amostral* (c = cara; k = coroa):

$$E = \{(c; c); (c; k); (k; c); (k; k)\}; \quad n_E = 4$$

- *alguns eventos*:

a) ocorrência de duas caras:

$$A = \{(c; c)\}; \quad n_A = 1$$

b) ocorrência de no mínimo uma cara:

$$B = \{(c; k); (k; c); (c; c)\}; \quad n_B = 3$$

c) ocorrência de no máximo uma cara:

$$C = \{(c; k); (k; c); (k; k)\}; \quad n_C = 3$$

Experimento 3: lançar dois dados diferentes; o resultado é o par de números obtidos nas faces superiores.

- *espaço amostral*:

$$\begin{aligned} E = \{&(1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (1;6)\\ &(2;1); (2;2); (2;3); (2;4); (2;5); (2;6)\\ &(3;1); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6)\\ &(4;1); (4;2); (4;3); (4;4); (4;5); (4;6)\\ &(5;1); (5;2); (5;3); (5;4); (5;5); (5;6)\\ &(6;1); (6;2); (6;3); (6;4); (6;5); (6;6)\}; \quad n_E = 6 \cdot 6 = 36 \end{aligned}$$

- *alguns eventos*:

a) ocorrer números iguais nos dois dados:

$$A = \{(1;1); (2;2); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6)\}; \quad n_A = 6$$

b) ocorrer números de paridades opostas:

$B = \{(1;2); (1;4); (1;6);$
$(2;1); (2;3); (2;5);$
$(3;2); (3;4); (3;6);$
$(4;1); (4;3); (4;5);$
$(5;2); (5;4); (5;6);$
$(6;1); (6;3); (6;5)\}; n_B = 18$

c) ocorrer soma 7:

$C = \{(1;6); (2;5); (3;4); (4;3); (5;2); (6;1)\}; n_C = 6$

d) ocorrer soma 11:

$D = \{(5;6); (6;5)\}; n_D = 2$

Nota – A seqüência de exemplos acima mostra que, à medida que o número de elementos envolvidos no experimento vai aumentando, torna-se cada vez mais *difícil* escrever o espaço amostral **enumerando** cada um dos resultados possíveis. Por isso, utilizamos, em alguns casos, o processo de representar o conjunto apenas **descrevendo** o tipo de elementos que ele possui e, para a determinação do **número** de resultados, recorremos aos métodos de contagem da Análise Combinatória. Vejamos alguns exemplos.

Experimento 4: retirar 3 cartas de um baralho de 52 cartas e observar, independente da ordem, o grupo formado.

- *espaço amostral*:

E = {grupos de 3 cartas}

O total de resultados possíveis, isto é, o número de elementos E, é o número de **combinações** de 52 elementos tomados 3 a 3:

$n_E = C_{52,3} = 22\,100$

- *alguns eventos*:

a) ocorrer 3 ases:

A = {grupos de 3 ases}

Como temos 4 ases no baralho,

$n_A = C_{4,3} = 4$

b) ocorrer 3 cartas de copas:

B = {grupos de 3 cartas de copas}

Como temos 13 cartas de copas,

$n_B = C_{13,3} = 286$

c) ocorrer exatamente um ás:

C = {grupos com ás e 2 outras cartas}

Para a escolha do ás, temos 4 possibilidades; para a escolha das outras duas, eliminamos os ases, restando-nos 48 cartas, o que nos dá $C_{48,2}$ possibilidades

Ás	≠ Ás	≠ Ás
↓	↓	

possibilidades: 4 $C_{48,2}$

Logo, temos $n_C = 4 \cdot C_{48,2} = 4\,512$

Experimento 5: **de uma urna com 31 bolas numeradas de 1 a 31, retirar duas e observar o par de números obtidos.**

- *espaço amostral*:
notando que ao retirarmos duas bolas formamos um par ordenado de elementos distintos (se uma delas tem o número 17, a outra certamente terá um número diferente de 17), temos

$E = \{(x; y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 31 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 31 \text{ e } x \neq y\}$

e $n_E = A_{31,2} = 930$

- *alguns eventos*:

a) ocorrer dois números menores ou iguais a 21:

$A = \{(x; y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 21 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 21 \text{ e } x \neq y\}$

$n_A = A_{21,2} = 420$

b) ocorrer um par com primeiro elemento menor que 12:

$B = \{(x; y), x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x < 12 \text{ e } 1 \leqslant y \leqslant 31 \text{ e } x \neq y\}$

Notando que para o primeiro elemento temos 11 possibilidades e, escolhido este, restam 30 possibilidades para o segundo, temos

$n_B = 11 \cdot 30 = 330$

20.3 – PROBABILIDADE

Vamos, agora, definir probabilidade de um evento num experimento aleatório de resultados equiprováveis.

b) O evento *ocorrer número maior que 4* é representado pelo conjunto $B = \{5; 6\}$. Como $n_B = 2$, vem

$$P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Se desejarmos os resultados em *porcentagem*, multiplicamos os números encontrados por 100%. Assim, temos:

a) a probabilidade de ocorrer número primo é $\frac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$.

b) a probabilidade de ocorrer número maior que 4 é $\frac{1}{3} \cdot 100\% \cong 33{,}33\%$.

20.2) Numa urna há cem bolas numeradas de 1 a 100. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade dela possuir um:

a) múltiplo de 3?
b) múltiplo de 7?

Solução

O espaço amostral da experiência é

$$E = \{1; 2; 3; 4; ...; 99; 100\} \quad e \quad n_E = 100$$

a) O evento *ocorrer um múltiplo de 3* é $A = \{3; 6; 9; ...; 99\}$. Para obtermos n_A basta dividirmos 100 por 3: o quociente é n_A.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ \hline 1 & 33 \end{array}$$

Então, como $n_A = 33$, $P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{33}{100}$

b) O evento ocorrer um múltiplo de 7 é $B = \{7; 14; 21; ...; 98\}$. Como o quociente da divisão de 100 por 7 é 14, temos $n_B = 14$. Logo, $P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$.

Observação: Os números n_A e n_B poderiam, evidentemente, ser obtidos pela expressão do termo geral das progressões aritméticas $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$

20.3) No lançamento de dois dados diferentes, qual a probabilidade de ocorrer:

a) soma 7?
b) ao menos um número primo?

Solução

O resultado de um lançamento de dois dados é um par ordenado. Dessa forma, o espaço amostral do experimento pode ser assim descrito:

$$E = \{(x; y),\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 6 \ \text{ e } \ 1 \leqslant y \leqslant 6\}$$

Para o cálculo de n_E, temos:

	1º dado	2º dado
	x	y
possibilidades:	6	6

Logo, $n_E = 6 \cdot 6 = 36$

a) O evento *ocorrer soma 7* é

$$A = \{(1; 6); (2; 5); (3; 4); (4; 3); (5; 2); (6; 1)\}$$

Como $n_A = 6$, $P[A] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) O evento *ocorrer ao menos um número primo* é:

$$\begin{aligned} B = \{&(1; 2); (1; 3); (1; 5); \\ &(2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 4); (2; 5); (2; 6); \\ &(3; 1); (3; 2); (3; 3); (3; 4); (3; 5); (3; 6); \\ &(4; 2); (4; 3); (4; 5); \\ &(5; 1); (5; 2); (5; 3); (5; 4); (5; 5); (5; 6); \\ &(6; 2); (6; 3); (6; 5)\} \end{aligned}$$

Como $n_B = 27$, $P[B] = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}$

20.4) No exercício anterior, qual a probabilidade de não ocorrer soma 11?

Solução

Consideremos o evento ocorrer *soma 11*: $C = \{(5; 6); (6; 5)\}$. Temos

$$P[C] = \frac{n_C}{n_E} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Observando que o evento **não** *ocorrer soma 11* é o complementar de C, vem:

$$P[\bar{C}] = 1 - P[C] = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

20.5) A tabela a seguir dá o número de máquinas de calcular existentes em um escritório, segundo suas características. Todas as máquinas estão embaladas em estojos iguais. Escolhendo um estojo ao acaso, determine a probabilidade dele:

	ELÉTRICAS	MANUAIS
NOVAS	45	30
USADAS	15	10

a) conter uma máquina nova
b) conter uma máquina manual
c) não conter uma máquina elétrica usada
d) não conter uma máquina manual usada

Intuitivamente, o leitor domina a *idéia* de probabilidade: se num jogo de cara ou coroa nosso sucesso é a ocorrência de cara, temos a *metade das chances* de ganhar e dizemos, inclusive, que nossa *probabilidade* é de 1 para 2 e, portanto, igual a $\frac{1}{2}$. No entanto é preciso esclarecer que, em duas jogadas, não acontecerá necessariamente uma cara e uma coroa; é possível que, em por exemplo 10 jogadas, ocorra 8 vezes coroa, ao que reagimos dizendo:

"Puxa, que azar!" ou

"Não é possível: essa moeda é viciada!!"

O que devemos entender ao avaliar em $\frac{1}{2}$ a probabilidade de obter cara, é que num número *muito grande* de lançamentos da moeda, a freqüência com que ocorre cada uma das faces é bastante próxima da metade do número de jogadas.

Com essas considerações, definimos

A **probabilidade** de ocorrer um evento A, num experimento aleatório de espaço amostral E, é o número P[A] dado por

$$P[A] = \frac{n_A}{n_E}$$

Observações

1ª) É evidente que, sendo A um **subconjunto** de E, temos

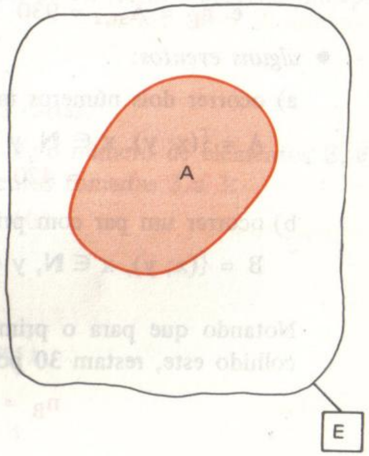
$$0 \leqslant n_A \leqslant n_E$$

Dividindo essa dupla desigualdade por n_E, vem

$$\frac{0}{n_E} \leqslant \frac{n_A}{n_E} \leqslant \frac{n_E}{n_E}$$

ou seja

$$0 \leqslant P[A] \leqslant 1$$

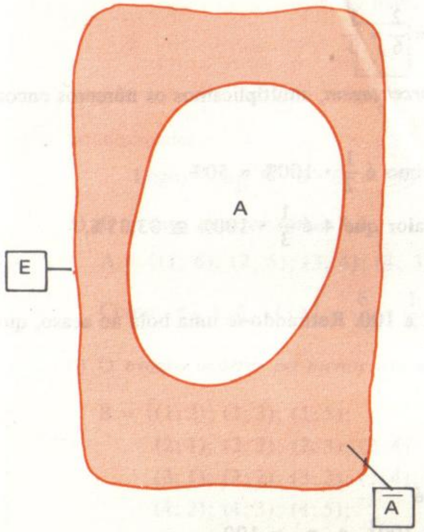


Nos casos extremos, temos:

- se $P[A] = 0$, o evento $A = \phi$ chama-se **evento impossível**;
- se $P[A] = 1$, o evento $A = E$ chama-se **evento certo**.

Esses casos podem ser ilustrados pelos eventos dos itens **c** e **d** do experimento 1, nos exemplos anteriores.

2ª) *Probabilidade do evento complementar*



Seja $\bar{A}$ o evento complementar de A em relação a E. Percebemos que $\bar{A}$ possui, como elementos, todos os resultados descritos no espaço amostral *com exceção daqueles que formam A*. Assim, se calcularmos a **probabilidade de $\bar{A}$**, estaremos determinando a **probabilidade de não ocorrer o evento A**. Como

$$n_{\bar{A}} = n_E - n_A,$$

dividindo membro a membro por n_E, vem

$$\frac{n_{\bar{A}}}{n_E} = \frac{n_E}{n_E} - \frac{n_A}{n_E}$$

ou seja,

$$P[\bar{A}] = 1 - P[A]$$

o que quer dizer que **a probabilidade de não ocorrer um certo evento é 1 menos a probabilidade dele ocorrer.** Portanto, se a probabilidade de, por exemplo, retirarmos uma bola azul de uma urna é 0,3 (30%), a de não retirarmos uma bola dessa cor é 1 - 0,3 = 0,7 (70%).

Exercícios Resolvidos

20.1) Qual a probabilidade de, no lançamento de um dado, obtermos:

a) número primo?

b) número maior que 4?

Solução

O espaço amostral do lançamento é:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}. \text{ Então, } n_E = 6$$

a) O evento *ocorrer número primo* é representado pelo conjunto $A = \{2; 3; 5\}$. Como $n_A = 3$, vem

$$P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Solução

O espaço amostral dessa experiência é o conjunto E de todas as máquinas. Assim, vemos na tabela que $n_E = 100$.

a) O evento A = {ocorre máquina nova} tem 75 casos favoráveis, isto é, $n_A = 75$. Então,

$$P[A] = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

b) o evento B = {ocorre máquina manual} tem 40 casos favoráveis, isto é, $n_B = 40$. Então,

$$P[B] = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

c) seja o evento C = {ocorre máquina elétrica nova}. Como existem 45 máquinas que são elétricas e novas, temos $n_C = 45$ e $P[C] = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$

Observando que o evento **não** *ocorre máquina elétrica nova* é o complementar de C, vem:

$$P[\overline{C}] = 1 - P[C] = 1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$$

d) seja o evento D = {ocorre máquina manual usada}. Temos $n_D = 10$ e $P[D] = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

Observando que o evento **não** *ocorre máquina manual usada* é o complementar de D, vem:

$$P[\overline{D}] = 1 - P[D] = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

20.6) No exercício anterior, suponha que uma pessoa escolhe um estojo ao acaso e descobre que ele contém uma máquina nova. Qual a probabilidade dessa máquina ser elétrica?

Solução

Quando recebemos a informação de que a máquina é nova, imediatamente eliminamos todas as máquinas usadas da experiência:

	ELÉTRICAS	MANUAIS
NOVAS	45	30

isto é, restringimos o nosso campo de trabalho às 75 novas. Isso equivale a reduzir o espaço amostral ao conjunto E' de máquinas novas, com $n_{E'} = 75$. Nesse campo, o evento F = {máquina elétrica} tem 45 casos favoráveis. Então,

$$P[F] = \frac{n_F}{n_{E'}} = \frac{45}{75} = \frac{3}{5}$$

20.7) Numa urna há 7 bolas azuis e 4 bolas vermelhas. Retirando-se, simultaneamente, duas bolas, qual a probabilidade de ambas serem azuis?

Solução

Devemos notar que, nessa experiência, o espaço amostral E não é formado pelas 11 bolas consideradas individualmente, pois cada **dupla** de bolas é que constitui um resultado. Assim,

E = {(todas) duplas de bolas}

e o total de resultados possíveis é, portanto:

$$n_E = C_{11,2} = 55$$

Como o evento desejado é

A = {(todas) duplas de bolas azuis}

temos:

$$n_A = C_{7,2} = 21$$

$$\text{Logo,}\quad P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{C_{7,2}}{C_{11,2}} = \frac{21}{55}$$

20.8) Numa urna há 20 cartões numerados de 1 a 20. Retirando-se, ao acaso, dois cartões, qual a probabilidade de se obter um par de números menores que 12?

Solução

Como cada resultado é um par ordenado de elementos diferentes, o espaço amostral E pode ser escrito:

$$E = \{(x;\, y),\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x \leqslant 20 \ \text{ e } \ 1 \leqslant y \leqslant 20 \ \text{ e } \ x \neq y\}$$

Assim, dispondo de 20 elementos para escolher, ordenadamente, 2 distintos, temos:

$$n_E = A_{20,2} = 380$$

O evento *par de números menores que 12* é

$$A = \{(x;\, y),\ x \in \mathbb{N},\ y \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant x < 12 \ \text{ e } \ 1 \leqslant y < 12 \ \text{ e } \ x \neq y\}$$

Como dispomos agora de 11 elementos, vem:

$$n_A = A_{11,2} = 110$$

$$\text{Logo,}\quad P[A] = \frac{A_{11,2}}{A_{20,2}} = \frac{110}{380} = \frac{11}{38}$$

20.9) Retirando-se, ao acaso, 4 cartas de um baralho de 52 cartas, determine a probabilidade de se obter

a) 4 ases
b) 4 cartas de copas
c) 2 ases e 2 reis

Solução

Como cada resultado é formado por 4 cartas, nosso espaço amostral é

$$E = \{(\text{todos}) \text{ grupos de 4 cartas}\}$$

e temos $n_E = C_{52,4}$

a) seja o evento *ocorrer 4 ases*:

$$A = \{\text{grupo dos 4 ases}\}$$

É importante notar que A possui **um só elemento**, pois os 4 ases do baralho formam um único **grupo de 4 cartas**. Assim, se $n_A = 1$,

$$P[A] = \frac{1}{C_{52,4}} = \frac{1}{270\,725}$$

b) o evento $B = \{(\text{todos}) \text{ grupos de 4 cartas de copas}\}$ é constituído pelo total de combinações das 13 cartas de copas formadas 4 a 4. Assim, $n_B = C_{13,4}$ e

$$P[B] = \frac{C_{13,4}}{C_{52,4}} = \frac{\dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\dfrac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{715}{270\,725}$$

c) Para calcularmos o número de elementos do evento $C = \{(\text{todos}) \text{ grupos com 2 ases e 2 reis}\}$, como dispomos de 4 ases e 4 reis, fazemos:

A	A		R	R
↓			↓	

possibilidades: $C_{4,2}$ $C_{4,2}$

$$n_C = C_{4,2} \cdot C_{4,2}$$

Logo, $$P[C] = \frac{C_{4,2} \cdot C_{4,2}}{C_{52,4}} = \frac{\dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}}{\dfrac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{36}{270\,725}$$

Exercícios Propostos

20.10) No lançamento de um dado, qual a probabilidade de se obter um número cujo dobro é menor que 10?

20.11) Lançando-se duas moedas diferentes qual a probabilidade de se obter no mínimo uma cara?

20.12) Numa urna há 4 bolas verdes, 6 amarelas e 5 brancas. Retirando-se uma bola ao acaso, qual a probabilidade dela:

a) ser verde?
b) não ser branca?
c) não ser amarela?

20.13) No lançamento de dois dados diferentes, ambos de 4 faces (tetraedros regulares), qual a probabilidade de se obter

a) soma 7?
b) soma menor que 5?
c) número primo em ambos?
d) ao menos um número ímpar?

20.14) Abrindo-se, ao acaso, um livro de 200 folhas numeradas, apenas na frente, de 1 a 200, qual a probabilidade de se observar:

a) um múltiplo de 11?
b) um múltiplo de 15?

20.15) Sabe-se que uma pessoa nasceu entre os anos de 1885 e 1979 (excluídos esses anos). Qual a probabilidade do ano de nascimento ter sido bissexto?

20.16) A tabela a seguir dá as características sangüíneas de 50 indivíduos. Escolhendo-se, ao acaso, uma dessas pessoas, qual é, em porcentagem, a probabilidade dela:

	tipo A	tipo B
fator RH^+	20	15
fator RH^-	10	5

a) ter sangue tipo A?
b) não ter sangue com fator RH^-?
c) ter sangue tipo A com fator RH^+?
d) não ter sangue tipo B com fator RH^-?

20.17) No exercício anterior, suponha que se escolheu uma pessoa de sangue tipo B. Qual a probabilidade dela ter fator RH^+?

20.18) Retirando-se, ao acaso, uma carta de um baralho de 52 cartas, descobre-se que é um ás. Qual a probabilidade dele ser de ouros? E de ser de naipe preto?

20.19) Retirou-se uma carta de um baralho de 52 cartas e descobriu-se que ela é de espadas. Qual a probabilidade de ter sido sorteado:

a) um ás?
b) uma figura?
c) uma carta com múltiplo de 2?

20.20) Cada termo do desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$ $n > 6$ é escrito em uma etiqueta (todas etiquetas iguais). O mesmo se faz com os termos de $(y - b)^n$. As etiquetas são todas colocadas em uma urna e retira-se uma ao acaso. Determine a probabilidade de ter sido escolhida uma etiqueta com:

a) o termo $\binom{n}{6} a^6 x^{n-6}$

b) um termo cujo coeficiente binomial é $\binom{n}{6}$

c) um termo cujo coeficiente binomial tenha o valor $\dfrac{n!}{6!\,(n-6)!}$

20.21) Um professor de Matemática diz a seus alunos que, sob certas condições, é capaz de adivinhar um número; e propõe o seguinte: um dos alunos deve pensar num número inteiro *entre* 9 e 50, e subtrair desse número a soma de seus dois algarismos (por exemplo, se o aluno pensar no 45, ele deve fazer a operação 45 – (4 + 5), obtendo o número 36). Qual a probabilidade do professor acertar, na primeira tentativa, o número obtido pelo aluno após a operação solicitada?

20.22) Numa urna há 8 bolas azuis, 7 vermelhas e 5 pretas. Retirando-se simultaneamente 3 bolas, qual a probabilidade de:

a) as 3 serem azuis?
b) nenhuma das 3 ser vermelha?

20.23) Formam-se todos os anagramas da palavra SALÁRIO. Escolhendo-se um deles ao acaso, qual a probabilidade de se obter um anagrama em que as duas letras A não estão juntas?

20.24) De um baralho de 28 cartas (4 naipes com 7 cartas cada) são retiradas simultaneamente 5 cartas. Determine a probabilidade de serem obtidas:

a) 5 cartas de ouros
b) 3 cartas de ouros e 2 de espadas
c) exatamente 3 cartas de ouros
d) no mínimo 4 cartas de ouros

20.25) Num estoque de 20 camisas, há 5 com defeito. Escolhendo-se ao acaso 6 camisas, qual a probabilidade de que exatamente a metade delas seja defeituosa?

20.26) Num grupo de 12 profissionais há 4 geógrafos, 4 historiadores e 4 cientistas sociais. Escolhendo-se, ao acaso, uma comissão de 6 pessoas, qual a probabilidade de haver exatamente 2 de cada profissão citada?

20.27) Duas etiquetas são sorteadas de uma caixa com **n** etiquetas, numeradas de 1 a **n**. Qual a probabilidade de que as duas etiquetas escolhidas tenham números consecutivos?

20.28) De uma urna com **n** etiquetas, numeradas de 1 a **n**, $(n > 4)$, são retiradas 3 etiquetas. Sendo **n** um número ímpar, qual a probabilidade de serem obtidas 3 etiquetas com números ímpares consecutivos?

20.29) Considere o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Do conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; ...; 51\}$ são escolhidos dois números distintos para ocuparem, respectivamente, os lugares de **x** e **y** em D. Qual a probabilidade de que os números escolhidos acarretem $D = 0$?

20.30) Considere o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Do conjunto $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ são escolhidos três números distintos para ocuparem, respectivamente, os lugares de **a**, **b** e **c**. Assim, sempre se terá $a \neq b$, $a \neq c$ e $b \neq c$. Qual a probabilidade de que os três números escolhidos acarretem $D = 0$?

Capítulo 21

Soma de probabilidades

Vamos considerar a realização de um experimento aleatório, de espaço amostral E, no qual se deseja observar **a ocorrência de um evento A ou de um evento B.** Para melhor nos situarmos, um exemplo: suponhamos que de uma urna com 30 bolas, numeradas de 1 a 30, seja extraída uma bola para se verificar a ocorrência de *um múltiplo de 2* **ou** *de um múltiplo de 3*; estão assim caracterizados o espaço amostral:

$$E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...; 30\} \quad (n_E = 30)$$

e os eventos

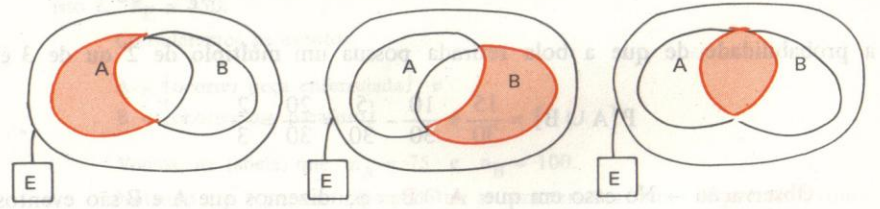
$$A = \{2; 4; 6; 8; ...; 30\} \quad (n_A = 15)$$
$$B = \{3; 6; 9; 12; ...; 30\} \quad (n_B = 10)$$

Quando dizemos "observar a ocorrência de A ou B" estamos nos dispondo a aceitar, como resultados *favoráveis*, aqueles que correspondam ao sucesso:

1º) somente de A (e não de B)
2º) somente de B (e não de A)
3º) de A e de B, simultaneamente

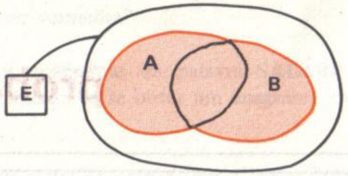
Assim, no exemplo acima, admitimos a ocorrência de um número que seja somente múltiplo de 2 (2; 4; 8; 10; 14; 16; 20; 22; 26; 28), somente múltiplo de 3 (3; 9; 15; 21; 27), e também de um múltiplo simultâneo de 2 e de 3 (6; 12; 18; 24; 30), isto é, múltiplo de 6.

Ora, se representarmos todas essas possibilidades através de diagramas



somente A (múltiplo só de 2) — somente B (múltiplo só de 3) — A e B (múltiplo de 6)

fica evidente que observar a ocorrência de A **ou** B equivale a observar a ocorrência da **união** dos dois eventos, isto é, do evento $A \cup B$.



A ou B
(múltiplo de 2 ou 3)

Sendo assim, para calcularmos a **probabilidade** de ocorrer A ou B, lembramos que:

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$$

e dividimos ambos os membros dessa igualdade por n_E:

$$\frac{n_{A \cup B}}{n_E} = \frac{n_A}{n_E} + \frac{n_B}{n_E} - \frac{n_{A \cap B}}{n_E}$$

Obtemos, desse modo, a expressão conhecida como **regra da soma de probabilidades** ou **probabilidade da união:**

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

onde lemos que a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é a probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade de ocorrer A e B.

No exemplo, temos:

$$P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{15}{30}, \quad P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{10}{30}$$

e, como $A \cap B = \{\text{múltiplo de } 6\}$ $(n_{A \cap B} = 5)$ $P[A \cap B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_E} = \frac{5}{30}$. Portanto,

a probabilidade de que a bola retirada possua um **múltiplo de 2 ou de 3** é:

$$P[A \cup B] = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Observação – No caso em que $A \cap B = \phi$, dizemos que A e B são eventos **mutuamente exclusivos**, isto é, se um deles ocorrer, o outro certamente não ocorrerá.

Nesta situação, como $n_{A \cap B} = 0$, é claro que:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Como exemplo, consideremos uma lista de 20 diplomatas, dos quais 8 se encontram no Brasil, 6 em Angola e os demais em outros países; escolhendo um dos nomes ao acaso, a probabilidade de ele ser de um diplomata que se acha no Brasil (B) ou em Angola (A) é:

$$P[B \cup A] = P[B] + P[A] = \frac{8}{20} + \frac{6}{20} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

pois, evidentemente, o evento *estar no Brasil* e o evento *estar em Angola* são mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \phi$ e $P[A \cap B] = 0$.

Exercícios Resolvidos

21.1) Numa caixa há 100 parafusos e 50 porcas, cada uma das peças embalada de modo a torná-las indistingüíveis pelo tato. Metade dos parafusos e metade das porcas estão enferrujadas. Escolhendo-se uma peça ao acaso, qual a probabilidade de se obter uma peça enferrujada ou um parafuso?

Solução

	PERFEITAS	ENFERRUJADAS	
PARAFUSOS	50	50	100
PORCAS	25	25	50
	75	75	150

O espaço amostral E do experimento *retirada de uma peça* tem 150 elementos, isto é, $n_E = 150$.

Consideremos os eventos

$A = \{\text{ocorrer peça enferrujada}\}$ e

$B = \{\text{ocorrer um parafuso}\}$

Vemos, na tabela, que $n_A = 75$ e $n_B = 100$.

Notando que a peça retirada pode ter as características tanto do evento A como do evento B, isto é:

$A \cap B = \{\text{ocorrer parafuso enferrujado}\}$

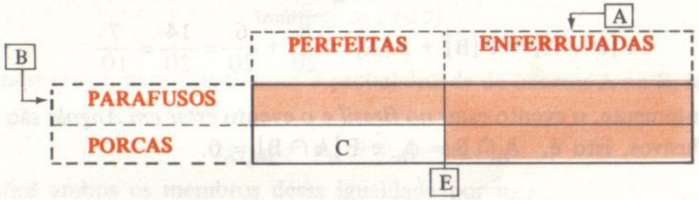
onde $n_{A \cap B} = 50$, a probabilidade de ser escolhida uma peça enferrujada ou um parafuso é:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] =$$

$$= \frac{75}{150} + \frac{100}{150} - \frac{50}{150} = \frac{125}{150} = \frac{5}{6}$$

Outro modo:

Podemos, também, resolver o problema utilizando o conceito de probabilidade do evento complementar



Para tanto, basta entendermos que *ocorrer peça enferrujada* ou *parafuso* equivale a não ocorrer porca perfeita.

Assim, se considerarmos o evento

$$C = \{\text{ocorrer porca perfeita}\}$$

(veja o diagrama), temos $n_C = 25$ e $P[C] = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$

Logo, a probabilidade procurada é

$$P[A \cup B] = P[\overline{C}] = 1 - P[C] = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

21.2) Numa sala estão reunidas 12 pessoas, entre elas José e Eustáquio. Escolhendo-se, ao acaso, uma comissão de 4 pessoas, qual a probabilidade de José ou Eustáquio pertencerem a essa comissão?

Solução

O espaço amostral E dessa experiência é o conjunto de todas as comissões de 4 pessoas que podem ser formadas com as 12 participantes da reunião. Portanto,

$$n_E = C_{12,4}$$

Considerando o evento A como aquele formado pelas comissões das quais José participa, temos

$$n_A = C_{11,3}$$

pois, fixado José, restam 11 outras pessoas para ocuparem as 3 vagas seguintes.

Considerando o evento B como aquele formado pelas comissões das quais Eustáquio participa, temos

$$n_B = C_{11,3}$$

pois, fixado Eustáquio, restam 11 outras pessoas para ocuparem as 3 vagas seguintes.

É evidente que o evento $A \cap B$ é aquele formado pelas comissões às quais pertencem, simultaneamente, José e Eustáquio. Fixando ambos, restam 10 pessoas para ocuparem as outras 2 vagas da comissão; assim,

$$n_{A \cap B} = C_{10,2}$$

Logo, a probabilidade de se escolher uma comissão à qual pertencem José ou Eustáquio é

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] =$$

$$= \frac{C_{11,3}}{C_{12,4}} + \frac{C_{11,3}}{C_{12,4}} - \frac{C_{10,2}}{C_{12,4}} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{11} = \frac{19}{33}$$

21.3) Numa caixa há 30 etiquetas, numeradas de 1 a 30. Retirando-se, simultaneamente, duas etiquetas, qual a probabilidade de se obter um par de números primos ou um par de múltiplos de 2?

Solução

O espaço amostral E dessa experiência é o total de pares de números distintos que podem ser formados com as 30 etiquetas. Portanto,

$$n_E = A_{30,2}$$

Seja A o evento formado por todos os pares de números primos. Como entre 1 e 30 há 10 números primos (2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29), o total de pares possíveis é

$$n_A = A_{10,2}$$

Seja B o evento formado por todos os pares de múltiplos de 2. Como entre 1 e 30 há 15 múltiplos de 2 (2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20; 22; 24; 26; 28; 30), o total de pares aumentados com esses números é

$$n_B = A_{15,2}$$

Devemos agora notar que não existe um par de números que sejam simultaneamente primos e múltiplos de 2, pois existe um só número primo múltiplo de 2: o próprio 2. Assim, A e B são eventos mutuamente exclusivos, isto é, $A \cap B = \emptyset$ e $P[A \cap B] = 0$

Logo, a probabilidade de ocorrer um par de números primos ou múltiplos de 2 é:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] =$$

$$= \frac{A_{10,2}}{A_{30,2}} + \frac{A_{15,2}}{A_{30,2}} = \frac{3}{29} + \frac{7}{29} = \frac{10}{29}$$

Exercícios Propostos

•21.4) Numa urna há 200 bolas numeradas de 1 a 200. Retirando-se, ao acaso, uma bola qual a probabilidade de se obter:

a) múltiplo de 2 ou múltiplo de 5?
b) múltiplo de 7 ou múltiplo de 11?
c) múltiplo de 23 ou múltiplo de 13?

21.5) Numa urna há 12 bolas brancas, numeradas de 1 a 12, e 18 bolas vermelhas, numeradas de 13 a 30. Retirando-se ao acaso uma bola, qual a probabilidade de

a) se obter bola vermelha ou número ímpar?
b) *não se obter*: bola branca ou número primo?

21.6) Numa caixa há 60 lâmpadas de 60 W e 100 lâmpadas de 100 W, todas em embalagens iguais. Sabe-se que $\frac{1}{3}$ das lâmpadas de 60 W e $\frac{1}{4}$ das de 100 W estão queimadas. Escolhendo-se, ao acaso, duas lâmpadas, qual a probabilidade de ambas serem de 100 W ou estarem queimadas?

21.7) Numa reunião do diretório de um partido estão presentes 10 mulheres e 15 homens. Metade das mulheres e $\frac{1}{3}$ dos homens participaram da fundação do partido. Escolhendo-se 3 dessas pessoas ao acaso, qual a probabilidade de que as 3 sejam mulheres ou tenham participado da fundação?

21.8) De um baralho de 52 cartas, 2 são sorteadas simultaneamente. Qual a probabilidade de serem:

a) 2 cartas de copas ou 2 cartas vermelhas?
b) 2 cartas de copas ou 2 de ouros?
c) 2 cartas de espadas ou 2 ases?

21.9) Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral, de probabilidades $P[A] = \frac{2}{5}$ e $P[B] = \frac{7}{10}$ e tais que $P[A \cap B] = \frac{1}{5}$. Calcule as probabilidades dos eventos:

a) $\overline{A \cup B}$
b) $\bar{A} \cup \bar{B}$
c) $\bar{A} \cap \bar{B}$
d) $A \cap \bar{B}$

21.10) Uma estação meteorológica informa que, para um certo dia, a probabilidade de chover é 60%, a de "fazer frio" é 65% e a de chover e fazer frio é de 35%. Determine, para esse dia, a probabilidade de:

a) chover ou fazer frio
b) não chover e não fazer frio
c) chover e não fazer frio
d) não chover e fazer frio

Capítulo

22

Produto de probabilidades

22.1 – EXEMPLOS INICIAIS

Vamos, agora, considerar experimentos aleatórios cuja realização se desenvolve em etapas, como por exemplo:

Experimento 1: lançar um dado e, *em seguida*, uma moeda, observando o número e a figura obtida nas faces superiores. Temos:

primeira etapa: lançar o dado
segunda etapa: lançar a moeda

O espaço amostral dessa experiência é

$$E = \{(1; C);\ (1; K);\ (2; C);\ (2; K);\ (3; C);\ (3; K);\ (4; C);\ (4; K);\ (5; C);\ (5; K);\ (6; C);\ (6; K)\}$$

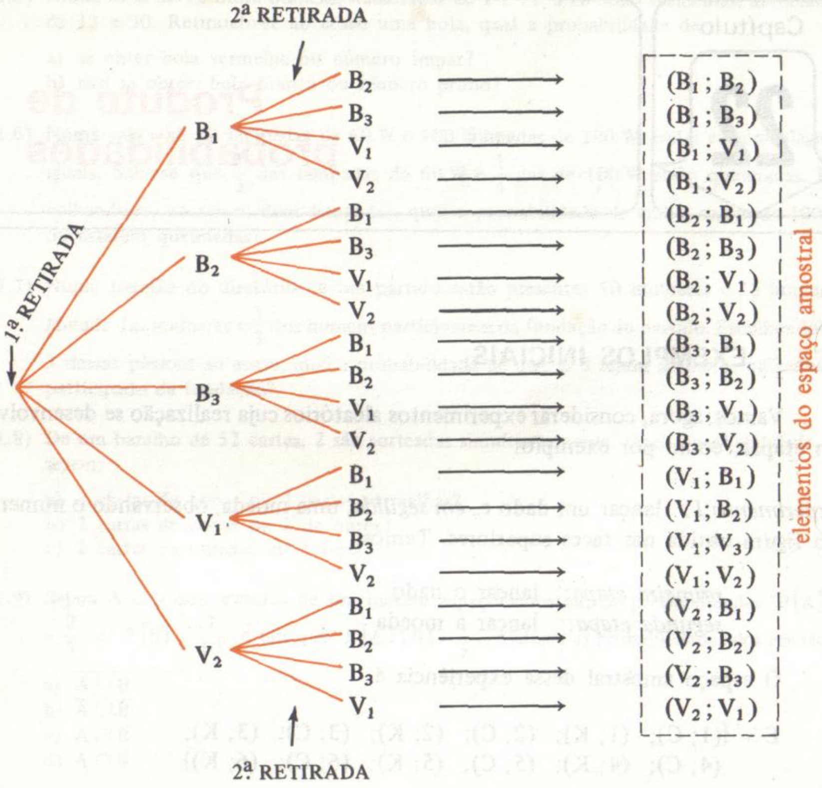
onde C = cara e K = coroa e $n_E = 12$.

Experimento 2: de uma urna com 3 bolas brancas e 2 vermelhas, retirar duas bolas, *uma após a outra*, sem reposição da primeira bola retirada, observando a cor de cada uma delas. Temos:

primeira etapa: retirar a primeira bola
segunda etapa: retirar a segunda bola

O número de elementos do espaço amostral E dessa experiência pode ser obtido com o auxílio do Princípio Fundamental da Contagem: na retirada da primeira bola, temos 5 possibilidades; na segunda, como não há reposição da bola retirada anteriormente, temos 4 possibilidades. Assim, $n_E = 5 \cdot 4 = 20$.

De fato, representando por B_1, B_2, B_3 as bolas brancas e por V_1 e V_2 as vermelhas, o diagrama de árvore da página seguinte fornece todos os resultados possíveis:



É claro que, estando os espaços amostrais construídos, podemos calcular pela definição as probabilidades de quaisquer eventos dessas experiências. Assim, considerando:

- no **experimento 1** o evento A: ocorrer *número maior que 4 e cara*, temos:

$$A = \{(5; c); (6; c)\}$$

$$n_A = 2 \text{ e, portanto, } P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- no **experimento 2** o evento A: ocorrer *duas bolas brancas*, temos:

$$A = \{(B_1; B_2); (B_1; B_3); (B_2; B_1); (B_2; B_3); (B_3; B_1); (B_3; B_2)\}$$

$$n_A = 6 \text{ e, portanto } P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

No entanto, é possível chegar a tais resultados sem que os espaços amostrais sejam construídos, utilizando apenas as etapas que completam o experimento.

22.2 – PROBABILIDADE CONDICIONAL

Exemplo

Consideremos o seguinte experimento. Em uma escola há alunos brasileiros e alemães, dos quais alguns falam somente a sua língua de origem, enquanto outros falam português e alemão. O quadro abaixo dá a distribuição dos alunos conforme essas qualificações

brasileiros	52 falam só português
	38 falam as duas línguas
alemães	43 falam só alemão
	87 falam as duas línguas

O experimento consiste em sortear um estudante.

O espaço amostral E constitui-se de 220 elementos, que são todos os estudantes: $n_E = 220$.

Fixemos dois eventos:

A: o estudante sorteado fala as duas línguas

B: o estudante sorteado é alemão

O evento A é formado pelos 38 brasileiros que falam as duas línguas, juntamente com os 87 alemães também bilíngües: $n_A = 125$.

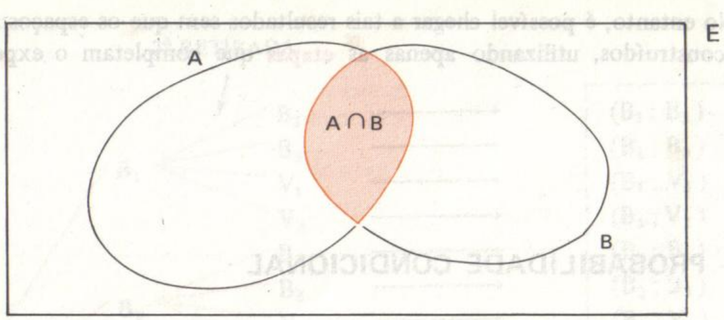
O evento B é formado por todos os alunos alemães: $n_B = 130$.

Assim,

$$P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{125}{220} \cong 56{,}8\%$$

$$P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{130}{220} \cong 59{,}1\%$$

A figura seguinte ilustra a situação esquematicamente. Note que um evento não exclui o outro, ou seja, $A \cap B \neq \phi$. A interseção dos dois eventos é constituída pelos resultados em que o estudante sorteado *fala as duas línguas* e *é alemão*. Calculemos também a probabilidade deste evento. Temos: $n_{A \cap B} = 87$,



donde

$$P[A \cap B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_E} = \frac{87}{220} \cong 39{,}5\%$$

Fixemos agora um terceiro evento, que de certa forma relaciona os dois anteriores:

C: ocorrer no sorteio um estudante **alemão**, *sabendo que o estudante sorteado fala as duas línguas*

ou, em outras palavras:

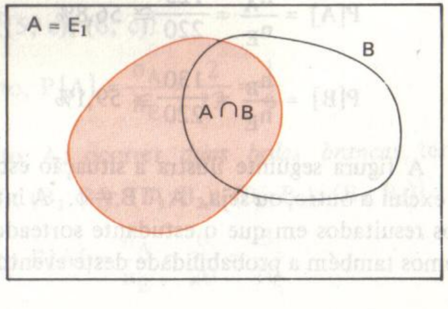
C: ocorrer o **evento B**, *supondo que já ocorreu o evento A*

Indicaremos este novo evento pela notação C = B/A, que pode ser lida "C é o evento B *condicionado* à ocorrência de A".

Calculemos a probabilidade deste evento.

O fato de estarmos supondo que já ocorreu A **altera** o conjunto dos resultados possíveis. De fato, já não tem sentido incluir no espaço amostral um resultado em que o estudante só fale português ou só fale alemão. Devemos portanto *restringir o espaço amostral* àqueles resultados em que o estudante sorteado fala as duas línguas. Mas isto corresponde exatamente a considerar **o próprio conjunto A como sendo o novo espaço amostral** E_1:

$$n_{E_1} = n_A = 125$$



Assim, passam a nos interessar somente os resultados do evento B **que estejam no conjunto A**. Em outras palavras, *só nos interessam os elementos do conjunto* A ∩ B. Portanto,

$$P[C] = P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{87}{125} = 69{,}6\%$$

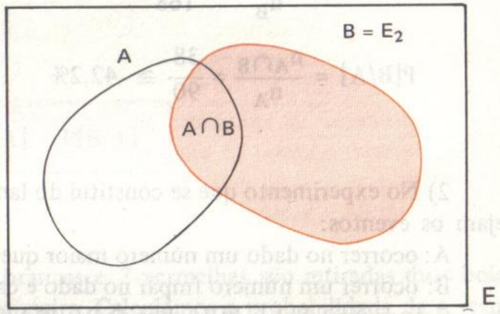
Da mesma forma, podemos considerar o evento:

D: ocorrer no sorteio um estudante que **fala as duas línguas**, *sabendo que o estudante sorteado é alemão*

Neste caso, D = A/B, isto é, "D é o evento A *condicionado* à ocorrência de B". No cálculo da probabilidade deste evento, o novo espaço amostral E_2 a ser considerado é o próprio conjunto B e temos:

$$P[D] = P[A/B] = $$

$$= \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{87}{130} \cong 66{,}9\%$$



Definição

Sejam A e B dois eventos ($A \neq \phi$) do mesmo espaço amostral E. Chama-se **probabilidade de B condicionada a A** e se indica por P[B/A] o número dado por

$$P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A}$$

Exemplos

1) No experimento considerado acima, onde um estudante é sorteado, considere os eventos:

A: sortear um estudante brasileiro

B: sortear um estudante que fala alemão.

Vamos calcular P[A], P[B], P[A ∩ B], P[A/B] e P[B/A]. Temos:

$n_E = 220$

n_A = número de brasileiros = 90

n_B = número de brasileiros que falam alemão mais o número de alemães = = 38 + 130 = 168

$n_{A \cap B}$ = número de brasileiros que falam alemão = 38

Assim, $P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{90}{220} \cong 40{,}9\%$

$P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{168}{220} \cong 76{,}4\%$

$P[A \cap B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_E} = \frac{38}{220} \cong 17{,}3\%$

$P[A/B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{38}{168} \cong 22{,}6\%$

$P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{38}{90} \cong 42{,}2\%$

2) No experimento que se constitui do lançamento de um dado e uma moeda, sejam os eventos:

A: ocorrer no dado um número maior que 1

B: ocorrer um número ímpar no dado e cara na moeda

Calculemos: $P[A]$, $P[B]$, $P[A \cap B]$, $P[A/B]$ e $P[B/A]$.

Temos $n_E = 12$ e

$A = \{(2; c);\ (2; k);\ (3; c);\ (3; k);\ (4; c);\ (4; k);\ (5; c);\ (5; k);\ (6; c);\ (6; k)\} \quad (n_A = 10)$

$B = \{(1; c);\ (3; c);\ (5; c)\} \quad (n_B = 3)$

$A \cap B = \{(3; c);\ (5; c)\} \quad (n_{A \cap B} = 2)$

Assim, $P[A] = \frac{n_A}{n_E} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

$P[B] = \frac{n_B}{n_E} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$P[A \cap B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_E} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P[A/B] = \frac{n_{A \cap B}}{n_B} = \frac{2}{3}$

$P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

22.3 – PROBABILIDADE DA INTERSEÇÃO

O conceito de probabilidade condicional examinado no item anterior, encontra sua mais importante aplicação no cálculo da probabilidade da **interseção de dois (ou mais) eventos**. Basta considerar a dedução seguinte, onde A e B são eventos quaisquer ($A \neq \phi$) de um mesmo espaço amostral E. Temos:

$$P[B/A] = \frac{n_{A \cap B}}{n_A} = \frac{\left(\frac{n_{A \cap B}}{n_E}\right)}{\left(\frac{n_A}{n_E}\right)} = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$$

donde

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A]$$

Exemplo

De uma urna com 13 bolas brancas e 7 vermelhas são retiradas duas bolas sucessivamente, sem reposição da primeira. Calculemos a probabilidade de o resultado ser formado por **duas bolas brancas**. Para isso, consideramos dois eventos:

A: sair bola branca na 1ª retirada

B: sair bola branca na 2ª retirada

É claro que desejamos calcular $P[A \cap B]$, o que se faz com a fórmula acima. Temos, imediatamente, $P[A] = \frac{13}{20}$.

Para obter $P[B/A]$, imaginemos que *já foi retirada a 1ª bola e que ela é branca* e calculemos a probabilidade de sair também branca a 2ª bola. Ora, nesse caso a urna passa a conter 12 bolas brancas e 7 vermelhas e temos:

$$P[B/A] = \frac{12}{19}$$

Assim, $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = \frac{13}{20} \cdot \frac{12}{19} \cong 41{,}1\%$

Se desejarmos a probabilidade de ser sorteada **bola vermelha na 1ª retirada e bola branca na 2ª retirada**, teremos:

1ª retirada A = sair bola vermelha

urna: $\begin{cases} 13 \text{ brancas} \\ 7 \text{ vermelhas} \end{cases}$

$$P[A] = \frac{7}{20}$$

2ª retirada B = sair bola branca

urna: $\begin{cases} 13 \text{ brancas} \\ 6 \text{ vermelhas} \end{cases}$

$$P[B/A] = \frac{13}{19}$$

Portanto, $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = \frac{7}{20} \cdot \frac{13}{19} \cong 23{,}9\%$

Eventos em etapas

O problema de calcular a probabilidade da interseção de eventos aparece freqüentemente quando a realização do experimento se desenvolve em etapas. Cada etapa é por si só uma experiência aleatória. A probabilidade de um evento pode ser calculada **multiplicando-se** as probabilidades dos eventos parciais que constituem cada etapa. O único cuidado a tomar é calcular a probabilidade de cada evento parcial *supondo que os anteriores já ocorreram,* isto é, calcular suas **probabilidades condicionais.**

Exemplos

a) De um baralho são retiradas, sucessivamente, duas cartas, sem reposição da primeira. A probabilidade de ocorrer **duas cartas de espadas** pode ser calculada assim:

1ª retirada A = sair carta de espadas

baralho: $\begin{cases} 13 \text{ espadas} \\ 39 \text{ outros naipes} \end{cases}$

$$P[A] = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

2ª retirada B = sair carta de espadas

baralho: $\begin{cases} 12 \text{ espadas} \\ 39 \text{ outros naipes} \end{cases}$

$$P[B/A] = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$$

$$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B/A] = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{17} = \frac{1}{17}$$

b) No exemplo ao lado, retiram-se sucessivamente 5 cartas, sem reposição. A probabilidade de ocorrer **nas duas primeiras retiradas cartas de ouros** e, **nas três últimas, cartas de copas**, pode ser calculada assim:

Retirada	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Baralho	13 ouros 13 copas 26 outros	12 ouros 13 copas 26 outros	11 ouros 13 copas 26 outros	11 ouros 12 copas 26 outros	11 ouros 11 copas 26 outros
Evento	sair ouros	sair ouros	sair copas	sair copas	sair copas
Probabilidade	$p_1 = \frac{13}{52}$	$p_2 = \frac{12}{51}$	$p_3 = \frac{13}{50}$	$p_4 = \frac{12}{49}$	$p_5 = \frac{11}{48}$

A probabilidade pedida é

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{50} \cdot \frac{12}{49} \cdot \frac{11}{48} \cong 0{,}09\%$$

Note que, em cada retirada (a partir da 2ª) a probabilidade que calculamos é **condicional**, pois ao considerarmos o baralho modificado, estamos automaticamente *supondo que os eventos de etapas anteriores já ocorreram.*

Exercícios Resolvidos

22.1) **Numa caixa há 10 parafusos, 4 dos quais enferrujados. Retirando-se, ao acaso, dois parafusos com reposição, qual a probabilidade do primeiro estar enferrujado e o segundo não?**

Solução

Na *primeira* retirada, temos o evento
A_1 = {parafuso enferrujado}, onde $n_{A_1} = 4$; a probabilidade desse evento é $p_1 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Na **segunda** retirada, como houve reposição, temos novamente 10 parafusos. O evento dessa retirada é A_2 = {parafuso não enferrujado}, onde $n_{A_2} = 6$. Sua probabilidade é $p_2 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

A probabilidade de ocorrerem A_1 e A_2 é, então

$$P = p_1 \cdot p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

22.2) Um edifício tem 12 andares e 3 apartamentos por andar. Uma pessoa quer encontrar um parente que mora nesse edifício, mas não sabe o andar nem o apartamento que deve procurar. Se ele escolher ao acaso um andar e, nesse andar, um apartamento, qual a probabilidade de acertar o local desejado?

Solução

Temos duas etapas: escolher o andar e, em seguida, um apartamento.

Na primeira temos o evento

$$A_1 = \{\text{andar certo}\},$$

cuja probabilidade é $p_1 = \frac{1}{12}$.

Na segunda, temos o evento

$$A_2 = \{\text{apartamento certo}\},$$

cuja probabilidade é $p_2 = \frac{1}{3}$.

Portanto, a probabilidade de ocorrerem A_1 e A_2 é

$$P = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$$

22.3) De um grupo de 10 homens e 15 mulheres escolhemos, ao acaso, duas pessoas, uma após a outra. Qual a probabilidade de

a) a primeira ser mulher e a segunda homem?

b) que as duas sejam mulheres?

Solução

Nos dois casos, quando da primeira escolha, temos 25 pessoas disponíveis; já para a segunda, dispomos de 24.

a) A probabilidade do evento $A_1 = \{\text{a primeira é mulher}\}$ é $p_1 = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$.

Supondo que a primeira é mulher, entre as 24 restantes temos ainda 10 homens.

Portanto, a probabilidade do evento $A_2 = \{\text{a segunda é homem}\}$ é $p_2 = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$.

Logo, a probabilidade de A_1 e A_2 é

$$P = p_1 \cdot p_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4}$$

b) A ocorrência de duas mulheres se compõem dos eventos

$$A_1 = \{\text{a primeira é mulher}\},$$

cuja probabilidade é $p_1 = \frac{3}{5}$ e

$$A_3 = \{\text{a segunda é mulher}\}$$

Supondo que a primeira é mulher, entre as 24 restantes temos agora 14 mulheres.

Portanto, $p_3 = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$.

Logo, a probabilidade de A_1 e A_3 é

$$P = p_1 \cdot p_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{7}{20}$$

22.4) De um baralho de 52 cartas são retiradas, sem reposição, 3 cartas. Determine a probabilidade de se obter:

a) 3 ases

b) 3 cartas de ouros

Solução

a) *1ª retirada*: temos 4 ases em 52 cartas; a probabilidade de se obter um ás é $p_1 = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

2ª retirada: supondo que a primeira carta obtida foi um ás, como não há reposição temos 3 ases em 51 cartas. A probabilidade de se obter o segundo ás é $p_2 = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$.

3ª retirada: supondo que as duas primeiras cartas foram ases, temos 2 deles em 50 cartas. A probabilidade de se obter o terceiro ás é $p_3 = \frac{2}{50} = \frac{1}{25}$.

Logo, a probabilidade de se obter 3 ases é

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{5\,525}$$

b) com raciocínio análogo ao item a, tendo inicialmente 13 cartas de ouros, escrevemos:

1ª carta de ouros: probabilidade $p_1 = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

2ª carta de ouros: probabilidade $p_2 = \frac{12}{51} = \frac{4}{17}$

3ª carta de ouros: probabilidade $p_3 = \frac{11}{50}$

Logo, a probabilidade de serem obtidas 3 cartas de ouros é

$$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{17} \cdot \frac{11}{50} = \frac{11}{850}$$

22.5) Numa urna há 8 bolas azuis, 5 amarelas e 7 vermelhas. Retirando-se, ao acaso, duas bolas, com reposição, qual a probabilidade de resultarem as duas da mesma cor?

Solução

Como o enunciado não especifica a cor, podemos ter a ocorrência de duas bolas azuis (evento A) ou duas amarelas (evento B) ou duas vermelhas (evento C).

É evidente que A, B e C são eventos mutuamente exclusivos; portanto, a probabilidade pedida será

$$P = P[A] + P[B] + P[C]$$

Temos, então, notando que há reposição da primeira:

1º) Para duas bolas azuis (A)

- probabilidade da primeira ser azul: $p_1 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

- probabilidade da segunda ser azul: $p_2 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Logo, $P[A] = p_1 \cdot p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

2º) Para duas bolas amarelas (B)

- probabilidade da primeira ser amarela: $p_3 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

- probabilidade da segunda ser amarela: $p_4 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Logo, $P[B] = p_3 \cdot p_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

3º) Para duas bolas vermelhas (C)

- probabilidade da primeira ser vermelha: $p_5 = \frac{7}{20}$

- probabilidade da segunda ser vermelha: $p_6 = \frac{7}{20}$

Logo, $P[C] = p_5 \cdot p_6 = \frac{7}{20} \cdot \frac{7}{20} = \frac{49}{400}$

Finalmente, a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor é:

$$P = P[A] + P[B] + P[C] = \frac{4}{25} + \frac{1}{16} + \frac{49}{400} = \frac{69}{200}$$

Exercícios Propostos

22.6) Lançando-se um dado e uma moeda, qual a probabilidade de se obter número primo e coroa?

22.7) Numa urna há 4 bolas pretas, 3 brancas e 8 vermelhas. Retirando-se ao acaso duas bolas, com reposição, qual a probabilidade de resultarem:

a) a primeira branca e a segunda vermelha?
b) a primeira preta e a segunda não preta?
c) duas vermelhas?

22.8) Numa estante há 20 livros, 6 dos quais faltando páginas. Escolhendo-se ao acaso, sem reposição, dois livros, qual a probabilidade de ocorrerem:

a) um livro perfeito e um defeituoso?
b) dois livros perfeitos?
c) dois livros defeituosos?

22.9) Num edifício de 12 andares, com 14 apartamentos por andar, existem 5 andares com 3 apartamentos desocupados cada. Todo o resto do edifício está ocupado. Escolhendo-se ao acaso um andar, e nele um apartamento, qual a probabilidade de se chegar a um apartamento desocupado?

22.10) Lançando-se um dado 3 vezes, qual a probabilidade de ocorrer número menor que 5 nas 3 vezes?

22.11) De um grupo de 18 estudantes, 6 fazem Engenharia, 6 Medicina e 6 Economia. Escolhendo-se, um após o outro, 3 estudantes, qual a probabilidade de:

a) todos fazerem Medicina?
b) o primeiro fazer Medicina e os outros dois Engenharia?
c) o primeiro fazer Medicina, o segundo Engenharia e o terceiro Economia?

22.12) De um baralho de 28 cartas (os 4 naipes, com cartas do ás ao 7) são retiradas, com reposição, 4 cartas. Qual a probabilidade de se obter:

a) 4 cartas de paus?
b) 4 cartas vermelhas?
c) ás, 5, 6 e 7 nessa ordem?

22.13) Um volante de loteria esportiva é preenchido com 2 palpites duplos, 3 triplos e os 8 restantes simples. Considerando-se apenas o acaso, qual a probabilidade de se acertar os 13 jogos?

22.14) Um volante de loteria esportiva é preenchido com dois palpites triplos, quatro duplos e quatro simples preenchidos pela lógica. Os três restantes, bem como os duplos, são preenchidos ao acaso. Se ocorrer a lógica, qual a probabilidade de se fazer 13 pontos?

22.15) Numa sala há duas urnas. Na primeira há 6 bolas brancas e 4 pretas; na outra há 5 brancas, 3 pretas e 4 vermelhas. Escolhe-se uma urna ao acaso e dela retira-se, ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade dessa bola ser branca?

22.16) Numa urna há 6 bolas brancas, 4 pretas e 5 vermelhas. Retirando-se, ao acaso, sem reposição, 3 bolas, qual a probabilidade de todas terem a mesma cor?

22.17) Há 18 bolas em uma urna, sendo 9 vermelhas e 9 amarelas. Uma pessoa retira uma bola ao acaso, e a esconde. Para adivinhar a cor da bola retirada, utilizo a seguinte estratégia: sorteio uma segunda bola dentre as 17 que restaram na urna; se é vermelha, digo que a primeira bola retirada é amarela; se é amarela, digo que a primeira é vermelha. Qual a minha probabilidade de acertar?

22.18) Numa caixa há 4 urnas iguais. Na primeira urna há 4 anéis de brilhante e 2 de vidro; na segunda há 5 anéis de brilhante e 1 de vidro; na terceira há 3 anéis de brilhante e 3 de vidro; na quarta há 2 de brilhante e 4 de vidro. Escolhe-se uma urna ao acaso e dela retira-se um anel. Qual a probabilidade dele ser de brilhante?

Capítulo

23 Distribuição binomial

23.1 – INTRODUÇÃO

Neste capítulo, vamos considerar exclusivamente as situações em que um determinado experimento aleatório é repetido n vezes, sempre em idênticas condições, de maneira que em cada vez que tal experimento é realizado, a probabilidade de ocorrer um evento A é sempre a mesma. Situações como:

– *lançar uma moeda* 6 *vezes* e, a cada lançamento, observar a face superior.

Temos $n = 6$ e, por exemplo, a probabilidade de ocorrer o evento $A = \{cara\}$ é, em cada vez, $P[A] = \frac{1}{2}$

– *lançar um dado* 7 *vezes* e, a cada lançamento, observar a face superior.

Temos $n = 7$ e, por exemplo, a probabilidade de ocorrer o evento $A = \{\text{número maior que } 2\}$ é, em cada vez, $P[A] = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

– *numa prova com* 10 *testes* (5 alternativas cada, uma só correta), *um aluno "chuta" todos* (isto é, assinala ao acaso uma alternativa) e observa se acertou ou errou cada teste.

Temos $n = 10$ e, a cada "chute", a probabilidade de acertar (A) é $P[A] = \frac{1}{5}$.

O problema que aqui nos propomos resolver é o de calcular a probabilidade de ocorrer o evento A em k das n vezes que o experimento se repete ($k \leqslant n$).

Para isso, vamos partir da solução de um exemplo:

Analisando seus antecedentes genéticos, um casal descobre que a probabilidade de ter um filho de olhos verdes é $\frac{7}{8}$. *Supondo que esse casal pretenda ter 5 filhos, qual a probabilidade de 3 deles terem olhos verdes?*

Vemos que, das $n = 5$ vezes que o fato *ter um filho* deve se repetir, o evento

$$A = \{\text{filho de olhos verdes}\}$$

deve ocorrer três vezes ($k = 3$). Portanto, devemos supor que nas outras duas vezes não ocorra filho de olhos verdes, o que representa o evento complementar de A.

Para o nascimento de cada filho, temos:

$$P[A] = \frac{7}{8} \quad \text{e} \quad P[\bar{A}] = 1 - P[A] = \frac{1}{8}$$

Vamos, inicialmente, calcular a probabilidade de que os três primeiros filhos tenham olhos verdes. Isso corresponde à ocorrência dos *eventos sucessivos:*

primeiro filho de olhos verdes (A)
segundo filho de olhos verdes (A)
terceiro filho de olhos verdes (A)
quarto filho de olhos não verdes ($\bar{A}$)
quinto filho de olhos não verdes ($\bar{A}$)

Pela regra do produto de probabilidades

	1º	2º	3º	4º	5º
	A	A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$
probabilidades:	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

temos que a probabilidade V dos três primeiros terem olhos verdes é

$$V = P[A] \cdot P[A] \cdot P[A] \cdot P[\bar{A}] \cdot P[\bar{A}] = P[A]^3 \cdot P[\bar{A}]^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

No entanto, como o problema não especifica em que ordem devem ocorrer os tipos de olhos verdes temos vários outros modos de considerar a distribuição desses três entre os cinco filhos. Eis *alguns* deles:

1º	2º	3º	4º	5º
A	A	$\bar{A}$	$\bar{A}$	A

1º	2º	3º	4º	5º
A	$\bar{A}$	A	A	$\bar{A}$

1º	2º	3º	4º	5º
$\bar{A}$	A	$\bar{A}$	A	A

Notemos que, para **cada um** desses modos, temos probabilidade de ocorrer três filhos de olhos verdes; e ela é sempre igual à probabilidade **V** dos três primeiros terem olhos verdes:

$$P[A]^3 \cdot P[\bar{A}]^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2$$

Sendo assim, a probabilidade P de ocorrerem três filhos de olhos verdes (*em qualquer ordem*) é igual ao produto de **V** pelo total de maneiras possíveis de se distribuir o evento A em 3 das 5 posições.

Ora, sabemos que o número de modos de se escolher 3 das 5 posições é dado por $C_{5,3} = \binom{5}{3}$. Portanto, temos finalmente:

$$P = C_{5,3} \cdot V = \binom{5}{3} P[A]^3 \cdot P[\bar{A}]^2$$

ou seja,

$$P = \binom{5}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1\,715}{16\,384} \cong 0{,}105$$

Resolvido o exemplo proposto, onde tínhamos $n = 5$, $k = 3$, $P[A] = \frac{7}{8}$ e $P[\bar{A}] = \frac{1}{8}$, observemos que a probabilidade obtida

$$P = \binom{5}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)^3$$

pode ser escrita

$$P = \binom{n}{k} P[A]^k \cdot P[\bar{A}]^{n-k}$$

Percebemos, então, que esta expressão corresponde a um dos termos do desenvolvimento do Binômio de Newton

$$(x + a)^n$$

onde $a = P[A]$ e $x = P[\bar{A}]$, devendo-se a esse fato a denominação **distribuição binomial de probabilidades**.

Vamos, então, ao enunciado e resolução do caso geral

23.2 – EXPRESSÃO DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Se, em cada uma das **n** tentativas de um experimento aleatório, a probabilidade de sucesso de um evento A é P[A], então a probabilidade de que A ocorra em **k** das **n** tentativas ($k \leq n$) é

$$P = \binom{n}{k} P[A]^k \cdot P[\bar{A}]^{n-k}$$

Demonstração

Como o evento **A** deve ter sucesso em **k** das **n** vezes, nas **n** – **k** vezes restantes não deve ocorrer **A** ou seja, deve ocorrer o evento complementar de **A**, cuja probabilidade é

$$P[\bar{A}] = 1 - P[A]$$

Suponhamos que **A** ocorra nas **k** primeiras tentativas, ou seja, calculemos a probabilidade dos *eventos sucessivos*

ocorrer A na primeira tentativa
ocorrer A na segunda tentativa
. . . .
ocorrer A na k-ésima tentativa
não ocorrer A na k + 1-ésima tentativa
. . . .
não ocorrer A na n-ésima tentativa

Pela regra do **produto de probabilidades**

	1ª	2ª	3ª		kª	(k + 1)ª		nª
	A	A	A	...	A	$\bar{A}$	...	$\bar{A}$
	↓	↓	↓		↓	↓		↓
probabilidades:	P[A]	P[A]	P[A]	...	P[A]	P[$\bar{A}$]	...	P[$\bar{A}$]

temos que a probabilidade **R** de ocorrer **A** nas **k** primeiras tentativas é

$$R = \underbrace{P[A] \cdot P[A] \cdot P[A] \dots P[A]}_{k\ \text{vezes}} \cdot \underbrace{P[\bar{A}] \dots P[\bar{A}]}_{n-k\ \text{vezes}}$$

ou seja, $R = P[A]^k \cdot P[\bar{A}]^{n-k}$

No entanto, A não deve ocorrer *necessariamente* nas k primeiras tentativas, mas em quaisquer k das n posições possíveis.

Para cada uma das distribuições de A e $\bar{A}$ temos uma probabilidade igual a R, pois os números de vezes que devem ocorrer A e $\bar{A}$ é, sempre, k e n - k, respectivamente. Portanto, a probabilidade P de ocorrer k vezes A é igual ao produto de R pelo total de maneiras de se distribuir o evento A em k das n posições.

Como esse total é dado pelo número de combinações de n elementos tomados k a k, isto é, $C_{n,k} = \binom{n}{k}$, vem, finalmente

$$P = C_{n,k} \cdot R$$

ou seja,

$$P = \binom{n}{k} P[A]^k \cdot P[\bar{A}]^{n-k}$$

Exercícios Resolvidos

23.1) Lançando-se uma moeda 6 vezes, qual a probabilidade de ocorrer 4 vezes cara?

Solução

Temos n = 6 e k = 4.

Em cada lançamento, a probabilidade de sucesso do evento A = {cara} é $P[A] = \frac{1}{2}$. Conseqüentemente, a probabilidade de não ocorrer cara é $P[\bar{A}] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Logo, a probabilidade de ocorrer 4 vezes cara é

$$P = \binom{6}{4} P[A]^4 \cdot P[A]^{6-4} = \binom{6}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$$

23.2) Num exame de 10 testes (5 alternativas cada, uma só correta), um aluno "chuta" os 10 testes. Qual a probabilidade dele acertar a metade? (Escreva a resposta em porcentagem.)

Solução

Temos n = 10 e k = 5.

A probabilidade de acertar um teste é $P[A] = \frac{1}{5}$ e a de não acertar é $P[\bar{A}] = 1 - P[A] = \frac{4}{5}$.

Logo, a probabilidade de acertar a metade deles é

$$P = \binom{10}{5} P[A]^5 \cdot P[\bar{A}]^{10+5} = \binom{10}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 \cong 0{,}0264,$$

portanto 2,64%.

23.3) Lançando-se um dado 5 vezes, qual a probabilidade de ocorrer o número 6 no mínimo 3 vezes?

Solução

Temos n = 5 e, a cada lançamento, a probabilidade de ocorrer o evento

$$A = \{6\}$$

e $P[A] = \frac{1}{6}$, e a de não ocorrer o número 6 é $P[\bar{A}] = 1 - P[A] = \frac{5}{6}$.

Como queremos a probabilidade de sucesso de A **no mínimo** 3 vezes, devemos considerar a ocorrência do número 6 exatamente 3 vezes, ou 4 vezes ou 5 vezes:

1º) probabilidade de ocorrer A 3 vezes (k = 3):

$$P_1 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{10 \times 5^2}{6^6}$$

2º) probabilidade de ocorrer A 4 vezes (k = 4):

$$P_2 = \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5^2}{6^6}$$

3º) probabilidade de ocorrer A 5 vezes (k = 5):

$$P_3 = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6^6}$$

Logo, a probabilidade de ocorrer A no mínimo 3 vezes é

$$P = P_1 + P_2 + P_3 =$$

$$= \frac{10 \times 5^2}{6^6} + \frac{5^2}{6^6} + \frac{1}{6^6} = \frac{23}{1\,296}$$

Exercícios Propostos

23.4) Lançando-se uma moeda 10 vezes, determine a probabilidade de ocorrer:

a) cara na 8ª vez
b) cara na 8ª vez, sabendo que nas 7 primeiras jogadas ocorrem cara
c) 3 vezes cara

23.5) Supondo que um casal pretenda ter 4 filhos, e que não haja nascimento de gêmeos, qual a probabilidade de 2 dos 4 filhos serem do sexo feminino?

23.6) Lançando-se um dado 6 vezes, qual a probabilidade de ocorrer

a) 4 vezes o número 1?
b) 2 vezes número primo?
c) 6 vezes número menor que 3?
d) nenhuma vez número menor que 3?

23.7) Um casal sabe que a probabilidade dele ter um filho de cabelos pretos é $\frac{2}{5}$. Supondo que o casal pretenda ter 4 filhos, qual a probabilidade dele ter no máximo dois filhos de cabelos pretos?

23.8) Uma prova consta de 10 testes (com 4 alternativas cada, uma só correta). Um estudante "chuta" os 10 testes. Qual a probabilidade dele acertar no mínimo 7 testes?

23.9) Numa caixa de controle há 10 interruptores, cada um comandando um circuito elétrico. Cada circuito tem probabilidade de 20% de queimar ao ser acionado. Acionando os 10 interruptores, qual a probabilidade de no máximo dois circuitos resultarem queimados?

23.10) Numa sala de espetáculos há 26 lugares mas todos os dias são vendidos 30 ingressos. Em cada dia, a probabilidade de cada pessoa (que adquire ingresso), não comparecer à função é 10%. Qual a probabilidade de, num certo dia, a sala ficar com superlotação (mais que 26 pessoas)?

Exercícios Suplementares

VII.1 Uma urna contém 10 bolas, indiscerníveis ao tato, numeradas de 0 a 9. Retira-se uma bola ao acaso. Quais são as probabilidades para que a bola tirada porte um número divisível por 2; por 3; por 6?
Duas urnas A e B, semelhantes à urna do parágrafo anterior, são colocadas lado a lado; retira-se uma bola de A e depois uma bola de B, e forma-se o número cujo algarismo das dezenas é o número tirado de A e o algarismo das unidades, o número tirado de B. Qual é a probabilidade para que o número assim obtido seja divisível por 3?

VII.2 Uma urna contém **n** bolas, numeradas de 1 a **n**. Extrai-se uma bola. Qual é a probabilidade para que o número nela desenhado:
a) seja divisível por 6 ou por 9
b) seja divisível por 6 e por 9
Caso particular: n = 100

VII.3 Quatro urnas A, B, C e D contêm, cada uma, cinco bolas idênticas, numeradas de 1 a 5. Extrai-se uma bola de cada urna. Qual é a probabilidade P, para que 3 seja o maior número extraído?

VII.4 Seja a equação do 2º grau:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

Os coeficientes p e q são determinados, respectivamente, por duas jogadas sucessivas de um dado perfeito, cujas faces são numeradas de 1 a 6.
Determine as probabilidades dos eventos:
a) a equação (1) admite raízes reais distintas
b) a equação (1) admite uma raiz dupla
c) a equação (1) não admite raízes reais

VII.5 Uma urna contém **n** bolas brancas, n + 2 bolas pretas e 4 bolas verdes ($n > 0$).
Um jogador tira uma bola ao acaso (cada bola tem a mesma probabilidade de ser tirada):
1º) Se ela é **branca**, ele ganha
2º) Se ela é **preta**, ele perde
3º) Se ele é **verde**, ele retira outra bola ao acaso (sem repor a verde): ele ganha se esta é **branca**; se não, ele perde.
Qual é, em função de **n**, a probabilidade P_n para que o jogador ganhe?

VII.6 Dispomos de três dados A, B e C *não viciados.*
O dado A porta sobre uma face o número 3, sobre três faces o número 4 e sobre duas faces o número 5.
O dado B porta sobre duas faces o número 4 e sobre quatro faces o número 2.
O dado C porta sobre cinco faces o número 4 e sobre uma face o número 2.

Lançam-se simultaneamente os três dados. Qual é a probabilidade para se obter:
a) três números iguais;
b) o conjunto de números: $\{2;\ 4;\ 5\}$;
c) três números cuja soma é S e tal que $S \geqslant 12$.

VII.7 Numa loteria de 6 números, designa-se por $P_{(k)}$ a probabilidade de se tirar o número k $(1 \leqslant k \leqslant 6)$.
Supõe-se $P_{(1)} = P_{(3)} = P_{(5)} = a$ e $P_{(2)} = P_{(4)} = P_{(6)} = b$

Pratica-se uma única tiragem e designa-se com A o evento: "o número tirado é maior ou igual a 4"; seja P(A) a probabilidade de A.
Determine a e b para que $P(A) = \frac{5}{12}$.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Capítulo 1

1.4) a) m.n.
b) $a_{21} = 407$, $a_{m2} = 850$, $a_{1n} = 517$, $a_{mn} = 1000$

1.5) 2×3 ou 3×2
1.6) $n^2 - n$
1.7) 12

1.8) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

1.9) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

1.10) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 10 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 18 & 9 \end{bmatrix}$

1.11) 14

1.15) $A = A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 0 \end{bmatrix}$ A é simétrica

1.16) $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{3\sqrt{6}}{8}$

1.17) sim
1.18) 6

1.19) a) $I^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $J^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $O^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.20) $A^t = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Capítulo 2

2.11) a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 9 & 16 & -1 \\ 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

2.12) $y = 1$ e $x = \pm 1$

2.13) a) $\begin{bmatrix} -24 & -24 & -24 \\ -26 & 3 & -33 \\ -49 & -70 & 8 \end{bmatrix}$

b)
$$X = \begin{bmatrix} -\frac{24}{17} & -\frac{24}{17} & -\frac{24}{17} \\ -\frac{26}{17} & \frac{3}{17} & -\frac{33}{17} \\ -\frac{49}{17} & -\frac{70}{17} & \frac{8}{17} \end{bmatrix}$$

2.14) Seja $A = [a_{ij}]$.
$\alpha \cdot A + \beta \cdot A = \alpha[a_{ij}] + \beta[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}] = [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}] =$
$= [(\alpha + \beta) a_{ij}] = (\alpha + \beta)\, [a_{ij}] = (\alpha + \beta) \cdot A$

2.15) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$

2.16) $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

2.17) Se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $A + B = [\alpha_{ij}]$, então tem-se $\alpha_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
$$tr(A + B) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} =$$
$$= tr(A) + tr(B)$$

2.18) Se $A = [a_{ij}]$ e $A^t = [b_{ij}]$, então $b_{ij} = a_{ji}$.
Sejam $\alpha A = [c_{ij}]$ e $(\alpha A)^t = [d_{ij}]$. Então
$(\alpha A)^t = [d_{ij}] = [c_{ji}] = [\alpha a_{ji}] = \alpha[a_{ji}] = \alpha[b_{ij}] = \alpha A^t$

2.19) Como $A - B = A + (-1)B$, temos
$(A - B)^t = (A + (-1)B)^t = A^t + ((-1)B)^t = A^t + (-1)B^t = A^t - B^t$

2.20) Seja $B = A - A^t$. Então
$B^t = (A - A^t)^t = A^t - (A^t)^t = A^t - A = -B$

2.21) a) 2×4 b) 1×4 c) 2×4

2.22) $AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}$

2.23) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.25) a) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $BA = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & 6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

b) $AB = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -5 \\ 10 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, BA não existe

2.26) $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

2.37) $C_{32} = 24$, $C_{13} = 13$

2.38) $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.39) $x = \frac{1}{5}$

2.40) $3b = 2c = 6(a - d)$

2.42) Se A é involutiva então $A^2 = I$. Portanto
$$(I - A)(I + A) = I^2 - A^2 = I - I = 0$$
Inversamente, se $(I - A)(I + A) = 0$ tem-se $I^2 - A^2 = 0$ donde $A^2 = I$ e portanto A é involutiva.

2.43) Teorema 1: Para n = 1 a igualdade é evidente.
Teorema 2:

Hipótese: $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \cos(k\,\theta) & \operatorname{sen}(k\,\theta) \\ -\operatorname{sen}(k\,\theta) & \cos(k\,\theta) \end{bmatrix}$

Tese: $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos((k+1)\theta) & \operatorname{sen}((k+1)\theta) \\ -\operatorname{sen}((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{k} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(k\,\theta) & \operatorname{sen}(k\,\theta) \\ -\operatorname{sen}(k\,\theta) & \cos(k\,\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos(k\,\theta) - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(k\theta) & \cos\theta\operatorname{sen}(k\,\theta) + \operatorname{sen}\theta\cos(k\theta) \\ -\operatorname{sen}\theta\cos(k\,\theta) - \cos\theta\operatorname{sen}(k\,\theta) & -\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(k\,\theta) + \cos\theta\cos(k\,\theta) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos((k+1)\theta) & \operatorname{sen}((k+1)\theta) \\ -\operatorname{sen}((k+1)\theta) & \cos((k+1)\theta) \end{bmatrix}$$

2.45) Sejam $(A+B)C = [d_{ij}]_{m\times p}$, $AC = [e_{ij}]_{m\times p}$ e $BC = [f_{ij}]_{m\times p}$

Temos

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik}c_{kj} + b_{ik}c_{kj}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} k_{ik}c_{kj} = e_{ij} + f_{ij}$$

donde $[d_{ij}]_{m\times p} = [e_{ij}]_{m\times p} + [f_{ij}]_{m\times p}$

ou seja, $(A+B)C = AC + BC$

2.46) Sejam $AB = [c_{ij}]$ e $BA = [d_{ij}]$. Temos

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}\right) = \sum_{k=1}^{n} d_{kk} = \operatorname{tr}(BA)$$

2.47) Teorema 1: $(A_1A_2)^t = A_2^t \cdot A_2^t$

Sejam $A_1 = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $A_2 = [b_{ij}]_{n\times p}$. Sejam também

$A_1A_2 = [c_{ij}]_{m\times p}$, $(A_1A_2)^t = [d_{ij}]_{p\times m}$, $A_1^t = [e_{ij}]_{n\times m}$,

$A_2^t = [f_{ij}]_{p\times n}$ e $A_2^tA_1^t = [g_{ij}]_{p\times m}$

$$d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} e_{kj}f_{ik} = g_{ij}$$

Assim, $(A_1A_2)^t = A_2^tA_1^t$

Teorema 2:

Hipótese

$(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_k)^t = A_k^t \cdot A_{k-1}^t \cdot \ldots \cdot A_3^t \cdot A_2^t \cdot A_1^t$

Tese

$(A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_{k+1})^t = A_{k+1}^t \cdot A_k^t \cdot \ldots \cdot A_3^t \cdot A_2^t \cdot A_1^t$

Seja $A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_k = B$. Temos

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_{k+1})^t = (B \cdot A_{k+1})^t = A_{k+1}^t \cdot B^t =$$
$$= A_{k+1}^t (A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_k)^t =$$
$$= A_{k+1}^t \cdot A_k^t \cdot A_{k-1}^t \cdot \ldots \cdot A_3^t \cdot A_2^t \cdot A_1^t$$

2.48) Teorema 1: $A^{1+q} = A^1 \cdot A^q$ (por definição)

Teorema 2:

Hipótese $A^{k+q} = A^k \cdot A^q$

Tese $A^{(k+1)+q} = A^{k+1} \cdot A^q$

$$A^{(k+1)+q} = A^{1+(k+q)} = A^1 \cdot A^{k+q} = A^1 \cdot (A^k \cdot A^q) =$$
$$= (A^1 \cdot A^k) \cdot A^q = A^{k+1} \cdot A^q$$

2.49) $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 =$
$= A^2 + AB - AB - B^2 = A^2 - B^2$

2.50) a) Se $B = A^t$ então $B^t = (A^t)^t = A = A^t = B$
b) Se $B = A^2$ então $B^t = (A^2)^t = (A^t)^2 = A^2 = B$
c) Se $C = AB$ então $C^t = (AB)^t = (BA)^t = A^tB^t = AB = C$

2.52) $(A^t \cdot B^t + 3C)^t = (A^tB^t)^t + (3C)^t = (B^t)^t \cdot (A^t)^t + 3C^t =$
$= BA - 3c$

2.53) b) $A \cdot B = B \cdot A = O$
c) Se $M_1 = a_1 \cdot A + b_1 \cdot B$ e $M_2 = a_2 \cdot A + b_2 \cdot B$

então $M_1 \cdot M_2 = (a_1 \cdot A + b_1 \cdot B) \cdot (a_2 \cdot A + b_2 \cdot B) =$
$= a_1 \cdot A \cdot (a_2 \cdot A + b_2 \cdot B) + b_1 \cdot B \cdot (a_2 \cdot A + b_2 \cdot B) =$
$= a_1a_2 \cdot A^2 + a_1b_2 \cdot A \cdot B + a_2b_1 \cdot B \cdot A + b_1b_2 \cdot B^2 =$
$= a_1a_2 \cdot A + a_1b_2 \cdot O + a_2b_1 \cdot O + b_1b_2 \cdot B = aA + bB$

onde $a = a_1a_2$ e $b = b_1b_2$

2.57) a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \sec\theta & -\operatorname{tg}\theta \\ -\operatorname{tg}\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$ c) Não existe

2.59) $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

2.60) a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ c) Não existe

2.61) $I^{-1} = I$

2.63) $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ \frac{9}{4} & 2 \end{bmatrix}$

2.64) $X = \begin{bmatrix} \cos 3a \\ \text{sen } 3a \end{bmatrix}$

2.65) $XA = B \Rightarrow (XA)A^{-1} = BA^{-1} \Rightarrow X(AA^{-1}) = BA^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow XI = BA^{-1} \Rightarrow x = BA^{-1}$

2.66) a) $X = A^{-1}CB^{-1}$
b) $X = A^{-1}(C - B)$
c) $X = A^{-1}B^t$
d) $X = B^t - A$
e) $X = A^{-1}B^{-1}$

2.78) Seja $B = A^{-1}$
$B^t = (A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1} = B$

2.79) $Q^{-1}BQ = Q^{-1}(QAQ^{-1})Q = (Q^{-1}Q)A(Q^{-1}Q) =$
$= IAI = A$

2.80) $X = A^{-1}$

2.81) $P^{-1} + Q^{-1} = I \Rightarrow P(P^{-1} + Q^{-1})Q = PIQ \Rightarrow$
$\Rightarrow PP^{-1}Q + PQ^{-1}Q = PQ \Rightarrow Q + P = PQ$

2.82) 1º) Se $\Delta \neq 0$, então sendo $B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ tem-se

$$BA = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

donde A é invertível e $A^{-1} = B$

2º) Se A é invertível então existe a matriz
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$
tal que $AA^{-1} = I_2$, ou seja,
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} ax + bz = 1 \ (1) & cx + dz = 0 \ (3) \\ ay + bw = 0 \ (2) & cy + dw = 1 \ (4) \end{cases}$$
Façamos (1) • (4) − (2) • (3). Resulta
$(ax + bz)(cy + dw) - (ay + bw)(cx + dz) = 1$
donde $adxw + bcyz - adyz - bcxw = 1$
ou ainda $(ad - bc)(xw - yz) = 1$
donde $\Delta = ad - bc \neq 0$.

2.83) Sejam $X = A^{-1} + B^{-1}$ e $Y = A(A + B)^{-1}B$. Temos
$XY = (A^{-1} + B^{-1})(A(A + B)^{-1}B) =$
$= (A^{-1}A + B^{-1}A)(A + B)^{-1}B =$
$= (I + B^{-1}A)(B^{-1}(A + B))^{-1} =$
$= (I + B^{-1}A)(B^{-1}A + B^{-1}B)^{-1} =$
$= (I + B^{-1}A)(I + B^{-1}A)^{-1} = I$

Assim, $X^{-1} = Y$, ou seja,
$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$

2.84) Note em 1º lugar que $I - K$ e $J + K$ *comutam.* Então
$B^t = ((I + K)(I - K)^{-1})^t = ((I - K)^{-1})^t \cdot (I + K)^t = ((I - K)^t)^{-1}(I + K)^t =$
$= (I - K^t)^{-1}(I + K^t) = (I + K)^{-1}(I - K)$

e assim

$B^tB = (I + K)^{-1}(I - K)(I + K)(I - K)^{-1} = (I + K)^{-1}(I + K)(I - K)(I - K)^{-1} =$
$= I \cdot I = I$

Logo, $B^{-1} = B^t$ e B é ortogonal.

2.85) a) $A^2 + A - 2I = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + bc + a - 2 & ac + cd + c \\ ab + bd + b & bc + d^2 + d - 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a^2 + (ad + 2) + a - 2 & c(a + d) + c \\ b(a + d) + b & (ad + 2) + d^2 + d - 2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} a(a + d) + a & c(a + d) + c \\ b(a + d) + b & d(a + d) + d \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -a + a & -c + c \\ -b + b & -d + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Assim, $A^2 = -A + 2I$. Daí vem $A^2 + A = 2I$ donde $A(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I) = I$, logo $A^{-1} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}I$. Portanto, $A^{-1} \in \urcorner$, com $\beta = \frac{1}{2}$.

b) Sejam $X = \alpha_1 A + \beta_1 I$ e $Y = \alpha_2 A + \beta_2 I$ elementos de $\urcorner$. Temos

$$\begin{aligned} XY &= (\alpha_1 A + \beta_1 I)(\alpha_2 A + \beta_2 I) = \\ &= \alpha_1\alpha_2 A^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)A + \beta_1\beta_2 I = \\ &= \alpha_1\alpha_2(-A + 2I) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)A + \beta_1\beta_2 I = \\ &= (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\alpha_2)A + (\beta_1\beta_2 + 2\alpha_1\alpha_2)I = \\ &= \alpha A + \beta I \in \urcorner \end{aligned}$$

Capítulo 3

3.4) a) 18 b) 1 c) $\text{sen}(\alpha + \beta)$ d) $\sec^2\alpha = \text{tg}^2\alpha + 1$

3.5) a) $S = \{-\frac{1}{6}; \frac{3}{2}\}$ b) $S = \{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\}$

3.6) $\theta = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

3.7) a) 16 b) 6 c) 17 d) 12 e) -32

3.8) a) 1 b) 0 c) $a_{11}a_{22}a_{33}$

3.9) a) 12 b) 3 c) $\frac{1}{3}$

3.11) a) $S = \{-3\}$ b) $S = \{-10; 2\}$

3.12) a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < -4\}$

3.13) a) 34 b) 256 c) 2

3.14) a) abcde b) 1

3.15) a) 16 b) 16 c) 0

3.16) a) 2 b) -2 c) 32 d) 59

3.17) a) $3(d - a)$ b) $a_1^4 - a_2^4$

3.18) a) -25 b) 16

3.19) Aplica-se o Teorema de Laplace:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

3.20) $\begin{bmatrix} x & a & b \\ a & x & c \\ b & c & x \end{bmatrix}$

3.21) Sim

3.22) Se $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $AB = [c_{ij}]$, com $a_{ij} = 0$ e $b_{ij} = 0$ para $i < j$, então para $i < j$ tem-se também $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} = 0$, pois para $1 \leqslant k < j$ tem-se $b_{kj} = 0$ e para $j \leqslant k \leqslant n$ tem-se $a_{ik} = 0$.

3.23) $(-1)^{n+1}$

3.24) $\det A = (-t)A_{11} + a_1 A_{1n}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix} = (-t)^{n-1}$$

$$A_{1n} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_2 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & -t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \cdot a_2 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Assim,

$$\begin{aligned} \det A &= (-t)(-t)^{n-1} + a_1 a_2 a_3 a_4 \cdot \ldots \cdot a_n = \\ \det A &= (-t)(-t)^{n-1} + (-1)^{n+1} \cdot a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \\ &= (-t)^n + (-1)^{n+1} \ a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = \\ &= (-1)^n (t^n - a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n) \end{aligned}$$

Capítulo 4

4.6) -4

4.7) -3

4.8) Multiplicando a 1ª coluna por a_2a_3, a 2ª por a_1a_3 e a 3ª por a_1a_2, obtemos

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_2a_3} \cdot \frac{1}{a_1a_3} \cdot \frac{1}{a_1a_2} \begin{vmatrix} a_1a_2a_3 & a_1a_2a_3 & a_1a_2a_3 \\ a_2a_3b_1 & a_1a_3b_2 & a_1a_2b_3 \\ a_2a_3c_1 & a_1a_3c_2 & a_1a_2c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_2a_3} \cdot \frac{1}{a_1a_3} \cdot \frac{1}{a_1a_2} \cdot a_1a_2a_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2a_3b_1 & a_1a_3b_2 & a_1a_2b_3 \\ a_2a_3c_1 & a_1a_3c_2 & a_1a_2c_3 \end{vmatrix}$$

4.9) Multiplicando a 1ª linha por α, a 2ª por β e a 3ª por γ, obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta\gamma \\ 1 & \beta & \gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \alpha\beta\gamma \\ \beta & \beta^2 & \alpha\beta\gamma \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha\beta\gamma \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \beta & \beta^2 & 1 \\ \gamma & \gamma^2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

4.10) Multiplicando a 2ª linha por bc, a 3ª por ac e a 4ª por ab, obtemos

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2c^2} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ abc & 0 & bc^2 & b^2c \\ abc & ac^2 & 0 & a^2c \\ abc & ab^2 & a^2b & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(abc) \cdot a \cdot b \cdot c}{a^2b^2c^2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

4.11) $\det A = 0$

4.12) zero

4.13) $S = \mathbb{R}$

4.17)
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2x+3 \\ y & 3 & 2y+9 \\ z & 5 & 2z+15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2x \\ y & 3 & 2y \\ z & 5 & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 3 & 9 \\ z & 5 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

4.18)
$$\begin{vmatrix} a & -1 & d \\ b & 2 & e \\ c & -3 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & b & a \\ 3 & 6 & 1 \\ f & e & d \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 2 & -3 \\ d & e & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 6 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

4.19) -6

4.20) 20

4.21) $S = \{0\}$

4.22) a)
$$\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ b & 1 & b \\ c & 1 & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & 1 & a \\ c & 1 & b \\ a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$$

b) Multiplicando a 1ª linha por a, a 2ª por b, a 3ª por c e a 4ª por d, obtemos

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+acd \\ 1 & c & c^2 & c^3+abd \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{vmatrix} = \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4+abcd \\ b & b^2 & b^3 & b^4+abcd \\ c & c^2 & c^3 & c^4+abcd \\ d & d^2 & d^3 & d^4+abcd \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} + \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & abcd \\ b & b^2 & b^3 & abcd \\ c & c^2 & c^3 & abcd \\ d & d^2 & d^3 & abcd \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & 1 \\ b & b^2 & b^3 & 1 \\ c & c^2 & c^3 & 1 \\ d & d^2 & d^3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = 0$$

4.23)
$$\det\left(\sum_{j=1}^{n} A_j\right) = \det \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_j & pd & pg \\ \sum_{j=1}^{p} b_j & pe & ph \\ \sum_{j=1}^{p} c_j & pf & pi \end{bmatrix} = p^2 \det \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{p} a_j & d & g \\ \sum_{j=1}^{p} b_j & e & h \\ \sum_{j=1}^{p} c_j & f & i \end{bmatrix} =$$

$$= p^2 \sum_{j=1}^{p} \det \begin{bmatrix} a_j & d & g \\ b_j & e & h \\ c_j & f & i \end{bmatrix} = p^2 \sum_{j=1}^{p} (\det A_j)$$

4.25)
$$\det(A+B) = \det \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \det A + \det B + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$ donde, a tese.

4.37) a) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d+e \\ a & c & d & e+b \\ a & d & e & b+c \\ a & e & b & c+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & b+c+d+e \\ a & c & d & b+c+d+e \\ a & d & e & b+c+d+e \\ a & e & b & b+c+d+e \end{vmatrix} =$

$= a(b+c+d+e) \begin{vmatrix} 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & e & 1 \\ 1 & e & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

4.38) (3ª coluna) = (−1) · (1ª coluna) + (−1) · (2ª coluna)

4.39) a) Como $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2}$, resulta que (2ª linha) = (1ª linha) − 2(3ª linha)

b) (3ª linha) = (1ª linha) + (2ª linha)

4.40) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & a & b \\ 2b+2c+2a & b+c+2a & b \\ 2c+2a+2b & a & c+a+2b \end{vmatrix} =$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix} =$

$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

4.41) a) $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 0 \\ 1 & b^2 & b^2(b-a) \\ 1 & c^2 & c^2(c-a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b^2-a^2 & b^2(b-a) \\ 1 & c^2-a^2 & c^2(c-a) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} b^2-a^2 & b^2(b-a) \\ c^2-a^2 & c^2(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & b^2 \\ c+a & c^2 \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & b^2 \\ c-b & c^2-b^2 \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)(c-b) \begin{vmatrix} b+a & b^2 \\ 1 & c+b \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)\left[(b+a)(c+b) - b^2\right] =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)(ab+ac+bc)$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b(b-a) \\ 1 & c-a & c(c-a) \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} b-a & b(b-a) \\ c-a & c(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} =$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

4.42) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-c & a^2-c^2 \\ 0 & 0 & b-d & b^2-d^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} =$

$= (a-c)(b-d) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & a+c \\ 0 & 0 & 1 & b+d \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} =$

$= (a-c)(b-d) \begin{vmatrix} 0 & 1 & a+c \\ 0 & 1 & b+d \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-c)(b-d) \begin{vmatrix} 1 & a+c \\ 1 & b+d \end{vmatrix} =$

$= (a-c)(b-d)(b+d-a-c)$

4.43) Multipliquemos a 1ª linha por a, a 2ª por b e a 3ª por c. O determinante fica

$\frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a(b^2+c^2) & a^2b & a^2c \\ b^2a & b(c^2+a^2) & b^2c \\ c^2a & c^2b & c(a^2+b^2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 0 & -2c^2 & -2b^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} =$

$= -2 \begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ c^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = -2(-a^2b^2c^2 - a^2b^2c^2) = 4a^2b^2c^2$

4.44) Zero (a 3ª coluna é combinação linear das duas primeiras)

4.45) Zero

4.47) sen 20° · sen 40° · sen 80°

4.48) $S = \{1; -1\}$

4.49) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } 1 < x < 2 \text{ ou } x > 7\}$

4.50) $S = \{0; -10\}$

4.51) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ (k \in \mathbb{Z})\right\}$

4.52) Multiplicando-se a 1ª linha por a, a 2ª por b, a 3ª por c e a 4ª por d, o determinante fica

$$\frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a(a^2+1) & a^2b & a^2c & a^2d \\ b^2a & b(b^2+1) & b^2c & b^2d \\ c^2a & c^2b & c(c^2+1) & c^2d \\ d^2a & d^2b & d^2c & d(d^2+1)\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+1 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 & c^2 \\ d^2 & d^2 & d^2 & d^2+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b^2+1 & b^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & c^2+1 & c^2 \\ d^2 & d^2 & d^2 & d^2+1\end{vmatrix} =$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2+1)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\b^2&1&0&0\\c^2&0&1&0\\d^2&0&0&1\end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

4.53)

$$\begin{vmatrix}0&a&b&c\\-a&0&1&-1\\-b&-1&0&1\\-c&1&-1&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0&a&b&(a+b+c)\\-a&0&1&0\\-b&-1&0&0\\-c&1&-1&0\end{vmatrix} =$$

$$= -(a+b+c)\begin{vmatrix}-a&0&1\\-b&-1&0\\-c&1&-1\end{vmatrix} = -(a+b+c)(-a-b-c) = (a+b+c)^2$$

4.54)

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b\\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a+2b+2c & c+a & a+b \\ 2a_1+2b_1+2c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1\\ 2a_2+2b_2+2c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b\\ a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1\\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c & c+a & a+b\\ c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2\end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ c_1 & a_1 & a_1+b_1\\ c_2&a_2&a_2+b_2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} c&a&b\\c_1&a_1&b_1\\c_2&a_2&b_2\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$$

4.55)

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1&1&1&\dots&1\\-1&0&1&\dots&1\\-1&-1&0&\dots&1\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots \\ -1&-1&-1&\dots&0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&1&2&\dots&2\\0&0&1&\dots&2\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&1\end{vmatrix} = 1$$

4.56)

$$\begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\1&1+a_1&1&\dots&1\\1&1&1+a_2&\dots&1\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&1&\dots&1+a_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1&\dots&1\\0&a_1&0&\dots&0\\0&0&a_2&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&a_n\end{vmatrix} =$$

$$= a_1a_2\dots a_n$$

4.57) Mesmo raciocínio do exercício 4.36.

4.62) 288

4.63)

$$\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2\\ c-a & c^2-a^2\end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&b+a\\1&c+a\end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)\,|(c+a)-(b+a)| =$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) =$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a)$$

4.64) a)

$$\begin{vmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{vmatrix} =$$

$$= a\begin{vmatrix} b-a&b-a&b-a\\b-a&c-a&c-a\\b-a&c-a&d-a\end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix}1&1&1\\b-a&c-a&c-a\\b-a&c-a&d-a\end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)\begin{vmatrix}c-b&c-b\\c-b&d-b\end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)(c-b)\begin{vmatrix}1&1\\c-b&d-b\end{vmatrix} =$$

$$= a(b-a)(c-b)(d-c)$$

4.69) 48

4.70) 12

4.71) (b – a) (c – a) (c – b)

4.72) Como $V(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$ então, se V = 0, um dos fatores $x_i - x_j = 0$, logo, existem dois elementos x_i e x_j iguais. Inversamente, se dois elementos x_α e x_β são iguais, a diferença correspondente $x_\alpha - x_\beta = 0$ anula o produto, logo V = 0.

4.73) $S = \{-2, 5, -4\}$

4.74) $S = \{1, -1, 2\}$

Capítulo 5

5.7) a) não b) sim

5.8) det A = 1

5.9) $\det(A^tB^t) = \det(A^t) \cdot \det(B^t) = \det A \cdot \det B$
$\det(AB^t) = \det A \cdot \det(B^t) = \det A \cdot \det B$
$\det(A^tB) = \det(A^t) \cdot \det B = \det A \cdot \det B$

5.10) a) $\begin{bmatrix} -5 & 4 & -3 \\ 10 & -7 & 6 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ c) não existe

5.11) a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$

5.12) a) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5.13) ± 1

5.14) a) sim
b) $(AB)^* = (\det(AB))(AB)^{-1} = (\det A)(\det B)B^{-1}A^{-1} =$
$= ((\det B)B^{-1}) \cdot ((\det A)A^{-1}) = B^*A^*$

Capítulo 6

6.1) A equação (a)

6.2) a) sim b) não c) k = 7

6.3) sim

6.4) a) sim b) não

6.5) a) m = 2, n = 15, p = 16
b) k = 1

6.6) $[A \mid B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 5 \\ 3 & -5 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

6.7) a) $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 38 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 3 & -7 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$

6.8) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1 \end{cases}$

6.9) a) (2; 4) b) (1; 3) c) (4; 1)

6.10) a) (–1; 1; 2) b) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ c) (2; 1; 4) d) (1; 3; –2)

6.11) a) (2; 3; 1; 3) b) (1; –1; –1; 1)

6.12) $a \neq \dfrac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$; (0; 0; 0)

6.13) $\left(\dfrac{7 + 3m}{1 + m^2} ; \dfrac{3 - 7m}{1 + m^2}\right)$

6.14) $m \neq -\dfrac{1}{3}$; $\left(\dfrac{2 + 8m}{1 + 3m} ; \dfrac{1 + 4m - m^2}{2 + 6m}\right)$

6.15) a) $S = \varnothing$ b) $\left(\dfrac{1}{2} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{4}\right)$

6.16) $(\cos 2\alpha ; \text{ sen } 2\alpha)$

6.17) $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 2$, $c = \dfrac{5}{2}$

6.18) $M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; (-15; -11)

6.19) $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$; $\left(-2; \dfrac{13}{4} ; \dfrac{33}{4}\right)$

Capítulo 7

7.2) a = 1, b = 2, c = 3

7.3) Podemos demonstrar a (t e 3) utilizando as duas primeiras equações do sistema, pois pela (t e 1) não se perde a generalidade. Sejam então o sistema

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

e o sistema

$$(S_1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ (ka_{11} + a_{21})x_1 + (ka_{12} + a_{22})x_2 + \ldots + (ka_{1n} + a_{2n})x_n = kb_1 + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

obtido de (S) somando-se a 2ª equação com a 1ª, sendo esta previamente multiplicada por *k*.

(S) e (S_1) somente diferem pela 2ª equação.

1ª parte) Se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de (S), então substituindo estes valores na 2ª equação de (S_1) obtemos

(1º membro) $= (ka_{11} + a_{21})\alpha_1 + (ka_{12} + a_{22})\alpha_2 + \ldots + (ka_{1n} + a_{2n})\alpha_n =$
$= k(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n) + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) =$
$= kb_1 + b_2 =$ (2º membro)

Logo, toda solução de (S) é solução de (S_1)

2º parte) Se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de (S_1), então é claro que

$(ka_{11} + a_{21})\alpha_1 + (ka_{12} + a_{22})\alpha_2 + \ldots + (ka_{1n} + a_{2n})\alpha_n = kb_1 + b_2$

donde

$$k\underbrace{(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n)}_{b_1} + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) = kb_1 + b_2$$

$kb_1 + (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) = kb_1 + b_2$

e assim $a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n = b_2$

Logo, toda solução de (S_1) é solução de (S)

Portanto, $(S) \sim (S_1)$

7.4) a) (1; 3; 1) b) $(1 + 2\alpha; 1 - \alpha; \alpha)$ c) $(\alpha; -2\alpha; -8\alpha)$

7.5) a) $\left(-6; \dfrac{13}{3} ; -\dfrac{1}{3} ; 2\right)$ b) $\left(\dfrac{7}{3} - 2\alpha; 4 - 3\alpha; 1 + \alpha; \alpha\right)$

c) $(\alpha; 2\alpha + 3\beta + 1; 2 + \beta; \beta)$

7.6) a) $\left(\dfrac{a^2 - ab + 2a - b}{a^2} ; \dfrac{2a - b}{a^2} ; \dfrac{b}{a}\right)$ b) $(\alpha - 1; \alpha; 2)$

7.25) a) $\left(\dfrac{8}{5} ; -\dfrac{7}{10}\right)$ b) inconsistente

7.26) a) $\left(\dfrac{1}{2} ; 0; -\dfrac{2}{3}\right)$ b) inconsistente

c) $(-1 - 7\alpha; 2 + 2\alpha; \alpha)$

7.27) a) (1; 1) b) (2; 1; -1)

7.28) a) $(6 - 2\alpha - 5\beta; \alpha; \beta; 2\beta - 1)$

b) inconsistente

7.29) a) (0; 0; 0) b) (0; 0; 0) c) $\left(-\dfrac{19\alpha}{3} ; -\dfrac{53\alpha}{11} ; -\dfrac{79\alpha}{33} ; \alpha\right)$.

7.30) a) Se m = -1 : inconsistente

Se $m \neq -1$: determinado, $S = \left\{\left(\dfrac{2m + 3}{m + 1} ; \dfrac{-1}{m + 1}\right)\right\}$

b) Se $m \neq 6$: inconsistente

Se m = 6 : indeterminado, $S = \{(3 - 2\alpha; \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

7.31) a) Se k = 1 : inconsistente

Se $k \neq 1$: determinado, $S = \left\{\left(\dfrac{k + 1}{k - 1} ; \dfrac{2}{k - 1} ; \dfrac{2}{1 - k}\right)\right\}$

b) Se $m \neq -1$: inconsistente

Se m = -1 : determinado, $S = \{(1; 2)\}$

7.32) a) Se $k = -2$: inconsistente

Se $k = 1$: indeterminado, $S = \{(\alpha;\ \beta;\ 1 - \alpha - \beta),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$

Se $k \neq 1$ e $k \neq -2$: determinado, $S = \left\{\left(\frac{1}{k+2};\ \frac{1}{k+2};\ \frac{1}{k+2}\right)\right\}$

b) Se $k = 4$: inconsistente

Se $k \neq 4$: indeterminado,

$$S = \left\{\left(\frac{k-6}{k-4} - (k+4)\alpha;\ \frac{1}{k-4} + 2\alpha;\ \alpha\right),\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

7.33) a) Se $k = 3$: indeterminado,

$S = \{(5 - 10\alpha;\ 7\alpha - 3;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

Se $k \neq 3$: determinado, $S = \{(6 + 3k;\ -4 - 2k;\ -1)\}$

b) Se $k = -5$: inconsistente

Se $k = 2$: indeterminado,

$$S = \left\{\left(3\alpha - 3;\ \frac{4 - 5\alpha}{2};\ \alpha\right),\ \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

Se $k \neq -5$ e $k \neq 2$: determinado,

$$S = \left\{\left(\frac{-3k - 3}{k+5};\ \frac{4}{k+5};\ \frac{4}{k+5}\right)\right\}$$

7.34) a) Se $k \neq 1$: inconsistente

Se $k = 1$: indeterminado, $S = \{(0;\ \alpha;\ \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

b) Se $k = 6$ ou $k = \pm\sqrt{3}$: indeterminado

Se $k \neq 6$ e $k \neq \pm\sqrt{3}$: determinado

7.35) $a = 1$

7.36) Basta mostrar que $\det A = 2abc \neq 0$

7.37) a) $a = -4$ e $b = -7$: indeterminado

$a = -4$ e $b \neq -7$: inconsistente

$a \neq -4$: determinado

b) $a = -1$ e $b = 8$: indeterminado

$a = -1$ e $b \neq 8$: inconsistente

$a \neq -1$: determinado

7.38) $ab = 1$: indeterminado p/ $a = 1$ e inconsistente p/ $a \neq 1$

$ab \neq 1$: determinado

7.39) $m = -2$: inconsistente

$m = 1$: indeterminado

$m \neq -2$ e $m \neq 1$: determinado

7.40) $\left(\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)};\ \frac{(d-a)(c-d)}{(b-a)(c-b)};\ \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}\right)$

7.41) a) $a = b = 0$: indeterminado

$a = b = 1$: indeterminado

$a = b \neq 0$ e 1 : inconsistente

$a \neq b$: determinado

b) $a = 3$: determinado

$a \neq 3$: inconsistente

c) $m = \pm 1$ e $p = 1$: indeterminado

$m = \pm 1$ e $p \neq 1$: inconsistente

$m \neq \pm 1$: determinado

7.42) Se $\operatorname{sen} 2\alpha = 0$: indeterminado

Se $\operatorname{sen} 2\alpha \neq 0$: inconsistente

7.43) $k = 0$: indeterminado

$k \neq 0$: inconsistente

7.44) a) $k = 6$ b) $\left(\frac{17 - 40\alpha}{16};\ \alpha;\ \frac{3}{8}\right)$

7.45) $a = -74$ e $b = -76$

7.46) não existem a e b

Capítulo 8

8.4) a) 2 b) 3

8.5) a) 2 b) 2

8.6) a) 2 b) 3

8.7) a) 2 b) 3

8.8) $a = -1$: $p(A) = 1$

$a \neq -1$: $p(A) = 3$

8.9) $k = 3 : p(A) = 1$

$k \neq 3$: $p(A) = 2$

8.10) $p(A) = 3,\ \forall k$

8.11) $m = 10$ e $n = \frac{1}{3}$: $p(A) = 2$

$m \neq 10$ ou $n \neq \frac{1}{3}$: $p(A) = 3$

8.12) 1

8.17) a) determinado b) indeterminado

8.18) a) inconsistente b) indeterminado

8.19) a) indeterminado b) inconsistente c) determinado

8.20) a) a = 3 : indeterminado
a ≠ 3 : determinado

b) a = ± 2 : inconsistente
a ≠ ± 2 : determinado

8.21) m = 1 : inconsistente
m = -2 : indeterminado
m ≠ 1 e m ≠ -2 : determinado

Capítulo 9

9.9) a) 67 b) 57 c) 80

9.10) a) b − a c) b − a + 1
b) b − a d) b − a − 1

9.11) a) 118 b) 278

9.12) 34

9.13) a) 52 b) 142

9.14) a) 250 b) 166 c) 45

9.15) Cr$ 20,00 (máximo) e Cr$ 5,00 (mínimo)

9.16) em três jogadas

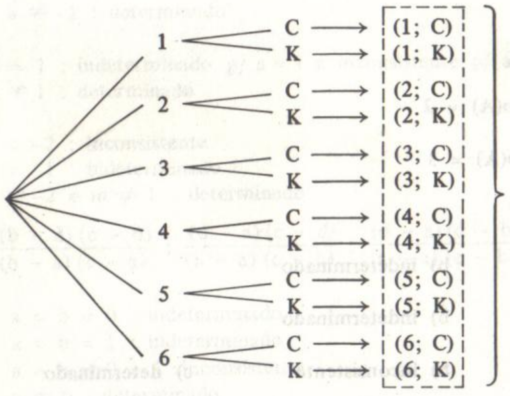
9.17) VVP; VPV; PVV

9.18) a) 6 b) 7

9.19) n − 2

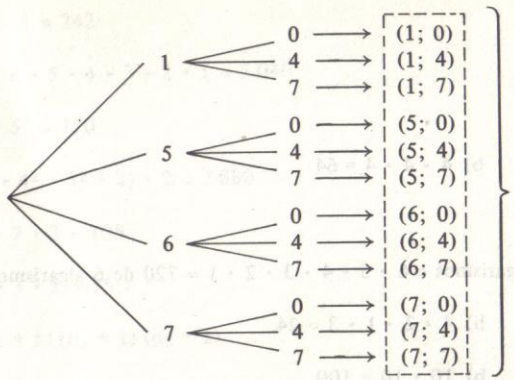
9.20) n + 1

9.24) C = cara K = coroa



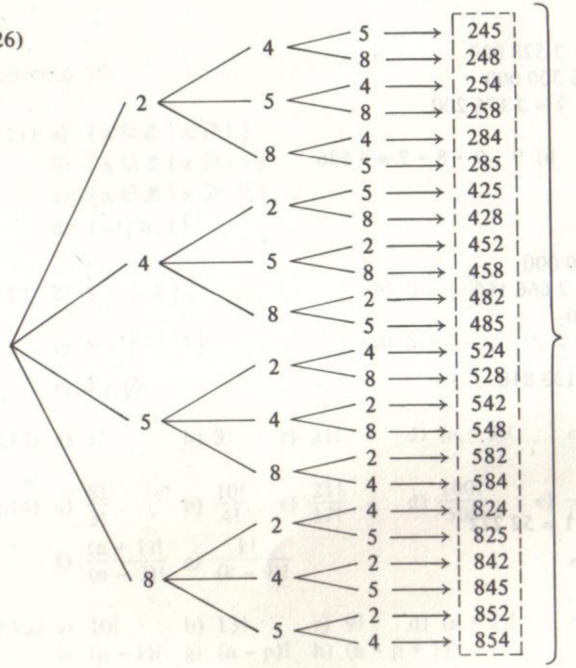
12 resultados

9.25)



elementos de E × F

9.26)



24 números

9.27) Há 8 modos do jogo se desenvolver e as possíveis quantias são Cr$ 8,00, Cr$ 15,00, Cr$ 22,00 ou Cr$ 29,00.

9.28) a) 13 b) aprovada em 4 e rejeitada em 9
c) 6 peças d) 90 segundos

9.29) 11

9.40) $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$

9.41) $8 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

9.42) $6 \cdot 4 = 24$

9.43) a) $6 \cdot 6 = 36$ b) $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

9.44) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

9.45) $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ de 3 algarismos e $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ de 6 algarismos

9.46) a) $4 \cdot 2 = 8$ b) $4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 24$

9.47) a) $11 \cdot 11 = 121$ b) $10 \cdot 10 = 100$
c) $11 \cdot 10 = 110$ d) $10 \cdot 9 = 90$

9.48) a) $7 \cdot 10^6 = 7\,000\,000$
b) $7 \cdot 10^3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3\,528\,000$
c) $7 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 10^3 = 6\,300\,000$
d) $7 \cdot 10^2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 3\,175\,200$

9.49) a) 9 000 b) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4\,536$

9.50) $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2\,240$

9.51) a) $23 \cdot 22 \cdot 10^4 = 5\,060\,000$
b) $23^2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 2\,666\,160$
c) $23^2 \cdot 10^4 = 5\,290\,000$

9.52) $(\underbrace{26^2 \cdot 10^2}_{\text{total sem a restrição}} - \underbrace{26^2}_{\text{placas com dois zeros}}) \cdot 2 = 133\,848$

9.53) $\underbrace{23^2 \cdot 10^2}_{\text{total sem as restrições}} - \underbrace{10^2}_{\text{placas com dois "O"}} - \underbrace{23^2}_{\text{placas com dois zeros}} + 1 = 52\,272$

(note que o número 1 teve que ser somado pois, ao retirarmos as placas com dois "O" e as placas com dois zeros, a placa OO – 00 foi retirada duas vezes.)

9.54) $10^4 - 10 - 10^2 + 1 = 9\,891$

9.55) $2^5 = 32$

9.56) $3^{13} = 1\,594\,323$

9.57) $3^5 - 1 = 242$

9.58) $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$

9.59) $6 \cdot 5^3 = 750$

9.60) $(5 \cdot 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2) \cdot 2 = 2\,880$

9.61) $5 \cdot 7 \cdot 3 = 105$

9.62) $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$

9.63) $(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1)$

9.64) $(n - 2p + 1)(m - 2q + 1)$

Capítulo 10

10.11) a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -5\}$
c) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \geqslant -2\}$
d) $\{-1; 0; 1\}$

10.12) a) $S = \{-1\}$ b) $S = \{\frac{8}{3}\}$
c) $S = \{-2; 3\}$ d) $S = \{-\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}; 2\}$
e) $S = \varnothing$

10.13) a) 5! b) 9! c) 21! d) $(n + 2)!$ e) $(k - 3)!$

10.14) a) $\frac{8!}{3!}$ b) $\frac{10!}{4!}$ c) $\frac{21!}{17!}$ d) $\frac{100!}{50!}$ e) $\frac{n!}{(n-3)!}$
f) $\frac{(n+1)!}{(n-3)!}$ g) $\frac{k!}{(k-9)!}$

10.15) a) 10! b) 13! c) 9! d) $(n + 1)!$ e) $(k + 3)!$
f) $(n - 1)!$ g) $(n - p)!$ h) $(n - p + 1)!$

10.16) a) 56 b) 1 320 c) 165 d) 1 330

10.17) a) $n^2 - n$ b) $n^2 + 5n + 6$ c) $k^3 + 3k^2 + 2k$
d) $k - 1$ e) $\frac{1}{k^2 - 5k + 6}$ f) $n - p$

10.18) a) $n^2 - 9$ b) 1 c) $n + 1$
d) $n - 1$

10.19) a) $S = \{2\}$ b) $S = \{7\}$ c) $S = \{5\}$

10.20) Multiplicando os elementos da 1ª coluna por (-1) e somando-os em todas as outras colunas, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

x(-1) ⊕ ⊕ ⊕ ⊕ ⊕

Como todos os elementos situados acima da diagonal principal são iguais a zero, temos

$D = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$

10.21) D é um determinante de Vandermonde cujos elementos de base são 1, 2, 3, 4, . . . , 10

Então:

$D = (2 - 1)(3 - 1)(4 - 1) \ldots (10 - 1) \cdot (3 - 2)(4 - 2) \ldots (10 - 2) \cdot (4 - 3)(5 - 3) \ldots$
$\ldots (10 - 3) \ldots (10 - 9)$

$D = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7) \ldots (1 \cdot 2) \cdot (1)$

Como
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 9 = 9!$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8 = 8!$
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 = 7!$
. . . .
$1 \cdot 2 = 2!$
$1 = 1!$

Temos

$$D = 9!\ 8!\ 7!\ \ldots\ 2!\ 1! = \prod_{n=1}^{9} (n!)$$

10.22) **1ª parte**

$\boxed{1^\circ \text{ membro}} = n \cdot n! = n \cdot n! + n! - n! =$

$= \underbrace{n!\,(n + 1)}_{(n+1)!} - n! = (n + 1)! - n! = \boxed{2^\circ \text{ membro}}$

Outro modo

$\boxed{2^\circ \text{ membro}} = (n + 1)! - n! = (n + 1) \cdot n! =$

$= n![(n + 1) - 1] = n \cdot n! = \boxed{1^\circ \text{ membro}}$

2ª parte

A identidade provada acima nos mostra que toda parcela da forma $n \cdot n!$ pode ser escrita como a diferença $(n + 1)! - n!$. Então, para cada parcela da soma S, temos:

$$\oplus \begin{cases} 1 \cdot 1! = 2! - 1! & \text{(usamos } n = 1) \\ 2 \cdot 2! = 3! - 2! & \text{(usamos } n = 2) \\ 3 \cdot 3! = 4! - 3! & \text{(usamos } n = 3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ k \cdot k! = (k + 1)! - k! & \text{(usamos } n = k) \end{cases}$$

$$\underbrace{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k!}_{S} = (k + 1)! - 1!$$

Logo, $S = (k + 1)! - 1$

10.23) **1ª parte**

$\boxed{1^\circ \text{ membro}} = (n + 2)n! = [(n + 1) + 1]n! =$

$= \underbrace{(n + 1)n!}_{(n+1)!} + 1 \cdot n! = (n + 1)! + n! = \boxed{2^\circ \text{ membro}}$

Outro modo

$\boxed{2^\circ \text{ membro}} = (n + 1)! + n! = (n + 1) \cdot n! + n! =$

$= n![(n + 1) + 1] = (n + 2) \cdot n! = \boxed{1^\circ \text{ membro}}$

2ª parte

A identidade verificada acima nos mostra que qualquer parcela da forma $(n + 2)n!$ pode ser escrita como sendo a soma $(n + 1)! + n!$. Aplicando, então, a cada parcela de S (observando que nas parcelas em que **n** é par devemos trocar o sinal), temos:

$$\oplus \begin{cases} 3 \cdot 1! = 2! + 1! & \text{(usamos } n = 1) \\ -4 \cdot 2! = -3! - 2! & \text{(usamos } n = 2) \\ 5 \cdot 3! = 4! + 3! & \text{(usamos } n = 3) \\ -6 \cdot 4! = -5! - 4! & \text{(usamos } n = 4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (k + 2)k! = (k + 1)! + k! & \text{(usamos } n = k) \\ & (k \text{ é ímpar}) \end{cases}$$

$$S = (k + 1)! + 1!$$

Logo, $S = (k + 1)! + 1$

10.24) a) temos que $f(0) = 1$. Então, fazendo, em $f(n) = n \cdot f(n - 1)$,

$n = 1$: $f(1) = 1 \cdot f(0) = 1 \cdot 1 = 1$
$n = 2$: $f(2) = 2 \cdot f(1) = 2 \cdot 1 = 2$
$n = 3$: $f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 2 = 6$
$n = 4$: $f(4) = 4 \cdot f(3) = 4 \cdot 6 = 24$
$n = 5$: $f(5) = 5 \cdot f(4) = 5 \cdot 24 = 120$

b) a exemplo do que fizemos acima, a definição nos permite escrever as seguintes n igualdades

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1 \cdot f(0) \\ f(2) = 2 \cdot f(1) \\ f(3) = 3 \cdot f(2) \\ f(4) = 4 \cdot f(3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(n) = n \cdot f(n-1) \end{array}\right\} \otimes$$

Como não há fator algum nulo, multiplicamos essas n igualdades membro a membro, notando que o primeiro membro de uma igualdade é cancelado com um dos fatores do segundo membro da igualdade seguinte. Esse cancelamento não ocorre, evidentemente, com f(0) e f(n). Resulta, então:

$$f(n) = 1 \cdot f(0) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

Como $f(0) = 1$, vem

$$f(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

10.25) a) Como $f(n) = n \cdot f(n-1)$, temos:

$$\boxed{1^{\circ}\text{ membro}} = f(a+2) - f(a+1) =$$

$$= (a+2) \cdot f(a+1) - f(a+1) = f(a+1)[a+2-1] =$$

$$= [a+1] \cdot f(a+1) = \boxed{2^{\circ}\text{ membro}} = (a+1)(a+1) \cdot f(a) =$$

$$= (a+1)^2 \cdot f(a) = \boxed{3^{\circ}\text{ membro}}$$

b) Como $a > 1$, aplicamos, também, $f(n) = n \cdot f(n-1)$:

$$\boxed{1^{\circ}\text{ membro}} = 2f(a) - (a-1) \cdot f(a-1) =$$

$$= 2a \cdot f(a-1) - (a-1) \cdot f(a-1) =$$

$$= f(a-1) \cdot [2a - (a-1)] = [a+1] \cdot f(a-1) =$$

$$= \underbrace{a \cdot f(a-1)}_{f(a)} + 1 \cdot f(a-1) = f(a) + f(a-1) =$$

$$= \boxed{2^{\circ}\text{ membro}}$$

Capítulo 11

11.1) $C_{5,3}$

11.2) $C_{10,2}$

11.3) $A_{10,3}$

11.4) $C_{52,3}$; $C_{13,3}$

11.5) $A_{8,5}$

11.6) $A_{10,2}$

11.7) $A_{6,4}$

11.8) $A_{9,5}$

11.9) $C_{n,5}$

11.10) $C_{20,5}$

Capítulo 12

12.4) a) 5 040 b) 120 c) 720 d) $n^3 - 3n^2 + 2n$
e) $n^2 + 3n + 2$ f) 1 g) 7 h) 15

12.5) a) $n \geq 3$
b) $n \in \{0; 1; 2; 3\}$
c) $n \geq 2$
d) $n \geq -5$
e) $n \geq -5$
f) $n = 3$

12.6) a) $S = \{9\}$ b) $S = \{12\}$

12.7) a) $S = \{16\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \{11\}$

12.8) a) $n = 3$; $p = 1; 2; 3$
b) $n = 3$ e $p = 2; 3; 4; 5$
ou $n = 4$ e $p = 2; 3; 4; 5; 6$

12.9)

$$\boxed{1^{\circ}\text{ membro}} = (n+1)\frac{n!}{(n-p+1)!} + \frac{\frac{(n+1)!}{(n-p)!}}{(n-p+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)n!}{(n-p+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-p+1)(n-p)!} = \frac{(n+1)!}{(n-p+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n-p+1)!} =$$

$$= A_{n+1,p} + A_{n+1,p} = 2A_{n+1,p} = \boxed{2^{\circ}\text{ membro}}$$

12.12) a) 252 b) 165 c) 190 d) 495
e) 1 f) 1 g) 17 h) 1

12.13) a) $S = \{3\}$ b) $S = \{10\}$

12.14) $C_{n,p} = C_{n,p+1}$ pode ser escrita

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!}$$

e daí temos $\dfrac{1}{p!(n-p)(n-p-1)!} = \dfrac{1}{(p+1)p!(n-p-1)!}$

donde $n - p = p + 1$, isto é $n = 2p + 1$
Como p é natural, conclui-se que 2p é par e $n = 2p + 1$ é ímpar

12.15) $\boxed{1^{\underline{o}} \text{ membro}} = 2\dfrac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} - \dfrac{n!}{p!(n-p)!} =$

$= \dfrac{2(n+1)n!}{p!(n+1-p)(n-p)!} - \dfrac{n!}{p!(n-p)!} =$

$= \dfrac{n!}{p!(n-p)!}\left[\dfrac{2n+2}{n-p+1} - 1\right] = C_{n,p}\left[\dfrac{2n+2-n+p-1}{n-p+1}\right] =$

$= C_{n,p}\left[\dfrac{n+p+1}{n-p+1}\right] = \boxed{2^{\underline{o}} \text{ membro}}$

Capítulo 13

13.20) a) 20 b) $C_{20,2} = 190$ c) $C_{11,2} = 55$ d) $C_{9,3} = 84$

13.21) $A_{10,4} = 5\,040$

13.22) $10 \cdot C_{9,3} = 840$

13.23) $4 \cdot A_{7,2} = 168$

13.24) $5 \cdot C_{8,3} = 280$

13.25) $5 \cdot A_{9,2} = 360$

13.26) $15 \cdot C_{6,3} = 300$

13.27) $C_{5,3} = 10$

13.28) $C_{7,5} - C_{5,3} = 11$

13.29) a) $A_{5,2} = 20$ b) $A_{7,4} - A_{5,2} = 820$

13.30) $A_{7,4} - A_{5,4} = 720$

13.31) $C_{8,5} - C_{6,3} = 36$

13.32) a) $C_{10,6} = 210$ b) $C_{10,2} + C_{10,3} + C_{10,4} = 375$
c) $2^{10} - C_{10,2} - C_{10,3} = 859$

13.33) a) $A_{9,5} = 15\,120$
b) $A_{9,3} + A_{8,3} = 840$
c) $A_{9,4} + 2\,A_{8,4} = 6\,384$
d) $A_{9,4} + A_{8,4} + 4\,A_{7,3} = 5\,544$

13.34) a) $C_{6,2} = 15$ b) $C_{6,3} = 20$

13.35) a) $C_{10,2} = 45$ b) $C_{10,2} - 10 = 35$

13.36) $D_n = \underbrace{C_{n,2}}_{\text{lados + diagonais}} - \underbrace{n}_{\text{lados}} = \dfrac{n(n-3)}{2}$

13.37) 1º modo: $C_{7,3} - C_{4,3} - C_{3,3} = 30$
2º modo: $4 \cdot C_{3,2} + 3 \cdot C_{4,2} = 30$

13.38) $C_{9,3} - C_{3,3} - C_{3,3} - C_{3,3} = 81$

13.39) $C_{12,3} - C_{3,3} - C_{4,3} - C_{5,3} = 205$

13.40) $C_{4,2} \cdot C_{6,4} = 90$

13.41) $C_{6,4} \cdot C_{6,3} = 300$

13.42) $A_{5,2} \cdot A_{4,2} = 240$

13.43) $C_{12,6} \cdot C_{6,4} = 13\,860$

13.44) $C_{10,3} \cdot C_{7,3} \cdot C_{4,2} = 25\,200$

13.45) $A_{4,3} \cdot A_{6,3} \cdot A_{5,3} = 172\,800$

13.46) $C_{25,5} \cdot C_{20,5} \cdot C_{15,5} \cdot C_{10,5} = \dfrac{25!}{(5!)^5}$

13.47) $C_{n,p} \cdot C_{n-p,p} \cdot C_{n-2p,p} \cdots C_{n-(\alpha-2)\cdot p,p}$
$= \dfrac{n!}{(p!)^{\alpha}}$

13.48) 1º modo: $C_{10,3} \cdot C_{6,2} + C_{10,4} \cdot 6 + C_{10,5} = 3\,312$
2º modo: $C_{16,5} - C_{10,2} \cdot C_{6,3} - 10C_{6,4} - C_{6,5} = 3\,312$

13.49) $C_{16,5} - C_{10,5} - 6\,C_{10,4} = 2\,856$

13.50) a) $C_{20,5} = 15\,504$ b) $C_{4,3} \cdot C_{4,2} = 24$
c) $C_{4,3} \cdot C_{4,2} \cdot A_{5,2} = 480$

13.51) a) $C_{4,2} \cdot C_{16,3} = 3\,360$
b) $C_{5,2} \cdot C_{15,3} = 4\,550$
c) $C_{4,3} \cdot C_{16,2} + C_{16,1} = 480$
d) $C_{20,5} - C_{16,5} = 11\,136$
e) $C_{20,5} - C_{15,5} - 5 \cdot C_{15,4} = 5\,676$

Capítulo 14

14.8) a) $P_3 = 6$ b) $P_4 = 24$ c) $P_5 = 120$

14.9) a) $3 \cdot 2 \cdot P_5 = 720$ b) $3 \cdot 4 \cdot P_5 = 1\,440$
c) $P_3 \cdot P_4 = 144$

14.10) a) $P_8 = 40\,320$ b) $A_{4,2} \cdot P_6 = 8\,640$
c) $A_{4,2} \cdot 4 \cdot P_5 = 5\,760$ d) $A_{4,2} \cdot A_{4,2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot P_2 = 1\,152$

14.11) a) $P_8 = 40\,320$ b) $P_8 \cdot P_3 = 241\,920$
c) $P_{10} - P_8 \cdot P_3 = 3\,386\,880$

14.12) $2P_5 \cdot P_5 = 28\,800$

14.13) $C_{10,3} \cdot P_7 = 604\,800$

14.14) $C_{5,3} \cdot C_{7,4} \cdot P_7 = 1\,764\,000$

14.15) a) $P_6 = 720$ b) $C_{8,5} \cdot P_3 = 336$

14.16) $2P_6 \cdot P_6 = 1\,036\,800$

14.17) $P_3 \cdot P_4 = 144$

14.18) 329º

14.19) 3 999 960

14.20) 279 972

Capítulo 15

15.5) a) $P_8^{(3)} = 6\,720$ b) $P_8^{(3;\,3)} = 1\,120$
c) $P_{13}^{(2;\,4;\,2;\,2)} = 32\,432\,400$

15.6) $P_9^{(3;\,2;\,4)} = 1\,260$; $P_3 = 6$

15.7) $n = 7$

15.8) $n = 4$

15.9) a) $P_9^{(3)} = 60\,480$ b) $P_{10}^{(3;\,2)} - P_9^{(3)} = 241\,920$

15.10) a) $P_{13}^{(6,\,7)}$ b) $P_5^{(2;\,3)} \cdot P_8^{(4;\,4)}$ c) $P_{10}^{(5;\,5)} \cdot P_3^{(2)}$
d) $P_5^{(2;\,3)} \cdot P_5^{(3;\,2)} \cdot P_3^{(2)}$

Capítulo 16

16.1) a) $n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 3$ b) $n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 2$

16.2) $D(f) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

16.3) $D = 0$

16.4) a) 16 b) 4 096 c) 2 176

16.5) a) $2^{10} - 1 = 1\,023$ b) $2^{10} - 1 - 10 - 1 = 1\,012$

16.9) a) $\binom{0}{0}$ b) $\binom{10}{0}$ c) $\binom{100}{61}$ d) $\binom{n}{n-1}$
e) $\binom{n}{3}$ f) $\binom{n+1}{2}$ g) $\binom{2n-2}{n-5}$

16.10) tem 2 colunas iguais, pois $\binom{12}{3} = \binom{12}{9}$,
$\binom{13}{6} = \binom{13}{7}$ e $\binom{14}{9} = \binom{14}{5}$ (complementares)

16.11) a) $S = \{\pm 3; \pm\sqrt{10}\}$ b) $S = \{7\}$
c) $S = \{-2; 4\}$ d) $S = \{\frac{1}{3}\}$ e) $S = \varnothing$

16.12) a) $S = \{(72; 3); (28; 25)\}$ b) $S = \{(4; 8)\}$

16.13) $\binom{n+2}{k} = \binom{n+2}{k+1} \Rightarrow \begin{cases} k = k + 1 & \text{(impossível)} \\ \text{ou} \\ k + k + 1 = n + 2 \end{cases}$

donde $n = 2k - 1$ = ímpar

16.14) a) $n \geqslant p + q$ e $p \geqslant q$

b) $\binom{n}{p+q} = \binom{n}{p-q} \Rightarrow \begin{cases} p + q = p - q \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ p + q + p - q = n \quad \text{(II)} \end{cases}$

de (I), vem $q = 0$ que, como $q \in \mathbb{N}^*$, não convém;

de (II), vem $n = 2p$ = par

16.15) $\binom{n}{3k-1} = \binom{n}{2k+1} \Rightarrow \begin{cases} 3k - 1 = 2k + 1 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ 3k - 1 + 2k + 1 = n \quad \text{(II)} \end{cases}$

de (I), vem $k = 2$, o que não convém;

de (II), vem $n = 5k$ que é múltiplo de 5.

16.19) a) $S = \{39\}$ b) $S = \{14\}$

16.20) a) $S = \{15\}$ b) $S = \{20\}$

16.21) $\boxed{1^{\underline{o}} \text{ membro}} = n\binom{n}{p} - \binom{n}{p+1} = n\binom{n}{p} - \binom{n}{p}\frac{n-p}{p+1} =$

$= \binom{n}{p}\left[n - \frac{n-p}{p+1}\right] = \frac{n!}{p!(n-p)!} \cdot \frac{(n+1)p}{p+1} =$

$= p\,\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = p\binom{n+1}{p+1} = \boxed{2^{\underline{o}} \text{ membro}}$

16.26) a) V b) V c) V d) V

16.27) a) $S = \{\frac{7}{2};\ 3\}$ b) $S = \{\pm\sqrt{11},\ \pm 5\}$

16.28) a) $S = \{5;\ 8\}$ b) $S = \{4;\ 6\}$

16.29) $S = \{50;\ 52\}$

16.30) $\boxed{1^{\underline{o}} \text{ membro}} = \binom{n+1}{p} - \binom{n-1}{p-2} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} - \binom{n-1}{p-2} =$

$= \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p-1}\binom{n-1}{p-2} - \binom{n-1}{p-2} =$

$= \binom{n-1}{p} + 2\binom{n-1}{p-1} = \binom{n-1}{p-1}\frac{n-1-p+1}{p} + 2\binom{n-1}{p-1} =$

$= \binom{n-1}{p-1}\left[\frac{n-p}{p} + 2\right] = \binom{n-1}{p-1}\frac{n+p}{p} = \boxed{2^{\underline{o}} \text{ membro}}$

Capítulo 18

18.5) a) $x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5$
b) $x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$
c) $x^6 - 12x^5 + 60x^4 - 160x^3 + 240x^2 - 192x + 64$
d) $x^5 + 5x^3 + 10x + \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$

18.6) a) $(2 + 7)^5 = 9^5 = 59\,049$
b) $(5 - 3)^6 = 2^6 = 64$
c) $(7 + 3)^4 = 10^4 = 10\,000$
d) $(101 - 1)^5 = 100^5 = 10\,000\,000\,000$

18.7) a) $(3 + 2)^8 = 5^8 = 390\,625$
b) $(11 + 4)^n = 15^n$
c) $(11 - 21)^n = (-10)^n$
d) $(11 - 1)^n = 10^n$
e) $(1 - 11)^n = (-10)^n$

18.8) zero

18.9) a) 2^{n-1} b) 2^{n-1}

18.17) a) $\binom{10}{5}\frac{1}{x^5} = \frac{252}{x^5}$.
b) $-\binom{16}{13}2^3x^{49} = -4\,480x^{49}$

18.18) a) $T_5 = \binom{14}{4}x^8 = 1\,001x^8$
b) $T_4 = -\binom{7}{3}5^3x^{11} = -4\,375x^{11}$
c) não existe

18.19) a) $T_4 = -\binom{9}{3}3^3 2^6 = -145\,152$
b) $T_7 = \binom{15}{6}4^6 = 20\,500\,480$
c) não existe

18.20) a) $T_7 = \binom{12}{6}2^6x^{20} = 29\,568x^{20}$
b) $T_6 = \binom{10}{5}\frac{1}{\sqrt{x^5}} = \frac{252\sqrt{x}}{x^3}$

18.21) $n = 29$

18.22) $a = \pm 2\sqrt[4]{\frac{3}{7}}$

18.23) $n = 20;\ a = \sqrt[3]{25}$

18.24) dois; sétimo e décimo nono termos

18.25) a) $1\,110x^{16}$ b) $2\,060x^{44}$

18.29) a) 2,176 b) 258,055

18.30) $Q_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

18.31) a) 2 890
b) $\frac{n(n+1)(n^2+n-6)}{4} = \frac{n(n+1)(n+3)(n-2)}{4}$
c) 562 666

Capítulo 19

19.3) $PC_6 = 120$

19.4) $PC_8 - 2PC_7 = 3\,600$

19.5) $PC_4 = 6$ broches e $\frac{PC_4}{2} = 3$

19.6) $PC_4 \cdot P_4 = 144$

19.8) $AR_{3,5} = 243$

19.9) a) $AR_{2,4} = 16$
b) $AR_{2,1} + AR_{2,2} + AR_{2,3} + AR_{2,4} = 30$

19.10) $AR_{10,5} - AR_{10,4} - (A_{10,5} - A_{9,4}) = 62\,784$

19.11) $AR_{26,2} \cdot AR_{10,2} - AR_{26,2} - AR_{10,2} + 1 = 66\,825$

19.16) a) 120 b) 330 c) 462

19.17) $CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{n+k-1}{k}$

$CR_{k+1,n-1} = C_{k+n-1,n-1} = \binom{n+k-1}{n-1}$

como os dois binomiais são complementares, é imediato que $CR_{n,k} = CR_{k+1,n-1}$

19.18) a) $CR_{12,5} = 4\,368$
b) $CR_{6,3} \cdot CR_{6,2} = 1\,176$

19.19) $CR_{4,4} = 35$; $CR_{3,5} = 21$

19.20) $CR_{11,3} = 286$

19.21) $CR_{10,5} = 2\,002$

19.22) a) $CR_{\alpha+1,m-1} = CR_{m,\alpha}$
b) $CR_{\alpha-m+1,m-1} = CR_{m,\alpha-m}$

Capítulo 20

20.10) $\frac{2}{3}$

20.11) $\frac{3}{4}$

20.12) a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$

20.13) a) $\frac{1}{8}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{4}$

20.14) a) $\frac{9}{100}$ b) $\frac{13}{200}$

20.15) $\frac{23}{95}$

20.16) a) 0,6 = 60% b) 0,7 = 70%
c) 0,4 = 40% d) 0,9 = 90%

20.17) 0,75 = 75%

20.18) $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$

20.19) a) $\frac{1}{13}$ b) $\frac{3}{13}$ c) $\frac{5}{13}$

20.20) a) $\frac{1}{2n+2}$ b) $\frac{1}{n+1}$ c) $\frac{2}{n+1}$

20.21) $\frac{1}{4}$

20.22) a) $\frac{14}{285}$ b) $\frac{143}{570}$

20.23) $\frac{5}{7}$

20.24) a) $\frac{1}{4\,680}$ b) $\frac{7}{936}$ c) $\frac{35}{468}$ d) $\frac{53}{7\,020}$

20.25) $\frac{455}{3\,876}$

20.26) $\frac{18}{77}$

20.27) $\frac{2}{n}$

20.28) $\frac{\frac{n-3}{2}}{C_{n,3}} = \frac{3(n-3)}{n(n-1)(n-2)}$

20.29) $\frac{10}{A_{51,2}} = \frac{1}{255}$

20.30) $\frac{9}{A_{7,3}} = \frac{3}{70}$

Capítulo 21

21.4) a) $\frac{100}{200} + \frac{40}{200} - \frac{20}{200} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{28}{200} + \frac{18}{200} - \frac{2}{200} = \frac{11}{50}$

c) $\frac{8}{200} + \frac{15}{200} = \frac{23}{200}$

21.5) a) $\frac{18}{30} + \frac{15}{30} - \frac{9}{30} = \frac{4}{5}$

b) $1 - (\frac{12}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30}) = \frac{13}{30}$

21.6) $\frac{C_{100,2}}{C_{160,2}} + \frac{C_{45,2}}{C_{160,2}} - \frac{C_{25,2}}{C_{160,2}} = \frac{47}{106}$

21.7) $\frac{C_{10,3}}{C_{25,3}} + \frac{C_{10,3}}{C_{25,3}} - \frac{C_{5,3}}{C_{25,3}} = \frac{1}{23}$

21.8) a) $\frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} + \frac{C_{26,2}}{C_{52,2}} - \frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} = \frac{C_{26,2}}{C_{52,2}} = \frac{25}{102}$

b) $\frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} + \frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} = \frac{2}{17}$

c) $\frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} + \frac{C_{4,2}}{C_{52,2}} = \frac{14}{221}$

21.9) a) $1 - P[A \cup B] = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

b) $1 - P[A \cap B] = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

c) $1 - P[A \cup B] = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

d) $P[A] - P[A \cap B] = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

21.10) a) 0,60 + 0,65 − 0,35 = 0,90 (90%)

b) 1 − 0,90 = 0,10 (10%)

c) 0,60 − 0,35 = 0,25 (25%)

d) 0,65 − 0,35 = 0,30 (30%)

Capítulo 22

22.6) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

22.7) a) $\frac{1}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{8}{75}$ b) $\frac{4}{15} \cdot \frac{11}{15} = \frac{44}{225}$ c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{8}{15} = \frac{64}{225}$

22.8) a) $\frac{7}{10} \cdot \frac{6}{19} = \frac{21}{95}$ b) $\frac{7}{10} \cdot \frac{13}{19} = \frac{91}{190}$ c) $\frac{3}{10} \cdot \frac{5}{19} = \frac{3}{38}$

22.9) $\frac{5}{12} \cdot \frac{3}{14} = \frac{5}{56}$

22.10) $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

22.11) a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{17} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{204}$

b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{136}$

c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{17} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{68}$

22.12) a) $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{256}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

c) $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{2\,401}$

22.13) $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{59\,049}$

22.14) $1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{16}{2\,187}$

22.15) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} = \frac{61}{120}$

22.16) $\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} + \frac{4}{15} \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{2}{13} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{13} = \frac{34}{455}$

$$22.17)\ \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{17}+\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{17}=\frac{9}{17}$$

$$22.18)\ \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

Capítulo 23

23.4) a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{15}{128}$

23.5) $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

23.6) a) $\binom{6}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{125}{15\,552}$

b) $\binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$

c) $\binom{6}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{729}$

d) $\binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$

23.7) $\binom{4}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^4+\binom{4}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^3+\binom{4}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=$

$=\frac{513}{625}$ (note que $P=\sum_{k=0}^{2}\binom{4}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^k\left(\frac{3}{5}\right)^{4-k}$)

23.8) $\sum_{k=7}^{10}\binom{10}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{10-k}=\frac{919}{262\,144}$

23.9) $\sum_{k=0}^{2}\binom{10}{k}(0{,}2)^k(0{,}8)^{10-k}=0{,}6778$

23.10) $\sum_{k=27}^{30}\binom{30}{k}(0{,}9)^k(0{,}1)^{30-k}=0{,}4116$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) $x = 2,\ y = 3,\ z = 1,\ t = 4$

I.2) $\begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ -6 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

I.3) $X = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{9}{7} & \frac{10}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{11}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$

I.4) Basta efetuar o produto AA.

I.5) $\begin{bmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$

I.6) $T_\alpha\cdot T_\beta = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta & -\operatorname{sen}\beta\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = T_{\alpha+\beta}$

$T_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = T_\alpha^t$

I.7) Basta efetuar os produtos, lembrando que $BA = AB$.

I.8) a) $S^t = \frac{1}{2}(A + A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t + A) = S$

b) $K^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -K$

c) Basta notar que $A = S + K$.

I.9) Basta efetuar o produto AB, obtendo a matriz O_3.

I.10) Basta efetuar A^2 e B^2.

I.11) $C(C - I) = C^2 - C = C - C = 0$

I.12) $S^2 = [\frac{1}{2}(I + A)]^2 = \frac{1}{4}(I + 2A + A^2) = \frac{1}{4}(2I + 2A) = \frac{1}{2}(I + A) = S$

$T^2 = [\frac{1}{2}(I - A)]^2 = \frac{1}{4}(I - 2A + A^2) = \frac{1}{4}(2I - 2A) = \frac{1}{2}(I - A) = T$

$ST = [\frac{1}{2}(I + A)][\frac{1}{2}(I' - A)] = \frac{1}{4}(I - A^2) = \frac{1}{4}(I - I) = 0$

I.13) **Método da Indução Matemática**

Teorema 1: (para p = 1)

$A^{p+1} = A^2 = (B + C)^2 = B^2 + 2BC + C^2 = B(B + 2C) = B^p[B + (p + 1)C]$

Teorema 2

Hipótese: $A^{k+1} = B^k[B + (k + 1)C]$

Tese: $A^{k+2} = B^{k+1}[B + (k + 2)C]$

$$\begin{aligned} A^{k+2} &= A \cdot A^{k+1} = AB^k[B + (k + 1)C] = (B + C)B^k[B + (k + 1)C] = \\ &= (B + C)[B^{k+1} + (k + 1)B^kC] = \\ &= B^{k+2} + (k + 1)B^{k+1}C + B^{k+1}C + (k + 1)B^kC^2 = \\ &= B^{k+2} + (k + 2)B^{k+1}C + 0 = \\ &= B^{k+1}[B + (k + 2)C] \end{aligned}$$

I.14) Há 2 soluções: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

I.15) Não

I.16) $X = BA^{-1}C^{-1}A$

I.17) $(A + B)A^{-1}(A - B) = (I + BA^{-1})(A - B) =$

$= A - B + BA^{-1}A - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$

$(A - B)A^{-1}(A + B) = (I - BA^{-1})(A + B) =$

$= A + B - BA^{-1}A - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$

I.18) **Teorema 1:** (para n = 2): $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$

Se $X = A_1A_2$ e $Y = A_2^{-1}A_1^{-1}$, então

$XY = A_1A_2A_2^{-1}A_1^{-1} = A_1IA_1^{-1} = A_1A_1^{-1} = I$

donde $(A_1A_2)^{-1} = A_2^{-1}A_1^{-1}$

Teorema 2

Hipótese $(A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}A_k)^{-1} = A_k^{-1}A_{k-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1} \cdot A_2^{-1}A_1^{-1}$

Tese $(A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot A_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1}A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$

Se $B = A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_{k-1}A_k$ então

$(A_1A_2A_3 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot A_{k+1})^{-1} = (BA_{k+1})^{-1} = A_{k+1}^{-1} \cdot B^{-1} =$

$= A_{k+1}^{-1}A_k^{-1} \cdot \ldots \cdot A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$

I.19) $X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $X_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

I.20) a) $A_\alpha \cdot A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\frac{1}{\beta} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha}{\beta} & \beta - \alpha \\ \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} & 1 - \frac{\beta}{\alpha} \end{bmatrix}$

$A_\beta A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\frac{1}{\beta} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\beta}{\alpha} & \alpha - \beta \\ \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} & 1 - \frac{\alpha}{\beta} \end{bmatrix}$

Se $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha$ então $\beta - \alpha = \alpha - \beta$, donde $\alpha = \beta$;
se $\alpha = \beta$ então $A_\alpha = A_\beta$ e $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha = A_\alpha^2$

b) Basta efetuar a soma.

c) $A_\alpha^2 = 0$

d) Note que $(A_\alpha + A_\beta)^2 = A_\alpha^2 + A_\alpha A_\beta + A_\beta A_\alpha + A_\beta^2 =$

$= A_\alpha A_\beta + A_\beta A_\alpha = \left(2 - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right)I_2$ (como em b)).

e) Basta elevar à potência n o resultado do item d).

f) Basta colocar $\beta = 2\alpha$ no resultado do item d).

II.1) Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ então

$AB = \begin{bmatrix} a\alpha & a\beta + b\gamma \\ 0 & c\gamma \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} a\alpha & b\alpha + c\beta \\ 0 & c\gamma \end{bmatrix}$

Assim, $a\beta + b\gamma = b\alpha + c\beta$

donde $b(\alpha - \gamma) - \beta(a - c) = 0$

isto é, $\begin{vmatrix} b & a - c \\ \beta & \alpha - \gamma \end{vmatrix} = 0$

II.2) Escrevendo-se

$$A - xI = \begin{bmatrix} a - x & 0 & 0 & d \\ 0 & b - x & 0 & e \\ 0 & 0 & c - x & f \\ d & e & f & 0 \end{bmatrix}$$

e desenvolvendo o determinante, obtemos

$\det(A - xI) = d^2(b - x)(c - x) + e^2(a - x)(c - x) + f^2(a - x)(b - x) = F(x)$

A expressão F(x) é um trinômio do 2º grau. Temos

$$F(a) = d^2(b - a)(c - a) > 0$$
$$F(b) = e^2(a - b)(c - b) < 0$$
$$F(c) = f^2(a - c)(b - c) > 0$$

Assim, a equação $F(x) = 0$ admite duas raízes reais x_1 e x_2 tais que

$a > x_1 > b > x_2 > c$.

II.3) Se $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, então $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, assim

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 & 1 \\ 1 & \operatorname{tg}\beta & 1 \\ 1 & 1 & \operatorname{tg}\gamma \end{vmatrix} = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma + 1 + 1 - \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\gamma = 2$$

II.4) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -10 \leqslant x \leqslant -\sqrt{10} \quad \text{ou} \quad \sqrt{10} \leqslant x \leqslant 10\}$

II.5) zero

II.6) zero

II.7) $S = \{0; -10\}$

II.8) $S = \{0, 1, 2\}$

II.9) Lembrando que $\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$, fica claro que a 3ª coluna é combinação linear das duas outras.

II.10) 1

II.11) No determinante da esquerda, multipliquemos a 2ª coluna por yz, a 3ª por xz e a 4ª por xy, obtendo

$$\frac{1}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (xyz) \\ (x) \\ (y) \\ (z) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

II.12) $$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 546 \\ 2 & 7 & 273 \\ 1 & 6 & 169 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 5 & 4 & 42 \\ 2 & 7 & 21 \\ 1 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

(100) (10) → 3ª coluna; (13)

II.13) $x^n + (-1)^{n+1} y^n$

III.1) $\lambda = 1, \ \left(\frac{1}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ ou $\lambda = -\frac{6}{5}, \ \left(\frac{1}{5}; \frac{2}{3}\right)$

III.2) $\lambda = 1$: indeterminado

$\lambda = -\frac{2}{3}$: inconsistente

$\lambda \neq 1$ e $\lambda \neq -\frac{2}{3}$: determinado

III.3) $\lambda \neq -\frac{2}{3}$

III.4) $m = 0$ ou $m = -1$

III.5) Basta notar que $p(A) < n$, logo (S) é indeterminado.

III.6) Se $ad - bc \neq 0$, então um dos elementos a, b, c, d, pelo menos, é diferente de zero. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $d \neq 0$. Então,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (d) \sim \begin{bmatrix} ad & bd \\ c & d \end{bmatrix} (-b) \sim \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ c & d \end{bmatrix} \left(\frac{1}{ad - bc}\right) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} (-c) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \left(\frac{1}{d}\right) \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

III.7) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k - 3 & 0 \end{bmatrix} (-2) \ (1) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k + 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k + 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} (-(k + 4)) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k(k + 4) & -k \end{bmatrix}$$

1) $k = 0$: sistema indeterminado

$$S = \{(3 - 3\alpha; 1; \alpha), \ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

2) $k = -4$: sistema inconsistente

3) $k \neq 0$ e $k \neq -4$: sistema determinado

III.8) $A(\lambda \overline{X}) = \lambda(A\overline{X}) = \lambda \cdot 0 = 0$

IV.1) 3

IV.2) 30

IV.3) 11

IV.4) 15 120

IV.5) $\{-1\}$

IV.6) $a = 6$, $b = 11$ e $c = 5$

IV.7) o quociente é 2^n

IV.8) $n(n-1)(n-2)$

IV.9) $N = 648$ e $S = 355\,680$

IV.10) $\binom{p+2}{3}$

IV.11) $\binom{n-1}{p-1}$

IV.12) 495

IV.13) 1º) $\binom{10}{p}^2$ 2º) 184 756

IV.14) 60

IV.15) Para a 2ª igualdade faça na relação anterior n = 1, 2, 3, . . . , n e some membro a membro.

IV.16) 174

V.1) $\dfrac{(n!)^{n-1}}{[1!\,2!\ldots(n-1)!]^2}$

V.2) $\binom{n}{p}$ é mínimo para p = 1; esse mínimo é n

$\binom{n}{p}$ é máximo para:

- $p = \frac{n}{2}$, se n é par; esse máximo é $\binom{n}{\frac{n}{2}}$
- $p = \frac{n-1}{2}$, se n é ímpar; esse máximo é $\binom{n}{\frac{n-1}{2}} = \binom{n}{\frac{n+1}{2}}$

V.3) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{1} = \frac{n+1}{1}\binom{n}{n}$

$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n+1}{2}\binom{n}{n-1}$

. . . .

$\binom{n}{n-n} + \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n} = \frac{n+1}{n}\binom{n}{1}$

multiplicando-se membro a membro, vem a tese

V.5) 1º) $1 + \binom{n}{1}a + \ldots + \binom{n}{p}a^p + \ldots + \binom{n}{n}a^n$

2º) $\dfrac{\mu_{p+1}}{\mu_p} = \dfrac{a(n-p)}{p+1}$; $p \leqslant \dfrac{na-1}{a+1}$,

isto é, se E(x) designa a parte inteira do número x:

$p \leqslant E\left(\dfrac{na-1}{a+1}\right)$

3º) o maior termo é μ_{p+1} com $p = E\left(\dfrac{na-1}{a+1}\right)$;

$\binom{1\,000}{759}\pi^{759}$; $\binom{100}{50}\left(\frac{51}{50}\right)^{50}$ e $\binom{100}{51}\left(\frac{51}{50}\right)^{51}$

V.6) 7; 14

V.7) 16

V.8) 3, 2, 6

V.9) $(1{,}02)^5 \cong 1{,}1041$

V.10) desenvolva $(x+y)^5$

V.11) $a = -\frac{4}{3}$; $-\frac{112}{3}$

V.12) $a = 2(1-n)$, $\lambda = -\frac{4}{3}n(n-1)(2n-1)$

V.13) 5

V.14) -9; 46

VI.1) 252

VI.2) 1 140

VI.3) 210

VI.4) 8

VI.5) 1 080

VI.6) 16

VI.7) 17 881 376

VI.8) 2 893

VII.1) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{5}$ e 0,34

VII.2) a) $\dfrac{[\frac{n}{6}] + [\frac{n}{9}] - [\frac{n}{18}]}{n}$ onde [x] significa "o maior inteiro que não supera x".

b) $\dfrac{[\frac{n}{18}]}{n}$

Caso particular: $\frac{11}{50}$; $\frac{1}{20}$

VII.3) $P = \frac{3^4}{5^4} \cong 0{,}13$

VII.4) $\frac{17}{36}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{17}{36}$

VII.5) $\dfrac{n(2n + 9)}{(2n + 6)(2n + 5)}$

VII.6) a) $\frac{5}{36}$ b) $\frac{2}{27}$ c) $\frac{89}{108}$

VII.7) $a = \frac{1}{4}$ e $b = \frac{1}{12}$

Fotolito Lima
nelson manduca
Rua Arciprestes Ezequias, 327 — Fone 273-0367 — São Paulo, SP

Impresso em off-set por
GRÁFICA EDITORA HAMBURG LTDA.
Rua Apeninos, 294 — São Paulo — Brasil
Fones: 278-2648 278-1620 279-2765
com filmes fornecidos pelo editor

Victor Dutra
- FÍSICA -

NOÇÕES DE MATEMÁTICA
(plano da obra)

Volume 1 — Conjuntos e funções
Volume 2 — Progressões e logaritmos
Volume 3 — Trigonometria
Volume 4 — Combinatória, matrizes e determinantes
Volume 5 — Geometria
Volume 6 — Geometria analítica
Volume 7 — Números complexos, polinômios e equações algêbricas
Volume 8 — Introdução à análise matemática

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

JOAO BOSCO DE SOUZA
DISTRIBUIDORA . MAGNUS
Rua da Independencia 278 Nazaré
Fone 243-0908
Salvador - Ba

GEOMETRIA

Noções de Matemática

VOLUME 5

SEGUNDO GRAU

2ª edição

JOAO BOSCO DE SOUZA
DISTRIBUIDORA . MAGNUS
Rua da Independencia 278 Nazaré
Fone 243-0908
Salvador - Ba

EDITORA MODERNA

Capa:
Ricardo Van Steen

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

G298	Geometria : 2º grau / Aref Antar Neto . . . [et al.]. – – São Paulo : Ed. Moderna, 1982. (Noções de matemática ; v. 5)	
	1. Geometria (2º grau) I. Antar Neto, Aref, 1949– II. Série.	
81-1577		17. CDD-513.07 18. -516.007

Índices para catálogo sistemático:
1. Geometria : Estudo e ensino 513.07 (17.)
516.007 (18.)

Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tel.: 531-5099
CEP 04511 - São Paulo - SP - Brasil

1982

Impresso no Brasil

2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

Índice

Parte I

Capítulo 1. Ponto, reta e plano

1.1 — Origens da geometria 3
1.2 — Os conceitos e suas definições 4
1.3 — O conceito de ponto 5
1.4 — Reta e plano 6
1.5 — As propriedades e suas demonstrações 8
1.6 — Mais alguns postulados 10
1.7 — Um resumo 13

Capítulo 2. Duas retas no espaço. Interseção de planos

2.1 — Retas paralelas. Postulado de Euclides 19
2.2 — Determinação de um plano 20
2.3 — Retas reversas 22
2.4 — Posições relativas de duas retas distintas 23
2.5 — Interseção de planos 24
2.6 — Um resumo 24

Capítulo 3. Reta e plano paralelos. Planos paralelos entre si

3.1 — Reta e plano paralelos 32
3.2 — Posições relativas de uma reta e um plano 35
3.3 — Um resumo 40
3.4 — Planos paralelos entre si 42
3.5 — Posições relativas de dois planos 45
3.6 — Novo resumo 47
Exercícios Suplementares 49

Parte II

Capítulo 4. **Postulados da separação. Segmento, ângulo e triângulo**

4.1 — O conceito primitivo de "estar entre" 53
4.2 — Segmento 53
4.3 — Conjuntos convexos 55
4.4 — Postulados da separação 56
4.5 — Ângulo 60
4.6 — Triângulo 61
4.7 — Ângulos do triângulo 63

Capítulo 5. **Congruência e medida de segmentos e ângulos**

5. 1 — Figuras congruentes 70
5. 2 — Congruência de segmentos 71
5. 3 — Ponto médio. Divisão em partes congruentes 72
5. 4 — Medida de segmentos 72
5. 5 — Congruência de ângulos 76
5. 6 — Bissetriz. Divisão de um ângulo em partes congruentes 77
5. 7 — Ângulos suplementares. Ângulo reto 78
5. 8 — Medida de ângulos 79
5. 9 — Ângulos adjacentes. Ângulos opostos pelo vértice (opv) 81
5.10 — Retas perpendiculares 82
5.11 — Ângulos complementares 83
5.12 — Ângulo agudo e ângulo obtuso 83

Capítulo 6. **Congruência de triângulos. Polígonos convexos**

6.1 — Triângulos congruentes 90
6.2 — Critérios de congruência de triângulos 91
6.3 — Ângulos alternos internos 105
6.4 — Polígonos convexos 107
6.5 — Quadriláteros especiais 108
Exercícios Suplementares 110

Parte III

Capítulo 7. **Retas e planos perpendiculares**

7.1 — Retas ortogonais 115
7.2 — Reta e plano perpendiculares entre si 117
7.3 — Planos perpendiculares entre si 126

Capítulo 8. **Ângulos, diedros, triedros e ângulos poliédricos**

8.1 — Ângulos de lados concordantes 131
8.2 — Ângulo entre duas retas 133
8.3 — Ângulo entre reta e plano 134
8.4 — Ângulo entre dois planos 136
8.5 — Diedros 138
8.6 — Medida de um diedro 139
8.7 — Triedros 141
8.8 — Triedro polar de um triedro 145
8.9 — Ângulos poliédricos convexos 147
Exercícios Suplementares 151

Parte IV

Capítulo 9. **Lugares geométricos. Círculo e esfera**

9.1 — Lugar geométrico 155
9.2 — Circunferência e círculo 159
9.3 — Ângulos na circunferência 163
9.4 — Polígonos inscritos e circunscritos 166
9.5 — Polígonos regulares 168
9.6 — Esfera e superfície esférica 169

Capítulo 10. **Áreas dos polígonos**

10.1 — Áreas dos polígonos 175
10.2 — Teorema de Pitágoras 178

Capítulo 11. **Semelhança de triângulos. Relações métricas**

11.1 — Triângulos semelhantes 185
11.2 — Critérios de semelhança 186
11.3 — Relações métricas no triângulo retângulo 204
11.4 — O conceito geral de semelhança 210

Capítulo 12. **Razões trigonométricas. Áreas do círculo e dos setores**

12.1 — A circunferência e seus arcos 212
12.2 — Radiano 214
12.3 — Razões trigonométricas 215
12.4 — Lei dos senos e lei dos cossenos 217
12.5 — Expressões da área do triângulo 217
12.6 — Área do círculo e dos setores 218
Exercícios Suplementares 223

Parte V

Capítulo 13. **Prismas**

13.1 — Noção de prisma 229
13.2 — Classificação dos prismas 230
13.3 — Paralelepípedos 231
13.4 — Seções de um prisma 232
13.5 — Volume de um sólido 233
13.6 — Volume de um prisma 234

Capítulo 14. **Pirâmides**

14. 1 — Noção de pirâmide 249
14. 2 — Classificação das pirâmides 250
14. 3 — Tetraedro regular 250
14. 4 — Seção paralela à base de uma pirâmide triangular. 252
14. 5 — O Princípio de Cavalieri aplicado às pirâmides triangulares 254
14. 6 — Volume de uma pirâmide triangular 254
14. 7 — Volume de uma pirâmide qualquer 256
14. 8 — Tronco de pirâmide de bases paralelas 261
14. 9 — Pirâmides semelhantes 261
14.10 — Volume do tronco de pirâmide 263

Capítulo 15. **Poliedros convexos**

15.1 — Tipos de poliedros 279
15.2 — Teorema de Euler 280
15.3 — Demonstração do Teorema de Euler 282
15.4 — Soma dos ângulos das faces 283
15.5 — Poliedros regulares 286
Exercícios Suplementares 291

Parte VI

Capítulo 16. **Cilindros circulares**

16.1 — Noção de cilindro circular 299
16.2 — Classificação dos cilindros 300
16.3 — Área lateral e área total do cilindro reto 300
16.4 — Volume do cilindro 301

Capítulo 17. **Cones circulares**

17.1 — Noção de cone circular 311
17.2 — Classificação dos cones 312
17.3 — Área lateral e área total do cone reto 313
17.4 — Volume de um cone 314
17.5 — Tronco de cone de bases paralelas 318
17.6 — Cones semelhantes 319
17.7 — Volume do tronco de cone 319
17.8 — Superfícies de revolução 322
17.9 — Sólidos de revolução 324

Capítulo 18. **Esfera**

18. 1 — Esfera e superfície esférica 337
18. 2 — Seção plana de uma esfera. Pólos 337
18. 3 — Volume da esfera 338
18. 4 — Área da superfície esférica 341
18. 5 — Fuso esférico 342
18. 6 — Cunha esférica 343
18. 7 — Zona esférica e calota 344
18. 8 — Setor esférico 345
18. 9 — Anel esférico 348
18.10 — Segmentos esféricos 350
Exercícios Suplementares 361

Testes de vestibulares 367
Vestibulares — questões discursivas 394
Respostas dos exercícios de vestibulares 399
Respostas dos exercícios propostos 401
Respostas dos exercícios suplementares 440
Tabela de razões trigonométricas 452

PARTE I

Capítulo 1 — **Ponto, reta e plano**

Capítulo 2 — **Duas retas no espaço. Interseção de planos**

Capítulo 3 — **Reta e plano paralelos. Planos paralelos entre si**

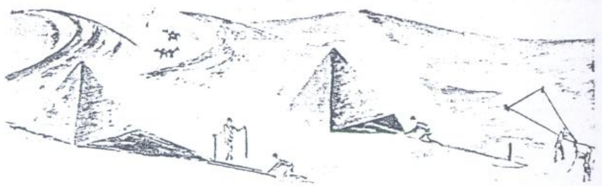
Capítulo

1

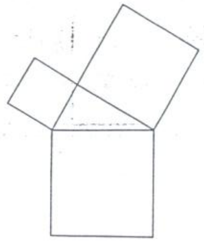
Ponto, reta e plano

1.1 — ORIGENS DA GEOMETRIA

Existem indícios de que a civilização da Babilônia, desde cerca de 2000 a.C., desenvolveu um considerável conhecimento geométrico, e assim também o Egito, desde datas que alcançam 1 300 anos antes de Cristo. As finalidades originais do conhecimento geométrico eram de natureza prática, como construção de edifícios e demarcação de terras (agrimensura). A existência das grandes pirâmides perto do Nilo prova que os egípcios conheciam a sua Geometria e sabiam usá-la bem.



Por volta de 600 a.C., alguns filósofos e matemáticos gregos começaram a sistematizar o conhecimento geométrico acumulado. Tales e Pitágoras podem ser apontados entre eles. Há quem diga que a Geometria antes dos gregos era puramente experimental e que os gregos foram os primeiros a introduzir o raciocínio dedutivo. Não podemos concordar com isso inteiramente, mas é sem dúvida verdade que os gregos foram os primeiros a sistematizar e organizar o conjunto de fatos geométricos conhecidos até seu tempo. O trabalho fundamental dos gregos foi feito por **Euclides**, que por volta de 300 a.C. escreveu um tratado de Geometria chamado *Elementos*, contendo virtualmente tudo o que era conhecido de Geometria naquela época.



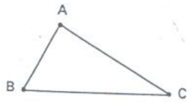
Com o auxílio da figura ao lado, que aparece no Livro V da sua obra *Elementos*, Euclides dá uma demonstração do famoso **teorema de Pitágoras**, segundo o qual a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos de um triângulo retângulo é igual à área do quadrado construído sobre a hipotenusa. A *demonstração* das propriedades das figuras, com o auxílio da Lógica, foi a preocupação central dos filósofos e matemáticos gregos.

1.2 — OS CONCEITOS E SUAS DEFINIÇÕES

A Geometria, como se apresenta na atualidade, pode ser vista como uma seqüência de **propriedades** que caracterizam um conjunto de **objetos** ou **entes**. Os entes, cujas propriedades são estudadas pela Geometria, são na sua maioria os *pontos* e os *conjuntos de pontos*, como, por exemplo, as retas, os planos, os poliedros, as curvas, as superfícies, etc.

Todo texto matemático utiliza a linguagem da Lógica para expor as suas idéias. A característica marcante dessa linguagem é o fato de que os conceitos, de um modo geral, só podem ser considerados como conhecidos depois que são definidos e as propriedades só podem ser consideradas como verdadeiras depois que são demonstradas.

Um conceito é definido por meio de uma sentença. Por exemplo, a sentença "**triângulo** é a união dos três segmentos cujas extremidades são três pontos não situados numa mesma reta" define o conceito de **triângulo**. Entretanto, ao dar essa definição, estamos supondo que a pessoa que irá lê-la já sabe o significado de *união*, *segmento*, *extremidade*, *ponto*, *estar situado* e *reta*. A definição de um conceito se faz relacionando entre si outros conceitos já conhecidos. Estes, por sua vez, podem ter sido definidos com o auxílio de conceitos anteriores. Mas um tal encadeamento de definições, na prática, não pode ser prolongado indefinidamente. A afirmação de que em Matemática **todo conceito é definido** é excessivamente pretensiosa. É necessário estabelecer um ponto de partida, isto é, alguns conceitos devem ser adotados sem definição (**conceitos primitivos**), para que todos os demais possam ser definidos a partir deles. Além disso, para que uma teoria

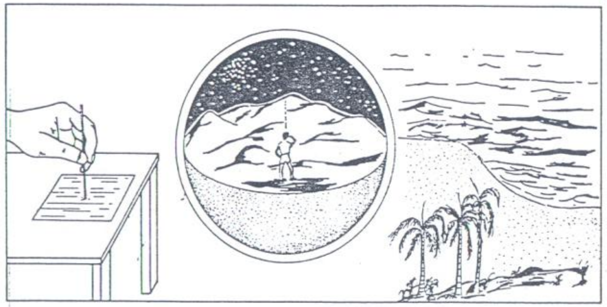


tenha finalidade prática, é importante que um conceito primitivo seja simples, de modo que haja uma concordância entre todas as pessoas a respeito do seu significado, sem que seja necessário defini-lo.

1.3 — O CONCEITO DE PONTO

O conceito fundamental da Geometria é o de **ponto**. Todas as demais figuras, como retas, círculos, planos, triângulos, etc., são **conjuntos de pontos**.

Como devemos imaginar um ponto? Podemos dar muitos exemplos que sugerem a idéia de ponto, bastando para isso associá-la a coisas do nosso mundo físico, tais como a marca deixada pela ponta de uma agulha numa folha de papel,



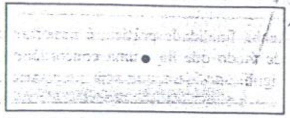
A marca de uma agulha numa folha de papel, uma estrela vista da Terra, um grão de areia são coisas que sugerem a idéia de ponto.

uma estrela vista da Terra, um grão de areia. Poderíamos também escolher o átomo, como uma partícula muito pequena existente no mundo; mas o átomo se divide em partículas menores, das quais a menor é o elétron. Seria, então, o elétron um bom exemplo de ponto? Certamente que não, pois os elétrons, apesar de "pequenos", têm um certo tamanho e uma certa massa e, além de tudo, não sabemos se um elétron é realmente indivisível. A idéia de ponto não pode ser materializada por algo que tenha dimensão, espessura, massa ou que possa ser subdividido em partes. A Geometria não dá uma definição formal do conceito de ponto, mas espera-se que todas as pessoas imaginem a mesma coisa quando lêem essa palavra, sem necessidade de uma definição.

Ponto é um conceito primitivo.

Representamos graficamente um ponto por meio de uma *bolinha* impressa no papel. Os pontos são indicados sempre por letras latinas maiúsculas:

A, B, C, D, ...



Representação gráfica de um ponto

A partir do conceito de ponto, podemos definir outros conceitos.

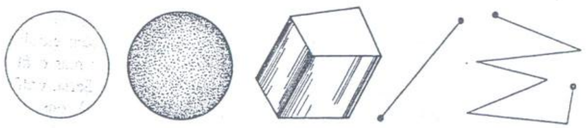
Definição D1

Espaço é o conjunto de todos os pontos.

Definição D2

Figura geométrica é qualquer conjunto não-vazio de pontos.

Assim, todas as figuras são subconjuntos do espaço. O próprio espaço é uma figura. Outros exemplos de figuras são as retas, os planos, os círculos, os poliedros, os segmentos.



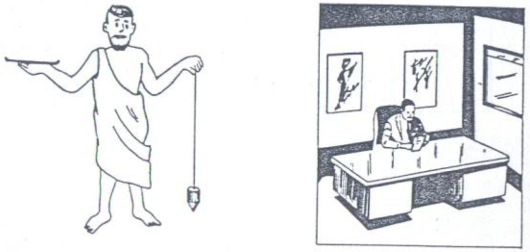
Um círculo, uma esfera, um poliedro, um segmento, uma linha poligonal são exemplos de *figuras*, pois são *conjuntos de pontos*.

1.4 — RETA E PLANO

Em Geometria, há ainda dois conceitos primitivos que são fundamentais: o de reta e o de plano

A idéia de uma reta pode ser sugerida por um fio de prumo bem esticado e a idéia de plano, pela superfície de uma mesa. Entretanto, um fio de prumo tem *começo* e *fim* e uma mesa tem a sua *beirada*, e ambos têm a sua *espessura*. Para materializar as idéias de reta e de plano, seriam necessárias coisas sem espessura e que se estendessem ilimitadamente. Coisas assim só existem na nossa imaginação.

Reta e plano são conceitos primitivos.



Um fio de prumo sugere a idéia de uma reta e a superfície de uma mesa sugere a idéia de um plano.

Representamos graficamente uma reta pelo desenho

e o plano por

Todavia, deve-se imaginar que a linha da primeira figura se prolonga em ambos os sentidos, como sugerem as setas, e que as outras duas figuras mostram apenas "pedaços" do plano, o qual, na realidade, não tem o contorno que lhe foi desenhado.

As retas são indicadas por letras latinas minúsculas:

a, b, c, ...

e os planos, por letras gregas minúsculas:

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Aproveitemos agora a oportunidade e examinemos mais duas definições.

Definição D3

> Dois ou mais pontos são ditos **colineares** se todos eles pertencem a uma mesma reta.

Dizemos também que esses pontos estão *alinhados*.

Definição D4

> Duas ou mais figuras são ditas **coplanares** se todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano.

Se uma figura está contida num plano, dizemos que é uma **figura plana**.(*)

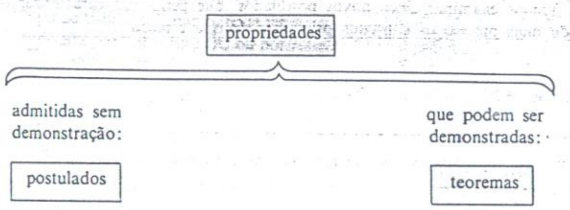
1.5 — AS PROPRIEDADES E SUAS DEMONSTRAÇÕES

As propriedades que caracterizam os entes matemáticos são estabelecidas por meio de uma demonstração. Numa demonstração, utilizamos as regras de raciocínio lógico para interligar a propriedade em estudo e outras já conhecidas anteriormente. Se for possível estabelecer um encadeamento lógico pelo qual o fato de serem verdadeiras as propriedades já conhecidas garanta que é também verdadeira a propriedade em estudo, diremos que esta última *está demonstrada* e passaremos, a partir daí, a considerá-la verdadeira. Toda propriedade que pode ser demonstrada é chamada teorema

Assim, a demonstração de um teorema se faz com o auxílio de outras propriedades já conhecidas. Estas, por sua vez, podem ter sido demonstradas com o auxílio de propriedades anteriores. Mas um tal encadeamento de demonstrações, na prática, não pode ser prolongado indefinidamente. Trata-se de um exagero afirmar que em Matemática **todas as propriedades podem ser demonstradas**. É necessário que algumas propriedades sejam admitidas sem demonstração, para que sirvam de ponto de partida. A partir delas, todas as demais poderão

(*) Note que não dissemos que a figura *pertence* ao plano e sim que ela *está contida* no plano, pois uma figura não é um **elemento** do plano, mas um seu **subconjunto. Os elementos do plano são pontos.**

ser demonstradas. As propriedades admitidas sem demonstração chamam-se **postulados.**



Um postulado básico em Geometria é o seguinte.

Postulado P1

> Existem infinitos(*) pontos.

À primeira vista, pode parecer ingênua e até mesmo desnecessária esta afirmação, mas, se desejarmos desenvolver a nossa teoria com rigor, veremos que este postulado tem seu lugar no encadeamento lógico. Por exemplo, sabendo que existem pontos, teremos certeza de que o espaço, que é o conjunto de todos os pontos, *não é vazio*. Assim, também, toma consistência a definição de figura geométrica como sendo todo conjunto *não-vazio* de pontos. Um leitor exigente concordará com que o simples fato de um conceito ser "definido" através de uma sentença não garante que tal conceito exista. Por exemplo, poderíamos "definir":

"Dois planos distintos são chamados **irmãos** se a sua interseção é um triângulo."

É uma definição bem clara, mas ao mesmo tempo inútil, pois todos sabemos que os tais "planos irmãos" não existem, simplesmente porque quando dois planos distintos se interceptam, a interseção é sempre **uma reta**.

(*) **Infinitos** significa *tantos quantos quisermos imaginar*. Em outras palavras, quando dizemos que existem infinitos pontos, isto significa que, se é considerado um certo número de pontos, é sempre possível imaginar um outro ponto diferente de todos os pontos já considerados.

1.6 — MAIS ALGUNS POSTULADOS

Vamos examinar cinco novos postulados, que permitirão caracterizar de modo mais preciso os conceitos primitivos de reta e plano.

Postulado P2

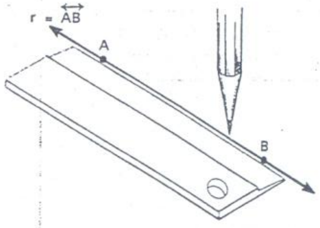
Dados dois pontos *distintos* A e B, **existe uma única reta r** tal que $A \in r$ e $B \in r$.

Podemos dizer ainda que *dois pontos distintos determinam completamente uma reta, à qual ambos pertencem*. Ou então: *por dois pontos distintos passa uma única reta*. São modos diferentes de se dizer a mesma coisa. Em simbolos:

$$A \neq B \Rightarrow \exists\, r \mid (A \in r \text{ e } B \in r)$$

o que se lê: se A é distinto de B, então existe uma única **r**, tal que A pertence a **r** e B pertence a **r**.

A reta determinada pelos pontos A e B pode ser indicada por $\overleftrightarrow{AB}$ ou $\overleftrightarrow{BA}$ (indiferentemente).

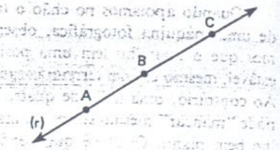


Quando apoiamos uma régua em dois pontos desenhados no papel e riscamos com um lápis de ponta bem fina, estamos materializando a idéia contida no postulado P2. Não existem duas retas distintas que contenham ambos os pontos dados.

Observações

1.ª) Quando dizemos que a reta **r** fica determinada por dois pontos distintos A e B, queremos dizer que existe uma única reta que passa por A e B. Assim, uma figura é determinada quando está garantida não só a sua existência como também a sua unicidade.

2.ª) Para caracterizarmos uma reta, podemos tomar sobre ela *qualquer par* de pontos distintos. A reta **r** da figura ao lado, por exemplo, pode ser indicada por $\overleftrightarrow{AB}$ ou por $\overleftrightarrow{BC}$ ou por $\overleftrightarrow{AC}$, indiferentemente.



Postulado P3

Dada uma reta, existem infinitos pontos que pertencem a ela, e também infinitos pontos que estão fora dela.

Em outras palavras, na reta, e também fora dela, podemos considerar tantos pontos quantos quisermos.

Postulado P4

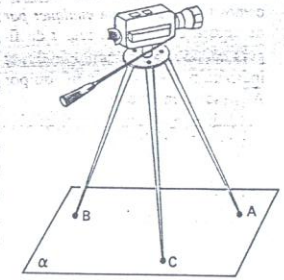
Dados três pontos A, B e C *não colineares*, **existe um único plano** α tal que $A \in \alpha$ e $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$.

Podemos dizer ainda que *três pontos não alinhados determinam completamente um plano, ao qual eles pertencem*. Ou então: *por três pontos não colineares passa um único plano*. Em simbolos:

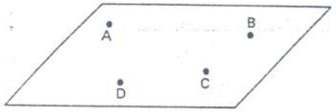
$$\boxed{\text{A, B, C não alinhados}} \Rightarrow \exists\, \alpha \mid (A \in \alpha \text{ e } B \in \alpha \text{ e } C \in \alpha)$$

O plano determinado pelos pontos A, B e C pode ser indicado por pl (ABC), ou pl (ACB), ou pl (BCA), etc., indiferentemente.

Quando apoiamos no chão o tripé de uma máquina fotográfica, observamos que o aparelho tem uma posição estável, mesmo em um terreno irregular. Ao contrário, uma mesa de quatro pés pode "mancar" mesmo sobre um assoalho bem plano. O fato é que, sendo o chão bastante plano, é garantido que *três* pés da mesa irão ficar apoiados; o quarto pé, entretanto, poderá não pertencer ao plano determinado pelos outros três. Tem-se, assim, uma materialização da idéia transmitida pelo postulado P4.

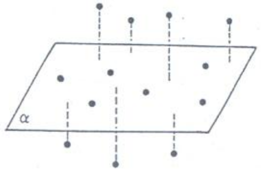


Observação: *Qualquer terno* de pontos não colineares tomados sobre um plano α caracteriza esse plano. O plano α da figura abaixo, por exemplo, pode ser indicado indiferentemente por pl (ABC), ou pl (ABD), ou pl (ACD), ou pl(BCD).



Postulado P5

> Dado um plano, existem infinitos pontos que pertencem a ele, e também infinitos pontos que estão fora dele.

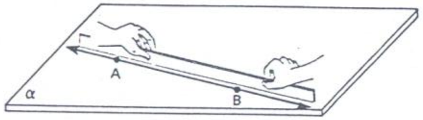


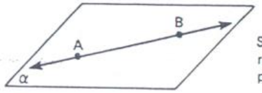
Em outras palavras, no plano, e também fora dele, podemos considerar tantos pontos quantos quisermos.

Postulado P6

> Se dois pontos distintos A e B de uma reta r pertencem a um plano α, então todos os pontos dessa reta pertencem a α.

Dizemos também que *uma reta que tem dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.*





Se encostarmos dois pontos A e B de uma régua sobre a superfície de uma mesa, todos os pontos da régua ficarão encostados na mesa.

Em símbolos, escrevemos:

$$(A \neq B,\ A \in \alpha,\ B \in \alpha) \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$$

Note que não escrevemos $\overleftrightarrow{AB} \in \alpha$ e sim $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$, pois a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é um *elemento* do plano, mas um seu *subconjunto*.

1.7 — UM RESUMO

O leitor verá que a exposição que faremos a seguir, da Geometria, é uma sucessão de definições de conceitos, que tem como ponto de partida alguns conceitos primitivos, acompanhada de outra sucessão de teoremas, cujas demonstrações têm fundamento em um grupo de postulados.

A discussão dos itens anteriores já nos conduziu ao estabelecimento de alguns conceitos primitivos, seis postulados e quatro definições, que estão aqui resumidos.

Conceitos primitivos: ponto, reta e plano.

Postulados

P1 — Existem infinitos pontos.

P2 — Dados dois pontos distintos A e B, **existe uma única reta r** tal que $A \in r$ e $B \in r$.

P3 – Dada uma reta, existem infinitos pontos que pertencem a ela, e também infinitos pontos que estão fora dela.

P4 – Dados três pontos A, B e C não-colineares, **existe um único plano** α tal que $A \in \alpha$ e $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$.

P5 – Dado um plano, existem infinitos pontos que pertencem a ele, e também infinitos pontos que estão fora dele.

P6 – Se dois pontos distintos A e B de uma reta **r** pertencem a um plano α, então todos os pontos dessa reta pertencem a α.

Definições

D1 – **Espaço** é o conjunto de todos os pontos.

D2 – **Figura geométrica** é qualquer conjunto não-vazio de pontos.

D3 – Dois ou mais pontos são ditos **colineares** se todos eles pertencem a uma mesma reta.

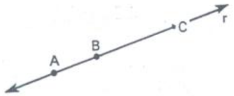
D4 – Duas ou mais figuras são ditas **coplanares** se todos os seus pontos pertencem a um mesmo plano.

Exercícios Resolvidos

1.1) Podem três pontos estar sobre uma mesma reta? Por quê?

Solução

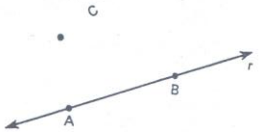
Sim. Conforme o postulado P3, existem *infinitos* pontos sobre uma reta. Assim, sempre podemos considerar três deles.



1.2) Três pontos são sempre colineares? Por quê?

Solução

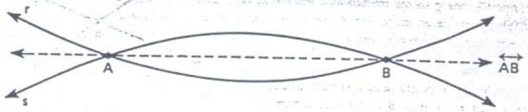
Não. Dados dois pontos A e B, pelo P2 existe uma única reta r que passa por eles. Pelo P3, existem *infinitos* pontos fora dessa reta. Se tomarmos *um deles*, teremos três pontos A, B e C não colineares.



1.3) Demonstre que se duas retas **distintas r e s** têm um ponto A em comum, então esse ponto é o único comum às duas retas, isto é, $r \cap s = \{A\}$.

Solução

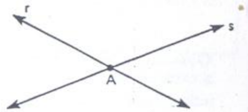
Temos $A \in r$ e $A \in s$. Se existisse um ponto $B \neq A$ comum às retas **r e s**, isto é, se $B \in r$ e $B \in s$, então ambas as retas deveriam *coincidir* com a reta $\overleftrightarrow{AB}$, conforme o P2 garante. Isso é **absurdo**, portanto é impossível existir outro ponto, além de A, comum às retas **r e s**.



Em simbolos:

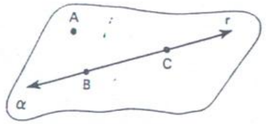
$$(r \neq s,\ A \in r,\ A \in s) \Rightarrow r \cap s = \{A\}$$

Nota: Duas retas, que têm na interseção *um único ponto*, chamam-se **retas concorrentes**.



1.4) Demonstre que dados uma reta r e um ponto A fora dela, existe um único plano α tal que $r \subset \alpha$ e $A \in \alpha$.

Solução



Devemos demonstrar a **existência** de α e a sua **unicidade**.

Existência

Para provarmos a *existência* do plano α, tomemos dois pontos distintos B e C sobre a reta r. Os pontos A, B e C não são colineares. Pelo P4 existe um único plano $\alpha = pl\,(ABC)$, tal que $A \in \alpha$, $B \in \alpha$ e $C \in \alpha$. Pelo P6, temos ainda $r \subset \alpha$. O plano α assim construido satisfaz a condição desejada, isto é, contém a reta r e passa por A.

Unicidade

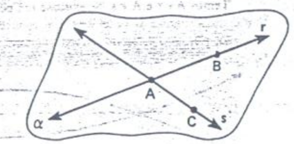
Provemos agora que esse plano é o *único* possivel. De fato, se existisse um outro plano β contendo r e passando por A, é claro que os pontos B e C pertenceriam a ele. Assim, β seria o próprio plano determinado por A; B e C, ou seja, $\beta = \alpha = pl\,(ABC)$.

Nota: Dizemos também que *uma reta e um ponto fora dela determinam um plano que contém essa reta e o ponto*. Em simbolos:

$$A \notin r \Rightarrow \exists\, \alpha \mid (A \in \alpha \text{ e } r \subset \alpha)$$

Indicamos $\alpha = pl\,(A, r) = pl\,(r, A)$. Esta propriedade será chamada, de agora em diante **teorema T1**.

1.5) Demonstre que dadas duas retas **r** e **s** *concorrentes*, existe um único plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.



Solução

Existência

Seja A o ponto (único) comum às duas retas. Em **r** tomamos $B \neq A$ e em **s** tomamos $C \neq A$. É claro que A, B e C não são colineares, pois se o fossem, **r** e **s** coincidiriam. Assim, pelo P4, existe um único plano $\alpha = pl(ABC)$. Pelo P6, temos $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

Unicidade

Se existisse outro plano β tal que $r \subset \beta$ e $s \subset \beta$, é claro que os pontos A, B e C pertenceriam a ele. Assim, o plano β iria coincidir com o plano determinado por esses três pontos: $\beta = \alpha = pl(ABC)$.

Nota: Dizemos também que *duas retas concorrentes determinam um plano que as contém*. Em símbolos:

$$r \cap s = \{A\} \Rightarrow \exists\, \alpha \mid r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha$$

Indicamos $\alpha = pl(r, s)$.

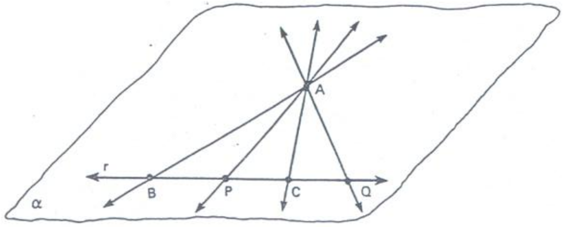
Esta propriedade, de agora em diante, será chamada de **teorema T2**.

1.6) Demonstre que um plano contém infinitas retas.

Solução

Sejam A, B e C três pontos não colineares pertencentes ao plano α. Pelo P6, a reta $r = \overleftrightarrow{BC}$ está contida em α. Tomando-se qualquer ponto $P \in r$, obtemos uma reta $\overleftrightarrow{AP} \subset \alpha$.

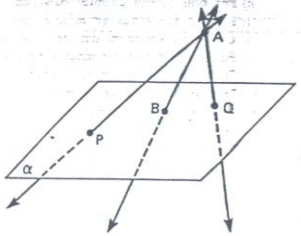
Se tomássemos *outro* ponto $Q \in r$, obteríamos **uma nova reta** $\overleftrightarrow{AQ} \subset \alpha$. Como a reta r tem infinitos pontos, é possível obter *infinitas retas contidas no plano* α.



1.7) Demonstre que por um ponto A passam infinitas retas.

Solução

Na resolução do exercício anterior, já ficou provado que pelo ponto A passam infinitas retas, embora naquele caso todas essas retas estivessem contidas em um só plano. Podemos dar uma demonstração mais abrangente, na qual as retas por A não sejam necessariamente coplanares. Para isso, consideremos um plano α e um ponto A fora dele. Tomando-se qualquer ponto $P \in \alpha$, obtemos uma reta $\overleftrightarrow{AP}$. Se tomássemos *outro* ponto $Q \in \alpha$, obteríamos **uma nova reta** $\overleftrightarrow{AQ}$. Como, pelo P5, existem infinitos pontos em α, é possível obter *infinitas retas que passam pelo ponto* A.

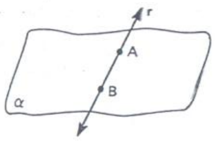


1.8) Se uma reta r não está contida em um plano α e tem com ele o ponto A em comum, então $r \cap \alpha = \{A\}$. Demonstre!

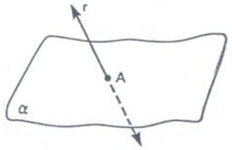
Solução

Se existisse um outro ponto B comum a **r** e α, então pelo P6 a reta **r** deveria estar contida em α, o que não acontece na realidade. Portanto, não pode existir tal ponto B, isto é, A é o único ponto comum a **r** e α:

$$r \cap \alpha = \{A\}$$



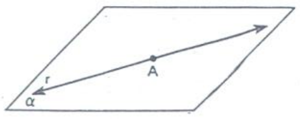
Nota: Quando $r \cap \alpha = \{A\}$ dizemos que a reta **r** *fura* o plano α no ponto A; dizemos também que **r** e α são *secantes*.



Exercícios Propostos

1.9) Sejam A um ponto, r uma reta que passa por esse ponto e α um plano que passa por essa reta. Classifique – verdadeira (V) ou falsa (F) – cada afirmação dada abaixo:

a) $A \subset r$
b) $A \in r$
c) $A \subset \alpha$
d) $A \in \alpha$
e) $r \in \alpha$
f) $r \subset \alpha$



1.10) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Um ponto é todo corpo pequeno.
b) Um ponto é tudo o que não se subdivide em partes.
c) O conceito de ponto não é definido.
d) Um ponto é tudo que não tem dimensão.
e) Toda reta é um conjunto de pontos.
f) Todo plano é um conjunto de retas.
g) Por um ponto dado passa uma única reta.
h) Por dois pontos distintos passa uma única reta.
i) Por um ponto passam infinitas retas.
j) Um ponto determina uma reta que passa por ele.
k) Por três pontos não alinhados passa um único plano.
l) Dois pontos distintos determinam um plano.
m) Três pontos distintos determinam um plano.
n) Três pontos não alinhados são distintos.
o) Dois pontos são sempre coplanares.
p) Três pontos distintos não podem ser colineares.
q) Se uma reta tem dois pontos distintos sobre um plano, ela tem pelo menos mais um ponto nesse plano.
r) Uma reta que tem um ponto sobre um plano está contida nesse plano.
s) Uma reta contida num plano tem um ponto que pertence a esse plano.
t) Uma reta contida num plano tem um único ponto que pertence a esse plano.
u) Três pontos coplanares são colineares.
v) Três pontos colineares são coplanares.

1.11) Quantas retas ficam determinadas por três pontos não alinhados?

1.12) Quantas retas ficam determinadas por quatro pontos, três a três não alinhados?

1.13) Quantos planos ficam determinados por quatro pontos não coplanares?

1.14) Prove que se dois planos distintos α e β têm dois pontos A e B em comum, então a interseção deles é a reta $\overleftrightarrow{AB}$:

$$\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$$

Capítulo 2

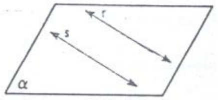
Duas retas no espaço. Interseção de planos

2.1 — RETAS PARALELAS. POSTULADO DE EUCLIDES

Definição D5

> Duas retas são **paralelas** se ambas estão contidas em um mesmo plano e não têm ponto em comum.

Em outras palavras, para que duas retas **r** e **s** sejam paralelas, deve existir um plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$ e, *além disso*, deve-se ter $r \cap s = \varnothing$. Indicamos $r /\!/ s$. Em símbolos:

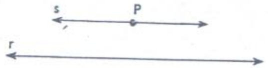


$$r /\!/ s \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha \mid (r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha) \\ \text{e} \\ r \cap s = \varnothing \end{cases}$$

O seguinte postulado, conhecido como postulado das paralelas ou postulado de Euclides, garante a existência de retas paralelas.

Postulado P7

> Dados uma reta **r** e um ponto P fora dela, existe uma **única** reta que passa por P e é paralela à reta **r**.



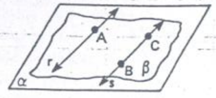
Em outras palavras, *por um ponto fora de uma reta dada passa uma única reta paralela à reta dada*. Em símbolos:

$$P \notin r \Rightarrow \exists s \mid (P \in s \text{ e } r /\!/ s)$$

Exercício Resolvido

2.1) Demonstre que, dadas duas retas **r** e **s** paralelas, existe um único plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

Solução



Existência

A existência de um plano α que contém ambas as retas **r** e **s** é garantida pela própria definição D5, isto é, o fato de **r** e **s** serem paralelas significa que existe um plano α tal que $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$ (além de garantir também que $r \cap s = \varnothing$).

Unicidade

Consideremos sobre a reta **r** o ponto A e sobre a reta s os pontos B e C. Como $A \notin s = \overleftrightarrow{BC}$, é claro que os pontos A, B e C não são colineares. Se existissem dois planos α e β contendo as retas **r** e **s**, ambos teriam que *coincidir* com o plano determinado pelos pontos A, B e C, isto é,

$$\alpha = \beta = \text{pl}\,(ABC)$$

Sendo assim, não pode haver dois planos distintos contendo **r** e **s**.

Nota: Dizemos que *duas retas paralelas determinam um plano que contém ambas*. Em símbolos:

$$r \mathbin{/\!/} s \Rightarrow \exists\, \alpha \mid (r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha)$$

Indicamos $\alpha = \text{pl}\,(r, s)$.

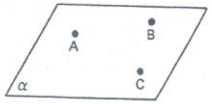
Esta propriedade será chamada, de agora em diante, **teorema T3**.

2.2 — DETERMINAÇÃO DE UM PLANO

Há quatro casos, principalmente, em que um plano fica determinado, isto é, em que podemos garantir a *existência* e a *unicidade* de um plano. Vejamos agora um resumo desses quatro casos possíveis.

1.° caso

Três pontos não alinhados

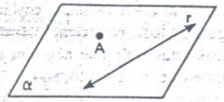


Este é o caso que já vimos, correspondente ao postulado P4. Temos

$$\alpha = \text{pl}(ABC)$$

2.° caso

Uma reta e um ponto fora dela

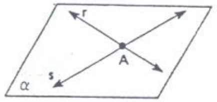


Este é o caso que já vimos, através do *exercício resolvido* 1.4 (teorema T1). Temos

$$\alpha = \text{pl}(r, A)$$

3.° caso

Duas retas concorrentes

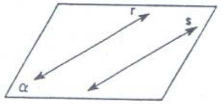


Este é o caso que já vimos, através do *exercício resolvido* 1.5 (teorema T2). Temos

$$\alpha = \text{pl}(r, s)$$

4.° caso

Duas retas paralelas

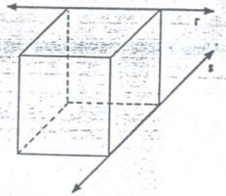


Este é o caso que já vimos, através do *exercício resolvido* 2.1 (teorema T3). Temos

$$\alpha = \text{pl}(r, s)$$

2.3 — RETAS REVERSAS

Devemos notar que, para se ter $r \parallel s$, é obrigatório que **r e s** sejam **coplanares**. Na figura ao lado, por exemplo, podemos ver duas retas **r** e **s** que não têm ponto comum e que, no entanto, *não são paralelas*, pois não existe plano que contenha ambas. Neste caso, as duas retas chamam-se reversas.



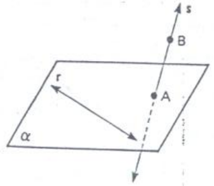
Definição D6

Duas retas são **reversas** se não existe plano que contenha ambas.

Exercícios Resolvidos

2.2) Prove que existem retas reversas.

Solução



Consideremos uma reta **r** e o ponto A fora dela. Seja α o plano determinado por **r** e A, isto é, $\alpha = pl\,(r, A)$. Tomemos o ponto B fora do plano α e consideremos a reta $s = \overleftrightarrow{AB}$. Podemos provar que essas duas retas **r** e **s**, assim construidas, são **reversas**, isto é, não existe plano que contenha ambas.

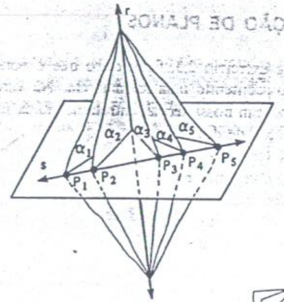
De fato, *se existisse* algum plano β tal que $r \subset \beta$ e $s \subset \beta$, então, como $A \in s$, teriamos $A \in \beta$. Mas se isto fosse verdade, seria $\beta = pl\,(r, A) = \alpha$, o que é *absurdo*, pois o ponto B pertence a β e não pertence a α, ou seja, é impossivel que α e β coincidam.

Sendo assim, conclui-se que não pode existir um plano contendo ambas as retas **r** e **s**.

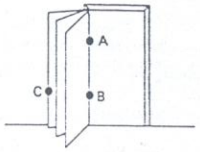
2.3) Prove que por uma reta passam infinitos planos.

Solução

Dada uma reta **r**, consideremos uma outra reta **s**, tal que **r** e **s** sejam reversas. Tomando-se qualquer ponto $P_1 \in s$, obtemos um plano $\alpha_1 = pl\,(r, P_1)$. Se tomássemos *outro* ponto $P_2 \in s$, obteriamos **um novo plano** $\alpha_2 = pl\,(r, P_2)$. É claro que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, pois se α_1 coincidisse com α_2, esse plano conteria **r** e **s**, o que é impossivel. Como a reta **s** tem infinitos pontos, é possivel obter *infinitos planos que passam pela reta* **r**.



Uma idéia concreta desta situação temos ao observarmos uma porta. A porta passa pelos pontos A e B, situados nas dobradiças; mas, a cada posição da porta, corresponde um plano que contém a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Para determinar um desses planos, é necessário fixar um terceiro ponto C, não situado na reta $\overleftrightarrow{AB}$.



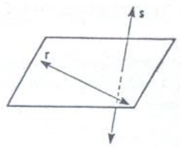
2.4 — POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS DISTINTAS

Conhecendo as noções de retas paralelas e retas reversas, podemos resumir as diversas posições relativas de duas retas distintas **r** e **s**.

1.ª) **Retas reversas**

Neste caso, não existe plano que contenha ambas.

Temos: $r \cap s = \varnothing$.

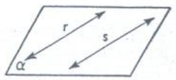


2.ª) **Retas coplanares** (isto é, ambas contidas em um mesmo plano):

a) **paralelas**

Neste caso,

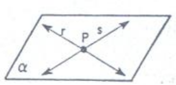
$r \cap s = \varnothing$



b) **concorrentes**

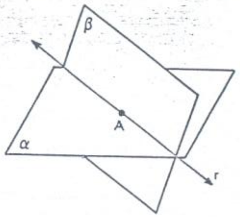
Neste caso,

$r \cap s = \{P\}$



2.5 — INTERSEÇÃO DE PLANOS

Na resolução do exercício 2.3, ficou claro que é possível termos dois (ou mais) planos distintos contendo uma mesma reta. Na verdade, tal reta é a **interseção** desses planos. Em nossa teoria, entretanto, nada foi dito até agora para esclarecer se a interseção de dois planos distintos pode ou não ser *algo diferente de uma reta*. Conforme veremos no postulado seguinte, se dois planos distintos possuem pontos em comum, tais pontos constituem obrigatoriamente uma reta.



Postulado P8

> Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Em símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ A \in \beta \\ \alpha \neq \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, r \mid r = \alpha \cap \beta$$

Os dois planos α e β, neste caso, chamam-se secantes. Note que, no exercício 2.3 que resolvemos anteriormente, ficou provada a **existência** de planos secantes.

Definição D7

> Dois planos são **secantes** se a sua interseção é uma reta.

2.6 — UM RESUMO

A seguir fazemos um resumo das definições e postulados apresentados neste capítulo, além dos teoremas vistos até agora.

Definições

D5 – Duas retas são **paralelas** se ambas estão contidas em um mesmo plano e não têm ponto em comum.
D6 – Duas retas são **reversas** se não existe plano que contenha ambas.
D7 – Dois planos são **secantes** se a sua interseção é uma reta.

Postulados

P7 – **Postulado das paralelas** ou **de Euclides** – Dados uma reta **r** e um ponto P fora dela, existe uma única reta que passa por P e é paralela à reta **r**.
P8 – Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

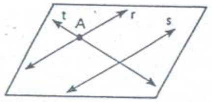
Teoremas

T1 – Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano que contém essa reta e o ponto.
T2 – Duas retas concorrentes determinam um plano que as contém.
T3 – Duas retas paralelas determinam um plano que as contém.

Exercícios Resolvidos

2.4) Sejam **r**, **s** e **t** três retas contidas em um mesmo plano, tais que r // s. Prove que se **t** é concorrente com **r**, então **t** também é concorrente com **s**.

Solução



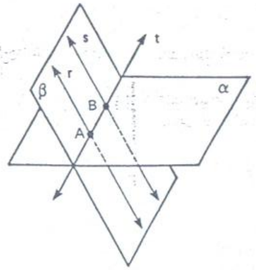
Seja A o ponto comum a r e t: $r \cap t = \{A\}$. Como t e s são coplanares, só há duas possibilidades: ou t // s ou t e s são concorrentes. Mas se fosse t // s, então pelo ponto A estariam passando duas retas distintas, paralelas à reta s, o que é absurdo pelo postulado P7. Logo, t e s são concorrentes.

2.5) Prove que se a reta **r** fura o plano α e a reta s é paralela a r, então s também fura α.

Solução

Para provar que s fura α, devemos provar que s tem um ponto em comum com α e que esse ponto é único, isto é,

$$s \cap \alpha = \{B\}$$



Vamos então construir o ponto B. Seja A o ponto comum a **r** e α:

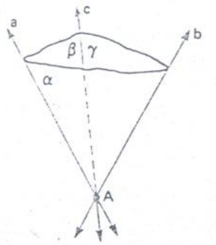
$$r \cap \alpha = \{A\}$$

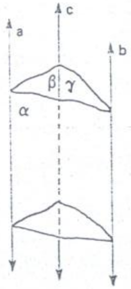
Como $r \parallel s$, existe o plano $\beta = pl\,(r, s)$, o qual tem o ponto A em comum com α. Logo, pelo P8, existe uma única reta **t** tal que $t = \alpha \cap \beta$. É claro que **t** passa por A e é distinta de **r** e de **s**. Assim, tem-se três retas coplanares **r**, **s** e **t** tais que $r \parallel s$. Pelo exercício 2.4, como **t** é concorrente com **r**, então **t** e **s** também são concorrentes. Seja B o ponto comum: $\{B\} = t \cap s$. Assim, escrevemos:

$$\{B\} = t \cap s = (\alpha \cap \beta) \cap s = \alpha \cap (\beta \cap s) = \alpha \cap s$$

ou seja: $s \cap \alpha = \{B\}$

2.6) Teorema T4 – Prove o seguinte teorema das três interseções: sejam α β e γ três planos secantes dois a dois tais que $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ e $\beta \cap \gamma = c$. Se as retas **a**, **b** e **c** são *distintas*, então há somente duas possibilidades: ou as três concorrem em um mesmo ponto, ou elas são paralelas duas a duas.





Em símbolos:

Hipótese: $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$, $\beta \cap \gamma = c$
a, b, c distintas

Tese: $a \cap b \cap c = \{A\}$ ou
($a \parallel b$ e $b \parallel c$ e $a \parallel c$)

Solução

Como as retas **a** e **b** são coplanares (contidas em α), há somente duas possibilidades:

1.ª) $a \cap b = \{A\}$ 2.ª) $a \parallel b$

1.ª) Se $a \cap b = \{A\}$, podemos escrever $\{A\} = a \cap b = (\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \cap \gamma) = \alpha \cap (\beta \cap \gamma) = \alpha \cap c$
Logo, $A \in c$. Fica provado, então, que a reta **c** também passa por A, ou seja,

$$a \cap b \cap c = \{A\}$$

2.ª) Se $a \parallel b$, podemos escrever:

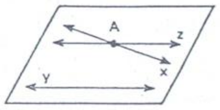
$$a \cap b = \varnothing \Rightarrow (\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \cap \gamma) = \varnothing \Rightarrow \alpha \cap (\beta \cap \gamma) = \varnothing \Rightarrow \alpha \cap c = \varnothing$$

Como **a** e **b** estão contidas em α, tem-se $a \cap c = \varnothing$ e $b \cap c = \varnothing$.

Assim, **a** e **c** são retas coplanares sem ponto comum, isto é, $a \parallel c$. Pelo mesmo motivo tem-se $b \parallel c$.

2.7) Sejam três retas **x**, **y** e **z**, distintas duas a duas, *todas contidas em um mesmo plano*. Demonstre que se $x \parallel y$ e $y \parallel z$ então $x \parallel z$.

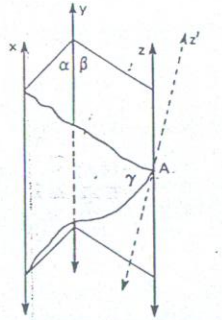
Solução



Como **x** e **z** são coplanares, há somente duas possibilidades: ou $x \parallel z$, ou **x** e **z** são concorrentes em um ponto A. Mas se fosse $x \cap z = \{A\}$ então pelo ponto A estariam passando duas retas distintas, paralelas à reta y, o que é absurdo pelo postulado P7. Assim, só pode ser $x \parallel z$.

2.8) Teorema T5 – Sejam x, y e z três retas distintas duas a duas. Demonstre que se $x \parallel y$ e $y \parallel z$ então $x \parallel z$.

Solução



Se as três retas são coplanares, recaímos no exercício 2.7, já demonstrado. Vamos então supor que não há um plano que contenha as três retas. Assim, sendo $\alpha = pl(x, y)$ e $\beta = pl(y, z)$, tem-se $\alpha \neq \beta$. Se tomarmos sobre a reta **z** o ponto A, é claro que $A \notin x$, pois se a reta **x** passasse por A teríamos duas retas distintas paralelas à reta **y**, concorrentes em A, contra o postulado P7.

Portanto, se $A \notin x$ podemos considerar o plano $\gamma = pl\,(x, A)$. Os planos γ e β, distintos, têm em comum o ponto A, logo existe a reta $z' = \beta \cap \gamma$. É claro que $z' \neq x$ e $z' \neq y$, pois o ponto A pertence a **z'** mas não pertence a **x** nem a **y**.

Apliquemos agora o **teorema das três interseções** (veja o exercício 2.6: teorema T4).

Os planos α, β e γ são secantes dois a dois e as interseções **x**, **y** e **z'** são distintas. Como $x \parallel y$, resulta que $z' \parallel x$ e $z' \parallel y$.

Mas então as retas **z** e **z'** passam por A e são paralelas à reta y. Pelo postulado P7, tem-se $z = z'$ e portanto $x \parallel z$.

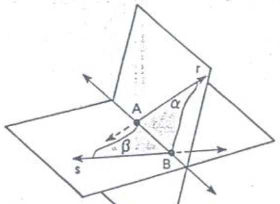
Outro modo: (utilizando o exercício 2.5).

a) **x** e **z** *não têm ponto comum*, pois não sendo assim estaria contrariado o postulado P7.
b) Resta provar que **x** e **z** *são coplanares*. Sendo $A \in z$, tomamos o plano $\gamma = pl\,(x, A)$. Se γ não contivesse **z**, a reta **z** furaria γ em A, logo a reta $y \parallel z$ também furaria γ e assim a reta $x \parallel y$ *também furaria* γ, o que é absurdo, pois $x \subset \gamma$. Assim, $z \subset \gamma$.

Conclui-se então que **x** e **z** são retas coplanares sem ponto em comum: $x \parallel z$.

2.9) Duas retas r e s são reversas. Se A ∈ r e B ∈ s, qual é a interseção dos planos $\alpha = \text{pl}(r, B)$ e $\beta = \text{pl}(s, A)$?

Solução



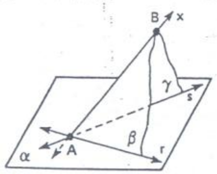
É claro que, sendo r e s reversas, tem-se A ≠ B e $\alpha \neq \beta$. Mas como $A \in \alpha$ e $A \in \beta$, então $A \in \alpha \cap \beta$. Da mesma forma, como $B \in \alpha$ e $B \in \beta$, então $B \in \alpha \cap \beta$. Logo, pelo P8, resulta que

$$\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{AB}$$

A interseção pedida é a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

2.10) Por um ponto A conduzem-se duas retas distintas r e s. Fora do plano $\alpha = \text{pl}(r, s)$ toma-se o ponto B. Qual é a interseção dos planos $\beta = \text{pl}(r, B)$ e $\gamma = \text{pl}(s, B)$?

Solução

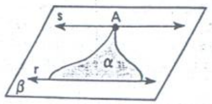


É claro que $\beta \neq \gamma$ (pois se fosse $\beta = \gamma$ teríamos $\beta = \gamma = \alpha = \text{pl}(r, s)$ mas isso é absurdo pois $B \notin \alpha$). Já sabemos que B pertence a β e a γ. Provemos que A também pertence a ambos. Isso é imediato, pois sendo $r \cap s = \{A\}$, tem-se $A \in r$ e $A \in s$, donde $A \in \beta$ e $A \in \gamma$. Assim,

$$x = \beta \cap \gamma = \overleftrightarrow{AB}$$

A interseção procurada é a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

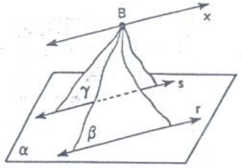
2.11) As retas r e s são paralelas e A ∈ s. Prove que o plano $\alpha = \text{pl}(r, A)$ contém a reta s.



Solução

Seja $\beta = \text{pl}(r, s)$. Basta provar que $\beta = \alpha$. De fato, como $s \subset \beta$ e $A \in s$, tem-se $A \in \beta$. Portanto, $\beta = \text{pl}(r, A) = \alpha$. Conseqüentemente, $s \subset \alpha$.

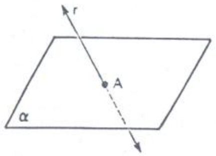
2.12) Duas retas r e s são paralelas. Fora do plano $\alpha = \text{pl}(r, s)$ toma-se o ponto B. Qual é a interseção dos planos $\beta = \text{pl}(r, B)$ e $\gamma = \text{pl}(s, B)$?



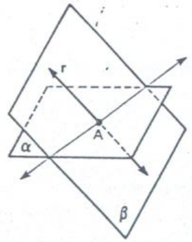
Solução

Os planos β e γ são distintos (pois se fosse $\beta = \gamma$ teríamos $\beta = \gamma = \alpha$, o que é absurdo, pois $B \notin \alpha$). Seja x a reta conduzida por B, paralela às retas r e s. Como $B \in x$, é claro que $\text{pl}(x, r) = \text{pl}(r, B) = \beta$ e $\text{pl}(x, s) = \text{pl}(s, B) = \gamma$. Assim, $\beta \cap \gamma = x$.

2.13) A reta r fura o plano α no ponto A. Como são as interseções de α com os planos que contêm r?



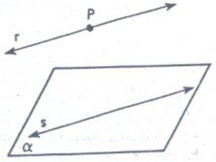
Solução



Se β é um plano qualquer contendo r, é claro que $\beta \neq \alpha$ (pois se fosse $\beta = \alpha$, r estaria contida em α).

Assim, α e β são planos distintos que têm em comum o ponto A. Pelo postulado P8 a interseção de α e β é uma reta que passa por A. Portanto, as interseções de α com os planos que contêm r são retas que passam por A.

2.14) Seja a reta s contida no plano α e seja P um ponto fora de α. Por P conduz-se a reta r paralela a s. É claro que r não está contida em α (pois $P \notin \alpha$). Prove que $r \cap \alpha = \emptyset$.



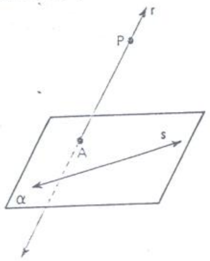
Solução

Seja $\beta = pl(r, s)$. Vamos provar que r não pode ter ponto em comum com α. De fato, se existisse um ponto A comum a r e α, esse ponto não pertenceria à reta s (pois $r \parallel s$). Assim, teríamos $\alpha = pl(s, A)$.

Mas

$$\beta = pl(r, s) = pl(A, s)$$

logo seria $\alpha = \beta$ e portanto $r \subset \alpha$, o que é absurdo. Assim, $r \cap \alpha = \emptyset$.



Exercícios Propostos

2.15) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se $a \cap \alpha = a$, então $a \subset \alpha$.
b) Se $\alpha \cap \beta = \alpha$, então $\alpha = \beta$.
c) Se $\alpha \cap a \neq \emptyset$, então a fura α.

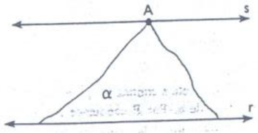
2.16) Se dois planos α e β têm em comum três pontos não colineares, o que acontece com α e β?

2.17) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas distintas determinam um plano.
b) Uma reta e um ponto determinam um plano.
c) Duas retas concorrentes são coplanares.
d) Dois planos que têm duas retas distintas em comum são iguais.

2.18) Pelo ponto A não pertencente à reta r conduz-se a reta s paralela a r. Prove que

$$s \subset pl(r, A)$$

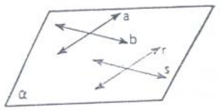


2.19) Se três retas são duas a duas concorrentes em três pontos distintos, então elas são coplanares. Prove.

2.20) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Duas retas reversas a e b são paralelas à mesma reta c.
b) Duas retas distintas r e s, reversas a uma terceira reta t, são reversas entre si.
c) Duas retas ou são coincidentes ou são reversas.
d) Duas retas reversas não têm ponto comum.
e) Duas retas reversas são distintas.
f) Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.
g) Duas retas que têm um único ponto comum são concorrentes.
h) Duas retas reversas não são coplanares.
i) Se duas retas distintas não são reversas, então elas são paralelas.
j) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.
k) Duas retas que não têm ponto comum são reversas.
l) Duas retas que não têm ponto comum ou são paralelas ou são reversas.
m) Duas retas distintas ou são concorrentes ou são paralelas.

2.21) Sejam duas retas, a e b, concorrentes. Sobre o plano $\alpha = pl(a, b)$ tomam-se outras duas retas r e s tais que $r \parallel a$ e $s \parallel b$. Prove que r e s são concorrentes.

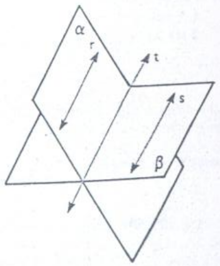


2.22) As retas x e y são reversas. Tomam-se os pontos $A \in x$ e $B \in y$. Demonstre que os planos $\alpha = pl(x, \overleftrightarrow{AB})$ e $\beta = pl(y, \overleftrightarrow{AB})$ são distintos.

2.23) Assinale verdadeiro (V) ou falso (F):

a) A interseção de dois planos só pode ser uma reta.
b) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, então eles são secantes.
c) Se dois planos são secantes, eles têm um único ponto em comum.
d) Dois planos secantes têm um ponto em comum.
e) Se $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, então $\alpha = \beta$.

2.24) Dois planos α e β interceptam-se segundo a reta t. As retas r e s, distintas de t, são paralelas entre si e tais que $r \subset \alpha$ e $s \subset \beta$. Prove que t é paralela a r e a s.



Capítulo

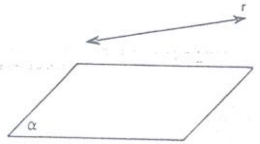
3

Reta e plano paralelos. Planos paralelos entre si

3.1 — RETA E PLANO PARALELOS

Definição D8

> Se uma reta r e um plano α são tais que
>
> $$r \cap \alpha = \varnothing$$
>
> dizemos que r *é paralela a* α ou ainda α *é paralelo a* r ou que r *e* α *são paralelos entre si.*



Indicamos $r \parallel \alpha$ ou $\alpha \parallel r$.

É natural perguntar, neste ponto, se realmente *existem* uma reta e um plano paralelos entre si. Esta questão já está resolvida. A existência de reta paralela a plano é garantida pelo teorema demonstrado no exercício 2.14, cujo enunciado reescrevemos aqui, com outras palavras:

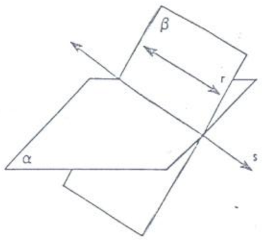
> Se a reta r não está contida em um plano α e é paralela a uma reta $s \subset \alpha$, então r e α são paralelos entre si.

Em símbolos:

$$(r \not\subset \alpha,\ r \parallel s,\ s \subset \alpha) \Rightarrow r \parallel \alpha$$

Exercícios Resolvidos

3.1) Dois planos, α e β, são secantes e $\alpha \cap \beta = s$. A reta r está contida em β e é paralela ao plano α. Prove que $r \parallel s$.



Solução

É claro que $r \neq s$, pois $r \subset \alpha$ e $s \subset \alpha$.

Se r e s fossem concorrentes em um ponto A, como $s \subset \alpha$ seria $A \in \alpha$, o que é absurdo, pois $r \parallel \alpha$, isto é, r não tem ponto em comum com α. Assim, resta uma única possibilidade: $r \parallel s$.

Notas

1.ª) Este mesmo teorema poderia ser enunciado assim:

"Se dois planos são secantes e uma reta de um deles é paralela ao outro, então ela é paralela à interseção dos dois planos."

ou assim:

"Se uma reta é paralela a um dado plano, então qualquer plano que contém a reta dada e é secante ao plano dado tem com este uma interseção paralela à reta dada."

ou ainda:

"Se $r \parallel \alpha$, então existe uma reta $s \subset \alpha$ tal que $r \parallel s$."

2.ª) Este teorema corresponde a uma **condição necessária** para que uma reta seja paralela a um plano:

"Para que a reta r seja paralela ao plano α é **necessário** que r não esteja contida em α e seja paralela a uma reta de α."

3.ª) No início deste capítulo foi enunciado o seguinte teorema, cuja demonstração tinha sido feita no exercício 2.14:

"Se a reta r não está contida em um plano α e é paralela a uma reta $s \subset \alpha$, então r e α são paralelos entre si."

Este teorema corresponde a uma **condição suficiente** para que uma reta seja paralela a um plano:

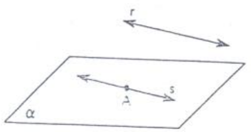
"Para que a reta r seja paralela ao plano α é **suficiente** que r não esteja contida em α e seja paralela a uma reta de α."

4.ª) Unindo-se as 2.ª e 3.ª notas, podemos então resumir:

Teorema T6

> Uma **condição necessária e suficiente** para que uma reta r seja paralela ao plano α é que r não esteja contida em α e seja paralela a uma reta de α.

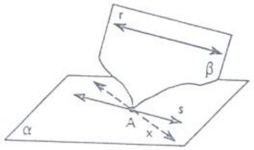
3.2) Teorema T7 – A reta r e o plano α são paralelos. Pelo ponto $A \in \alpha$ conduz-se a reta $s \parallel r$. Prove que $s \subset \alpha$.



Solução

Em simbolos, o teorema pode ser enunciado assim:

$$\left.\begin{array}{l} r \parallel s \\ r \parallel \alpha \\ A \in \alpha \\ A \in s \end{array}\right\} \Rightarrow s \subset \alpha$$

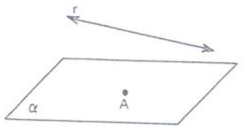


Para demonstrar este teorema, consideremos a figura ao lado, onde "fingimos não saber" que $s \subset \alpha$. Seja $\beta = pl(r, s)$. Como A é comum aos dois planos, β e α se interceptam segundo uma reta que provisoriamente chamaremos de **x** (vamos provar que $x = s$). Pelo exercício 3.1, tem-se $x \parallel r$. Mas então as retas x e s, que passam por A, são ambas paralelas a **r**. Pelo postulado P7, só pode ser $x = s$. Portanto, $s \subset \alpha$.

Nota: O teorema acima pode também ser enunciado assim:

"Se as retas **r** e **s** são paralelas e pelo ponto $A \in s$ conduzimos um plano $\alpha \parallel r$, então $s \subset \alpha$."

3.3) São dados uma reta **r** e um ponto $A \notin r$. Construa um plano que passa por A e é paralelo à reta **r**.

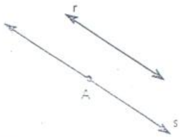


Solução

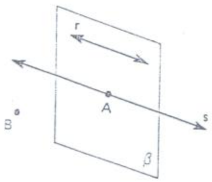
Devemos descrever primeiramente a seqüência de operações necessárias para **construir** o plano procurado e, em seguida, devemos **provar** que ele satisfaz a condição pedida.

Construção

Conduzimos por $A \notin r$ a reta $s \parallel r$.

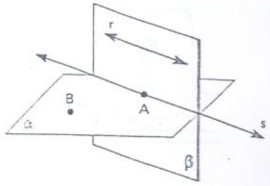


Em seguida, sendo $\beta = pl(r, s)$, tomamos *fora de* β o ponto B.



Finalmente, como $B \notin s$, podemos considerar o plano

$$\alpha = pl(s, B)$$



Prova

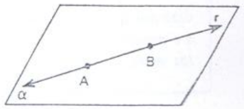
Resta provar que $\alpha \parallel r$. Para isso, basta notar que r não está contida em α e é paralela a uma reta s desse plano (é claro que r não está contida em α, pois se isso acontecesse, os planos α e β coincidiriam).

3.2 — POSIÇÕES RELATIVAS DE UMA RETA E UM PLANO

Vamos agora resumir as diversas **posições relativas de uma reta e um plano.**

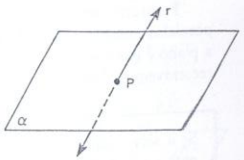
1.º) $r \subset \alpha$

Neste caso, a reta tem todos os pontos em comum com o plano.



2.º) $r \cap \alpha = \{P\}$

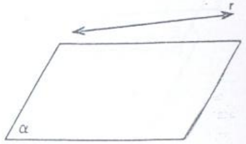
Neste caso, dizemos que r e α são **secantes** ou **concorrentes** ou que a reta **fura** o plano.
O ponto P é o **traço** de **r** no plano α.



3.º) $r \parallel \alpha$

Neste caso,

$$r \cap \alpha = \varnothing$$



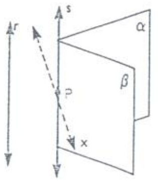
Exercícios Resolvidos

3.4) **Teorema T8** – Prove que se uma reta é paralela a dois planos secantes, ela é paralela à interseção desses dois planos.

Solução

O enunciado deste teorema, em simbolos, é:

$$\left.\begin{array}{l} r /\!/ \alpha \\ r /\!/ \beta \\ s = \alpha \cap \beta \end{array}\right\} \Rightarrow r /\!/ s$$



Na demonstração utilizamos o teorema T7 (do exercicio 3.2). Consideremos pelo ponto $P \in s$ a reta $x /\!/ r$ e provemos que:

$$x = s = \alpha \cap \beta$$

Temos:

$$\left.\begin{array}{l} r /\!/ x \\ r /\!/ \alpha \\ P \in x \\ P \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x \subset \alpha \text{ e também: } \left.\begin{array}{l} r /\!/ x \\ r /\!/ \beta \\ P \in x \\ P \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow x \subset \beta$$

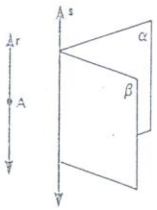
Assim, $x = \alpha \cap \beta = s$ e, portanto, $r /\!/ s$.

3.5) São dados dois planos α e β, secantes, e o ponto A *fora de ambos*. Construa por A uma reta paralela a ambos os planos.

Solução

Construção

Seja $s = \alpha \cap \beta$. Consideremos pelo ponto $A \notin s$ a reta $r /\!/ s$.

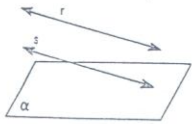


Prova

Provemos que a reta r é paralela a ambos os planos. Basta aplicar aqui a **condição necessária e suficiente do teorema T6** (vista na 4.ª nota do exercicio 3.1). Temos:

$$\left.\begin{array}{l} r \not\subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r /\!/ s \end{array}\right\} \Rightarrow r /\!/ \alpha \text{ e também: } \left.\begin{array}{l} r \not\subset \beta \\ s \subset \beta \\ r /\!/ s \end{array}\right\} \Rightarrow r /\!/ \beta$$

3.6) São dadas duas retas r e s paralelas e um plano α tal que $r /\!/ \alpha$. Prove que só há duas possibilidades: ou $s /\!/ \alpha$ ou $s \subset \alpha$.



Solução

Em simbolos, o teorema se escreve assim:

$$(r /\!/ s \text{ e } r /\!/ \alpha) \Rightarrow (s /\!/ \alpha \text{ ou } s \subset \alpha)$$

É claro que só há dois casos possiveis:

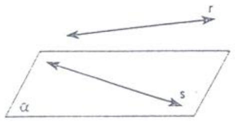
1.º) $s \cap \alpha = \varnothing$ 2.º) $s \cap \alpha \neq \varnothing$

No 1.º caso temos $s /\!/ \alpha$.

Provemos que no 2.º caso temos $s \subset \alpha$. Seja A um ponto comum a s e α. Basta, então, aplicar o teorema T7 (do exercicio 3.2). Temos:

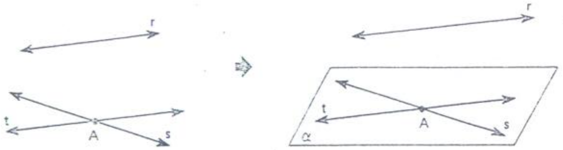
$$\left.\begin{array}{l} r /\!/ s \\ r /\!/ \alpha \\ A \in s \\ A \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow s \subset \alpha$$

3.7) São dadas duas retas reversas, r e s. Construa um plano que contêm s e é paralelo à reta r.



Solução

Construção



a) Pelo ponto $A \in s$ tomamos a reta $t /\!/ r$.

b) Como t e s são concorrentes, podemos considerar o plano $\alpha = pl\,(s, t)$.

Prova

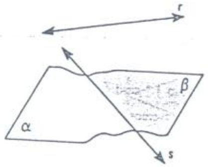
Provemos que o plano α assim obtido é paralelo à reta r. Para isso, basta notar que a reta r não está contida em α (pois r e s são reversas) e é paralela a uma reta de α, que é a reta t.

$$\left.\begin{array}{l} r \not\subset \alpha \\ t \subset \alpha \\ r /\!/ t \end{array}\right\} \Rightarrow r /\!/ \alpha$$

3.8) Prove que o plano construido no exercicio anterior é **único**.

Solução

Sejam **r** e **s** reversas. Admitamos que por **s** são possiveis dois planos α e β *distintos*, paralelos à reta **r**. Apliquemos o teorema T8 (do exercicio 3.4). Como a reta **r** é paralela aos dois planos secantes α e β, ela deve ser paralela à sua interseção. Mas $\alpha \cap \beta = s$, logo $r \parallel s$, o que é absurdo. Assim, deve-se ter $\alpha = \beta$.



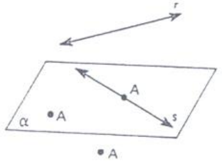
3.9) São dadas as retas reversas **r** e **s** e o ponto A. Construa por A um plano paralelo a ambas as retas.

Solução

A resposta desta questão depende da posição do ponto A em relação às duas retas reversas. Há três casos a considerar, ilustrados na figura abaixo.

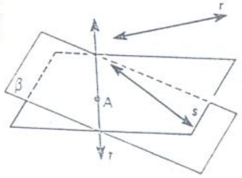
1.° caso: O ponto A pertence a uma das retas (à reta **s**, por exemplo).

Neste caso, como todo plano construido por A tem ao menos esse ponto em comum com a reta **s**, é *impossível* construir um plano que seja paralelo a ambas as retas dadas.



2.° caso: O ponto A não pertence a **s**, mas pertence ao plano α que contém **s** e é paralelo à reta **r** (isto é, o ponto A e uma das retas determinam um plano paralelo à outra reta).

Neste caso também é *impossível* construir por A um plano paralelo a **r** e a **s**. De fato, se existisse um plano β por A, tal que $r \parallel \beta$ e $s \parallel \beta$, sendo $t = \alpha \cap \beta$, deveriamos ter $r \parallel t$ e $s \parallel t$, o que é absurdo, pois **r** e **s** são reversas.



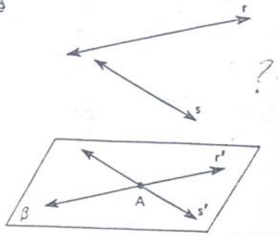
3.° caso: O ponto A está situado de tal modo que o plano pl (r, A) não é paralelo à reta **s** e também o plano pl (s, A) não é paralelo à reta **r** (isto é, o ponto A e qualquer das duas retas determinam um plano que não é paralelo à outra reta).

Neste caso, é *possível* construir por A um plano paralelo a **r** e a **s**.

Construção

Vamos conduzir por A as retas $r' \parallel r$ e $s' \parallel s$, as quais determinam o plano $\beta = pl\,(r', s')$.

O plano β é paralelo às retas **r** e **s**.



Prova

Em primeiro lugar notemos que β não contém **r**. De fato, se fosse $r \subset \beta$, teriamos $s \parallel \beta$ e sabemos que o ponto A está situado de tal modo que essa situação é impossível. Sendo assim, pelo teorema T6:

$$\left.\begin{array}{l} r \not\subset \beta \\ r \parallel r' \\ r' \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow r \parallel \beta$$

e com o mesmo raciocinio tiramos $s \parallel \beta$.

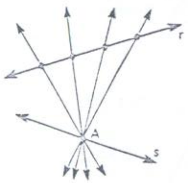
3.10) São dadas as retas reversas **r** e **s** e o ponto A. Construa por A uma reta concorrente com ambas as retas dadas.

Solução

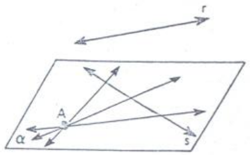
Como já ocorreu no exercicio anterior, a resposta desta questão depende da posição do ponto A em relação às duas retas reversas. Vamos considerar separadamente cada um dos três casos.

1.° caso: O ponto A pertence a uma das retas (à reta **s**, por exemplo).

Neste caso, tomando-se qualquer ponto em **r**, este ponto e A determinam uma reta concorrente com **r** e **s**. São possiveis *infinitas* retas nessas condições, todas elas contidas no plano pl (r, A).



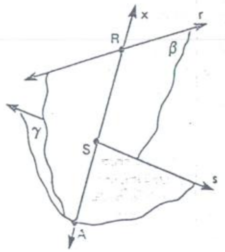
2.° caso: O ponto A e uma das retas determinam um plano paralelo à outra reta.



Suponhamos que o plano $\alpha = pl\,(s, A)$ é paralelo à reta **r**. Neste caso, é *impossível* construir uma reta por A, concorrente com **r** e com **s**, pois toda reta que passa por A e encontra a reta **s** está contida em α. Por isso ela não pode ser concorrente com **r**.

3.º caso: O ponto A e qualquer das duas retas determinam um plano que não é paralelo à outra reta.

Neste caso, é *possível* construir por A uma reta concorrente com **r** e **s**.



Construção

Os planos $\beta = pl(r, A)$ e $\gamma = pl(s, A)$ são distintos e têm em comum o ponto A. Assim a sua interseção $x = \beta \cap \gamma$ passa por A. A reta **x** é concorrente com **r** e **s**.

Prova

Como $s \not\subset \beta$ e s não é paralela a β, então s fura β no ponto S, o qual logicamente pertence à reta **x**.

Da mesma forma, como $r \not\subset \gamma$ e r não é paralela a γ, então r fura γ no ponto R, o qual logicamente pertence à reta **x**.

Sendo assim, a reta **x** é concorrente com **r** e com **s**.

3.3 — UM RESUMO

Fazemos a seguir um resumo das principais definições e propriedades vistas até aqui, continuando o resumo anterior (veja o item 2.6).

Definição

D8 — Uma reta **r** é paralela a um plano α (ou o plano α é paralelo à reta **r**) se $r \cap \alpha = \varnothing$.

Teoremas

T4 — **Teorema das três interseções** — Sejam α, β e γ três planos secantes dois a dois tais que $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \cap \gamma = b$ e $\beta \cap \gamma = c$. Se as retas **a**, **b** e **c** são *distintas*, então há somente duas possibilidades: ou as três concorrem em um mesmo ponto, ou elas são paralelas duas a duas.

T5 — Sejam **x**, **y** e **z** três retas distintas duas a duas. Se $x /\!/ y$ e $y /\!/ z$, então $x /\!/ z$.

T6 — Uma **condição necessária e suficiente** para que uma reta **r** seja paralela ao plano α é que **r** não esteja contida em α e seja paralela a uma reta de α.

T7 — Se as retas **r** e **s** são paralelas e pelo ponto $A \in s$ conduzimos um plano $\alpha /\!/ r$, então $s \subset \alpha$.

T8 — Se uma reta é paralela a dois planos secantes, ela é paralela à interseção desses dois planos.

Exercícios Propostos

3.11) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Uma reta que não é paralela a um plano está contida nesse plano.
b) Uma reta que não está contida em um plano é paralela a esse plano.
c) $(r /\!/ s \text{ e } s \subset \alpha) \Rightarrow r /\!/ \alpha$
d) $(r /\!/ s \text{ e } s \subset \alpha) \Rightarrow (r \subset \alpha \text{ ou } r /\!/ \alpha)$
e) Se α e β são planos secantes, existe reta de α que é paralela a β.
f) Uma reta que é paralela a um plano é paralela a todas as retas contidas nesse plano.
g) Se duas retas **r** e **s** são paralelas e o plano α contém **s**, então $r \subset \alpha$.
h) $(r = \alpha \cap \beta \text{ e } s \subset \alpha) \Rightarrow s /\!/ \beta$
i) $(r /\!/ s \text{ e } r /\!/ \alpha) \Rightarrow s /\!/ \alpha$
j) $(r /\!/ s \text{ e } r /\!/ \alpha) \Rightarrow s \subset \alpha$
k) $(r /\!/ s \text{ e } r /\!/ \alpha) \Rightarrow (s /\!/ \alpha \text{ ou } s \subset \alpha)$
l) Se uma reta é paralela a um plano, então ela é paralela a infinitas retas contidas nesse plano.
m) Por um ponto fora de uma reta passa um único plano paralelo a essa reta.
n) Por um ponto fora de um plano passa uma única reta paralela ao plano dado.
o) Duas retas distintas, paralelas a um mesmo plano, são paralelas entre si.

3.12) Se uma reta é paralela a uma reta de um plano, qual é a sua posição em relação ao plano?

3.13) Prove que se uma reta **r** é paralela a um plano α e a reta **s** está contida em α, então ou $r /\!/ s$ ou **r** e **s** são reversas.

3.14) Demonstre que se uma reta **r** é paralela à interseção de dois planos α e β e não está contida em nenhum deles, então ela é paralela a ambos.

3.15) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dadas duas retas **r** e **s** reversas, existe plano que contém **r** e é paralelo a **s**.
b) Por um ponto dado, é sempre possível conduzir uma reta que é concorrente com duas retas reversas dadas.
c) Se $r \subset \alpha$ e as retas **r** e **s** são reversas, então a reta **s** fura o plano α.
d) Se duas retas são reversas e um plano contém uma delas, ele necessariamente é paralelo à outra.

3.16) Sejam **r** e **s** retas reversas. Prove que as retas concorrentes com **s**, paralelas a **r**, são coplanares.

3.17) As retas **r**, **s** e **t** são reversas duas a duas. Construa a reta $x /\!/ t$, que seja concorrente com **r** e **s**.

3.18) As retas **r**, **s** e **t** são reversas duas a duas. Construa uma reta concorrente com as três.

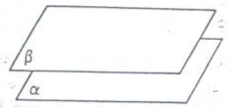
3.19) São dadas as retas reversas **r** e **s**. O ponto A está situado de tal modo que ele e qualquer das duas retas determinam um plano que não é paralelo à outra reta (veja o exercício 3.10, 3.º caso). É possível, assim, conduzir por A uma reta concorrente com **r** e **s**. Prove que essa reta é única.

3.4 — PLANOS PARALELOS ENTRE SI

Definição D9

Dois planos α e β são **paralelos** entre si se a sua interseção é vazia:

$$\alpha \cap \beta = \varnothing$$



Indicamos $\alpha /\!/ \beta$ (ou $\beta /\!/ \alpha$).
Em símbolos:

$$\alpha /\!/ \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$$

A **existência** de planos paralelos entre si é garantida pelo teorema que é demonstrado no exercício 3.20, a seguir.

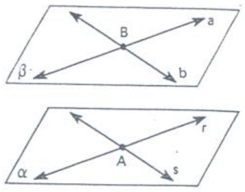
Exercícios Resolvidos

3.20) Demonstre que existem planos paralelos entre si.

Solução

Vamos considerar um plano α qualquer e **construir** um outro plano β tal que $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

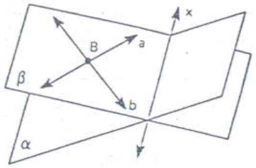
Construção



Dado o plano α, tomemos o ponto $A \in \alpha$ e o ponto $B \notin \alpha$. Vamos conduzir por A duas retas r e s, ambas contidas em α. Em seguida, construímos por B as retas $a /\!/ r$ e $b /\!/ s$ (a existência destas retas é garantida pelo postulado das paralelas, P7).

Seja então $\beta = \text{pl}(a, b)$. Para este plano, tem-se $\alpha \cap \beta = \varnothing$.

Prova



É claro que $a /\!/ \alpha$ e $b /\!/ \alpha$. Se α e β tivessem um ponto em comum, a sua interseção seria uma reta $x = \alpha \cap \beta$. Nesse caso, teríamos necessariamente $a /\!/ x$ e $b /\!/ x$ (veja o exercício 3.1), o que é absurdo, devido ao postulado das paralelas, P7. Assim, os planos α e β não podem ter ponto em comum, isto é, $\alpha /\!/ \beta$.

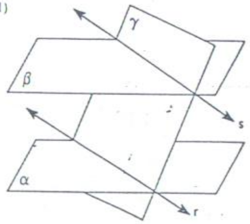
Nota: O teorema demonstrado acima pode ser também enunciado assim:

"Sendo dados dois planos, se um deles contém duas retas concorrentes, respectivamente paralelas a duas retas concorrentes do outro, então os dois planos são paralelos entre si."

ou ainda assim:

"Para que um plano β seja paralelo ao plano α, é **suficiente** que β contenha duas retas concorrentes, paralelas ao plano α."

3.21) Teorema T9 — Demonstre que se dois planos α e β são paralelos entre si e o plano γ intercepta α segundo a reta r e β segundo a reta s, então $r /\!/ s$.



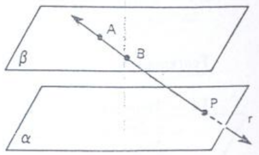
Solução

Não pode haver ponto comum a r e s, pois um tal ponto seria comum aos planos α e β que são paralelos entre si. Logo, $r \cap s = \varnothing$ e como estas duas retas são coplanares (contidas em γ), segue que $r /\!/ s$.

3.22) Prove que se os planos α e β são paralelos entre si, então toda reta de um deles é paralela ao outro.

Solução

Suponhamos que a reta $r \subset \beta$ tem o ponto P em comum com o plano α. Se isso acontecesse, esse ponto P pertenceria aos planos α e β, o que é absurdo, pois $\alpha /\!/ \beta$. Sendo assim, a reta r não pode ter ponto em comum com α, isto é, $r /\!/ \alpha$.



Nota: Decorre deste teorema que, sendo $\alpha /\!/ \beta$, se tomarmos sobre β duas retas concorrentes, ambas serão paralelas a α, o que nos autoriza a escrever:

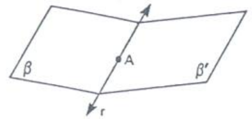
"Para que um plano β seja paralelo ao plano α, é **necessário** que β contenha duas retas concorrentes, paralelas ao plano α."

Unindo, então, este enunciado àquele do exercício 3.20, obtemos o **teorema T10**.

Teorema T10

Uma **condição necessária e suficiente** para que um plano β seja paralelo ao plano α é que β contenha duas retas concorrentes, paralelas ao plano α.

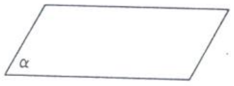
3.23) São dados o plano α e o ponto $A \in \alpha$. Prove que o plano $\beta /\!/ \alpha$ conduzido por A é único.

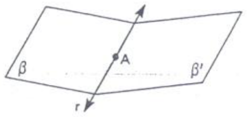


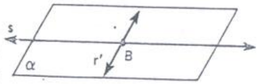
Solução

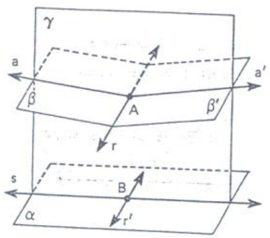
Vamos admitir que por A existam os planos distintos β e β', paralelos a α, e provemos que essa suposição conduz a um absurdo.

Então, supondo $\beta \neq \beta'$, seja $r = \beta \cap \beta'$. É claro que $r /\!/ \alpha$ (veja o exercício 3.22). Vamos construir uma reta s contida em α, **que não seja paralela a r**. Para isso, por um ponto $B \in \alpha$ tomamos $r' /\!/ r$. Qualquer outra reta de α concorrente com r' não será paralela à reta r. Obtemos assim a reta s.









Nestas condições, o plano $\gamma = \text{pl}(s, A)$ **não contém a reta r**. De fato, se fosse $r \subset \gamma$, teríamos $\gamma = \text{pl}(r, B)$ e nesse caso $r' \subset \gamma$, o que só seria verdade se fosse $\gamma = \alpha$.

Ora, o plano γ intercepta β segundo a reta **a** e β' segundo a reta **a'**. Estas duas retas são concorrentes em A **e distintas de r** (pois $r \not\subset \gamma$). Isto significa que $\beta = \text{pl}(a, r)$ e $\beta' = \text{pl}(a', r)$.

Mas pelo teorema T9 (do exercício 3.21), temos $a /\!/ s$ e $a' /\!/ s$, donde $a = a'$ (pelo postulado das paralelas, P7). Portanto,

$$\beta = \text{pl}(a, r) = \text{pl}(a', r) = \beta'$$

e resulta a unicidade.

Nota: Unindo-se os enunciados dos teoremas dos exercícios 3.20 e 3.23, obtemos o **teorema T11**:

Teorema T11

Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

3.5 — POSIÇÕES RELATIVAS DE DOIS PLANOS

Vamos agora resumir as diversas **posições relativas** de dois planos α e β.

1.ª) **Planos coincidentes**

Neste caso, α e β são o mesmo plano.

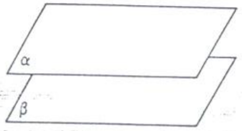
2.ª) **Planos distintos** ($\alpha \neq \beta$):

a) **paralelos**

$\alpha /\!/ \beta$

Neste caso,

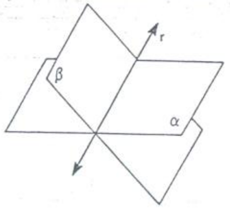
$\alpha \cap \beta = \varnothing$



b) **secantes**

Neste caso,

$\alpha \cap \beta = r$



Exercícios Resolvidos

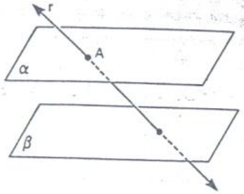
3.24) Teorema T12 – Sejam α, β e γ três planos distintos. Prove que se $\alpha /\!/ \beta$ e $\beta /\!/ \gamma$ então $\alpha /\!/ \gamma$.

Solução

A demonstração é uma aplicação imediata do teorema T11. Se existisse um ponto A comum a α e a γ, por esse ponto estariam passando dois planos distintos, paralelos ao plano β, o que é absurdo. Sendo assim, tem-se $\alpha \cap \gamma = \varnothing$, isto é, $\alpha /\!/ \gamma$.

3.25) São dados dois planos, α e β, paralelos entre si, e uma reta **r** que fura α no ponto A. Prove que **r** também fura o plano β.

Solução



Mostremos que a reta **r** *não pode estar contida* em β e também *não pode ser paralela* a β. Sendo assim, por exclusão, teremos que **r** fura β.

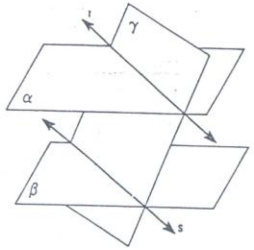
a) **r** não pode estar contida em β, pois, se assim fosse, o ponto A seria comum a α e a β, que são paralelos entre si.

b) **r** não pode ser paralela a β. De fato, se fosse $r /\!/ \beta$, existiria em β uma reta $r' /\!/ r$, a qual seria por sua vez paralela ao plano α. Poderíamos, então, aplicar o teorema T7:

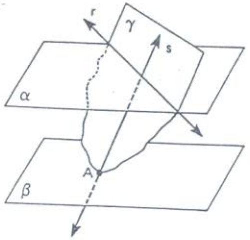
$$\left.\begin{array}{l} r' /\!/ r \\ r' /\!/ \alpha \\ A \in \alpha \\ A \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha$$

o que é absurdo, pois **r** fura α.

3.26) São dados dois planos, α e β, paralelos entre si e um terceiro plano γ que corta α segundo a reta $r = \alpha \cap \gamma$. Prove que γ corta β segundo uma reta $s = \beta \cap \gamma$.



Solução



Se devemos provar que β e γ são secantes, basta provar que esses dois planos *são distintos* e *têm um ponto em comum.*

a) $\beta \neq \gamma$ – De fato, se fosse $\beta = \gamma$, o plano γ deveria ser paralelo a α, o que não é verdade.

b) β e γ *têm um ponto em comum.* Para prová-lo, vamos construir tal ponto.

Tomemos em γ a reta **s**, concorrente com **r**. Então, **s** é também concorrente com o plano α, pois se ela estivesse *contida* em α, teríamos $\alpha = \gamma$. Aplicando, então, o teorema do exercício 3.25, concluímos que **s** fura β em um ponto A. O ponto A é, portanto, comum a β e γ.

Outro modo

Para provar que β e γ são secantes, podemos provar que são *distintos* e que *não são paralelos.* Como no item *a* já provamos que $\beta \neq \gamma$, resta provar que:

c) β e γ *não são paralelos.* De fato, se $\beta /\!/ \gamma$, teríamos dois planos α e γ passando por um mesmo ponto (qualquer ponto da reta r) e paralelos a um mesmo plano β. Isto contraria o teorema T11.

3.6 — NOVO RESUMO

Continuemos o resumo anterior, com as principais definições e propriedades vistas até agora.

Definição

D9 – Dois planos são **paralelos** entre si se a sua interseção é vazia.

Teoremas

T9 – Se dois planos α e β são paralelos entre si e o plano γ intercepta α segundo a reta **r** e β segundo a reta **s**, então $r /\!/ s$.

T10 – Uma condição necessária e suficiente para que um plano β seja paralelo ao plano α é que β contenha duas retas concorrentes, paralelas ao plano α.

T11 – Por um ponto fora de um plano passa um único plano paralelo ao plano dado.

T12 – Sejam α, β e γ três planos distintos. Se $\alpha /\!/ \beta$ e $\beta /\!/ \gamma$, então $\alpha /\!/ \gamma$.

Exercícios Propostos

3.27) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Se dois planos são paralelos, então um deles contém uma reta paralela ao outro.
b) Se um plano contém uma reta paralela a outro, os dois planos são paralelos entre si.
c) Se dois planos são paralelos entre si, uma reta de um deles é paralela a qualquer reta do outro.
d) Num plano toma-se uma reta e em outro plano, paralelo ao primeiro, toma-se uma segunda reta. Essas duas retas são reversas ou paralelas.
e) Duas retas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.
f) Dois planos paralelos a uma mesma reta são paralelos entre si.
g) Um plano que contém duas retas distintas, paralelas a outro plano, é paralelo a este.
h) Duas retas concorrentes, paralelas a um plano α, determinam um plano β paralelo a α.
i) Se dois planos são paralelos, então toda reta que é paralela a um é paralela ou está contida no outro.

j) Se dois planos são paralelos, toda reta que tem um ponto em comum com um deles fura o outro.

k) Se dois planos são paralelos, toda reta que fura um deles fura também o outro.

l) Se dois planos, α e β, são paralelos e um terceiro plano γ intercepta α segundo a reta r e β segundo a reta s, então $r \parallel s$.

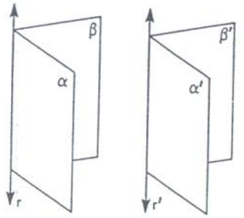
m) Se $\alpha \parallel \beta$ e $\beta \parallel \gamma$, então, $\alpha = \gamma$ ou $\alpha \parallel \gamma$.

n) Se dois planos são secantes, toda reta de um deles, que é paralela ao outro, é paralela à interseção dos dois planos.

o) Se dois planos distintos são paralelos a uma mesma reta r, eles são paralelos entre si ou sua interseção é uma reta paralela a r.

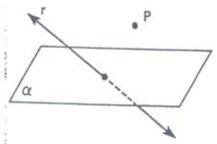
3.28) Demonstre que se $\alpha \parallel \beta$ e $r \parallel \alpha$, então $r \subset \beta$ ou $r \parallel \beta$.

3.29) Sejam $r = \alpha \cap \beta$ e $r' = \alpha' \cap \beta'$. Se $\alpha \parallel \alpha'$ e $\beta \parallel \beta'$, prove que $r \parallel r'$.

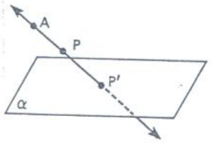


3.30) São dadas duas retas reversas. Prove que existem dois planos, e somente dois, contendo cada uma das duas retas e sendo paralelos entre si.

3.31) A reta r fura o plano α. Sendo dado o ponto P fora de α e de r, construa por P uma reta paralela a α e concorrente com r.



3.32) Dados um plano α, um ponto $A \notin \alpha$ e um ponto P qualquer, chama-se **perspectiva** de P sobre α a interseção P' da reta $\overleftrightarrow{AP}$ com o plano α: $\overleftrightarrow{AP} \cap \alpha = \{P'\}$.
Onde se situam os pontos que *não possuem* perspectiva?



3.33) São dados dois pontos A e B e duas retas reversas a e b que não passam pelos pontos dados. Construa duas retas paralelas entre si, uma por A, concorrente com a e a outra por B, concorrente com b.

Exercícios Suplementares

I.1) Prove que uma reta que é concorrente com duas retas paralelas está contida no plano destas duas.

I.2) Duas retas (r e s) distintas se interceptam no ponto P. Prove que toda reta que é concorrente com ambas, e não passa por P, está contida no plano pl (r, s).

I.3) Determine quantos planos podem ser tomados por:

a) um ponto;
b) dois pontos;
c) três pontos não alinhados;
d) quatro pontos, dos quais três quaisquer não estão alinhados.

I.4) Quatro retas são conduzidas por um ponto do espaço. Quantos planos ficam determinados por essas retas? (Considere os casos possíveis.)

I.5) São dados dois planos secantes, α e β, que se interceptam segundo a reta r. Sobre α tomam-se os pontos A e B e sobre β toma-se o ponto C, todos fora da reta r. Construa a interseção de β com o pl (A, B, C).

I.6) Dados um plano α e uma reta r não contida nele, construa a interseção de r com α.

I.7) Dados um plano α e três pontos (A, B e C) não alinhados, fora de α, construa a interseção de α com o pl (A, B, C).

I.8) Dados, em um plano α, os pontos A e B e, fora de α, o ponto C, considere os pontos $D \in \overleftrightarrow{AC}$ e $E \in \overleftrightarrow{BC}$, distintos de A, B e C. Construa a interseção de $\overleftrightarrow{DE}$ com o plano α.

I.9) As retas r e s são paralelas entre si e furam o plano α nos pontos A e B, respectivamente. Determine $\alpha \cap$ pl (r, s).

I.10) Sejam um plano α e uma reta r que fura α. Construa uma reta contida em α e concorrente com r.

I.11) Sobre um plano α, sejam três pontos (A, B e C) não alinhados e, fora de α, seja o ponto D. Considere os pontos $E \in \overleftrightarrow{AD}$ e $F \in$ pl (B, C, D), distintos de A, B, C e D. Construa a interseção da reta $\overleftrightarrow{EF}$ com o plano α.

I.12) Duas retas, r e s, distintas são interceptadas por uma terceira, t. Quantos planos ficam determinados por essas retas?

I.13) Dadas duas retas, r e s, concorrentes, que posição pode ter a reta r com relação a uma reta t paralela a s?

I.14) Dadas duas retas, r e s, concorrentes, que posição pode ter a reta r com relação a uma reta t concorrente com s?

I.15) Dadas duas retas concorrentes, r e s, que posição pode ter a reta r com relação a uma reta t reversa à reta s?

I.16) Dadas duas retas r e s paralelas, que posição pode ter a reta r com relação a uma reta t paralela a s?

I.17) Dadas duas retas **r** e **s** paralelas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** concorrente com **s**?

I.18) Dadas duas retas **r** e **s** paralelas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** reversa à reta **s**?

I.19) Dadas duas retas **r** e **s** reversas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** paralela a **s**?

I.20) Dadas duas retas **r** e **s** reversas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** concorrente com **s**?

I.21) Dadas duas retas **r** e **s** reversas, que posição pode ter a reta **r** com relação a uma reta **t** reversa à reta **s**?

I.22) Dadas dez retas, duas a duas concorrentes, demonstre que todas passam por um mesmo ponto ou são todas coplanares.

I.23) Mostre que se uma figura é tal que qualquer conjunto de quatro pontos é coplanar, então essa figura é plana.

I.24) Mostre que todas as retas que passam por um mesmo ponto e são paralelas a um mesmo plano estão contidas em um plano.

I.25) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição da reta **r** com relação a uma reta contida em α?

I.26) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição da reta **r** com relação a uma reta que fura α?

I.27) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição da reta **r** com relação a uma reta paralela a α?

I.28) Uma reta **r** fura um plano α. Qual é a posição da reta **r** com relação a uma reta contida em α?

I.29) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição do plano α com relação a uma reta concorrente com **r**?

I.30) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição do plano α com relação a uma reta reversa à reta **r**?

I.31) Uma reta **r** e um plano α são paralelos. Qual é a posição do plano α com relação a uma reta paralela a **r**?

I.32) Sejam α e β planos secantes. Prove que, se $r \subset \alpha$, $s \subset \beta$ e $r \parallel s$, então uma das duas retas é paralela à interseção de α e β.

I.33) Dados o ponto A no plano α e o ponto B no plano β, sendo α e β secantes, construa por esses pontos retas contidas em um plano dado e paralelo ao outro.

I.34) Dados um plano α e uma reta **r** paralelos, construa por $A \in \alpha$ uma reta paralela a **r**.

I.35) Uma reta **r** fura um plano α. Construa, por um ponto A fora de α, uma reta paralela a α e concorrente com **r**.

PARTE II

Capítulo 4 — **Postulados da separação. Segmento, ângulo e triângulo**

Capítulo 5 — **Congruência e medida de segmentos e ângulos**

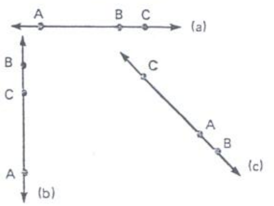
Capítulo 6 — **Congruência de triângulos. Polígonos convexos**

Capítulo

4

Postulados da separação. Segmento, ângulo e triângulo

4.1 — O CONCEITO PRIMITIVO DE "ESTAR ENTRE"



Na figura (a) temos uma situação na qual o ponto B *está entre* A e C. No caso (b), C *está entre* A e B, e, no caso (c), A *está entre* B e C.

Quando dizemos que um dado ponto *está entre* dois outros, esperamos que as pessoas entendam que falamos de uma situação parecida com essas representadas acima. Em outras palavras, quando dizemos que o ponto C *está entre* A e B, deixamos subentendido que A, B e C são três pontos **distintos**, todos situados **sobre uma mesma reta** e ainda que eles se sucedem numa "ordem" tal que o ponto C é mencionado "depois de A" e "antes de B" (ou, também, "depois de B" e "antes de A").

> **Estar entre** é um conceito primitivo.

4.2 — SEGMENTO

Definição D10

> Dados dois pontos A e B, chama-se **segmento** a figura constituída pelos pontos A e B e também por todos os pontos que **estão entre** A e B.
> Os pontos A e B são chamados **extremidades** do segmento.

Indicamos o segmento pela notação $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$).

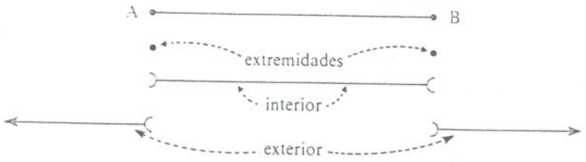
A definição de segmento $\overline{AB}$, em símbolos, fica assim:

Representação gráfica do segmento $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{P \mid P \text{ está entre A e B}\}$$

É claro que o segmento $\overline{AB}$ é um subconjunto da reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, $\overline{AB} \subset \overleftrightarrow{AB}$. Excluídas as extremidades, os demais pontos do segmento formam o seu interior. Os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que não pertencem ao segmento formam o seu exterior (em relação à reta).

segmento $\overline{AB}$



Relação de paralelismo

Se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a alguma outra figura (uma reta, um plano), podemos estender esta relação ao segmento $\overline{AB}$. Temos então as noções de *segmento paralelo a uma reta*, *segmento paralelo a um plano* e mesmo *segmentos paralelos entre si*. Nessas situações estaremos sempre pensando nas retas que contêm cada segmento.

Segmento nulo

Note que a definição D10 não exige que os pontos A e B sejam *distintos*. No caso em que A = B, é claro que não existe ponto algum *entre A e B*, isto é,

$$\{P \mid P \text{ está entre A e B}\} = \varnothing$$

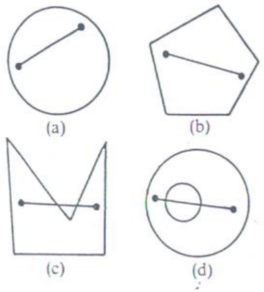
e, assim,

$$\overline{AB} = \{A, B\} \cup \varnothing = \{A, B\} = \{A\}$$

Em outras palavras, a figura constituída por um único ponto A é considerada também como um segmento, de extremidades coincidentes: $\overline{AA}$. Um segmento assim é chamado segmento nulo.

4.3 – CONJUNTOS CONVEXOS

Em linguagem comum, um objeto é considerado "convexo" se a sua superfície ou contorno não tem qualquer parte "afundada para dentro" e também se ele não é "oco". As figuras (a) e (b) são convexas. Note que é indicado um segmento contido em cada figura. A característica da figura convexa é que todo segmento cujas extremidades pertençam à figura **está contido nela**. As figuras (c) e (d) não são convexas. Note que em cada uma delas é possível encontrar um segmento cujas extremidades pertencem à figura, mas sem que ele esteja inteiramente contido nela.



Definição D11

Uma figura $\mathbb{F}$ qualquer é um **conjunto convexo** se todo segmento $\overline{AB}$ cujas extremidades A e B pertencem a $\mathbb{F}$ está contido em $\mathbb{F}$.

Em símbolos, $\mathbb{F}$ é um conjunto convexo se

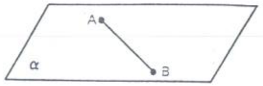
$$A \in \mathbb{F} \text{ e } B \in \mathbb{F} \Rightarrow \overline{AB} \subset \mathbb{F}$$

Nota: Por convenção, dizemos também que o *conjunto vazio* é convexo.

Exemplos

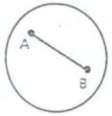
1.º) Toda **reta r** é um conjunto convexo.

2.º) Todo **plano** α é um conjunto convexo.

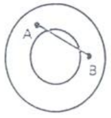


3.º) Todo **segmento** $\overline{PQ}$ é um conjunto convexo.

4.º) Um **círculo** é um conjunto convexo.



5.º) Uma **coroa circular** *não é* um conjunto convexo.



6.º) A figura constituída por um único ponto é um conjunto convexo. Neste caso, as extremidades do segmento $\overline{AB}$ coincidem com o único ponto da figura. Trata-se de um *segmento nulo*.

A = B

7.º) O **espaço** é um conjunto convexo.

4.4 — POSTULADOS DA SEPARAÇÃO

Veremos agora três novos postulados, que estabelecem a forma pela qual uma reta pode ser separada em *semi-retas*, o plano em *semiplanos* e o espaço em *semi-espaços*.

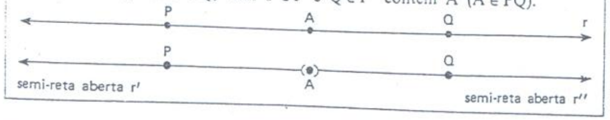
Postulado P9

Se $A \in r$, então o ponto A separa essa reta **r** em três subconjuntos, um dos quais é $\{A\}$; os outros dois, **r'** e **r''**, são chamados **semi-retas abertas** e apresentam as seguintes características:

1.ª) $A \notin r'$, $A \notin r''$ e $r' \cap r'' = \varnothing$

2.ª) r' e r'' são conjuntos convexos.

3.ª) Todo segmento $\overline{PQ}$, com $P \in r'$ e $Q \in r''$ contém A ($A \in \overline{PQ}$).



O ponto A chama-se **origem** de cada uma das duas semi-retas abertas (e não pertence a elas).

A **semi-reta aberta de origem A**, que contém P, pode ser indicada por $\overrightarrow{AP}$ e aquela que contém Q, por $\overrightarrow{AQ}$. As semi-retas $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AQ}$ são chamadas opostas

representação gráfica de uma semi-reta aberta

Se o ponto A (origem) for acrescentado a cada uma das semi-retas abertas, obteremos duas semi-retas fechadas. Fica convencionado que se dissermos simplesmente **semi-reta**, ela é **aberta**.

Assim, é fácil entender que

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AP} \cup \{X \mid P \text{ está entre A e X}\}$$

e

$$\text{semi-reta } \overrightarrow{AP} = \text{semi-reta fechada } \overrightarrow{AP} - \{A\}$$

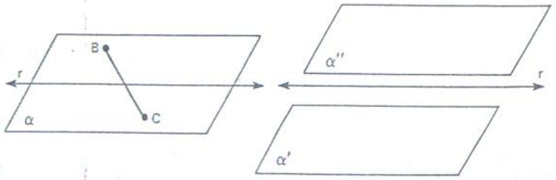
Postulado P12 P10

Se $r \subset \alpha$, então a reta **r** separa o plano α em três subconjuntos, um dos quais é a própria reta **r**; os outros, α' e α'', são chamados **semiplanos abertos** e apresentam as seguintes características:

1.ª) $r \cap \alpha' = r \cap \alpha'' = \alpha' \cap \alpha'' = \varnothing$

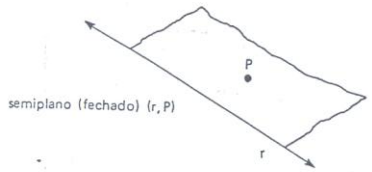
2.ª) α' e α'' são conjuntos convexos.

3.ª) Todo segmento $\overline{BC}$ com $B \in \alpha'$ e $C \in \alpha''$ corta **r**, isto é, tem um único ponto em comum com **r**.



A reta **r** chama-se origem de cada um dos dois semiplanos abertos (e não está contida neles).

Se a reta **r** (origem) for unida a cada um dos semiplanos abertos, obteremos dois semiplanos fechados. Chamaremos simplesmente de **semiplanos** aqueles que são abertos.



O semiplano de origem **r**, que contém B, pode ser indicado por **semipl (r, B)** e aquele que contém C, por **semipl (r, C)**. Os semiplanos (r, B) e (r, C) são **opostos**.

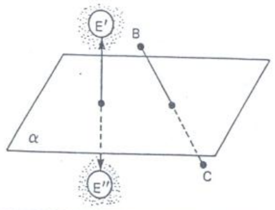
Postulado P13

Um plano α determina no espaço dois subconjuntos E′ e E″, chamados **semi-espaços abertos**, com as seguintes características:

1.ª) $\alpha \cap E' = \alpha \cap E'' = E' \cap E'' = \varnothing$

2.ª) E′ e E″ são conjuntos convexos.

3.ª) Todo segmento $\overline{BC}$, com $B \in E'$ e $C \in E''$, fura α, isto é, tem um único ponto em comum com α.



O plano α chama-se origem de cada um dos dois semi-espaços abertos (e não está contido neles).

O semi-espaço aberto de origem α, que contém B, pode ser indicado por **semi-espaço aberto (α, B)** e aquele que contém C, por **semi-espaço aberto (α, C)**. Os semi-espaços (α, B) e (α, C) são **opostos**.

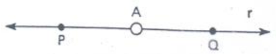
Se o plano α (origem) for unido a cada um dos semi-espaços abertos, obteremos dois semi-espaços fechados. Chamaremos simplesmente de **semi-espaços** aqueles que são abertos.

Exercícios Resolvidos

4.1) Mostre que a união de duas semi-retas abertas opostas *não é* um conjunto convexo.

Solução

Sejam $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AQ}$ duas semi-retas abertas de origem A, ambas contidas na mesma reta **r**



e **opostas** uma da outra. A figura F, formada pela *união* dessas duas semi-retas abertas, não é um conjunto convexo. Basta notar que o segmento $\overline{PQ}$, cujas extremidades pertencem a F, não está contido em F, pois o ponto A não pertence a qualquer das duas semi-retas abertas.

Nota: O exercício 4.1 mostrou que nem sempre a *união* de conjuntos convexos é convexa.

4.2) Mostre que a interseção de dois conjuntos convexos é também um conjunto convexo.

Solução

Sejam F_1 e F_2 conjuntos convexos e $F = F_1 \cap F_2$.
Se $F = \varnothing$, então F é um conjunto convexo, por convenção.
Se $F \neq \varnothing$, tomemos $A \in F$ e $B \in F$ e provemos que $\overline{AB} \subset F$. Temos

$$A \in F \Rightarrow A \in F_1 \text{ e } A \in F_2 \qquad \text{e} \qquad B \in F \Rightarrow B \in F_1 \text{ e } B \in F_2$$

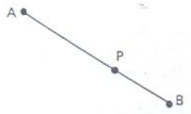
Mas, sendo F_1 e F_2 conjuntos convexos, tem-se $\overline{AB} \subset F_1$ e $\overline{AB} \subset F_2$, logo

$$\overline{AB} \subset F = F_1 \cap F_2$$

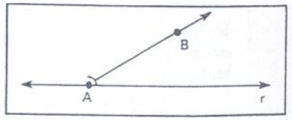
4.3) Mostre que a figura formada por dois pontos distintos não é um conjunto convexo.

Solução

Sejam $A \neq B$ e $F = \{A, B\}$. Tomando-se o ponto P no **interior** do segmento $\overline{AB}$, tem-se que $P \neq A$ e $P \neq B$, logo $P \notin F$. Assim, $\overline{AB} \not\subset F$.



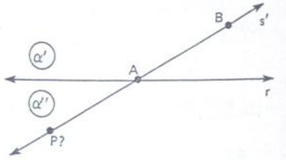
4.4) Se $A \in r$ e $B \notin r$, prove que a semi-reta aberta $\overrightarrow{AB}$ está contida no semiplano aberto (r, B).



Solução

Tomemos um ponto P pertencente à semi-reta aberta $\overrightarrow{AB}$ e provemos que esse ponto pertence ao semiplano aberto (r, B). Para isto, devemos provar que $P \notin r$ e que P também não pertence ao semiplano aberto oposto a (r, B).

Para facilitar, indiquemos por s′ a semi-reta aberta $\overrightarrow{AB}$, por α' o semiplano aberto (r, B) e por α'' o semiplano aberto oposto a (r, B).

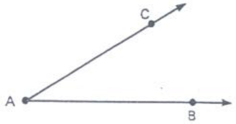


Note que as retas r e $\overleftrightarrow{AB}$ estão contidas no pl (r, B) e são concorrentes em A. É claro que $P \in \overleftrightarrow{AB}$ e $P \neq A$. Logo, $P \notin r$.

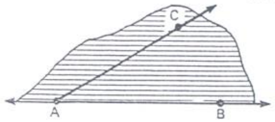
Só resta provar que $P \notin \alpha''$. Note que, sendo s' um conjunto convexo, tem-se $\overline{PB} \subset s'$. Se pertencesse a α'', então $\overline{PB}$ cortaria r em A: $A \in \overline{PB}$. Mas isto acarretaria que $A \in s'$, o que é absurdo.

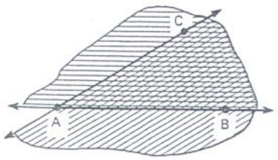
Portanto, $P \in \alpha'$, isto é, $s' \subset \alpha'$.

4.5 — ÂNGULO



Consideremos a figura formada pela união de duas semi-retas fechadas distintas e de mesma origem: as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Tal figura separa o plano que a contém em três subconjuntos, um dos quais é a própria união das duas semi-retas; dos outros dois, um é um conjunto convexo e o outro não é convexo. A partir desta situação nasce a idéia de *ângulo*, que passaremos a definir com alguma precisão.





Com relação às semiretas dadas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, vamos indicar por $(\overleftrightarrow{AB}, C)$ o semiplano **fechado** que contém C e tem origem na reta $\overleftrightarrow{AB}$. Da mesma forma, indicaremos por $(\overleftrightarrow{AC}, B)$ o semiplano **fechado** que contém B e tem origem na reta $\overleftrightarrow{AC}$.

A interseção desses dois semiplanos fechados recebe o nome de *ângulo*. Indicamos o ângulo pela notação $B\hat{A}C$ (ou $C\hat{A}B$, indiferentemente). Podemos também indicá-lo simplesmente por $\hat{A}$, sempre que não houver dúvida sobre quais sejam as semi-retas consideradas. Podemos escrever

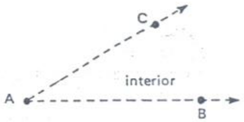
$$B\hat{A}C = (\overleftrightarrow{AB}, C) \cap (\overleftrightarrow{AC}, B)$$

(semiplanos fechados)

É claro que **todo ângulo é uma figura plana**. O ponto A chama-se *vértice* e as semiretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são os *lados* do ângulo.

Interior do ângulo. Exterior do ângulo

Se do ângulo $B\hat{A}C$ forem excluídos os pontos pertencentes às semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, o conjunto obtido recebe o nome de interior do ângulo $B\hat{A}C$. É fácil ver que o interior do ângulo $B\hat{A}C$ é a interseção dos semiplanos **abertos** $(\overleftrightarrow{AB}, C)$ e $(\overleftrightarrow{AC}, B)$.



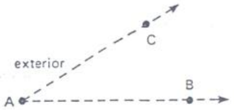
Interior do ângulo $B\hat{A}C$ $= (\overleftrightarrow{AB}, C) \cap (\overleftrightarrow{AC}, B)$

(semiplanos abertos)

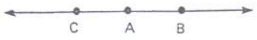
Podemos ainda definir:

Exterior do ângulo $B\hat{A}C$

(em relação ao plano do ângulo) é o conjunto de todos os pontos desse plano, que não pertencem ao ângulo.

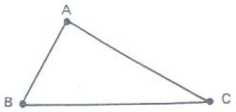


Caso do ângulo raso



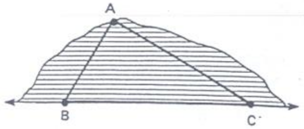
Se as semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são **opostas**, então o ângulo $B\hat{A}C$ é definido como sendo um dos semiplanos (fechados) determinados pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ no plano considerado. É claro que a notação $B\hat{A}C$ é insuficiente, neste caso, para especificar qual dos dois semiplanos está sendo mencionado. Na prática é sempre necessário dar um elemento qualquer que identifique o semiplano a que desejamos nos referir.

4.6 — TRIÂNGULO



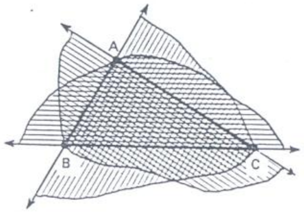
Consideremos a figura formada pela união de três segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, cujas extremidades A, B e C sejam pontos não colineares.

Esta figura, que pode ser chamada de **poligonal triangular**, separa o plano que a contém em três subconjuntos, um dos quais é a própria poligonal; dos outros dois, um é um conjunto convexo, e o outro não é convexo. A partir desta situação surge a idéia de triângulo, que passaremos a definir.



Vamos indicar por ($\overleftrightarrow{BC}$, A) o semiplano **fechado** que contém A e tem origem na reta $\overleftrightarrow{BC}$. Da mesma forma, podemos considerar os semiplanos fechados ($\overleftrightarrow{AC}$, B) e ($\overleftrightarrow{AB}$, C).

A interseção desses três semiplanos fechados recebe o nome de triângulo. Indicamos o triângulo pela notação $\triangle ABC$ (ou $\triangle BAC$, ou $\triangle CAB$, etc., indiferentemente). Assim, para A, B e C não colineares, tem-se

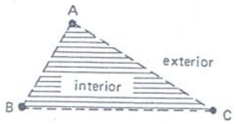


$$\triangle ABC = (\overleftrightarrow{BC}, A) \cap (\overleftrightarrow{AC}, B) \cap (\overleftrightarrow{AB}, C)$$
(semiplanos fechados)

É claro que **todo triângulo é uma figura plana**. Os pontos A, B e C são os vértices e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são os lados do $\triangle ABC$.

Interior e exterior do triângulo

Se do triângulo forem excluídos os pontos pertencentes aos lados, o conjunto obtido recebe o nome de interior do triângulo. É fácil ver que o interior do triângulo $\triangle ABC$ é a interseção dos semiplanos *abertos* ($\overleftrightarrow{BC}$, A), ($\overleftrightarrow{AC}$, B) e ($\overleftrightarrow{AB}$, C).

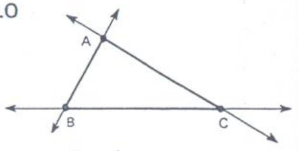


Interior do $\triangle ABC$ = $(\overleftrightarrow{BC}, A) \cap (\overleftrightarrow{AC}, B) \cap (\overleftrightarrow{AB}, C)$
(semiplanos abertos)

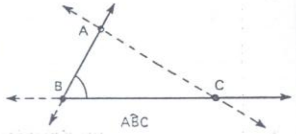
Definimos também:

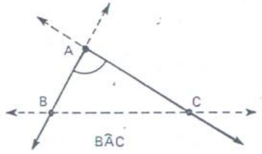
Exterior do triângulo $\triangle$ ABC (em relação ao plano do triângulo) é o conjunto de todos os pontos desse plano, que não pertencem ao triângulo.

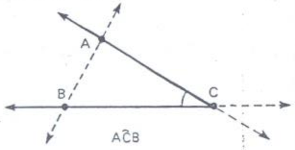
4.7 — ÂNGULOS DO TRIÂNGULO



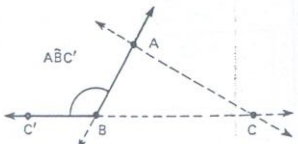
Dado o $\triangle$ ABC, ficam determinados vários ângulos, através de seus vértices e das retas suportes de seus lados. Com as semi-retas $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, por exemplo, obtemos o ângulo $A\hat{B}C$, que é chamado ângulo interno relativo ao vértice B. Do mesmo modo, obtemos os ângulos $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, que são os ângulos internos relativos aos vértices A e C.





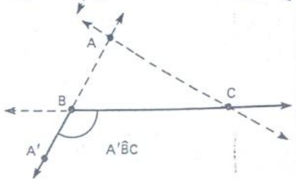


Se considerarmos na reta $\overleftrightarrow{BC}$ a semi-reta oposta a $\overrightarrow{BC}$, juntamente com a semi-reta $\overrightarrow{BA}$, obteremos também um ângulo $A\hat{B}C'$, que é um ângulo externo relativo ao vértice B.



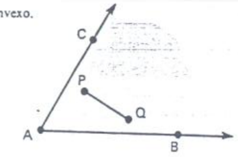
Há outro ângulo externo relativo a esse mesmo vértice: aquele formado com a semi-reta oposta a $\overrightarrow{BA}$, juntamente com a semi-reta $\overrightarrow{BC}$. É o ângulo $A'\hat{B}C$.

Do mesmo modo, obtemos dois ângulos externos relativos ao vértice A e outros dois relativos ao vértice C.



Exercícios Resolvidos

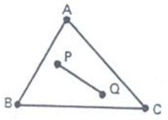
4.5) Demonstre que um ângulo é um conjunto convexo.



Solução

O ângulo $B\hat{A}C$ é a interseção dos semiplanos ($\overleftrightarrow{AB}$, C) e ($\overleftrightarrow{AC}$, B). Cada semiplano é um conjunto convexo. Por outro lado, sabemos que a interseção de conjuntos convexos é um conjunto convexo. Sendo assim, o ângulo também é um conjunto convexo.

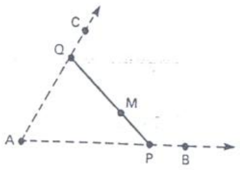
4.6) Demonstre que um triângulo é um conjunto convexo.



Solução

Mesmo argumento do exercício anterior: o triângulo ABC é a interseção de três semiplanos, os quais são conjuntos convexos.

4.7) Dado o ângulo (não raso) $B\hat{A}C$, sejam P um ponto da semi-reta aberta $\overrightarrow{AB}$ e Q um ponto da semi-reta aberta $\overrightarrow{AC}$. Demonstre que o interior do segmento $\overline{PQ}$ está contido no interior do ângulo $B\hat{A}C$.



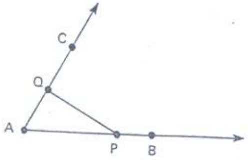
Solução

Sabemos que $\overline{PQ}$ está contido no ângulo $B\hat{A}C$. Se M é um ponto do *interior* de $\overline{PQ}$, devemos provar que M não pertence às semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. De fato, se M ∈ semi-reta $\overrightarrow{AB}$, tem-se A, M, P alinhados, o que é absurdo, pois Q deveria pertencer também à semi-reta $\overrightarrow{AB}$. Do mesmo modo, M não pode pertencer à semi-reta $\overrightarrow{AC}$. Assim, M pertence ao interior do ângulo $B\hat{A}C$.

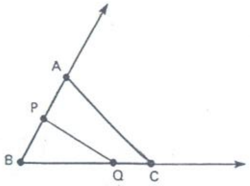
4.8) Demonstre que a união dos dois lados de um ângulo (não raso) não é um conjunto convexo.

Solução

No ângulo $B\hat{A}C$, tomemos o ponto P na semi-reta aberta $\overrightarrow{AB}$ e Q na semi-reta aberta $\overrightarrow{AC}$. Como o exercício anterior mostra, o interior de $\overline{PQ}$ está contido no interior do ângulo $B\hat{A}C$, logo o segmento $\overline{PQ}$ tem pontos que não pertencem às semi-retas $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$, isto é, $\overline{PQ}$ não está contido na união dos lados de $B\hat{A}C$.



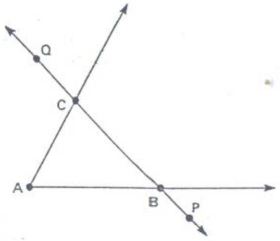
4.9) Prove que a poligonal triangular não é um conjunto convexo.



Solução

Basta tomar sobre o lado $\overline{AB}$ o ponto P distinto de A e de B e, sobre o lado $\overline{BC}$, o ponto Q distinto de B e de C. Como mostrou o exercício anterior, o segmento $\overline{PQ}$ tem pontos que não pertencem a $\overline{AB}$ nem a $\overline{BC}$ (e também não pertencem a $\overline{AC}$, pois P ≠ A e Q ≠ C). Assim, $\overline{PQ}$ não está contido na poligonal.

4.10) Demonstre que o exterior de um ângulo não é um conjunto convexo.



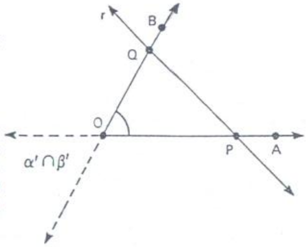
Solução

Dado o ângulo $B\hat{A}C$, se tomarmos P e Q de tal modo que B esteja entre C e P, e C esteja entre B e Q, então o segmento $\overline{PQ}$, cujas extremidades pertencem ao exterior do ângulo $B\hat{A}C$, não está contido nesse exterior, pois $\overline{BC}$ tem pontos que pertencem aos lados e também pontos que pertencem ao interior do ângulo.

4.11) Seja $A\hat{O}B$ um ângulo (não raso). Indiquemos por:

$$\alpha = \text{semipl}\,(\overleftrightarrow{OA}, B)$$
$$\beta = \text{semipl}\,(\overleftrightarrow{OB}, A)$$

e por α' e β' os semiplanos opostos a α e a β. A interseção $\alpha' \cap \beta'$ corresponde à figura assinalada na ilustração ao lado. Seja r uma reta que encontra $\overrightarrow{OA}$ em P e $\overrightarrow{OB}$ em Q. Mostre que essa reta não tem ponto em comum com $\alpha' \cap \beta'$, isto é, $r \cap (\alpha' \cap \beta') = \varnothing$.



Solução

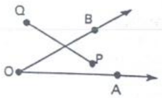
Se existisse um ponto $M \in r \cap (\alpha' \cap \beta')$, as duas coisas abaixo ocorreriam simultaneamente:

a) $\begin{cases} Q \in \alpha \\ M \in \alpha' \end{cases} \Rightarrow \overline{QM}$ cortaria a reta $\overleftrightarrow{OA}$ no ponto P, de tal modo que *P estaria entre Q e M.*

b) $\begin{cases} P \in \beta \\ M \in \beta' \end{cases} \Rightarrow \overline{PM}$ cortaria a reta $\overleftrightarrow{OB}$ no ponto Q, de tal modo que *Q estaria entre P e M.*

A ocorrência simultânea das duas situações é um absurdo.

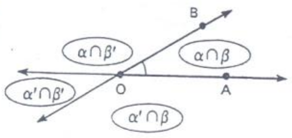
4.12) Se P pertence ao interior do ângulo $A\hat{O}B$ e Q pertence ao exterior desse ângulo, mostre que o segmento $\overline{PQ}$ corta um dos lados do ângulo.



Solução

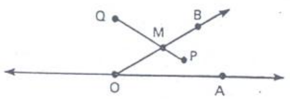
Sejam α = semipl ($\overleftrightarrow{OA}$, B), β = semipl ($\overleftrightarrow{OB}$, A) e α' e β' os semiplanos opostos a α e a β. Temos $P \in \alpha \cap \beta$. Quanto ao ponto Q, vamos considerar três casos:

1.°) $Q \in \alpha \cap \beta'$
2.°) $Q \in \alpha' \cap \beta$
3.°) $Q \in \alpha' \cap \beta'$



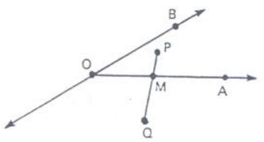
1.°) Se $Q \in \alpha \cap \beta'$ então $\overline{PQ}$ corta $\overleftrightarrow{OB}$ num ponto M, e, como $\overline{PQ} \subset \alpha$, resulta que

$$M \in \overrightarrow{OB}$$



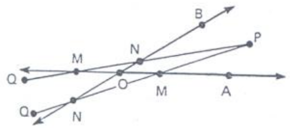
2.°) Se $Q \in \alpha' \cap \beta$ então $\overline{PQ}$ corta $\overleftrightarrow{OA}$ num ponto M, e, como $\overline{PQ} \subset \beta$, resulta que

$$M \in \overrightarrow{OA}$$

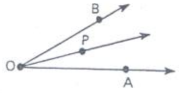


3.°) Se $Q \in \alpha' \cap \beta'$ então $\overline{PQ}$ corta a reta $\overleftrightarrow{OA}$ num ponto M e a reta $\overleftrightarrow{OB}$ num ponto N. Devemos provar que um destes dois pontos, ao menos, pertence a um lado do ângulo.

Se $M \in \beta'$ e $N \in \alpha'$, então a reta $\overleftrightarrow{MN}$ não poderia ter ponto em comum com $\alpha \cap \beta$ (veja o exercício 4.11), o que é absurdo, pois $P \in \overleftrightarrow{MN}$ e $P \in \alpha \cap \beta$. Logo, ou $M \in \beta$ (isto é, $M \in \overrightarrow{OA}$) ou $N \in \alpha$ (isto é, $N \in \overrightarrow{OB}$).



4.13) Seja o ângulo $A\hat{O}B$ (não raso) e tomemos o ponto P no seu interior. Prove que a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ está contida no interior do ângulo $A\hat{O}B$.



Solução

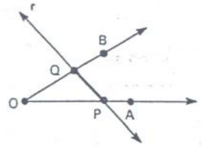
Sendo α = semipl ($\overleftrightarrow{OA}$, B) e β = semipl ($\overleftrightarrow{OB}$, A), temos $P \in \alpha \cap \beta$. Vamos aplicar aqui o resultado do exercício 4.4:

$$\left.\begin{array}{l} P \in \alpha \Rightarrow \overrightarrow{OP} \subset \alpha \\ P \in \beta \Rightarrow \overrightarrow{OP} \subset \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \subset \alpha \cap \beta$$

Nota: Se a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ está contida no interior do ângulo $A\hat{O}B$, dizemos que **a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ está entre as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$**. Podemos também dizer que o interior do ângulo $A\hat{O}B$ é igual à união de todas as semi-retas abertas que estão entre os lados do ângulo.

4.14) Admitamos que a reta r corta o lado $\overrightarrow{OA}$ do ângulo $A\hat{O}B$ no ponto P e o lado $\overrightarrow{OB}$ no ponto Q. Mostre que

$$r \cap A\hat{O}B = \overline{PQ}$$

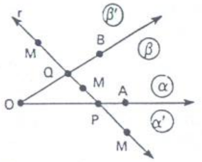


Solução

a) É imediato que $\overline{PQ} \subset r \cap A\hat{O}B$, pois $r \cap A\hat{O}B$ é um conjunto convexo, e, sendo assim, contém todo segmento cujas extremidades pertencem a ele.

b) Mostremos agora que $r \cap A\hat{O}B \subset \overline{PQ}$. Para isso, seja $M \in r \cap A\hat{O}B$ e provemos que $M \in \overline{PQ}$. Se $M \neq P$ e $M \neq Q$, só há três casos possíveis:

1.°) P está entre Q e M.
2.°) Q está entre M e P.
3.°) M está entre P e Q.



Mas no 1.° caso o segmento $\overline{QM}$ cortaria a reta $\overleftrightarrow{OA}$, o que significa que M pertenceria ao semiplano α' oposto ao semiplano α = semipl ($\overleftrightarrow{OA}$, B). Então M não pertenceria a $A\hat{O}B$, o que é absurdo.

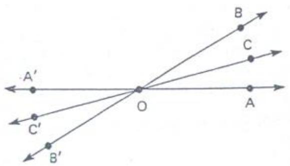
No 2.° caso o segmento $\overline{PM}$ cortaria a reta $\overleftrightarrow{OB}$ e M pertenceria a β', não podendo portanto pertencer a $A\hat{O}B$.

Assim, por exclusão, resta o 3.° caso, que significa que M está no interior de $\overline{PQ}$:

$$M \in \overline{PQ}$$

Observe que se M = P ou M = Q a tese é imediata.

4.15) São opostas as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OC'}$. Mostre que, se $\overrightarrow{OC}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, então $\overrightarrow{OC'}$ está entre $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OB'}$.



Solução

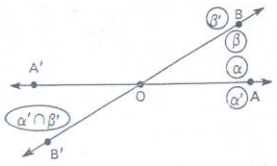
Indiquemos por:

$$\alpha = \text{semipl}\ (\overleftrightarrow{OA}, B)$$
$$\beta = \text{semipl}\ (\overleftrightarrow{OB}, A)$$

e por α' e β' os semiplanos opostos correspondentes.

Devemos provar que $\overrightarrow{OC'} \subset \alpha' \cap \beta'$. Seja $M \in \overrightarrow{OC'}$. É claro que $M \notin \alpha \cap \beta$ (pois se $M \in \alpha \cap \beta$ então M pertenceria à semi-reta $\overrightarrow{OC}$).

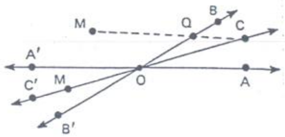
Se $M \in \alpha \cap \beta'$, então o segmento $\overline{MC}$ estaria contido em α e cortaria a reta $\overleftrightarrow{OB}$ em um ponto $Q \neq O$, o que é absurdo. Da mesma forma, $M \notin \alpha' \cap \beta$. Assim, por exclusão, conclui-se que $M \in \alpha' \cap \beta'$.



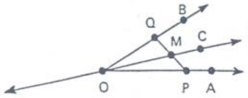
Sendo assim:

$$\overrightarrow{OC'} \subset \alpha' \cap \beta'$$

isto é, $\overrightarrow{OC'}$ está entre $\overrightarrow{OA'}$ e $\overrightarrow{OB'}$.



4.16) Seja $\overrightarrow{OC}$ uma semi-reta situada entre as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, como na figura ao lado. Mostre que todo segmento $\overleftrightarrow{PQ}$, com $P \in \overrightarrow{OA}$ e $Q \in \overrightarrow{OB}$ corta a semi-reta $\overrightarrow{OC}$.

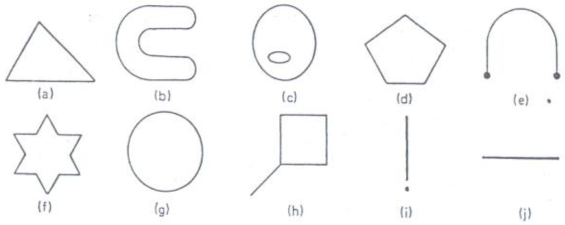


Solução

Seja $\{M\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overleftrightarrow{OC}$. Como a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ não tem ponto em $\alpha' \cap \beta'$ (veja exercicio 4.11), é claro que $M \in \overrightarrow{OC}$. Logo, M pertence ao interior do ângulo $A\hat{O}B$. Sendo assim, $M \in \overleftrightarrow{PQ}$. Portanto, $\{M\} = \overleftrightarrow{PQ} \cap \overrightarrow{OC}$.

Exercícios Propostos

4.17) Indique quais das figuras representadas abaixo são conjuntos convexos.



4.18) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Uma reta é um conjunto convexo.
b) Uma figura formada por três pontos distintos é um conjunto convexo.
c) Se retirarmos de um plano todos os pontos de uma reta, os pontos remanescentes formarão um conjunto convexo.
d) Se uma figura contém todos os pontos de um dado segmento $\overline{AB}$, então essa figura é um conjunto convexo.
e) A interseção de conjuntos convexos é sempre um conjunto convexo.
f) A união de conjuntos convexos é sempre um conjunto convexo.
g) O exterior de um triângulo não é um conjunto convexo.
h) Uma semi-reta separa um plano que a contém em dois semiplanos.
i) Uma reta separa todo plano que a contém em dois semiplanos.
j) Um segmento separa um plano que o contém em dois semiplanos.
k) Todo semiplano fechado contém sua origem.

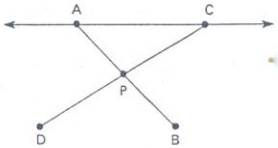
l) Dois semiplanos são sempre coplanares.
m) A figura representada ao lado é um ângulo.
n) O vértice de um ângulo pertence a esse ângulo.

o) O vértice de um ângulo pertence ao interior desse ângulo.
p) Para A, B e C não colineares, tem-se

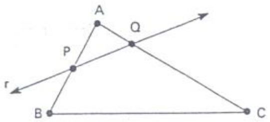
$$\triangle ABC = C\hat{A}B \cup C\hat{B}A$$

q) O interior de um triângulo é a interseção dos interiores dos ângulos internos desse triângulo.

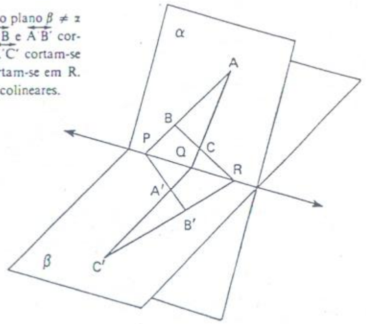
4.19) Dois segmentos $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ cortam-se num ponto P interno a ambos os segmentos. Prove que B e D estão em um mesmo semiplano, com relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$.



4.20) Uma reta r, contida no plano do $\triangle ABC$, não passa por um vértice mas intercepta o lado $\overleftrightarrow{AB}$ em P. Prove que essa reta também intercepta um dos outros dois lados (e somente um).



4.21) No plano α tem-se o $\triangle ABC$ e no plano $\beta \neq \alpha$ tem-se o $\triangle A'B'C'$. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ cortam-se em P, as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{A'C'}$ cortam-se em Q e as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'}$ cortam-se em R. Demonstre que P, Q e R são colineares.

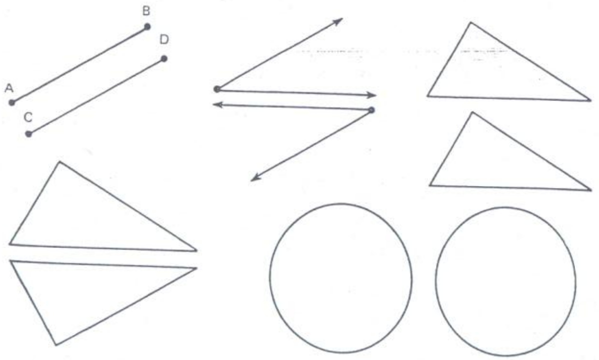


Capítulo 5

Congruência e medida de segmentos e ângulos

5.1 — FIGURAS CONGRUENTES

Num modo impreciso de falar, duas figuras são *congruentes* se é possível mostrar que elas "cabem exatamente uma na outra", ou ainda que elas podem ser levadas a "coincidir"; dizemos também que elas são "superponíveis", ou que elas têm o "mesmo tamanho e a mesma forma". A ilustração abaixo mostra alguns pares de figuras congruentes.



Expressões como "cabem exatamente", "coincidem", "superponíveis", "mesmo tamanho" e "mesma forma", embora transmitam a nossa idéia intuitiva de congruência, não são satisfatórias quando desejamos uma *definição* rigorosa. Intuitivamente, sabemos que, para dois segmentos serem congruentes, eles devem ter o mesmo "comprimento", para que dois ângulos sejam congruentes, as semi-retas que constituem os seus lados devem apresentar a mesma "abertura". Entretanto, estamos usando novamente palavras imprecisas.

A abordagem que adotaremos possibilita superar essa dificuldade considerando como *primitivos* os conceitos de congruência de segmentos e de congruência de ângulos.

> A congruência de segmentos é um conceito primitivo.
> A congruência de ângulos é um conceito primitivo.

5.2 — CONGRUÊNCIA DE SEGMENTOS

Para caracterizar devidamente a idéia de *congruência entre segmentos*, adotamos alguns postulados. O símbolo ≡ vai significar *é congruente a*, de modo que escrevendo $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ estaremos dizendo que *o segmento $\overline{AB}$ é congruente ao segmento $\overline{CD}$*.

Postulado P14

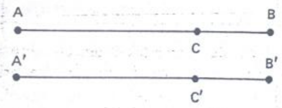
> Sejam $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ segmentos quaisquer.
> a) **Propriedade reflexiva**
> $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ (ou seja, *todo segmento é congruente a si mesmo*)
> b) **Propriedade simétrica**
> Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$, então $\overline{CD} \equiv \overline{AB}$ (isto permite dizer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são *congruentes entre si*).
> c) **Propriedade transitiva**
> Se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{EF}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{EF}$ (isto é, *dois segmentos congruentes a um terceiro são congruentes entre si*).

Postulado P15

> Dados um segmento $\overline{AB}$ e uma semi-reta $\overrightarrow{CD}$, existe um único ponto $E \in \overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \equiv \overline{CE}$.

Conseqüentemente, é sempre possível "marcar" sobre uma reta dada um segmento que seja congruente a um segmento dado.

Postulado P16: Adição e subtração de segmentos

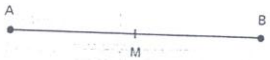


Dados dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ e dados os pontos $C \in \overline{AB}$ e $C' \in \overline{A'B'}$, valem as duas propriedades seguintes:

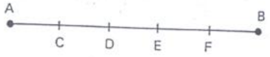
1.ª) Se $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$, então $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.
2.ª) Se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, então $\overline{CB} \equiv \overline{C'B'}$.

5.3 — PONTO MÉDIO. DIVISÃO EM PARTES CONGRUENTES

Seja M um ponto pertencente ao segmento $\overline{AB}$, tal que $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$. Nestas condições, o ponto M recebe o nome de *ponto médio do segmento* $\overline{AB}$.



Suponhamos que, sobre $\overline{AB}$, são tomados quatro pontos C, D, E e F, de modo que se tenha



$$\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{FB}$$

Dizemos, neste caso, que o segmento $\overline{AB}$ **está dividido, pelos pontos dados, em cinco partes congruentes entre si.** Esta idéia, bastante intuitiva, generaliza-se imediatamente para a divisão de um segmento dado em um número inteiro qualquer de partes congruentes. Em particular, o *ponto médio* divide o segmento em *duas partes* congruentes entre si.

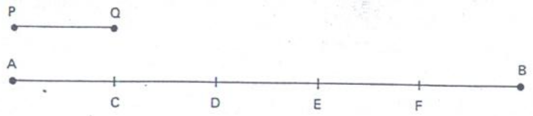
5.4 — MEDIDA DE SEGMENTOS

Uma das aplicações teóricas mais importantes da noção de congruência de segmentos é o conceito de *medida*. Vamos examinar aqui como se pode dizer "quanto mede um segmento" ou "qual é o comprimento do segmento". Medir um segmento é, basicamente, *compará-lo* com outro segmento que tenha sido fixado como referência. Devemos escolher, primeiramente, algum segmento $\overline{PQ}$ (não nulo), como base de comparação. Este segmento recebe o nome de unidade e dizemos que a sua medida (ou comprimento) é 1. Indicamos med $(\overline{PQ}) = 1$,

ou, simplesmente, PQ = 1, onde o símbolo PQ representa, de maneira simples, o mesmo que med $(\overline{PQ})$, ou seja, a **medida** (ou **comprimento**) do segmento $\overline{PQ}$.

Consideremos agora o exemplo ilustrado abaixo. Sobre o segmento $\overline{AB}$ foram tomados os pontos C, D, E e F, de tal modo que

$$\overline{AC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DE} \equiv \overline{EF} \equiv \overline{FB} \equiv \overline{PQ}$$



Vemos, então, que $\overline{AB}$ compõe-se da união de cinco segmentos congruentes à unidade (ou, em linguagem mais livre, a unidade *cabe* cinco vezes no segmento $\overline{AB}$). Dizemos, por isso, que a **medida** de $\overline{AB}$ é 5, indicando med $(\overline{AB}) = 5$ ou, simplesmente, AB = 5.

No exemplo acima, foi possível dividir $\overline{AB}$ em um número inteiro de partes congruentes a $\overline{PQ}$. Na maioria das vezes, a situação não será assim tão cômoda. Na ilustração abaixo, temos um segmento $\overline{AB}$ para ser medido com a unidade $\overline{PQ}$. Começamos, então, a partir de A, a marcar os pontos C, D, etc., de modo que os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, etc., sejam congruentes a $\overline{PQ}$. Entretanto, no final,

o ponto F resultou ficar além da extremidade B, de tal modo que B é o ponto médio de $\overline{EF}$. Neste caso, devemos usar segmentos menores que a unidade, chamados subunidades. Se M é o ponto médio de $\overline{PQ}$, então a unidade fica dividida em dois segmentos de medida $\frac{1}{2}$: $PM = MQ = \frac{1}{2}$. Como $\overline{EB} \equiv \overline{PM}$, podemos escrever

$$AB = AC + CD + DE + EB = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

Mediante tal expediente, cada segmento poderá ser sempre medido com a unidade $\overline{PQ}$, com o auxílio de subunidades convenientes. É importante notar que, a partir de agora, dispomos de um método para atribuir a cada segmento dado uma medida (ou comprimento), que será sempre um número real não negativo.

Para resumir, vamos relacionar as seguintes propriedades da medida de segmentos.

1.ª) A todo segmento é possível atribuir uma medida (ou comprimento), que é igual a zero para o segmento nulo e é um número real positivo para qualquer outro segmento.

2.ª) Dois segmentos congruentes entre si têm mesma medida. Reciprocamente, se dois segmentos têm mesma medida, eles são congruentes entre si.

3.ª) Se o ponto C pertence ao segmento $\overline{AB}$, então

$$\text{med}(\overline{AB}) = \text{med}(\overline{AC}) + \text{med}(\overline{CB})$$

ou, em notação simplificada:

$$AB = AC + CB$$

Nos próximos itens vamos estabelecer noções semelhantes, com relação a ângulos.

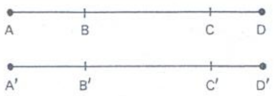
Distância entre dois pontos

Dados os pontos A e B, a medida do segmento $\overline{AB}$ é também chamada distância entre os pontos A e B e, às vezes, é indicada por δ_{AB}. Temos então:

$$\delta_{AB} = AB$$

Exercícios Resolvidos

5.1) Consideremos dois segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$. Os pontos B e C são internos a $\overline{AD}$, estando B entre A e C. Os pontos B' e C' são internos a $\overline{A'D'}$, estando B' entre A' e C'. Prove que, se $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$, então $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.



Solução

Apliquemos duas vezes o postulado P16.

a) Temos os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$ e os pontos $B \in \overline{AC}$ e $B' \in \overline{A'C'}$. Como $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, pelo P16 concluímos que $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.

b) Temos os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$ e os pontos $C \in \overline{AD}$ e $C' \in \overline{A'D'}$. Como $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ e $\overline{CD} \equiv \overline{C'D'}$, pelo P16 concluímos que $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.

Outro modo

Podemos utilizar também a idéia de medida (e, em especial, as propriedades 2.ª e 3.ª vistas no item 5.4). Assim:

$C \in \overline{AD}$, então, pela 3.ª prop., $AD = AC + CD$
$B \in \overline{AC}$, então, pela 3.ª prop., $AC = AB + BC$

Assim,

$$AD = AB + BC + CD \quad (\text{e } A'D' = A'B' + B'C' + C'D')$$

Mas, pela 2.ª propriedade, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ e $CD = C'D'$, logo

$$AD = A'B' + B'C' + C'D' = A'D'$$

Portanto, $\overline{AD} \equiv \overline{A'D'}$.

5.2) Na figura, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Mostre que

$$OM = \frac{OA + OB}{2}$$

Solução

Pela 3.ª propriedade, $OM = OA + AM$ e, como M é ponto médio de $\overline{AB}$, tem-se $AM = \frac{AB}{2}$; logo

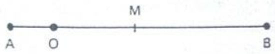
$$OM = OA + \frac{AB}{2}$$

Mas, novamente pela 3.ª propriedade, $OB = OA + AB$, donde $AB = OB - OA$. Assim,

$$OM = OA + \frac{OB - OA}{2} = \frac{OA + OB}{2}$$

5.3) Na figura, M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Mostre que

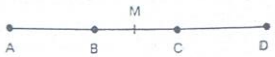
$$OM = \frac{OB - OA}{2}$$



Solução

$$OM = AM - OA = \frac{AB}{2} - OA = \frac{OA + OB}{2} - OA = \frac{OB - OA}{2}$$

5.4) Na figura, M é o ponto médio do segmento $\overline{AD}$ e tem-se ainda $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Mostre que M é também o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.



Solução

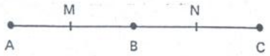
$$BM = AM - AB = MD - CD = MC$$

Exercícios Propostos

5.5) Na figura, tem-se $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$. Mostre que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$

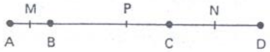
5.6) Na mesma figura do exercício anterior, tem-se $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Mostre que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.

5.7) Na figura, tem-se $\overline{AB} \equiv \overline{BC}$. Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{BC}$, mostre que $\overline{MN} \equiv \overline{AB}$.

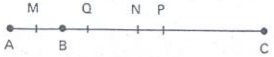


5.8) Na figura, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o de $\overline{CD}$. Sendo AD = 92 e BC = 36, calcule MN.

5.9) Na figura abaixo, M é o ponto médio de $\overline{AB}$, N é o ponto médio de $\overline{CD}$ e P é o ponto médio de $\overline{MN}$. Se AB = 16, AC = 63 e AD = 101, calcule AP.



5.10) Na figura abaixo, M é ponto médio de $\overline{AB}$, N é ponto médio de $\overline{AC}$, P é ponto médio de $\overline{BC}$ e Q é ponto médio de $\overline{AP}$. Mostre que Q é também ponto médio de $\overline{MN}$.



5.5 — CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS

A idéia de *congruência entre ângulos* fica devidamente caracterizada por meio de alguns postulados.

Postulado P17

Sejam Â, B̂ e Ĉ ângulos quaisquer.

a) **Propriedade reflexiva**
Â ≡ Â (ou seja, *todo ângulo é congruente a si mesmo*)

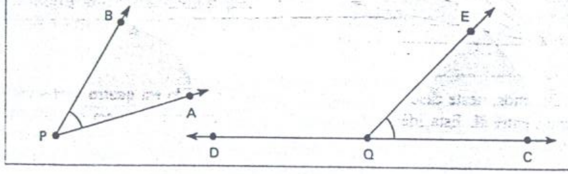
b) **Propriedade simétrica**
Se Â ≡ B̂, então B̂ ≡ Â (isto permite dizer que os ângulos Â e B̂ são *congruentes entre si*)

c) **Propriedade transitiva**
Se Â ≡ B̂ e B̂ ≡ Ĉ, então Â ≡ Ĉ (isto é, *dois ângulos congruentes a um terceiro são congruentes entre si*)

Este postulado P17 é análogo ao P14, referente a segmentos.

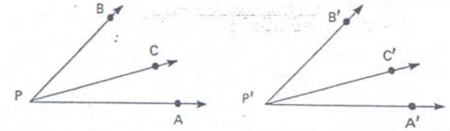
Postulado P18

Dados um ângulo não raso qualquer AP̂B e um ângulo raso CQ̂D, existe uma única semi-reta $\overrightarrow{QE} \subset$ CQ̂D tal que AP̂B ≡ CQ̂E.



Analogamente ao caso já visto no P15, este postulado garante que é sempre possível "marcar", a partir de uma semi-reta fixada, um ângulo que seja congruente a um ângulo dado.

Postulado P19: Adição e subtração de ângulos



Dados dois ângulos AP̂B e A'P̂'B' e dadas as semi-retas $\overrightarrow{PC} \subset$ AP̂B e $\overrightarrow{P'C'} \subset$ A'P̂'B', valem as duas propriedades seguintes:

1.ª) Se AP̂C ≡ A'P̂'C' e CP̂B ≡ C'P̂'B', então

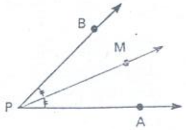
AP̂B ≡ A'P̂'B'

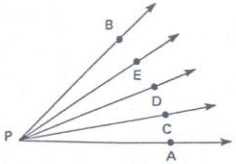
2.ª) Se AP̂B ≡ A'P̂'B' e AP̂C ≡ A'P̂'C', então

CP̂B ≡ C'P̂'B'

5.6 — BISSETRIZ. DIVISÃO DE UM ÂNGULO EM PARTES CONGRUENTES

Seja $\overrightarrow{PM}$ uma semi-reta contida no ângulo AP̂B, tal que AP̂M ≡ MP̂B. Nestas condições, a semi-reta $\overrightarrow{PM}$ recebe o nome de bissetriz do ângulo AP̂B





Suponhamos que, no interior do ângulo $A\hat{P}B$, são tomadas três semi-retas $\overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{PD}$ e $\overrightarrow{PE}$, de modo que se tenha

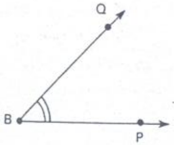
$$A\hat{P}C \equiv C\hat{P}D \equiv D\hat{P}E \equiv E\hat{P}B$$

Dizemos, neste caso, que o ângulo $A\hat{P}B$ **está dividido em quatro partes congruentes entre si**. Esta idéia, análoga à divisão de um segmento em partes congruentes, generaliza-se imediatamente para a divisão de um ângulo dado em um número inteiro qualquer de partes congruentes. Em particular, a *bissetriz* divide o ângulo em *duas partes* congruentes entre si.

5.7 — ÂNGULOS SUPLEMENTARES. ÂNGULO RETO

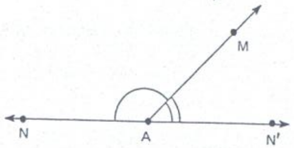
Ângulos suplementares

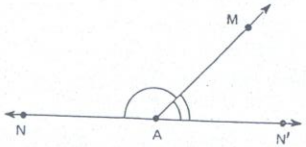
Sejam $P\hat{B}Q$ e $M\hat{A}N$ dois ângulos e seja $\overrightarrow{AN'}$ a semi-reta *oposta* a $\overrightarrow{AN}$. Esta nova semi-reta define um novo ângulo, $N'\hat{A}M$.



Dizemos que o ângulo $P\hat{B}Q$ é suplementar ao ângulo $M\hat{A}N$ se

$$P\hat{B}Q \equiv N'\hat{A}M$$

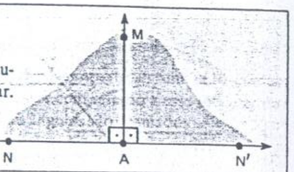




Note que, em particular, o ângulo $N'\hat{A}M$ é suplementar ao ângulo $M\hat{A}N$ e ainda que a união destes dois ângulos é um *ângulo raso*. Sendo assim, dada uma reta $\overleftrightarrow{NN'}$, se tomarmos um ponto M fora dessa reta e o ponto A no interior do segmento $\overline{NN'}$, a semi-reta $\overrightarrow{AM}$ vai determinar dois ângulos $M\hat{A}N$ e $N'\hat{A}M$, que são suplementares um ao outro. Em linguagem livre, poderíamos dizer que o ângulo raso foi dividido em dois ângulos, suplementares um ao outro.

Ângulo reto

Ângulo reto é um ângulo que é congruente a todo ângulo que lhe é suplementar.



Podemos construir dois ângulos retos tomando uma reta $\overleftrightarrow{NN'}$, um ponto A no interior do segmento $\overline{NN'}$ e o ponto M fora de $\overleftrightarrow{NN'}$, de tal modo que $M\hat{A}N \equiv N'\hat{A}M$. Deste modo, o ângulo raso fica dividido em dois **ângulos retos**.

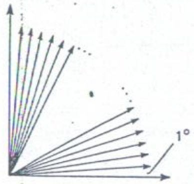
Vamos admitir a seguinte propriedade:

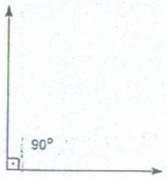
Todos os ângulos retos são congruentes entre si.

5.8 — MEDIDA DE ÂNGULOS

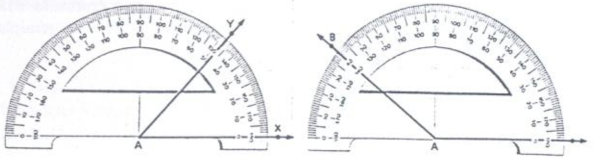
À semelhança do que dissemos sobre segmentos, medir um ângulo é, basicamente, *compará-lo* com outro ângulo previamente fixado como unidade. A rigor, qualquer ângulo (não nulo) pode ser usado como unidade. Poderíamos tomar como unidade o próprio ângulo reto, que é fácil de se reproduzir num desenho. Mas o que se faz mais costumeiramente é adotar para unidade uma *subdivisão* do ângulo reto.

Vamos imaginar que o ângulo reto é dividido, por meio de semi-retas, em **90 partes congruentes entre si**. Podemos adotar uma destas subdivisões como unidade. A essa unidade atribuiremos a medida 1° (um grau), o que significa que o **ângulo reto** passa a ter medida igual 90° (90 graus) e o **ângulo raso** tem medida 180° (180 graus).





O ângulo XÂY, da ilustração abaixo, mede 48°, enquanto que o ângulo CÂB indicado mede 140°.



Utilizando a unidade (grau) estabelecida com este critério, a cada ângulo será atribuida uma medida (em graus), que será sempre expressa através de um número real não negativo. A medida de um ângulo AÔB é indicada pelo símbolo med (AÔB).

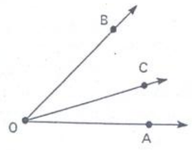
A medida de ângulos tem propriedades semelhantes àquelas já vistas para segmentos.

1.ª) A todo ângulo é possivel atribuir uma medida (em graus) que é igual a zero para o ângulo nulo e é um número real positivo para qualquer outro ângulo.

2.ª) Dois ângulos congruentes entre si têm mesma medida. Reciprocamente, se dois ângulos têm mesma medida, eles são congruentes entre si.

3.ª) Se a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ está contida no ângulo AÔB, então

med (AOB) = med (AÔC) + med (CÔB)



Nota: Subdivisões do grau

Um grau (1°) se subdivide em 60 minutos (60'):

1° = 60'
1 grau = 60 minutos

Um minuto (1') se subdivide em 60 segundos (60''):

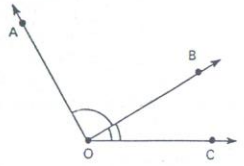
1' = 60''
1 minuto = 60 segundos

Assim sendo, 1° = 3 600''

5.9 — ÂNGULOS ADJACENTES. ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE (OPV)

Ângulos adjacentes

Em muitas situações, dois ângulos podem compartilhar um lado comum, tendo os outros dois lados em semiplanos opostos com relação a esse lado comum. Tais ângulos são chamados adjacentes um ao outro. Na ilustração ao lado, os ângulos AÔB e BÔC são adjacentes, pois têm em comum o lado $\overrightarrow{OB}$ e as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ encontram-se em semiplanos opostos com relação ao lado $\overrightarrow{OB}$. Note que



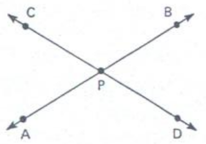
AÔB ∩ BÔC = $\overrightarrow{OB}$

Observe também, na mesma ilustração, que os ângulos AÔB e AÔC *não são considerados adjacentes*, pois, apesar de terem em comum o lado $\overrightarrow{OA}$, os dois outros lados encontram-se no mesmo semiplano com relação a $\overrightarrow{OA}$. A interseção desses dois ângulos é o próprio ângulo AÔB:

AÔB ∩ AÔC = AÔB

Ângulos opostos pelo vértice (opv)

Quando duas retas se interceptam, elas determinam quatro ângulos (não rasos). Por exemplo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, da figura ao lado, determinam os ângulos AP̂C, CP̂B, BP̂D e DP̂A. Os ângulos AP̂C e BP̂D são **opostos pelo vértice (opv)**. Os ângulos CP̂B e DP̂A também são opv. Para dar a este conceito uma definição precisa, escrevemos:

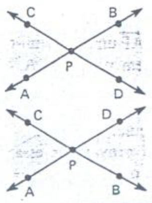


Dois ângulos AP̂C e BP̂D são **opostos pelo vértice (opv)** se:

{P está entre A e B
{P está entre C e D

ou então se:

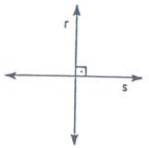
{P está entre A e D e
{P está entre B e C



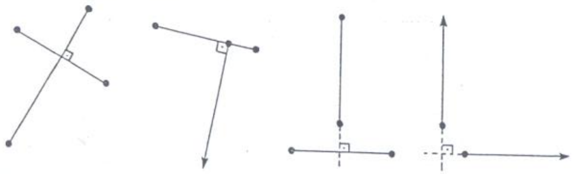
Poderíamos dizer também que $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ são **opv** se cada lado de um deles é uma **semi-reta oposta** a um lado do outro.

5.10 — RETAS PERPENDICULARES

Consideremos duas retas **r** e **s** *concorrentes* e observemos os quatro ângulos (não rasos) que elas determinam. Se um desses ângulos for **reto**, diremos que elas são retas perpendiculares entre si e indicaremos (indiferentemente) $r \perp s$ ou $s \perp r$, para significar que **r** é perpendicular a **s** ou **s** é perpendicular a **r**.



É desejável estender esta noção de "perpendicularidade" a segmentos e semi-retas. De um modo geral, quando utilizarmos expressões como "segmentos perpendiculares entre si", "segmento perpendicular a uma semi-reta", "semi-retas perpendiculares entre si", etc., estaremos querendo dizer que as retas que contêm as figuras mencionadas são perpendiculares entre si.



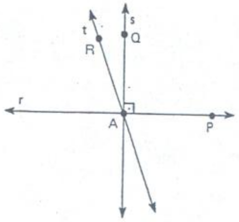
Teorema

Seja **r** uma reta contida num plano α. Por um ponto $A \in r$ pode-se conduzir uma única reta contida em α, perpendicular à reta **r**.

Demonstração

Seja $\overrightarrow{AP}$ uma das semi-retas da reta **r**, com origem no ponto A. Vamos construir a semi-reta $\overrightarrow{AQ}$ de tal modo que $P\hat{A}Q$ seja reto. Assim, a reta $s = \overleftrightarrow{AQ}$ é perpendicular à reta **r**.

Para provar que essa reta é *única*, imaginemos que a reta $t \neq s$ passa também por A e é perpendicular a **r**. Seja



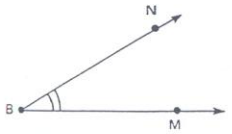
$\overrightarrow{AR}$ a semi-reta da reta **t** contida no mesmo semiplano de origem **r** que contém $\overrightarrow{AQ}$. Temos então dois ângulos $P\hat{A}Q$ e $P\hat{A}R$, ambos retos e construídos no mesmo semiplano a partir da semi-reta $\overrightarrow{AP}$. Mas, pelo postulado P18, a partir da semi-reta $\overrightarrow{AP}$ pode-se construir um único ângulo reto no semiplano dado. Por isso, a existência dessa reta **t** é um absurdo.

5.11 — ÂNGULOS COMPLEMENTARES

> Dois ângulos são **complementares** um ao outro se a soma de suas medidas é igual a 90°.

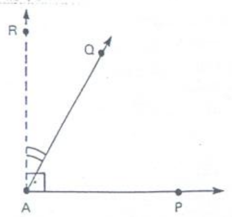
Observemos a ilustração ao lado, onde temos dois ângulos, $M\hat{B}N$ e $P\hat{A}Q$, complementares um ao outro. Temos, então:

$$\text{med}\,(M\hat{B}N) + \text{med}\,(P\hat{A}Q) = 90°$$



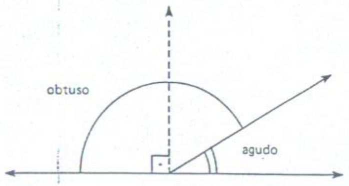
Se construímos o ângulo reto $P\hat{A}R$ (de modo que $\overrightarrow{AR}$ e $\overrightarrow{AQ}$ estejam no mesmo semiplano com relação a $\overleftrightarrow{AP}$), é fácil perceber que $Q\hat{A}R \equiv M\hat{B}N$.

Note também que os ângulos $P\hat{A}Q$ e $Q\hat{A}R$ são complementares um ao outro, ou seja, a semi-reta $\overrightarrow{AQ}$ divide o ângulo reto em duas partes complementares.



5.12 — ÂNGULO AGUDO E ÂNGULO OBTUSO

Um ângulo não nulo é **agudo** se a sua medida é menor do que 90°.



Um ângulo é obtuso se a sua medida é maior do que 90°, mas menor do que 180°.

Assim, se $\hat{A}$ é agudo e $\hat{B}$ é obtuso, temos

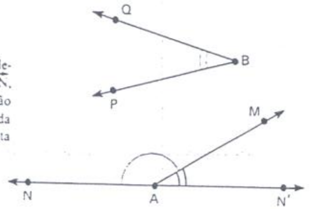
$$0° < med(\hat{A}) < 90°$$
$$90° < med(\hat{B}) < 180°$$

É fácil notar que se dois ângulos são suplementares um ao outro, sendo nenhum deles nulo, reto ou raso, então um é agudo e o outro é obtuso. (Em outras palavras, se um ângulo é agudo, seu suplementar é obtuso.)

Exercícios Resolvidos

5.11) Prove que se dois ângulos são suplementares, as suas medidas têm soma igual a 180°.

Solução



Sejam $P\hat{B}Q$ e $M\hat{A}N$ dois ângulos suplementares. Se $\overleftrightarrow{AN'}$ é a semi-reta oposta a $\overleftrightarrow{AN}$, então tem-se $P\hat{B}Q \equiv N'\hat{A}M$ (pela definição de ângulos suplementares). Sendo assim, da 2.ª propriedade da medida de ângulos resulta que

$$med(P\hat{B}Q) = med(N'\hat{A}M)$$

Por outro lado, pela 3.ª propriedade, temos

$$med(M\hat{A}N) + med(N'\hat{A}M) = med(N'\hat{A}N)$$

e como $med(N'\hat{A}N) = 180°$ (ângulo raso), vem

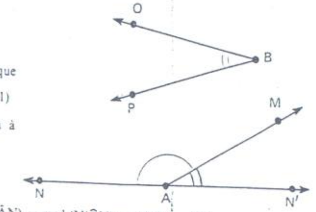
$$med(M\hat{A}N) + med(N'\hat{A}M) = 180°$$

e, finalmente,

$$med(M\hat{A}N) + med(P\hat{B}Q) = 180°$$

5.12) Prove que se dois ângulos têm soma de medidas igual a 180°, eles são suplementares.

Solução



Sejam $P\hat{B}Q$ e $M\hat{A}N$ ângulos tais que

$$med(P\hat{B}Q) + med(M\hat{A}N) = 180° \qquad (1)$$

Tomemos a semi-reta $\overleftrightarrow{AN'}$, oposta à $\overleftrightarrow{AN}$. Tem-se

$$med(N'\hat{A}M) + med(M\hat{A}N) = med(N'\hat{A}N) = 180° \qquad (2)$$

De (1) e (2) concluimos que

$$med(P\hat{B}Q) = med(N'\hat{A}M)$$

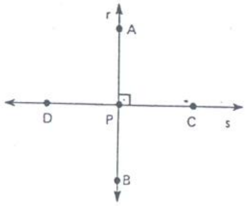
e então, pela 2.ª propriedade da medida de ângulos,

$$P\hat{B}Q \equiv N'\hat{A}M$$

Assim, $P\hat{B}Q$ e $M\hat{A}N$ são suplementares.

5.13) Prove que, se duas retas são perpendiculares, então os quatro ângulos (não rasos) que elas determinam são retos.

Solução



Observemos (para guiar o raciocinio) a figura ao lado, onde temos duas retas **r** e **s** perpendiculares. Da definição de retas perpendiculares, sabemos que **um dos ângulos** formados por **r** e **s** é **reto**. Suponhamos que $A\hat{P}C$ seja reto: $med(A\hat{P}C) = 90°$. Mas $A\hat{P}C$ e $D\hat{P}A$ são suplementares, logo

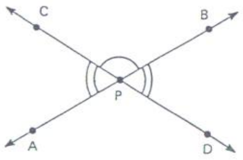
$$med(D\hat{P}A) = 180° - med(A\hat{P}C) = 180° - 90° = 90°$$

e, assim, $D\hat{P}A$ é reto.

Pelo mesmo raciocinio, como $B\hat{P}D$ e $D\hat{P}A$ são suplementares, concluimos que $B\hat{P}D$ é reto e, analogamente, $C\hat{P}B$ também é reto.

5.14) Prove que dois ângulos ópv são congruentes.

Solução



Consideremos os ângulos opv e $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ indicados na figura. Como $A\hat{P}C$ e $C\hat{P}B$ são suplementares, temos

$$med(A\hat{P}C) = 180° - med(C\hat{P}B)$$

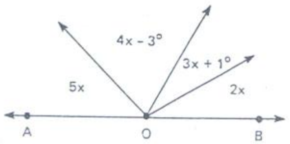
Como $B\hat{P}D$ e $C\hat{P}B$ são suplementares, temos

$$med(B\hat{P}D) = 180° - med(C\hat{P}B)$$

Assim, $med(A\hat{P}C) = med(B\hat{P}D)$

e portanto $A\hat{P}C \equiv B\hat{P}D$

5.15) Na figura, A, O e B são pontos alinhados e estão indicadas as medidas dos quatro ângulos representados. Calcule **x**.



Solução

Basta escrever

$$(2x) + (3x + 1°) + (4x - 3°) + (5x) = 180°$$

donde $14x - 2° = 180°$ e assim $x = 13°$.

5.16) As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são expressas por $3x + 10°$ e $15x - 6°$. Determine x.

Solução

Deve-se ter $3x + 10° = 15x - 6°$, donde tiramos $12x = 16°$ e, assim

$$x = \frac{16°}{12} = 1°20'$$

5.17) Determine as medidas de dois ângulos complementares, cuja diferença de medidas é 18°.

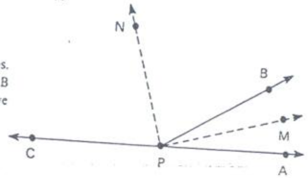
Solução

Se **a** e **b** são as medidas procuradas, devemos ter:

$$\begin{cases} a + b = 90° \\ a - b = 18° \end{cases}$$

donde tiramos $a = 54°$ e $b = 36°$.

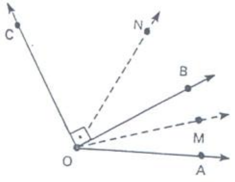
5.18) Os pontos A, P e C da figura estão alinhados. A semi-reta $\overrightarrow{PM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{P}B$ e a semi-reta $\overrightarrow{PN}$ é a bissetriz de $B\hat{P}C$. Prove que $M\hat{P}N$ é reto.



Solução

$$\text{med}(M\hat{P}N) = \text{med}(M\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}N) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{med}(A\hat{P}B) + \frac{1}{2}\,\text{med}(B\hat{P}C) =$$
$$= \frac{1}{2}\,[\text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C)] =$$
$$= \frac{1}{2}\,[180°] = 90°$$

5.19) Pelo vértice O do ângulo $A\hat{O}B$ conduz-se a semi-reta $\overrightarrow{OC}$ perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ e situada no semiplano de origem $\overleftrightarrow{OB}$ que não contém $\overrightarrow{OA}$. Sejam $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$ as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$, respectivamente. Calcule a medida do ângulo $M\hat{O}N$.

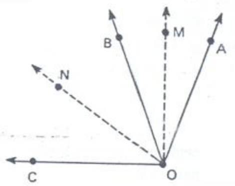


Solução

$$\text{med}(M\hat{O}N) = \text{med}(A\hat{O}N) - \text{med}(A\hat{O}M) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{med}(A\hat{O}C) - \frac{1}{2}\,\text{med}(A\hat{O}B) =$$
$$= \frac{1}{2}\,[\text{med}(A\hat{O}C) - \text{med}(A\hat{O}B)] =$$
$$= \frac{1}{2}\,\text{med}(B\hat{O}C) = \frac{1}{2}\cdot 90° = 45°$$

5.20) Os ângulos adjacentes $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ têm por bissetrizes as semi-retas $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$, respectivamente. Mostre que

$$\text{med}(M\hat{O}N) = \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)]$$



Solução

$$\text{med}(M\hat{O}N) = \text{med}(M\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}N) = \frac{1}{2}\,\text{med}(A\hat{O}B) + \frac{1}{2}\,\text{med}(B\hat{O}C) =$$
$$= \frac{1}{2}\,[\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)]$$

5.21) Prove que se as bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam ângulo reto, então os dois ângulos são suplementares.

Solução

Pelo exercício anterior, o ângulo das duas bissetrizes tem medida igual a

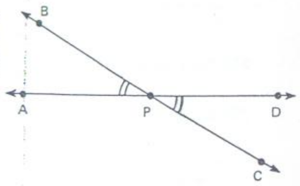
$$\text{med}(M\hat{O}N) = \frac{1}{2}\,[\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)]$$

Mas $\text{med}(M\hat{O}N) = 90°$, logo

$$\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) = 180°$$

isto é, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são suplementares.

5.22) Dado o ponto P no interior do segmento $\overline{AD}$, tomam-se, fora da reta $\overleftrightarrow{AD}$, os pontos B e C, situados em semiplanos opostos. Prove que, se $A\hat{P}B \equiv C\hat{P}D$, então os pontos B, P e C estão alinhados (isto é, $A\hat{P}B$ e $C\hat{P}D$ são opv).



Solução

Como $\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(C\hat{P}D)$, temos

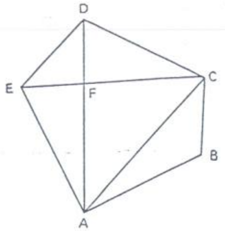
$$\text{med}(C\hat{P}D) + \text{med}(D\hat{P}B) = \text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(D\hat{P}B) = \text{med}(A\hat{P}D) = 180°$$

Logo, $B\hat{P}C$ é um ângulo raso, donde B, P e C estão alinhados.

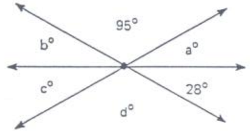
Exercícios Propostos

5.23) Complete:

a) med ($B\hat{A}C$) + med ($C\hat{A}D$) = med (......)
b) med ($C\hat{A}D$) + med ($D\hat{A}E$) = med (......)
c) med ($B\hat{A}C$) + med ($C\hat{A}E$) = med (......)
d) med ($C\hat{D}E$) − med ($C\hat{D}A$) = med (......)
e) med ($E\hat{F}D$) = 180° − med (......)
f) 180° − med ($A\hat{F}E$) = med (......)



5.24) Na figura são indicadas as medidas de seis ângulos formados por três retas concorrentes. Determine *a*, *b*, *c* e *d*.



5.25) Dê as medidas dos suplementos dos ângulos cujas medidas são:

a) 35°; b) 152°; c) 42°27'35''.

5.26) Dê as medidas dos complementos dos ângulos cujas medidas são:

a) 53°; b) 29°12'; c) 38°42'15''.

5.27) Prove que se dois ângulos são congruentes, então os seus suplementares são também congruentes.

5.28) Prove que todo ângulo reto é suplementar a si mesmo.

5.29) Prove que se dois ângulos não nulos são complementares, então eles são agudos.

5.30) A soma das medidas de dois ângulos é 56° e uma delas é igual a 3/5 da outra. Calcule essas medidas.

5.31) A medida de um ângulo é o triplo da medida do seu complemento. Quanto mede esse ângulo?

5.32) Um ângulo mede 36° menos que o seu suplemento. Calcule a medida do complemento desse ângulo.

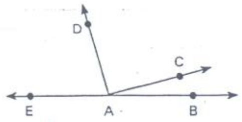
5.33) As medidas do suplemento e do complemento de um ângulo são uma o triplo da outra. Qual é a medida desse ângulo?

5.34) As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um ângulo de 60°. Um dos ângulos mede 37°. Calcule a medida do outro.

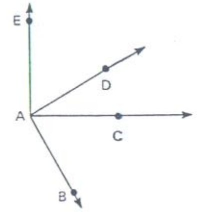
5.35) A semi-reta $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ e a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ está contida no interior de $A\hat{O}M$. Mostre que

$$\text{med}(P\hat{O}M) = \frac{1}{2}[\text{med}(P\hat{O}B) - \text{med}(P\hat{O}A)]$$

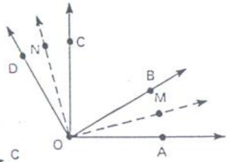
5.36) Na figura, $\overleftrightarrow{EB}$ é uma reta e as semi-retas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ são perpendiculares entre si. Prove que $B\hat{A}C$ e $D\hat{A}E$ são complementares.



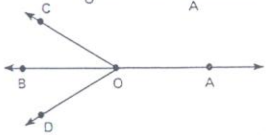
5.37) Na figura, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. Mostre que os ângulos $B\hat{A}E$ e $C\hat{A}D$ são suplementares.



5.38) Na figura, $\overrightarrow{OM}$ e $\overrightarrow{ON}$ são as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, respectivamente. Sendo $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ ângulos retos, mostre que $M\hat{O}N$ é reto.



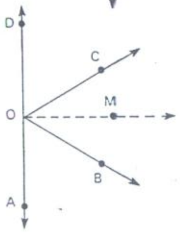
5.39) Com origem no ponto $O \in \overleftrightarrow{AB}$ conduzem-se as semi-retas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$, em semiplanos opostos, de tal modo que $A\hat{O}C \equiv A\hat{O}D$. Mostre que $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz do ângulo $C\hat{O}D$.



5.40) Mostre que as bissetrizes de dois ângulos opv são semi-retas opostas.

5.41) As semi-retas da figura formam três ângulos congruentes. Quanto mede cada um?

5.42) A semi-reta $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$ e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AD}$. Mostre que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes.



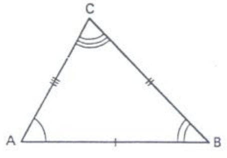
Capítulo

6

Congruência de triângulos. Polígonos convexos

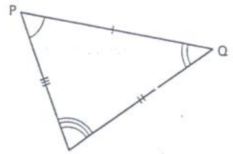
6.1 — TRIÂNGULOS CONGRUENTES

Dois triângulos ABC e PQR são congruentes entre si se é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices de tal modo que os seus lados sejam dois a dois congruentes:



$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$\overline{AC} \equiv \overline{PR}$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{QR}$$

e também os seus ângulos internos sejam dois a dois congruentes:



$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{R}$$

Indicamos $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

Esta definição de congruência de triângulos reflete a noção intuitiva de que dois triângulos são congruentes se são "superponíveis". É interessante notar, entretanto, que a definição acima pressupõe a fixação prévia de uma *correspondência* entre os dois triângulos:

— ao vértice A corresponde o vértice P
— ao vértice B corresponde o vértice Q
— ao vértice C corresponde o vértice R

Se relacionássemos os mesmos dois triângulos através de *outra* correspondência, por exemplo:

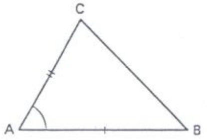
$$A \leftrightarrow R$$
$$B \leftrightarrow P$$
$$C \leftrightarrow Q$$

teríamos que $\hat{A}$ e $\hat{R}$ não são ângulos congruentes, nem $\hat{B}$ e $\hat{P}$, nem $\hat{C}$ e $\hat{Q}$, mas nem por isso os dois triângulos deixariam de ser congruentes. Apenas, não o seriam para *esta* correspondência.

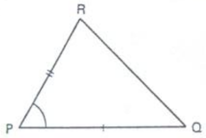
6.2 — CRITÉRIOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

As propriedades relacionadas a seguir permitem concluir que dois triângulos dados são congruentes, de modo menos trabalhoso do que aplicando-se diretamente a definição. De um modo geral, vamos observar que para se concluir a congruência de dois triângulos basta verificar a congruência de *três figuras* (lados ou ângulos internos), entre as quais deve haver ao menos uma que seja lado.

1.º critério **L A L** (lado-ângulo-lado)

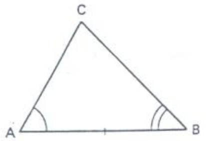


Se $\begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{PQ} \\ \hat{A} \equiv \hat{P} \\ \overline{AC} \equiv \overline{PR} \end{cases}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$

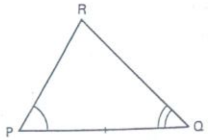


Se dois triângulos têm congruentes **dois lados e o ângulo compreendido entre eles**, então esses dois triângulos são congruentes.

2.º critério **A L A** (ângulo-lado-ângulo)



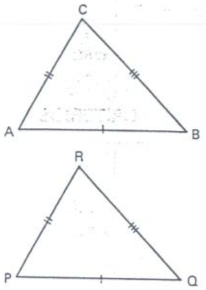
Se $\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{P} \\ \overline{AB} \equiv \overline{PQ} \\ \hat{B} \equiv \hat{Q} \end{cases}$ então $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$



Se dois triângulos têm congruentes **dois ângulos internos e o lado compreendido entre eles**, então esses dois triângulos são congruentes.

3.º critério | L L L | (lado-lado-lado)

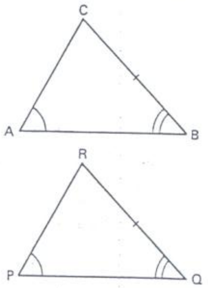
$$\text{Se}\begin{cases}\overline{AB} \equiv \overline{PQ}\\ \overline{AC} \equiv \overline{PR}\\ \overline{BC} \equiv \overline{QR}\end{cases} \quad \text{então } \triangle ABC \equiv \triangle PQR$$



Se dois triângulos têm dois a dois congruentes **os três lados**, então esses dois triângulos são congruentes.

4.º critério | A A L | (ângulo-ângulo-lado)

$$\text{Se}\begin{cases}\hat{A} \equiv \hat{P}\\ \hat{B} \equiv \hat{Q}\\ \overline{BC} \equiv \overline{QR}\end{cases} \quad \text{então } \triangle ABC \equiv \triangle PQR$$



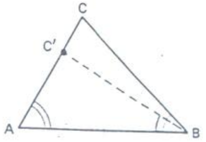
Se dois triângulos têm congruentes **dois ângulos internos e um lado oposto a um desses ângulos**, então esses dois triângulos são congruentes.

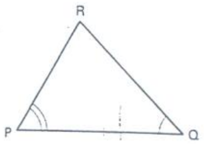
Dos quatro critérios acima, o único que deve ser aceito como **postulado** é o primeiro, L A L. Os demais podem ser demonstrados, e o serão, adiante, no decorrer deste capítulo (veja os próximos exercícios resolvidos).

Exercícios Resolvidos

6.1) Demonstre o critério A L A.

Solução





A respeito dos triângulos ABC e PQR é dado que:

$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$

e devemos provar que $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ (podendo utilizar para isso o critério L A L, que foi admitido como postulado).

Consideremos sobre a semi-reta $\overrightarrow{AC}$ o ponto C′ tal que $\overline{AC'} \equiv \overline{PR}$ (terminaremos por concluir que C′ = C). Temos agora os dois triângulos ABC′ e PQR, para os quais temos:

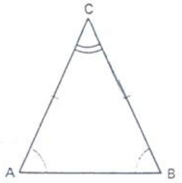
$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\overline{AC'} \equiv \overline{PR}$$

e então, pelo critério L A L, $\triangle ABC' \equiv \triangle PQR$. Logo, os ângulos $A\hat{B}C'$ e $P\hat{Q}R$ são congruentes. Mas, por hipótese, $A\hat{B}C$ e $P\hat{Q}R$ são congruentes, portanto $A\hat{B}C' \equiv A\hat{B}C$.

Ora, isto só é possível se as retas $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$ coincidem, o que significa que C′ = C. Mas então ABC e ABC′ são um só triângulo, logo $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

6.2) **Triângulo isósceles** – Um triângulo que tem dois lados congruentes é chamado *isósceles*. A figura ao lado representa um triângulo ABC, isósceles porque $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$. O outro lado, $\overline{AB}$, é chamado *base*, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os *ângulos da base* e o ângulo $\hat{C}$ é o *ângulo do vértice*.

Prove que **os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes**.



Solução

Vamos estabelecer uma correspondência entre o triângulo ABC e ele mesmo, assim:

$$A \leftrightarrow B$$
$$B \leftrightarrow A$$
$$C \leftrightarrow C$$

como se na verdade tivéssemos *dois triângulos*: $\triangle ABC$ e $\triangle BAC$. De acordo com essa correspondência, temos que

$$\text{no } \triangle ABC \left\{\begin{array}{l}\overline{AC} \text{ corresponde a } \overline{BC}\\ \hat{C} \text{ corresponde a } \hat{C}\\ \overline{BC} \text{ corresponde a } \overline{AC}\end{array}\right\} \text{no } \triangle BAC$$

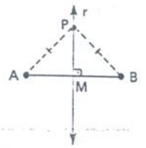
e como:

$$\overline{AC} \equiv \overline{BC}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{C}$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{AC}$$

então, pelo critério L A L, temos $\triangle ABC \equiv \triangle BAC$, logo os ângulos que se correspondem, $\hat{A}$ e $\hat{B}$, são congruentes entre si: $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

6.3) **Mediatriz de um segmento** – Dado um segmento $\overline{AB}$ contido num plano, então a reta contida nesse plano que passa pelo ponto médio do segmento e é perpendicular a ele chama-se *mediatriz* do segmento.

Prove que todo ponto da mediatriz é eqüidistante dos extremos do segmento.



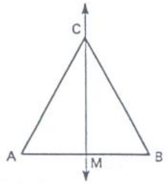
Solução

Indiquemos por P um ponto qualquer da mediatriz e por M o ponto médio de $\overline{AB}$. Se P = M, é claro que PA = PB, nada restando a provar. Se P ≠ M, consideremos os triângulos △ AMP e △ BMP, para os quais temos:

$\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ (pois M é ponto médio de $\overline{AB}$)
$A\hat{M}B \equiv B\hat{M}P$ (pois ambos são retos)
$\overline{MP} \equiv \overline{MP}$

Pelo critério L A L, temos △ AMP ≡ △ BMP, logo $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ e assim P é eqüidistante de A e de B.

6.4) Na figura ao lado, a reta $\overleftrightarrow{CM}$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$. Prove que o triângulo ABC é isósceles.



Solução

Como C ∈ $\overleftrightarrow{CM}$, pelo exercício anterior temos $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$, logo △ ABC é isósceles.

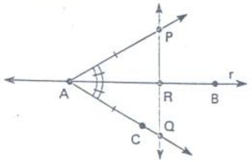
6.5) Sejam dados uma reta **r** e um ponto P *fora dela*. Prove que por P pode-se conduzir uma única reta perpendicular à reta **r**.

Solução

Lembremos inicialmente que a demonstração para o caso em que P ∈ r já foi feita anteriormente (veja o teorema demonstrado no item 5.10).

A demonstração do presente caso deve ser feita em duas partes: **existência** e **unicidade**.

Existência



Sejam A e B dois pontos distintos da reta **r**. Vamos construir a semi-reta $\overrightarrow{AC}$, no semiplano oposto ao do ponto P, de tal modo que $B\hat{A}C \equiv B\hat{A}P$. Em seguida, tomemos sobre $\overrightarrow{AC}$ o ponto Q tal que $\overline{AP} \equiv \overline{AQ}$. Seja R o ponto em que o segmento $\overline{PQ}$ corta a reta **r**.

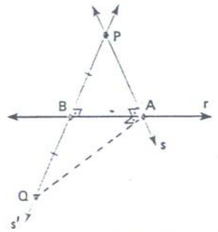
Dessa maneira, obtemos dois triângulos, △ ARQ e △ ARP, para os quais:

$\overline{AQ} \equiv \overline{AP}$
$R\hat{A}Q \equiv R\hat{A}P$
$\overline{AR} \equiv \overline{AR}$

Logo, pelo critério L A L, △ ARQ ≡ △ ARP. Daí resulta que $A\hat{R}Q \equiv A\hat{R}P$ e como eles são suplementares um ao outro, ambos são retos. Concluímos então que $\overleftrightarrow{PQ} \perp r$.

Nota: Se fosse R = A, não teríamos os triângulos △ ARQ e △ ARP, mas, em compensação, P, A, Q seriam alinhados e a reta $\overleftrightarrow{PQ}$ seria perpendicular a **r**, pois como $B\hat{A}Q \equiv B\hat{A}P$, estes dois ângulos seriam retos.

Unicidade



Admitamos que as retas **s** e **s'** são perpendiculares à reta **r**, por P, sendo A o ponto onde **r** encontra **s** e B o ponto onde **r** encontra **s'**. Sobre **s'** tomemos o ponto Q de tal modo que B seja o ponto médio de $\overline{PQ}$, isto é, tal que $\overline{BP} \equiv \overline{BQ}$. Para os triângulos △ PAB e △ QAB, temos:

$\overline{PB} \equiv \overline{QB}$
$A\hat{B}P \equiv A\hat{B}Q$ (ambos retos)
$\overline{AB} \equiv \overline{AB}$

Assim, pelo critério L A L, △ PAB ≡ △ QAB. Mas isto significa que $Q\hat{A}B \equiv P\hat{A}B$, ou seja, $Q\hat{A}B$ é um ângulo reto. Nesse caso, $\overleftrightarrow{AQ} \perp$ **r**. Mas pelo ponto A só é possível conduzir, no mesmo plano, uma única reta perpendicular à reta **r** (veja o teorema do item 5.10). Então, é falsa a suposição de que existem duas retas, **s** e **s'**.

Observação: Uma conseqüência imediata do teorema demonstrado acima é que "nenhum triângulo pode ter mais do que um ângulo interno reto". De fato, se o △ ABC tivesse os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ retos, pelo ponto C estariam passando duas retas distintas, perpendiculares à reta $\overleftrightarrow{AB}$, o que é impossível.

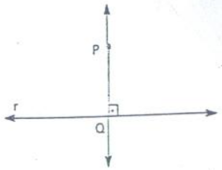
Triângulo retângulo

Um triângulo que tem um ângulo interno reto chama-se *triângulo retângulo*. O lado oposto ao ângulo reto chama-se *hipotenusa* e os dois outros lados chamam-se *catetos*.

Distância de um ponto a uma reta

Dados o ponto P e a reta **r**, seja Q o ponto onde **r** encontra a reta perpendicular conduzida por P. A distância entre o ponto P e a reta **r** é definida como sendo a distância entre P e Q:

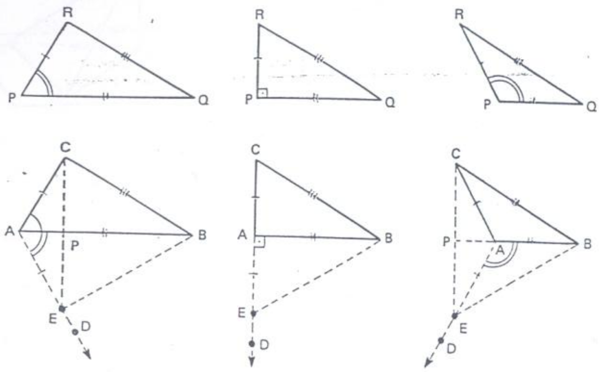
$$\delta_{Pr} = \delta_{PQ} = PQ$$



O ponto Q é chamado projeção ortogonal de P sobre a reta **r** (ou, simplesmente, *projeção* de P sobre **r**).

6.6) **Demonstre o critério L L L.**

Solução



caso 1 caso 2 caso 3

A demonstração deve levar em conta os três casos ilustrados acima. Sejam os triângulos ABC e PQR, para os quais se tem:

$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$\overline{AC} \equiv \overline{PR}$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{QR}$$

Devemos provar que $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$, podendo usar para isso o critério L A L (admitido como postulado) ou o critério A L A (já demonstrado no exercício 6.1).

Vamos construir a semi-reta $\overrightarrow{AD}$, no semiplano oposto ao do ponto C, de modo que

$$B\hat{A}D \equiv Q\hat{P}R$$

e tomemos sobre essa semi-reta o ponto E tal que $\overline{AE} \equiv \overline{PR}$. Essa construção nos leva a um triângulo ABE, o qual é congruente ao $\triangle PQR$, pois:

$$\overline{AB} \equiv \overline{PQ}$$
$$B\hat{A}E \equiv Q\hat{P}R$$
$$\overline{AE} \equiv \overline{PR} \qquad \text{(caso L A L)}$$

Seja P o ponto de interseção de $\overline{CE}$ com a reta $\overleftrightarrow{AB}$. No caso 1, P está entre A e B, no caso 2, P = A e, no caso 3, A está entre P e B. Temos:

a) $A\hat{C}E \equiv A\hat{E}C$, porque o $\triangle ACE$ é isósceles nos casos 1 e 3; no caso 2 estes dois ângulos são nulos.

b) $E\hat{C}B \equiv C\hat{E}B$, pois o $\triangle ECB$ é isósceles.

c) $A\hat{C}B \equiv A\hat{E}B$: no caso 1 temos:

$$\text{med}(A\hat{C}B) = \text{med}(A\hat{C}E) + \text{med}(E\hat{C}B)$$
e
$$\text{med}(A\hat{E}B) = \text{med}(A\hat{E}C) + \text{med}(C\hat{E}B)$$

no caso 2 temos:

$$\text{med}(A\hat{C}B) = \text{med}(E\hat{C}B)$$
e
$$\text{med}(A\hat{E}B) = \text{med}(C\hat{E}B)$$

no caso 3 temos:

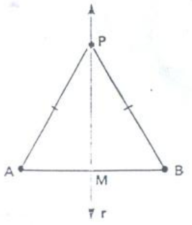
$$\text{med}(A\hat{C}B) = \text{med}(E\hat{C}B) - \text{med}(A\hat{C}E)$$
e
$$\text{med}(A\hat{E}B) = \text{med}(C\hat{E}B) - \text{med}(A\hat{E}C)$$

d) Sendo assim, $\triangle ABC \equiv \triangle ABE$, pois:

$$\overline{AC} \equiv \overline{AE}$$
$$A\hat{C}B \equiv A\hat{E}B$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{BE} \qquad \text{(caso L A L)}$$

Portanto, $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$.

6.7) Sejam, num plano, um segmento $\overline{AB}$ e um ponto P *eqüidistante* de A e de B. Prove que o ponto P pertence à mediatriz do segmento $\overline{AB}$, contida no plano dado.



Solução

Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$. Se $P \in \overline{AB}$, então P = M e nesse caso é imediato que P pertence à mediatriz. Suponha-se que $P \notin \overline{AB}$. Nesse caso, seja $r = \overleftrightarrow{PM}$ e provemos que r é a mediatriz, isto é, que $r \perp \overline{AB}$. Para isso, basta notar que para os triângulos $\triangle AMP$ e $\triangle BMP$, tem-se:

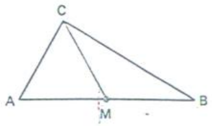
$$\overline{AP} \equiv \overline{BP}$$
$$\overline{AM} \equiv \overline{BM}$$
$$\overline{MP} \equiv \overline{MP}$$

logo, pelo critério L L L, $\triangle AMP \equiv \triangle BMP$. Sendo assim, $A\hat{M}P \equiv B\hat{M}P$ e, como são suplementares um ao outro, ambos são retos: $r \perp \overline{AB}$.

Observação: Unindo-se as conclusões dos exercícios 6.3 e 6.7, podemos escrever que "dado um segmento num plano, então a mediatriz do segmento, contida nesse plano, é o conjunto (lugar geométrico) dos pontos do plano que são *eqüidistantes* dos pontos A e B".

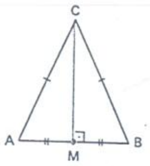
6.8) Medianas de um triângulo — Um segmento que tem uma extremidade num vértice e a outra no ponto médio do lado oposto tem o nome de *mediana do triângulo*. Um triângulo ABC tem três medianas, relativas aos vértices A, B e C.

Prove que, num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é perpendicular à base.



Solução

Seja M o ponto médio da base $\overline{AB}$ do triângulo isósceles ABC. Com relação aos triângulos AMC e BMC, temos:



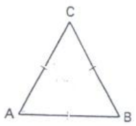
$$\overline{AC} \equiv \overline{BC}$$
$$\overline{AM} \equiv \overline{BM}$$
$$\overline{CM} \equiv \overline{CM}$$

logo, pelo critério L L L, $\triangle AMC \equiv \triangle BMC$. Assim, os ângulos $A\hat{M}C$ e $B\hat{M}C$ são congruentes e, como são suplementares um ao outro, ambos são retos, donde $\overline{CM} \perp \overline{AB}$.

Outro modo

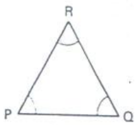
Como C é eqüidistante de A e de B, então C pertence à *mediatriz* do segmento $\overline{AB}$, logo a reta $\overline{CM}$ é perpendicular à reta $\overline{AB}$.

6.9) Triângulo eqüilátero – Um triângulo é chamado *eqüilátero* se os seus três lados são congruentes. Triângulo eqüiângulo – Um triângulo é chamado *eqüiângulo* se os seus três ângulos internos são congruentes.



Prove que:

a) Todo triângulo eqüilátero é eqüiângulo.
b) Todo triângulo eqüiângulo é eqüilátero.



Solução

a) O triângulo ABC é eqüilátero, logo ele é ao mesmo tempo isósceles de base $\overline{AB}$, de base $\overline{AC}$ e de base $\overline{BC}$. Como num triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes (veja o exercício 6.2), conclui-se que $\hat{A} \equiv \hat{B}$, $\hat{A} \equiv \hat{C}$ e $\hat{B} \equiv \hat{C}$, logo o triângulo é eqüiângulo.

b) O triângulo PQR é eqüiângulo. Vamos estabelecer uma correspondência entre esse triângulo e ele mesmo, assim:

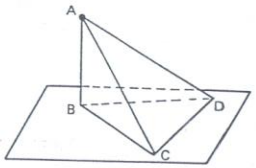
$$P \leftrightarrow Q$$
$$Q \leftrightarrow P$$
$$R \leftrightarrow R$$

como se tivéssemos *dois triângulos*: $\triangle PQR$ e $\triangle QPR$. Temos que

$$\text{no } \triangle PQR \left\{ \begin{array}{c} \hat{P} \text{ corresponde a } \hat{Q} \\ \overline{PQ} \text{ corresponde a } \overline{QP} \\ \hat{Q} \text{ corresponde a } \hat{P} \end{array} \right\} \text{ no } \triangle QPR$$

e como essas figuras que se correspondem são congruentes, pelo critério A L A temos $\triangle PQR \equiv \triangle QPR$, logo os lados que se correspondem são congruentes entre si: $\overline{PR} \equiv \overline{QR}$. Por raciocínio idêntico obteremos também $\overline{PR} \equiv \overline{PQ}$, o que mostra que o triângulo PQR é eqüilátero.

6.10) Na figura, tem-se $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ e $\overline{BC} \equiv \overline{BD}$. Prove que o triângulo ACD é isósceles.



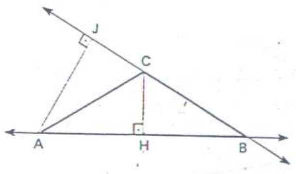
Solução

Para os triângulos ABC e ABD, temos:

$$\overline{AB} \equiv \overline{AB}$$
$$A\hat{B}C \equiv A\hat{B}D \quad \text{(ambos retos)}$$
$$\overline{BC} \equiv \overline{BD}$$

logo, pelo critério L A L, $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$. Assim, $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$, o que significa que $\triangle ACD$ é isósceles.

6.11) Alturas de um triângulo – Se, por um vértice de um triângulo, conduz-se a reta perpendicular à reta suporte do lado oposto, à interseção dessas duas retas dá-se o nome de *pé da perpendicular*. O segmento cujas extremidades são um vértice e o pé da perpendicular desse vértice ao lado oposto chama-se *altura do triângulo*. Também se denomina altura a medida desse segmento. Todo triângulo tem três alturas, relativas a cada lado. Na figura, são alturas do triângulo ABC os segmentos $\overline{CH}$ e $\overline{AJ}$, havendo ainda uma terceira altura não representada ali.

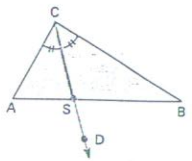


Prove que, num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também altura.

Solução

Como já ficou provado no exercício 6.8, num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é perpendicular à base, logo é altura.

6.12) Bissetrizes internas de um triângulo – Seja $\overrightarrow{CD}$ a semi-reta bissetriz do ângulo interno $\hat{C}$ do triângulo ABC e seja S o ponto de interseção dessa semi-reta com o lado $\overline{AB}$. O segmento $\overline{CS}$ chama-se *bissetriz interna do triângulo*, relativa ao vértice C. Há outras duas, relativas a A e a B. Também se dá o nome de bissetriz interna à medida desses segmentos.



Prove que, num triângulo isósceles, a mediana relativa à base é também bissetriz interna.

Solução

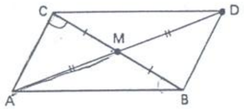
Veja a figura do exercício anterior. Os triângulos Δ AMC e Δ BMC são congruentes (L L L), logo $A\hat{C}M \equiv B\hat{C}M$ e assim $\overline{CM}$ é bissetriz interna.

6.13) Prove que a soma das medidas de dois ângulos internos quaisquer de um triângulo é menor do que 180°.

Solução

Dado o Δ ABC, provemos que

$$\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) < 180°$$



Para isso, sendo M o ponto médio de $\overline{BC}$, tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{AM}$ o ponto D tal que M seja também ponto médio de $\overline{AD}$. Os triângulo ACM e DBM são congruentes, pois (LAL):

$\overline{CM} \equiv \overline{BM}$ (M é ponto médio)
$A\hat{M}C \equiv D\hat{M}B$ (opostos pelo vértice)
$\overline{AM} \equiv \overline{DM}$ (M é ponto médio)

Logo, $A\hat{C}M \equiv D\hat{B}M$. Assim,

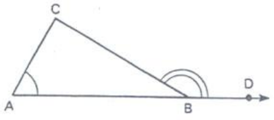
$$\begin{aligned} &\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = \\ &= \text{med}(A\hat{B}C) + \text{med}(A\hat{C}M) = \\ &= \text{med}(A\hat{B}C) + \text{med}(C\hat{B}D) = \\ &= \text{med}(A\hat{B}D) \end{aligned}$$

Ora, med $(A\hat{B}D) < 180°$, pois o ponto D não pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, $A\hat{B}D$ não é raso. Portanto,

$$\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) < 180°$$

6.14) Prove que, em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é maior do que a medida de qualquer ângulo interno não adjacente a ele.

Solução



Se D pertence à semi-reta $\overrightarrow{AB}$ e é exterior ao lado $\overline{AB}$, então $C\hat{B}D$ é um ângulo externo do triângulo ABC. Provemos, por exemplo, que med $(C\hat{B}D) >$ med $(\hat{A})$. Para isso, usaremos o resultado do exercício anterior. Temos que

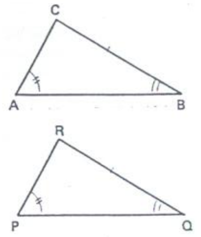
$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) < 180$$

logo

$$\text{med}(\hat{A}) < 180° - \text{med}(\hat{B})$$

Mas os ângulos $\hat{B}$ e $C\hat{B}D$ são suplementares um ao outro, logo med $(C\hat{B}D) = 180° -$ med $(\hat{B})$. Portanto, med $(C\hat{B}D) >$ med $(\hat{A})$.

6.15) Demonstre o critério A A L.



Solução

Para os triângulos ABC e PQR, temos:

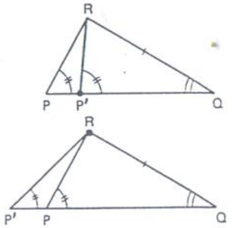
$\hat{A} \equiv \hat{P}$
$\hat{B} \equiv \hat{Q}$
$\overline{BC} \equiv \overline{QR}$

e devemos provar que

$$\Delta\, ABC \equiv \Delta\, PQR$$

Com essa finalidade, tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{QP}$ o ponto P' tal que $\overline{P'Q} \equiv \overline{AB}$, construindo assim o Δ P'QR, que é congruente ao Δ ABC, pois (L A L):

$\overline{P'Q} \equiv \overline{AB}$
$\hat{Q} \equiv \hat{B}$
$\overline{QR} \equiv \overline{BC}$

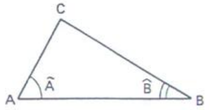


Se P' = P, nada resta a demonstrar. Suponhamos que P' $\neq$ P, podendo P' ser interno ou externo ao segmento $\overline{PQ}$. Mas, em qualquer destes dois casos, o Δ PP'R apresenta um ângulo externo *congruente* a um ângulo interno não adjacente a ele. Isto é impossível, pois contraria o resultado do exercício anterior. Sendo assim, a única hipótese possível é P' = P e portanto

$$\Delta\, ABC \equiv \Delta\, PQR$$

6.16) No Δ ABC, se BC > AC, então

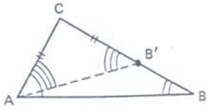
$$\text{med}(\hat{A}) > \text{med}(\hat{B})$$



Reciprocamente, se med $(\hat{A}) >$ med $(\hat{B})$ então BC > AC. Em outras palavras, num triângulo, ao maior lado se opõe o maior ângulo. Prove essas afirmações.

Solução

a) Se BC > AC, então no interior do lado $\overline{BC}$ podemos tomar o ponto B' tal que B'C = AC. Assim, o Δ AB'C é isósceles, logo $A\hat{B}'C \equiv B'\hat{A}C$. Como $A\hat{B}'C$ é um ângulo externo do Δ ABB', tem-se med $(A\hat{B}'C) >$ med $(\hat{B})$.



Por outro lado, tem-se med ($\hat{A}$) > med ($B'\hat{A}C$). Assim,

$$\text{med}(\hat{A}) > \text{med}(B'\hat{A}C) = \text{med}(A\hat{B'}C) > \text{med}(\hat{B})$$

isto é

$$\text{med}(\hat{A}) > \text{med}(\hat{B})$$

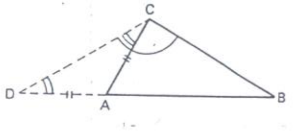
b) Suponhamos agora que med ($\hat{A}$) > med ($\hat{B}$) e provemos que BC > AC. Ora, se fosse BC = AC, teríamos $\hat{A} \equiv \hat{B}$, pois △ ABC seria isósceles. Se fosse BC < AC, pela parte *a* teríamos med ($\hat{A}$) < med ($\hat{B}$). Em ambos os casos temos absurdo. Logo, BC > AC.

6.17) Demonstre que, em todo triângulo, a medida de qualquer lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados.

Solução

Seja D um ponto da semi-reta $\overleftrightarrow{BA}$ tal que

$$BD = AB + AC$$



Assim, A está no interior de $\overleftrightarrow{BD}$ e AD = AC. No △ ACD, isósceles, temos

$$\text{med}(A\hat{D}C) = \text{med}(A\hat{C}D)$$

e como med ($B\hat{C}D$) > med ($A\hat{C}D$), resulta que

$$\text{med}(B\hat{C}D) > \text{med}(A\hat{D}C)$$

Pelo exercício anterior, no △ BCD temos, portanto,

$$BC < BD$$

isto é,

$$BC < AB + AC$$

6.18) Demonstre que, se BC = AB + AC, então os pontos A, B e C estão alinhados.

Solução

Se eles não estivessem alinhados, seriam vértices de um triângulo, logo, pelo exercício anterior, teríamos BC < AB + AC, contrariando a hipótese.

6.19) Existe triângulo cujos lados medem 7 cm, 10 cm e 18 cm?

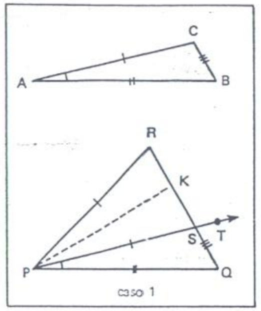
Solução

Não existe, pois, como 18 > 10 + 7, deveríamos ter um lado cuja medida fosse maior do que a soma das medidas dos outros dois, o que é impossível.

6.20) Sejam os triângulos △ ABC e △ PQR, com $\overleftrightarrow{AB} \equiv \overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{AC} \equiv \overleftrightarrow{PR}$. Prove que, se

$$\text{med}(\hat{A}) < \text{med}(\hat{P})$$

então BC < QR.



caso 1

Tomemos a semi-reta $\overrightarrow{PT}$, com R e T do mesmo lado de PQ no plano do △ PQR, de modo que

$$T\hat{P}Q \equiv C\hat{A}B$$

e marquemos o ponto S sobre essa semi-reta, com $\overline{PS} \equiv \overline{AC}$. Assim, △ PQS ≡ △ ABC (L A L). Se o ponto S pertence à reta $\overleftrightarrow{QR}$ (caso 1), como

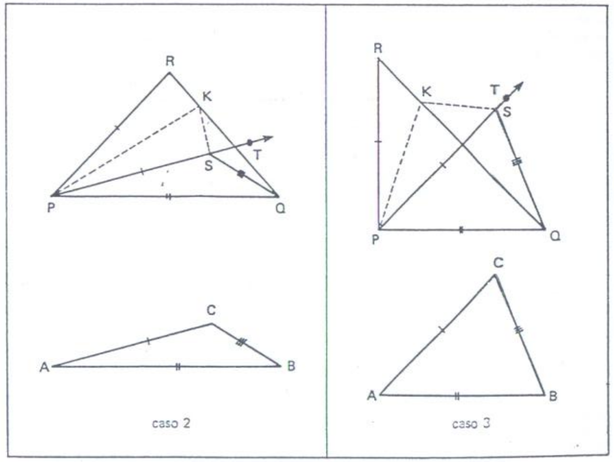
$$\text{med}(R\hat{P}Q) > \text{med}(S\hat{P}Q),$$

S está entre R e Q, logo

$$QS < QR$$

donde BC < QR.

Se o ponto S está fora da reta $\overleftrightarrow{QR}$ (casos 2 e 3), tracemos a bissetriz $\overrightarrow{PK}$ do ângulo $R\hat{P}S$.



caso 2 caso 3

sendo K ∈ $\overleftrightarrow{QR}$. Como med ($R\hat{P}Q$) > med ($S\hat{P}Q$), K está entre R e Q, logo QR = QK + KR. Além disso, como △ PRK ≡ △ PSK (L A L), temos KR = KS.

No △ SQK, temos QS < QK + KS (veja o exercício 6.17). Então, QS < QK + KR, isto é,

$$QS < QR \quad \text{donde} \quad BC < QR$$

6.21) Demonstre o recíproco do teorema do exercício anterior, isto é, que se $BC < QR$, então

$$\text{med}(\hat{A}) < \text{med}(\hat{P})$$

Solução

Se $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{P})$, teríamos $\Delta ABC \equiv \Delta PQR$ (L A L), donde $BC = QR$, o que contraria a hipótese.

Se $\text{med}(\hat{A}) > \text{med}(\hat{P})$, pelo teorema do exercício anterior teríamos $BC > QR$, contra a hipótese.

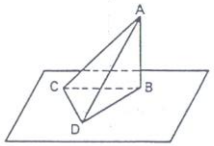
Assim, só pode ser $\text{med}(\hat{A}) < \text{med}(\hat{P})$.

Exercícios Propostos

6.22) Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa é perpendicular à hipótenusa. Mostre que esse triângulo é isósceles.

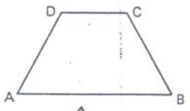
6.23) Prove que um triângulo que tem dois ângulos internos congruentes é isósceles.

6.24) Na figura, tem-se $A\hat{C}D \equiv A\hat{D}C$ e $C\hat{A}B \equiv D\hat{A}B$. Mostre que $A\hat{C}B \equiv A\hat{D}B$.

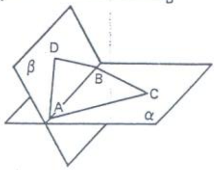


6.25) Se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ interceptam-se no seu ponto médio, prove que $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$.

6.26) Na figura, tem-se $\overline{AD} \equiv \overline{BC}$ e $\hat{A} \equiv \hat{B}$, sendo os quatro pontos coplanares. Prove que $\hat{C} \equiv \hat{D}$.



6.27) Os planos α e β interceptam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Tomam-se os pontos $C \in \alpha$ e $D \in \beta$, de modo que $\overline{CA} \equiv \overline{CB}$ e $\overline{DA} \equiv \overline{DB}$. Demonstre que $D\hat{A}C \equiv D\hat{B}C$.

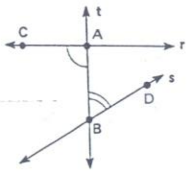


6.28) Prove que, se um triângulo tem um ângulo interno reto, então os dois outros ângulos internos são agudos.

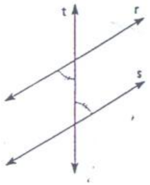
6.29) Prove que os ângulos da base de um triângulo isósceles são agudos.

6.3 — ÂNGULOS ALTERNOS INTERNOS

São dadas as retas **r**, **s** e **t**, contidas em um mesmo plano, tais que **t** intercepta as outras duas nos pontos distintos $A \in r$ e $B \in s$. A reta **t** é chamada *transversal* com relação a **r** e **s**. Tomemos sobre **r** o ponto C e sobre **s** o ponto D, situados em semiplanos opostos com relação à transversal.



Os ângulos $C\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$ são chamados **alternos internos.**

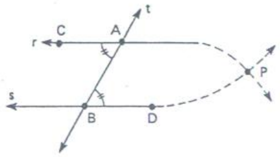


No caso particular em que **r** e **s** são duas retas *paralelas*, dois ângulos alternos internos são congruentes. Inversamente, se soubermos que dois ângulos alternos internos são congruentes, poderemos concluir que **r** e **s** são paralelas. É o que veremos demonstrado nos próximos exercícios.

Exercícios Resolvidos

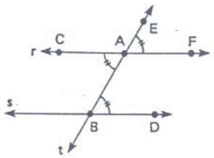
6.30) Demonstre que, se duas retas coplanares, cortadas por uma transversal, formam ângulos alternos internos congruentes, então essas duas retas são paralelas.

Solução



Sejam as retas distintas **r** e **s**, coplanares, cortadas pela transversal **t** em A e B, respectivamente. Sejam $C \in r$ e $D \in s$, em semiplanos opostos com relação à reta **t** e admitamos que os ângulos alternos internos $C\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$ sejam congruentes. Suponhamos que **r** e **s** se interceptam num ponto P, situado no mesmo semiplano de D. Se isso acontecesse, teríamos um triângulo ABP no qual o ângulo *externo* $C\hat{A}B$ é congruente ao ângulo *interno* $P\hat{B}A$, contrariando o resultado do exercício 6.14. Assim, é impossível a existência de P; logo $r \parallel s$.

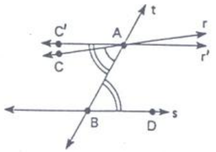
Nota: Na mesma situação examinada antes, se considerarmos na reta t o ponto E e na reta r o ponto F, de tal modo que $F\hat{A}E$ e $C\hat{A}B$ sejam *opostos pelo vértice*, então os ângulos $F\hat{A}E$ e $D\hat{B}A$ são chamados ângulos correspondentes. É imediato que a propriedade acima poderia ser enunciada assim: "*Se duas retas coplanares, cortadas por uma transversal, formam ângulos correspondentes congruentes, então essas duas retas são paralelas.*"



6.31) Demonstre que, se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternos internos são congruentes.

Solução

Suponha-se que as retas r e s, paralelas, cortadas pela transversal t, formam ângulos alternos internos $C\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$.



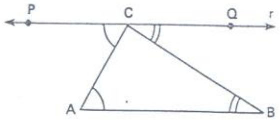
Tomemos, no mesmo semiplano de origem t em que está situado C, o ponto C' tal que $C'\hat{A}B \equiv D\hat{B}A$. Assim, as retas $r' = \overleftrightarrow{C'A}$ e s, cortadas pela transversal t, formam ângulos alternos internos congruentes. Pelo exercício anterior, tem-se então $r' /\!/ s$. Mas $r /\!/ s$, logo, pelo postulado de Euclides (P7), tem-se $r' = r$ e assim:

$$C\hat{A}B \equiv D\hat{B}A$$

6.32) Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo — Demonstre que, num triângulo qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180°.

Solução

Consideremos o $\triangle ABC$. Seja r a reta que passa por C e é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Tomemos sobre r os pontos P e Q, sendo P situado no mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{BC}$ em que está o ponto A, e Q situado no semiplano oposto (veja a figura). Os ângulos $P\hat{C}A$ e $\hat{A}$ são alternos internos, logo



$$\text{med}(P\hat{C}A) = \text{med}(\hat{A})$$

e os ângulos $B\hat{C}Q$ e $\hat{B}$ são alternos internos, logo

$$\text{med}(B\hat{C}Q) = \text{med}(\hat{B})$$

Mas

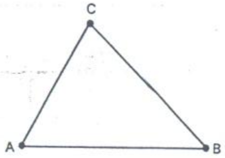
$$\text{med}(P\hat{C}A) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(B\hat{C}Q) = 180°$$

portanto

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180°$$

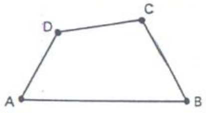
6.4 — POLÍGONOS CONVEXOS

Pelo modo como definimos, pode-se dizer que um **triângulo** é uma região convexa do plano, delimitada pela união de três segmentos (seus lados), os quais formam o que chamamos uma *poligonal triangular*. De uma forma intuitiva, podemos estender esta noção a figuras dotadas de um número maior de lados.



Tais figuras são os polígonos convexos (ou, simplesmente, polígonos). Embora seja possível uma definição formal e rigorosa deste conceito, vamos preferir aqui a idéia intuitiva, que neste caso mais se aproxima das finalidades do nosso livro.

Um quadrilátero convexo é uma região convexa do plano, delimitada por uma *poligonal de quatro lados*.



Em geral, um polígono convexo de n lados é uma região convexa do plano, delimitada por uma *poligonal*, a qual se constitui da união de n segmentos. Um polígono de n lados tem, então, n vértices e n ângulos internos.

Os triângulos e os quadriláteros são exemplos de polígonos convexos.

Segundo o número de lados, os polígonos recebem nomes especiais:

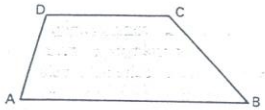
nome	n.° de lados
triângulo	3
quadrilátero	4
pentágono	5
hexágono	6
heptágono	7
octógono	8
eneágono	9
decágono	10
dodecágono	12

Diagonal do polígono é todo segmento com extremidades nos seus vértices, mas que não é um lado. Os quadriláteros têm duas diagonais. Os triângulos não têm diagonal.

6.5 — QUADRILÁTEROS ESPECIAIS

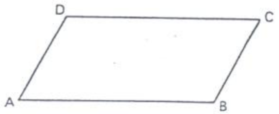
Trapézio – Um quadrilátero que tem *ao menos um par* de lados paralelos chama-se trapézio.

Na ilustração, $\overleftrightarrow{AB} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$.



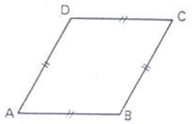
Paralelogramo – Um quadrilátero que tem *dois pares* de lados paralelos chama-se paralelogramo.

Na ilustração, $\overleftrightarrow{AB} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AD} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$.

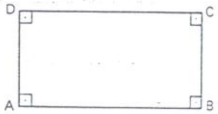


É claro que todo paralelogramo é também um trapézio.

Losango – Um quadrilátero cujos quatro lados são congruentes chama-se losango.

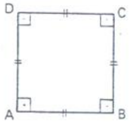


Retângulo – Um quadrilátero cujos quatro ângulos internos são *retos* chama-se retângulo.



Quadrado – Um *retângulo* que tem os quatro lados congruentes chama-se quadrado.

É claro, então, que um quadrado, além de ser um retângulo, é também um losango.



Exercícios Propostos

6.33) Prove que todo paralelogramo tem os lados paralelos congruentes entre si.

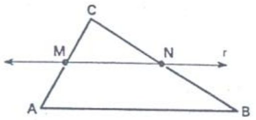
6.34) Prove que todo paralelogramo tem os ângulos internos opostos congruentes entre si.

6.35) Prove que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seu ponto médio.

6.36) Prove que todo quadrilátero cujas diagonais se cortam ao meio é um paralelogramo.

6.37) Prove que todo losango é um paralelogramo.

6.38) Pelo ponto médio M do lado $\overleftrightarrow{AC}$ do triângulo ABC, conduz-se a reta r paralela ao lado $\overleftrightarrow{AB}$, a qual encontra o lado $\overleftrightarrow{BC}$ no ponto N. Prove que N é também ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$.



6.39) No exercício anterior, prove que $MN = \frac{1}{2} AB$.

6.40) Mostre que, num quadrilátero qualquer, a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°.

6.41) Prove que todo quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos e congruentes é um paralelogramo.

6.42) Mostre que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados é igual a $(n - 2) \cdot 180°$.

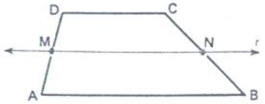
6.43) Prove que dois triângulos retângulos, que têm congruentes as hipotenusas e um dos catetos, são congruentes.

6.44) Seja um △ ABC. Por A, conduz-se a reta $r /\!/ \overleftrightarrow{BC}$, por B a reta $s /\!/ \overleftrightarrow{AC}$ e por C a reta $t /\!/ \overleftrightarrow{AB}$, as quais se interceptam duas a duas formando um triângulo. Mostre que A, B e C são os pontos médios dos lados desse triângulo.

6.45) Seja OAB um triângulo isósceles de base $\overleftrightarrow{AB}$ e tomemos P entre A e B e Q também na reta $\overleftrightarrow{AB}$, mas fora do segmento $\overleftrightarrow{AB}$. Prove que $PO < BO$ e $QO > BO$.

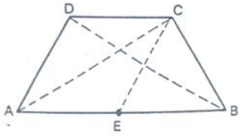
6.46) Prove que as três medianas de um triângulo cortam-se em um mesmo ponto (que é chamado baricentro do triângulo). Prove, ainda, que o baricentro divide cada mediana em dois segmentos dos quais aquele que contém o vértice tem a medida igual ao dobro da medida do outro.

6.47) Os lados paralelos do trapézio ABCD são $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Pelo ponto médio M do lado $\overleftrightarrow{AD}$, conduz-se a reta $r /\!/ \overleftrightarrow{AB}$, a qual encontra o lado $\overleftrightarrow{BC}$ em N. Prove que N é ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$.



6.48) Trapézio isósceles – O trapézio ABCD ($\overleftrightarrow{AB} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$) é isósceles se os lados laterais são congruentes: $\overleftrightarrow{AD} \equiv \overleftrightarrow{BC}$.

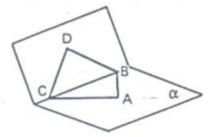
Prove que um trapézio isósceles tem os ângulos da mesma base congruentes.



Exercícios Suplementares

II.1) Quadrilátero reverso – Seja, sobre um plano α, um triângulo ABC. Consideremos o ponto D, *fora do plano* α. A união dos triângulos ABC e BCD é chamada **quadrilátero reverso**. Os segmentos $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são os *lados* e os segmentos $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são as *diagonais* do quadrilátero reverso.

Problema: Prove que dois lados opostos não podem ser paralelos.

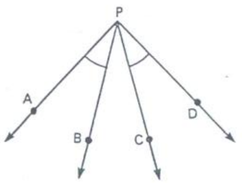


II.2) Prove que as diagonais de um quadrilátero reverso são contidas em retas reversas.

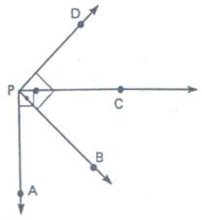
II.3) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Qualquer figura contida em uma região convexa do espaço é também um conjunto convexo.
b) Se dois planos têm um ponto em comum, sua interseção é um conjunto convexo.
c) Em qualquer caso, a interseção de dois planos é um conjunto convexo.
d) Se uma figura é convexa, qualquer segmento que tenha dois pontos distintos nessa figura está contido nela.
e) Um semi-espaço é um conjunto convexo.

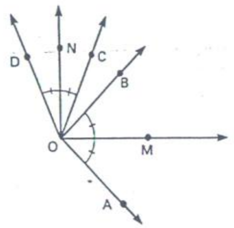
II.4) Na figura, tem-se que $A\hat{P}B \equiv C\hat{P}D$. Prove que $A\hat{P}C \equiv B\hat{P}D$.



II.5) Na figura, tem-se que $A\hat{P}C$ e $B\hat{P}D$ são ângulos retos. Prove que $A\hat{P}B \equiv C\hat{P}D$.



II.6) Na figura, $\overleftrightarrow{OM}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, $\overleftrightarrow{ON}$ é bissetriz de $C\hat{O}D$ e $M\hat{O}N$ é reto. Mostre que $B\hat{O}D$ e $A\hat{O}C$ são suplementares.



II.7) Prove que todo paralelogramo cujas diagonais são perpendiculares é um losango.

II.8) Prove que todo paralelogramo cujas diagonais são congruentes é um retângulo.

II.9) Prove que as diagonais de um losango são perpendiculares.

II.10) Prove que as diagonais de um losango são bissetrizes dos ângulos internos.

II.11) Prove que as diagonais de um trapézio isósceles são congruentes.

II.12) Prove que a medida do segmento que tem extremidades nos pontos médios dos lados laterais de um trapézio é igual à metade da soma das medidas das bases do trapézio.

II.13) Se as medidas das bases de um trapézio são **a** e **b**, calcule a medida do segmento cujas extremidades são os pontos médios das diagonais do trapézio ($a < b$).

II.14) A base média de um trapézio isósceles (isto é, o segmento que tem extremidades nos pontos médios dos lados laterais) mede 7 cm e um lado lateral mede 5 cm. Calcule o perímetro do trapézio.

II.15) Seja $\overleftrightarrow{AM}$ uma mediana do $\triangle ABC$. Prove que $AM < \dfrac{AB + AC}{2}$.

II.16) Seja $\overleftrightarrow{AM}$ uma mediana do $\triangle ABC$. Prove que $AM > \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

II.17) Prove que a soma das medidas das três medianas de um triângulo é menor do que o perímetro do triângulo.

II.18) Prove que a soma das medidas das três medianas de um triângulo é maior do que o semiperímetro do triângulo.

II.19) Mostre que, num triângulo isósceles, as alturas correspondentes aos vértices da base são congruentes.

II.20) Seja o Δ ABC, isósceles, de base $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que, sendo P um ponto pertencente ao lado $\overleftrightarrow{BC}$, a soma das distâncias de P aos outros dois lados é igual à altura relativa ao vértice B.

II.21) Seja P um ponto do interior de um triângulo eqüilátero ABC. Prove que a soma das distâncias de P aos lados do triângulo é igual à altura do triângulo.

II.22) Prove que os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso são vértices de um paralelogramo.

PARTE III

Capítulo 7 — **Retas e planos perpendiculares**

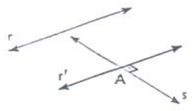
Capítulo 8 — **Ângulos, diedros, triedros e ângulos poliédricos**

Capítulo 7

Retas e planos perpendiculares

7.1 — RETAS ORTOGONAIS

Sejam **r** e **s** duas retas *reversas*. Tomemos sobre uma delas (a reta **s**, por exemplo) um ponto A qualquer e vamos conduzir por ele a reta r' // r. Nestas condições, podemos definir:



Se **r'** e **s** são perpendiculares, então **r** e **s** são **ortogonais**.

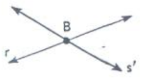
Abusando um pouco da linguagem, diremos que as retas **r** e **s** *formam ângulo reto*. Com esta idéia, as retas que "formam ângulo reto" podem ser:

- perpendiculares — se forem concorrentes;
- ortogonais — se forem reversas.

Se **r** e **s** são ortogonais, indicamos

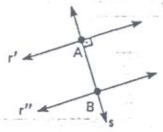
$$r \perp s \quad (\text{ou } s \perp r)$$

Observação: A definição acima somente adquire consistência lógica quando demonstramos que a relação de *ortogonalidade* independe da particular reta **r'** que tomamos, isto é, independe do particular ponto A considerado na reta **s**. Por outro lado, para podermos dizer indiferentemente $r \perp s$ ou $s \perp r$, é necessário mostrar que **r** e **s** são intercambiáveis na definição acima, ou seja, que se $r' \perp s$, então tomando-se um ponto B sobre **r** e por ele s' // s, teremos também $s' \perp r$. Isto equivale a considerar os dois teoremas seguintes.



Teorema A

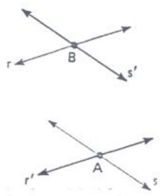
Sejam A e B pontos distintos, pertencentes à reta **s**, pelos quais conduzem-se as retas **r'** e **r''**, paralelas entre si. Nestas condições, se r' ⊥ s então r'' ⊥ s.



Na verdade, este teorema já foi demonstrado para uma situação mais geral, no capítulo anterior (veja o exercício 6.31).

Teorema B

Sejam **r** e **r'** retas paralelas entre si e **s** e **s'** também paralelas entre si, sendo **r'** e **s** concorrentes em A e **r** e **s'** concorrentes em B. Nestas condições, se r' ⊥ s, então s' ⊥ r.



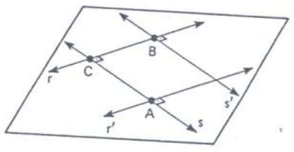
Demonstração

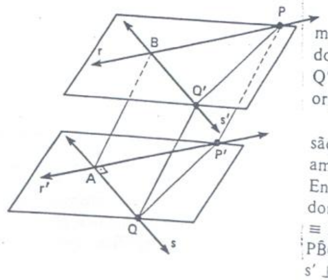
Se **r** e **s** são coplanares (então as quatro retas o são), sendo C a interseção de **r** e **s**, podemos usar duas vezes o teorema A, assim:

a) (r' ⊥ s, r // r', r ∩ s = {C}) ⇒ r ⊥ s

b) (s ⊥ r, s' // s, s' ∩ r = {B}) ⇒ s' ⊥ r

Consideremos o caso (que mais nos interessa agora) em que **r** e **s** são reversas.





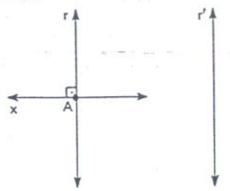
Tomemos P ∈ r e P' ∈ r', ambos num mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$, de modo que $\overline{BP} \equiv \overline{AP'}$. Tomemos Q ∈ s e Q' ∈ s', ambos num mesmo semiplano de origem $\overleftrightarrow{AB}$, de modo que $\overline{AQ} \equiv \overline{BQ'}$.

Pelo exercício 6.41, AQQ'B e AP'PB são paralelogramos, logo $\overline{QQ'}$ e $\overline{PP'}$ são ambos paralelos e congruentes a $\overline{AB}$. Então, QP'PQ' é também paralelogramo, donde $\overline{QP'} \equiv \overline{Q'P}$. Assim, △ AQP' ≡ ≡ △ BQ'P (L L L). Isto significa que $P\hat{B}Q'$ é reto, por ser congruente a $P'\hat{A}Q$: s' ⊥ r.

Exercícios Resolvidos

7.1) Prove que se x ⊥ r e r' // r, então ou x ⊥ r' ou x ⊥ r'.

Solução

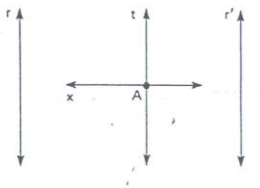


É claro que **r'** não pode ser *paralela* a **x**, pois se isso ocorresse teríamos duas retas concorrentes, **x** e **r**, paralelas à mesma reta **r'**. Então, **r'** só pode ser *concorrente* ou *reversa* à reta **x**.

Se for *concorrente*, o teorema A mencionado anteriormente garante que **x** ⊥ **r'**. Se for *reversa*, teremos x ⊥ r', pela definição de retas ortogonais.

7.2) Prove que se x ⊥ r e r' // r, então ou x ⊥ r' ou x ⊥ r'.

Solução

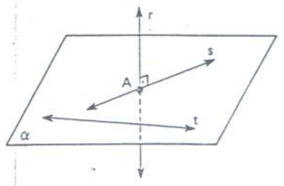


Tomemos por um ponto A ∈ x a reta t // r. Pela definição de retas ortogonais, temos x ⊥ t. Como r' // r, então também r' // t, logo (pelo exercício 7.1) ou r' ⊥ x ou r' ⊥ x.

7.2 — RETA E PLANO PERPENDICULARES ENTRE SI

Definição D12

> A reta **r** é **perpendicular** ao plano α (ou o plano α é perpendicular à reta **r**) se **r** forma ângulo reto com todas as retas contidas no plano.



Indicamos

r ⊥ α ou α ⊥ r .

Destaquemos duas conseqüências desta definição:

1.ª) *Se a reta* **r** *é perpendicular ao plano α, ela necessariamente fura α em um ponto A.*

De fato, se ela fosse contida em α ou paralela a α, seria sempre possível obter uma reta contida em α e **paralela** a **r**, não formando com ela ângulo reto.

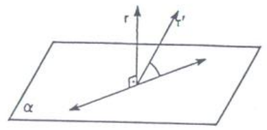
2.ª) Das retas contidas em α, *aquelas que passam pelo ponto A são perpendiculares a* **r** *e aquelas que não passam por A são ortogonais a* **r**.

Na figura anterior, portanto, temos

$$s \perp r \quad e \quad t \perp r$$

Reta e plano oblíquos

Se a reta **r** fura α, mas não é perpendicular a esse plano, dizemos que **r** e α são oblíquos.

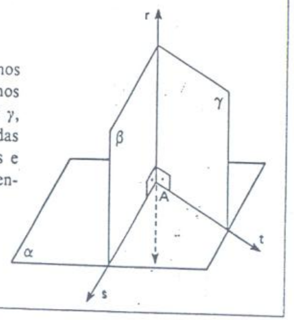


r e α são perpendiculares
r' e α são oblíquos

É necessário provar que reta e plano perpendiculares entre si **existem**. O teorema seguinte garante a consistência da definição.

Teorema T13

Dada a reta **r**, tomemos por **r** os planos distintos β e γ e o ponto $A \in r$. Vamos conduzir por A as retas $s \subset \beta$ e $t \subset \gamma$, ambas perpendiculares a **r**. Construídas deste modo, **s** e **t** são retas distintas e determinam um plano $\alpha = pl(s, t)$. Sendo assim, tem-se $r \perp \alpha$.

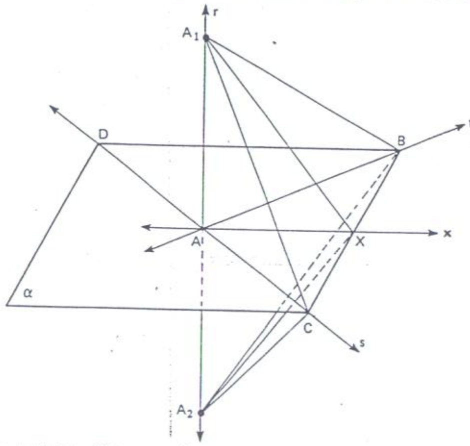


Devemos provar que:

a) Qualquer reta contida em α, que passa por A, é *perpendicular* a **r**.
b) Qualquer reta contida em α, que não passa por A, é *ortogonal* a **r**.

Demonstração

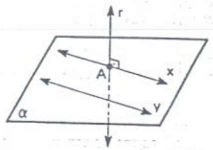
a) Seja **x** uma reta contida em α e que passa por A, distinta de **s** e de **t**. Tomemos sobre **s** os pontos C e D em lados opostos em relação a A e sobre **t** tomemos



o ponto $B \neq A$. Obtemos assim um triângulo BCD. A reta **x**, que corta o lado $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto A, corta também o lado $\overleftrightarrow{BC}$ no ponto X (veja o exercício 4.20). Tomemos sobre **r** os pontos A_1 e A_2, de tal modo que A seja ponto médio de $\overleftrightarrow{A_1A_2}$. Com estes elementos, faremos uma seqüência de implicações que nos levarão a concluir que $r \perp x$.

1.ª) Temos $\triangle AA_1C \equiv \triangle AA_2C$ (L A L) e portanto $\overleftrightarrow{A_1C} \equiv \overleftrightarrow{A_2C}$.
2.ª) Do mesmo modo, temos $\overleftrightarrow{A_1B} \equiv \overleftrightarrow{A_2B}$.
3.ª) Por essa razão, $\triangle A_1BC \equiv \triangle A_2BC$ (L L L), donde resulta que $A_1\hat{B}X \equiv A_2\hat{B}X$.
4.ª) Então tem-se $\triangle A_1BX \equiv \triangle A_2BX$ (L A L) e portanto $\overleftrightarrow{A_1X} \equiv \overleftrightarrow{A_2X}$.
5.ª) Conseqüentemente, $\triangle AA_1X \equiv \triangle AA_2X$ (L L L), donde tiramos que os ângulos $A_1\hat{A}X$ e $A_2\hat{A}X$ são congruentes. Mas estes ângulos são suplementares um ao outro; logo ambos são retos. Isto significa precisamente que $r \perp x$.

b) Provemos agora que a reta **r** é **ortogonal** a qualquer reta **y** de α *que não passa por A*.
De fato, se tomarmos por A a reta $x \parallel y$, como ficou provado na parte *a*) temos $r \perp x$, o que implica imediatamente que $r \perp y$.



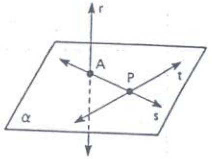
Ficou demonstrado, então, que a reta **r** forma ângulo reto com todas as retas contidas em α. Sendo assim, **r** e α são perpendiculares entre si.

Exercícios Resolvidos

7.3) Teorema T14 – Sejam no plano α as retas **s** e **t**, concorrentes em P. Seja, também, sobre a reta **s**, o ponto $A \neq P$. Vamos conduzir por A a reta **r** tal que $r \perp s$ e $r \perp t$. Nestas condições, tem-se

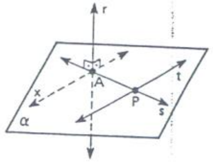
$$r \perp \alpha$$

Demonstre o T14.



Solução

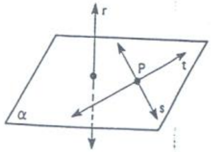
Tomando-se por A a reta $x \parallel t$, temos $r \perp x$, devido ao fato de ser $r \perp t$. Com este recurso, recaímos no teorema T13 e, assim, $r \perp \alpha$.



7.4) Teorema T15 – Sejam no plano α as retas **s** e **t** concorrentes em P. Seja **r** uma reta tal que $r \perp s$ e $r \perp t$. Sendo assim, tem-se

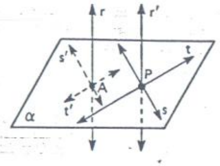
$$r \perp \alpha$$

Demonstre o T15.

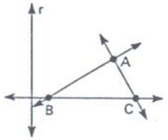


Solução

Consideremos por P a reta $r' \parallel r$. É claro que $r' \perp s$ e $r' \perp t$, pois **s** e **t** são ortogonais a **r**. Logo, $r' \perp \alpha$. Como r' fura α em P, concluímos que **r** fura também α em um ponto A (veja o exercício 2.5). Podemos então conduzir por A as retas $s' \parallel s$ e $t' \parallel t$, ambas perpendiculares a **r**. Com este recurso, recaímos no teorema T13 e, assim, $r \perp \alpha$.



7.5) Teorema T16 (teorema das três perpendiculares) – Sejam três pontos A, B e C não alinhados. Se a reta **r** forma ângulo reto com as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, então ela também forma ângulo reto com a terceira reta, $\overleftrightarrow{BC}$.
Demonstre o T16.

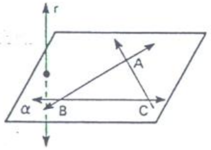


Solução

Se **r** forma ângulo reto com as duas retas concorrentes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, então essa reta **r** é perpendicular ao plano

$$\alpha = pl\,(A, B, C)$$

Logo, como a reta $\overleftrightarrow{BC}$ está contida em α, a reta **r** também forma ângulo reto com ela.



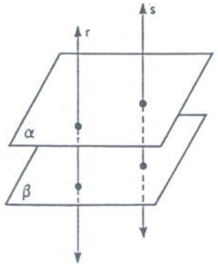
7.6) Teorema T17 – Sejam **r** uma reta e α um plano, perpendiculares entre si.

a) Se a reta **s** é paralela a **r**, então $s \perp \alpha$.
b) Se o plano β é paralelo a α, então $r \perp \beta$.

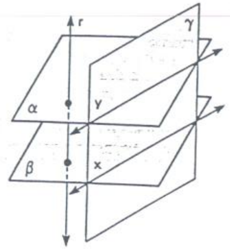
Demonstre o T17.

Solução

a) Como $r \perp \alpha$, então **r** forma ângulo reto com qualquer reta de α. Mas $s \parallel r$, logo **s** também forma ângulo reto com qualquer reta de α (como garantem os exercícios 7.1 e 7.2). Portanto, $s \perp \alpha$.



b) Tomemos uma reta qualquer $x \subset \beta$. Um plano γ conduzido por x intercepta o plano α segundo uma reta y. Como $y \parallel x$ e as retas r e y formam ângulo reto, então r e x também formam ângulo reto (garantido pelos exercícios 7.1 e 7.2).

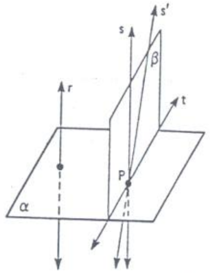


7.7) Teorema T18

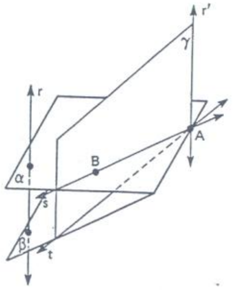
a) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas entre si.
b) Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos entre si.
Demonstre o T18.

Solução

a) Sejam r e s retas perpendiculares ao plano α. Suponhamos que r e s não sejam paralelas. Pelo ponto P onde s fura α podemos então conduzir a reta $s' \parallel r$, distinta de s. O plano $\beta = pl(s, s')$ intercepta α segundo a reta t. Pelo teorema T17, como $r \perp \alpha$ e $s' \parallel r$, então $s' \perp \alpha$. Assim, no plano β temos duas retas s e s' distintas, perpendiculares à reta t no mesmo ponto P. Isto é impossível, como já se viu no teorema do item 5.10. Portanto, r e s são paralelas entre si.



b) Sejam α e β planos perpendiculares à reta r. Suponhamos que α e β não sejam paralelos, isto é, que eles tenham em comum um ponto A. Vamos conduzir por A a reta r', $r' \parallel r$. Como r é perpendicular a α e a β, o mesmo acontece com r'. Tomemos em α o ponto $B \neq A$ e seja $\gamma = pl(B, r')$. Este plano intercepta α segundo a reta s e β segundo a reta t, ambas concorrentes com r' em A. Temos então no plano β duas retas distintas, perpendiculares à reta r' no ponto A. Isto é impossível, logo $\alpha \parallel \beta$.

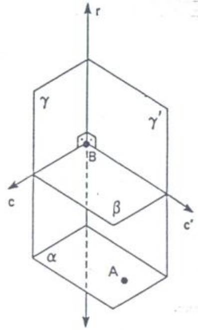


7.8) Teorema T19 – Dados uma reta r e um ponto A, pode-se conduzir um único plano que contém A e é perpendicular à reta r.
Demonstre o T19.

Solução

Tomemos por r os planos distintos γ e γ' e pelo ponto $B \in r$ tracemos a reta $c \subset \gamma$ e a reta $c' \subset \gamma'$, ambas perpendiculares à reta r. Sendo assim, o plano $\beta = pl(c, c')$ é perpendicular à reta r. Vamos então conduzir por A o plano $\alpha \parallel \beta$. Pelo teorema T17, tem-se $\alpha \perp r$. (Se $A \in \beta$, basta tomar $\alpha = \beta$.)

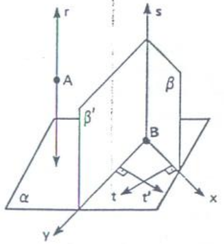
Resta provar que esse é o único plano possível. Suponhamos que por A passasse outro plano α' também perpendicular a r. Pelo teorema T18, os planos α e α' deveriam ser paralelos. Entretanto, isso é impossível, pois α e α' têm o ponto A em comum.



7.9) Teorema T20 – Dados um plano α e um ponto A, pode-se conduzir uma única reta que passa por A e é perpendicular ao plano α.
Demonstre o T20.

Solução

Tomemos em α as retas concorrentes t e t' e pelo ponto $B \in \alpha$ tracemos o plano $\beta \perp t$ e o plano $\beta' \perp t'$ (como garante o teorema T19). Mostremos que $\beta \neq \beta'$. Seja $x = \alpha \cap \beta$ e $y = \alpha \cap \beta'$. É claro que $t \perp x$ e $t' \perp y$. Se fosse $\beta = \beta'$, então seria $x = y$, o que é absurdo, pois teríamos duas retas concorrentes t e t', perpendiculares à mesma reta $x = y$, todas contidas num só plano (veja o exercício 6.5). Sendo assim, $\beta \neq \beta'$.



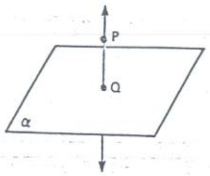
Logo, podemos indicar por s a interseção de β e β'. Como s forma ângulo reto com t e t', é claro que $s \perp \alpha$. Tomemos então por A a reta $r \parallel s$ (se $A \in s$, basta tomar $r = s$). Pelo teorema T17, tem-se $r \perp \alpha$.

Resta provar que essa é a única reta possível. Suponhamos que por A passasse outra reta r' também perpendicular a α. Pelo teorema T18, as retas r e r' deveriam ser paralelas. Entretanto, isso é impossível, pois r e r' têm o ponto A em comum.

Distância entre um ponto e um plano

Dados o ponto P e o plano α, seja Q o ponto onde o plano α encontra a reta perpendicular conduzida por P. A distância entre o ponto P e o plano α é definida como sendo a distância entre P e Q:

$$\delta_{P\alpha} = \delta_{PQ} = PQ$$

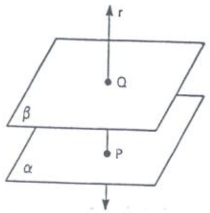


O ponto Q chama-se projeção ortogonal de P sobre o plano α (ou, simplesmente, *projeção* de P sobre α).

Distância entre planos paralelos

Dados dois planos α e β paralelos, por um ponto $P \in \alpha$ vamos conduzir a reta **r**, perpendicular a ambos os planos. Seja Q a interseção de **r** e β. A distância entre os planos α e β é definida como sendo a distância entre P e Q:

$$\delta_{\alpha\beta} = \delta_{PQ} = PQ$$



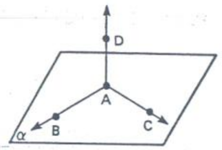
Exercícios Propostos

7.10) A reta **r** é paralela ao plano α e $A \in \alpha$. Construa por A a reta **s**, contida em α e ortogonal a **r**.

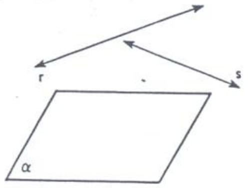
7.11) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F).

a) Se duas retas são ortogonais, elas são reversas.
b) Se duas retas são reversas, elas são ortogonais.
c) Se uma reta é perpendicular a um plano, ela é perpendicular a todas as retas do plano.
d) Se uma reta é perpendicular a um plano, ela forma ângulo reto com qualquer reta do plano.
e) Se duas retas são paralelas e um plano é perpendicular a uma delas, esse plano é também perpendicular à outra.
f) Dois planos distintos, perpendiculares a uma reta **r**, são paralelos entre si.
g) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda reta perpendicular à reta dada está contida nesse plano.
h) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano.
i) Se uma reta e um plano são perpendiculares, toda reta perpendicular à reta dada é paralela ao plano ou está contida nele.
j) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, ela é perpendicular ao plano.
k) Se uma reta forma ângulo reto com duas retas paralelas de um plano, ela é perpendicular a esse plano.
l) Se uma reta forma ângulo reto com duas retas distintas de um plano, ela é perpendicular a esse plano.
m) A reta **r** é paralela ao plano α. Toda reta perpendicular a **r** é perpendicular a α.

7.12) No plano α tem-se o ângulo reto $B\hat{A}C$. Pelo vértice A conduz-se a reta $\overleftrightarrow{AD} \perp \alpha$. Mostre que $\overleftrightarrow{AB} \perp$ pl (A, C, D).

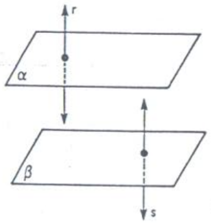


7.13) Sejam **r** e **s** retas reversas e α um plano paralelo a ambas. Prove que toda reta que forma ângulo reto com ambas as retas é perpendicular ao plano α.

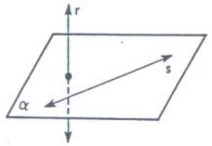


7.14) Sejam **r** e **s** retas reversas e α um plano paralelo a ambas. Prove que toda reta perpendicular a α forma ângulo reto com **r** e com **s**.

7.15) Dois planos α e β são paralelos. Tomam-se duas retas distintas **r** e **s**, tais que $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$. Prove que $r \parallel s$.



7.16) São dadas uma reta **s** contida num plano α e uma reta $r \perp \alpha$. Prove que existe um único plano que contém **r** e é perpendicular à reta **s**.



7.17) A reta **r** é perpendicular ao plano α. Por um ponto $A \in \alpha$ toma-se a reta **s**, que forma ângulo reto com **r**. Prove que $s \subset \alpha$.

7.18) A reta **r** é perpendicular ao plano α. Por um ponto $A \notin \alpha$ toma-se a reta **s**, que forma ângulo reto com **r**. Prove que $s \parallel \alpha$.

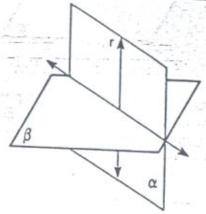
7.19) As retas **r** e **s** são ortogonais. Construa um plano que contenha **r** e seja perpendicular a **s**.

7.20) São dados a reta **r** e o plano α, oblíquos. Sobre α toma-se o ponto $A \notin r$. Construa por A uma reta contida em α e que seja ortogonal a **r**.

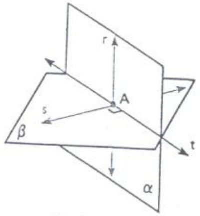
7.3 — PLANOS PERPENDICULARES ENTRE SI

Definição D13

> O plano α é **perpendicular** ao plano β se existe uma reta $r \subset \alpha$ que seja perpendicular a β.



Indica-se $\alpha \perp \beta$



Seja $t = \alpha \cap \beta$. Temos $r \perp t$. Pelo ponto A, interseção de **r** e β, tomemos em β a reta $s \perp t$. Como $s \perp r$, é claro que $s \perp \alpha$, logo *o plano β tem também uma reta que é perpendicular a α.*

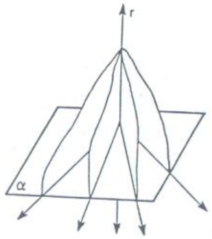
Isto mostra que é indiferente dizer que α é perpendicular a β ou que β é perpendicular a α. Podemos indicar, então, indiferentemente:

$$\alpha \perp \beta \quad \text{ou} \quad \beta \perp \alpha$$

e podemos dizer que os dois planos são perpendiculares entre si.

Uma conseqüência imediata da definição é a seguinte.

> Se a reta **r** é perpendicular ao plano α, então todo plano que contém **r** é perpendicular a α.

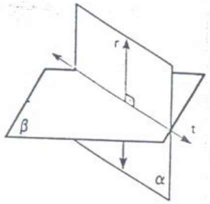


Teorema T21

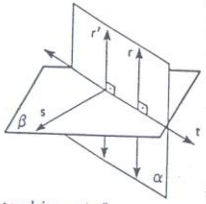
> Se $\alpha \perp \beta$ então toda reta contida em α, que é perpendicular à interseção, é perpendicular a β.

Em símbolos:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ t = \alpha \cap \beta \\ r \subset \alpha \\ r \perp t \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \beta$$



Demonstração



Se $\alpha \perp \beta$, existe uma reta $r' \subset \alpha$ que é perpendicular a β. Essa reta **r'** é necessariamente perpendicular à reta $t = \alpha \cap \beta$. Conseqüentemente, ou $r = r'$ ou $r \parallel r'$.

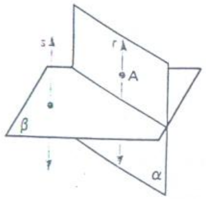
Se $r = r'$, é imediato que $r \perp \beta$.

Se $r \parallel r'$, então pelo teorema T17 tem-se também $r \perp \beta$.

Teorema T22

> Se $\alpha \perp \beta$, então toda reta que é perpendicular a β, ou está contida em α ou é paralela a α.

No caso da figura, tem-se $r \subset \alpha$, porque **r** tem o ponto A em comum com α. Já a reta **s** é paralela a α: não tem ponto em comum com esse plano.

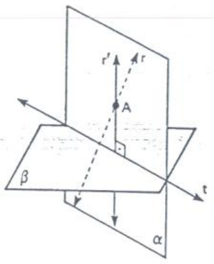


Demonstração

Seja $r \perp \beta$. Se r não tem ponto em comum com α, então é imediato que $r /\!/ \alpha$.

Suponha-se que r e α têm um ponto A em comum e provemos que $r \subset \alpha$.

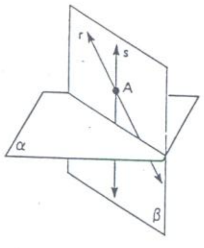
Seja $t = \alpha \cap \beta$. Vamos conduzir por A a reta r' tal que $r' \subset \alpha$ e $r' \perp t$. Pelo teorema T21, $r' \perp \beta$. Mas, sendo assim, pelo T20, $r' = r$. Logo, $r \subset \alpha$.

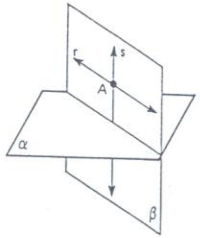


Teorema T23

> Se a reta r *não é perpendicular* ao plano α, então existe um único plano que contém r e é perpendicular a α.

Demonstração





A demonstração vale tanto para o caso em que r e α são *oblíquos*, como para os casos em que $r \subset \alpha$ ou $r /\!/ \alpha$.

Seja $A \in r$. Tracemos por A a reta $s \perp \alpha$. É claro que $r \neq s$, logo existe $\beta = \text{pl}(r, s)$. Temos $\beta \perp \alpha$, pois β contém a reta s, que é perpendicular a α.

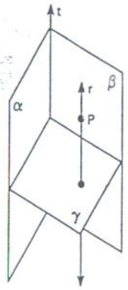
Provemos que β é o único plano possível. Se existisse outro plano $\beta' \perp \alpha$ e contendo r, esse plano conteria o ponto A. Então, pelo teorema T22, $s \subset \beta'$. Mas nesse caso, seria

$$\beta' = \text{pl}(r, s) = \beta$$

7.21) Sejam α e β dois planos secantes e seja γ um plano perpendicular a ambos. Prove que γ é perpendicular à interseção de α e β.

Solução

Indiquemos por t a interseção de α e β. Seja P um ponto situado fora de α e de β e tomemos por P a reta $r \perp \gamma$. Pelo teorema T22, tem-se $r /\!/ \alpha$ e $r /\!/ \beta$. Logo, pelo T8, $r /\!/ t$. Assim, pelo T17, tem-se $t \perp \gamma$.

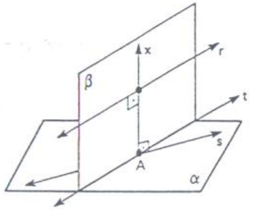


7.22) Dadas duas retas reversas, construa uma reta que seja perpendicular a ambas.

Solução

Sejam r e s duas retas reversas. Passemos por s o plano $\alpha /\!/ r$ e por r o plano $\beta \perp \alpha$ (veja os exercícios 3.7 e 3.8 e o teorema T23).

É claro que a reta s *fura* o plano β num ponto A, pois se ela fosse paralela a ele, ela seria paralela à reta r. Então, pelo ponto A podemos conduzir a reta $x \perp r$. A reta x é a reta procurada.



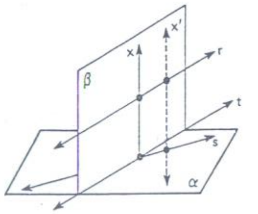
Basta provar que $x \perp s$. Para isto, é suficiente notar que, sendo $t = \alpha \cap \beta$, tem-se $r /\!/ t$, logo $x \perp t$. Assim, $x \perp \alpha$ e então $x \perp s$.

Portanto, a reta x é perpendicular a r e a s.

7.23) Prove que a reta construída no exercício anterior é única.

Solução

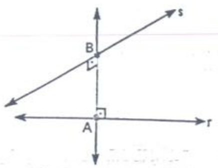
Suponhamos que exista outra reta x', perpendicular a r e a s. Como $t /\!/ r$, então x' forma ângulo reto com s e com t, logo $x' \perp \alpha$. Conclui-se, pelo teorema T18, que $x /\!/ x'$ e que, além disso, r e s estão contidas no plano pl (x, x'). Isto é impossível, pois r e s são reversas.



Distância entre duas retas reversas

Sejam $A \in r$ e $B \in s$ os pontos onde a perpendicular comum corta as duas retas reversas r e s. A distância entre as duas retas reversas é definida como sendo a distância entre A e B:

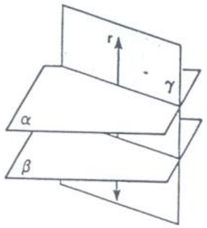
$$\delta_{rs} = \delta_{AB} = AB$$



7.24) Prove que, se dois planos são paralelos, então todo plano perpendicular a um deles é também perpendicular ao outro.

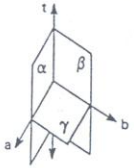
Solução

Sejam $\alpha /\!/ \beta$ e $\gamma \perp \alpha$. Provemos que $\gamma \perp \beta$. Se $\gamma \perp \alpha$, existe uma reta $r \subset \gamma$ tal que $r \perp \alpha$. Mas pelo teorema T17, $r \perp \beta$. Logo, $\gamma \perp \beta$.



Exercícios Propostos

7.25) Sejam α e β dois planos perpendiculares entre si e seja γ um plano perpendicular à interseção t de α e β. Se $a = \alpha \cap \gamma$ e $b = \beta \cap \gamma$, prove que $a \perp b$.



7.26) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):

a) Dois planos perpendiculares entre si são secantes.
b) Se um plano α contém uma reta perpendicular a outro plano β, então $\alpha \perp \beta$.
c) Dados uma reta e um plano, existe um único plano que contém a reta e é perpendicular ao plano dado.
d) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles, que é perpendicular ao outro, é perpendicular à interseção dos dois planos.
e) Dois planos distintos, perpendiculares a um plano dado, são paralelos entre si.
f) Dois planos distintos, perpendiculares a um plano dado, são perpendiculares entre si.
g) Se uma reta r é perpendicular a um plano α, qualquer plano que contém r é perpendicular a α.
h) Se o plano α é perpendicular ao plano β, então toda reta contida em α é perpendicular a β.
i) Se a reta r é paralela ao plano α, então todo plano perpendicular a α é perpendicular a r.

7.27) Sejam a reta r e o plano α paralelos entre si. Prove que todo plano perpendicular a r é perpendicular a α.

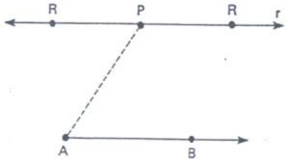
7.28) Dados dois planos α e β secantes e um ponto P qualquer, construa um plano que passa por P e é perpendicular a α e a β.

Capítulo

8

Ângulos, diedros, triedros e ângulos poliédricos

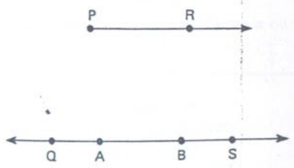
8.1 — ÂNGULOS DE LADOS CONCORDANTES



Dados uma semi-reta $\overrightarrow{AB}$ e um ponto P qualquer, fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$, tomemos por P a reta **r** paralela a $\overleftrightarrow{AB}$. Sobre **r** consideremos os pontos R e R', situados em semiplanos opostos com relação à reta $\overleftrightarrow{AP}$, de modo que B e R estejam no mesmo semiplano. Ficam determinadas, assim, as semi-retas $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PR'}$. Dizemos, então, que:

> $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm **mesmo sentido** (ou **são concordantes**);
> $\overrightarrow{PR'}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm **sentidos opostos** (ou **são discordantes**).

Sejam agora duas semi-retas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{QS}$ *contidas numa mesma reta*. Por um ponto P fora da reta $\overleftrightarrow{AB}$ vamos conduzir a semi-reta $\overrightarrow{PR}$, paralela a $\overrightarrow{AB}$, e com o mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$. Assim, se $\overrightarrow{QS}$ e $\overrightarrow{PR}$ também tiverem mesmo sentido, diremos que $\overrightarrow{QS}$ e $\overrightarrow{AB}$ têm mesmo sentido. Com isto, estendemos a noção de sentidos concordantes a qualquer par de semi-retas paralelas.



Intuitivamente, duas semi-retas têm mesmo sentido se são paralelas e "apontam" para o mesmo lado.

Vamos agora demonstrar o teorema seguinte, que é importante para dar consistência às definições que faremos depois.

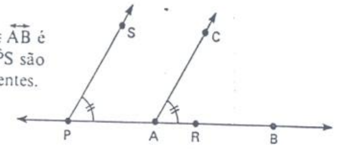
Teorema T24

Se os ângulos BÂC e RP̂S são tais que $\overrightarrow{AB}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{AC}$ tem o mesmo sentido de $\overrightarrow{PS}$, então BÂC ≡ RP̂S.

Em outras palavras, dois ângulos que têm os lados respectivamente *concordantes* são congruentes.

Demonstração

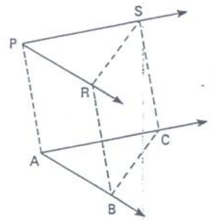
O caso particular em que $P \in \overleftrightarrow{AB}$ é trivial, pois os ângulos BÂC e RP̂S são *correspondentes*, logo são congruentes.



Tomemos o caso em que P não pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$. Não perdemos a generalidade da demonstração se supomos que

$$\overline{AB} \equiv \overline{PR} \text{ e } \overline{AC} \equiv \overline{PS}$$

Como ABRP é paralelogramo (pois tem dois lados opostos paralelos e congruentes), temos que $\overline{AP}$ e $\overline{BR}$ são paralelos e congruentes. Da mesma forma, $\overline{AP}$ e $\overline{CS}$ são paralelos e congruentes. Assim, BCSR também é paralelogramo, donde $\overline{RS} \equiv \overline{BC}$. Portanto, pelo L L L, △ ABC ≡ △ PRS, donde

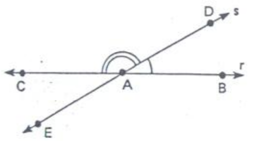


BÂC ≡ RP̂S

Nota: É claro que as semi-retas $\overrightarrow{PR'}$ e $\overrightarrow{PS'}$ *opostas* a $\overrightarrow{PR}$ e $\overrightarrow{PS}$ definem um ângulo R'P̂S' congruente a BÂC, isto é, se dois ângulos têm os lados respectivamente *discordantes*, eles são congruentes. Não se pode dizer o mesmo se eles são concordantes em um dos lados e discordantes quanto ao outro (neste caso, eles seriam suplementares).

8.2 — ÂNGULO ENTRE DUAS RETAS

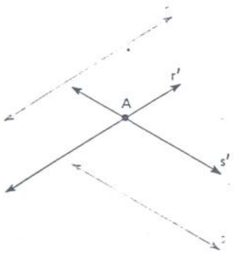
Consideremos inicialmente o caso de duas retas **concorrentes**, mas não perpendiculares entre si. Tomemos B e C sobre **r** e D e E sobre **s**, de modo que A esteja entre B e C e também entre D e E. Obtemos quatro ângulos, BÂD, DÂC, CÂE, EÂB, dois dos quais são agudos (congruentes entre si) e os outros dois são obtusos (congruentes entre si). Convencionaremos que o ângulo entre as retas **r** e **s** é qualquer um dos dois ângulos *agudos*. Adotemos, ainda, uma convenção mais livre: *qualquer ângulo agudo que seja congruente a esses dois ângulos* será considerado como sendo um ângulo entre as retas **r** e **s**. Fazemos isto porque estamos interessados fundamentalmente naquilo que todos esses ângulos têm em comum: **a sua medida.**



Se **r** e **s** são **perpendiculares**, então *qualquer ângulo reto* é um ângulo entre **r** e **s**.

Se **r** e **s** são **coincidentes**, então *qualquer ângulo nulo* é um ângulo entre **r** e **s**.

Consideremos agora o caso em que as retas são **reversas** ou **paralelas** (isto é, não têm ponto comum). Por um ponto A qualquer tomam-se as retas r' // r e s' // s. *O ângulo entre as retas r e s é o ângulo entre r' e s'.* Indicamos por $\widehat{rs}$ a medida desse ângulo.



Observações

1.ª) Por essa definição, o ângulo entre duas retas só pode ser **nulo**, ou **agudo**, ou **reto**. Trata-se, portanto, de um conceito diferente do ângulo geométrico formado por duas semi-retas de mesma origem, cuja medida varia de 0° a 180°.

2.ª) A definição de ângulo entre duas retas dada acima, para o caso de retas reversas, só adquire consistência se demonstramos que a medida desse ângulo independe do particular ponto A considerado. Essa independência está garantida pelo teorema T24, demonstrado no item anterior.

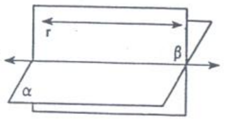
8.3 — ÂNGULO ENTRE RETA E PLANO

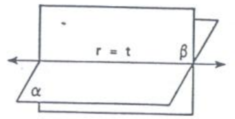
Vamos estabelecer o conceito de ângulo entre uma reta **r** e um plano α.

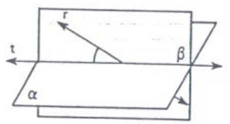
Caso em que r não é perpendicular a α

Se **r** é paralela a α, ou está contida nele, ou se **r** e α são oblíquos, existe um único plano $\beta \perp \alpha$, que contém **r** (teorema T23). Seja $t = \alpha \cap \beta$.

Nessas condições, *o ângulo entre* **r** *e* α *é o ângulo entre as retas* **r** *e* **t**.



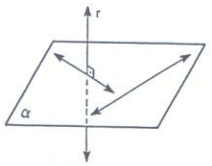




Então, se $r /\!/ \alpha$ ou se $r \subset \alpha$, esse ângulo é **nulo**. Se **r** e α são oblíquos, esse ângulo é **agudo**.

A reta **t** chama-se *projeção ortogonal* (ou, simplesmente, *projeção*) de r sobre α. Assim, o ângulo entre **r** e α é o ângulo entre **r** e sua projeção sobre α.

Caso em que $r \perp \alpha$



Se $r \perp \alpha$, então *o ângulo entre* r *e* α *é qualquer ângulo reto.*

Esse é o ângulo que **r** forma com qualquer reta contida em α.

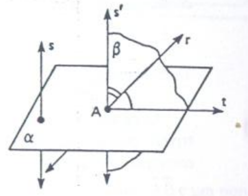
Neste caso, não podemos falar em ângulo entre **r** e sua projeção, porque a projeção de **r** sobre α é um ponto: exatamente aquele onde **r** fura α.

Notação: A medida do ângulo entre **r** e α é indicada por $\widehat{r\alpha}$.

Exercícios Resolvidos

8.1) São dados um plano α e duas retas, **r** e **s**, sendo $s \perp \alpha$. Prove que o ângulo entre **r** e α e o ângulo entre **r** e **s** são complementares.

Solução



O caso mais interessante é aquele em que **r** e α são oblíquos. Se **r** fura α em A, seja $s' /\!/ s$ por A. O plano β determinado por **r** e **s'** é perpendicular a α. Nesse plano, com vértice em A, temos um ângulo reto formado pelas retas s' e $t = \alpha \cap \beta$. Este ângulo é dividido em dois ângulos complementares pela reta **r**. Esses dois ângulos complementares são exatamente o ângulo entre **r** e **s** e o ângulo entre **r** e α.

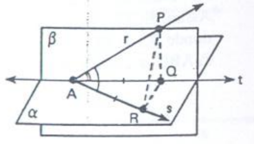
Passemos aos casos particulares em que $r \perp \alpha$, $r /\!/ \alpha$ ou $r \subset \alpha$.

Se $r \perp \alpha$, então $r /\!/ s$ (ou $r = s$). Assim, o ângulo entre **r** e **s** mede 0°, enquanto que o ângulo entre **r** e α mede 90°. São, portanto, complementares.

Se $r /\!/ \alpha$ ou $r \subset \alpha$, então $r \perp s$ (ou $r \perp s$). Assim, o ângulo entre **r** e **s** mede 90°, enquanto que o ângulo entre **r** e α mede 0°. São também complementares.

8.2) A reta **r** e o plano α são oblíquos e $r \cap \alpha = \{A\}$. Seja **s** uma reta qualquer contida em α e passando por A, mas não coincidente com a projeção ortogonal **t** de **r** sobre α. Prove que a medida do ângulo entre **r** e **t** é menor do que a do ângulo entre **r** e **s**.

Solução



Seja $P \in r$, $P \neq A$. A reta perpendicular a α por P encontra esse plano no ponto $Q \in t$. Tomemos sobre **s** o ponto R tal que $P\hat{A}R$ não seja obtuso e $\overleftrightarrow{AR} \equiv \overleftrightarrow{AQ}$. Assim, o ângulo entre **r** e **s** é $P\hat{A}R$ e o ângulo entre **r** e **t** é $P\hat{A}Q$. Podemos então fazer a prova. O $\triangle PQR$ é retângulo em Q, logo $PR > PQ$ (veja o exercício 6.16). Para os triângulos $\triangle ARP$ e $\triangle AQP$, temos:

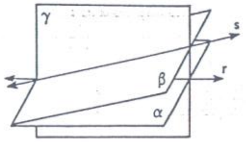
$$\overleftrightarrow{AR} \equiv \overleftrightarrow{AQ}$$
$$\overleftrightarrow{AP} \equiv \overleftrightarrow{AP}$$
$$PR > PQ$$

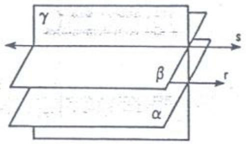
Então (veja o exercício 6.21),

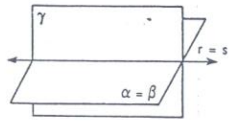
$$\text{med}\,(P\hat{A}Q) < \text{med}\,(P\hat{A}R)$$

Nota: Este exercício mostra que o ângulo entre a reta **r** e o plano α é o *menor* ângulo que a reta **r** forma com as retas de α.

8.4 — ÂNGULO ENTRE DOIS PLANOS







Dados dois planos, α e β, consideremos um plano γ qualquer, perpendicular a ambos. Sejam $r = \alpha \cap \gamma$ e $s = \beta \cap \gamma$. *O ângulo entre α e β é o ângulo entre r e s.*

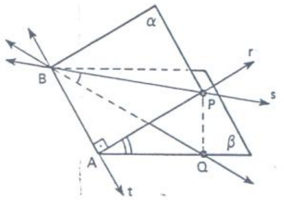
Assim, se $\alpha /\!/ \beta$ ou $\alpha = \beta$, o ângulo entre α e β é um ângulo **nulo**. Se α e β são secantes, então o ângulo entre α e β é **agudo** ou **reto** (este último caso ocorrendo se $\alpha \perp \beta$).

É claro que esta definição independe do particular plano γ considerado. De fato, se outro plano γ' cortasse α em r′ e β em s′, teríamos $r' /\!/ r$ e $s' /\!/ s$, logo o ângulo entre r′ e s′ e o ângulo entre r e s teriam a mesma medida.

A medida do ângulo entre α e β é indicada por $\widehat{\alpha\beta}$.

Exercícios Resolvidos

8.3) Sejam α e β dois planos secantes, não perpendiculares entre si. Sendo $t = \alpha \cap \beta$, tomemos $P \in \alpha$, fora de t e por esse ponto tracemos a reta $r \perp t$ e a reta s concorrente com t, mas não perpendicular a esta reta. Demonstre que o ângulo entre r e β é maior do que o ângulo entre s e β.



Solução

Sejam A e B as interseções, respectivamente, de r e s com t, e seja Q o ponto de interseção do plano β com a perpendicular a esse plano conduzida por P. Assim, o ângulo entre r e β é $P\hat{A}Q$ e o ângulo entre s e β é $P\hat{B}Q$.

O $\triangle ABP$ é retângulo em A, logo $BP > AP$. Vamos construir uma figura plana que seja

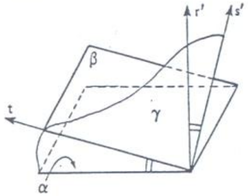
a união de dois triângulos: $\triangle A'P'Q'$ e $\triangle B'P'Q'$, respectivamente congruentes aos triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle BPQ$, e de modo que os vértices A′ e B′ fiquem situados em semiplanos opostos em relação a $\overleftrightarrow{P'Q'}$. A figura obtida é um triângulo $\triangle A'B'P'$ (pois A′, Q′ e B′ estão alinhados). Como $B'P' > A'P'$, temos $\text{med}(\widehat{A'}) > \text{med}(\widehat{B'})$, donde

$$\text{med}(P\hat{A}Q) > \text{med}(P\hat{B}Q)$$

Nota: Este exercício mostra que o ângulo entre o plano α e o plano β é o *maior* ângulo que o plano β forma com as retas de α.

8.4) Prove que a medida do ângulo entre dois planos α e β é igual à medida do ângulo entre as retas r e s, sendo $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$.

Solução



Seja γ um plano perpendicular a α e a β e seja $t = \beta \cap \gamma$. É claro que $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{t\alpha}$. Consideremos em γ as retas $r' /\!/ r$ e $s' /\!/ s$. É claro que $\widehat{rs} = \widehat{r's'}$. Vamos aplicar o resultado do exercício 8.1.

Como $r' \perp \alpha$, temos

$$\widehat{t\alpha} + \widehat{tr'} = 90°$$

Como $s' \perp \beta$, temos

$$\widehat{r'\beta} + \widehat{r's'} = 90°$$

Então,

$$\widehat{t\alpha} + \widehat{tr'} = \widehat{r'\beta} + \widehat{r's'}$$

Mas $\widehat{tr'} = \widehat{r'\beta}$, logo

$$\widehat{t\alpha} = \widehat{r's'}$$

isto é,

$$\widehat{\alpha\beta} = \widehat{rs}$$

Note que a figura que fizemos mostra dois planos α e β secantes, mas a demonstração não levou em conta essa situação particular, valendo portanto para qualquer posição relativa de α e β.

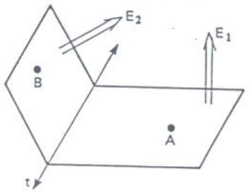
8.5) Se $\alpha \parallel \alpha'$ e $\beta \parallel \beta'$, prove que $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{\alpha'\beta'}$.

Solução

Tomemos as retas $r \perp \alpha$ e $s \perp \beta$. É claro que $r \perp \alpha'$ e $s \perp \beta'$. Pelo exercício anterior, temos $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{rs}$ e também $\widehat{\alpha'\beta'} = \widehat{rs}$, logo $\widehat{\alpha\beta} = \widehat{\alpha'\beta'}$.

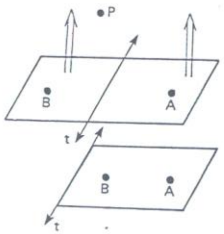
8.5 — DIEDROS

Uma reta **t** e dois pontos A e B fora dela determinam dois **semiplanos fechados**: (t, A) e (t, B). Suponha-se, primeiramente, que eles não estão contidos num mesmo plano. Seja E_1 o semi-espaço de origem (t, A) que contém B e seja E_2 o semi-espaço de origem (t, B) que contém A (estamos imaginando que estes semi-espaços são fechados).



> A interseção $E_1 \cap E_2$ é uma região do espaço que recebe o nome de **diedro**.

Tomemos agora o caso em que (t, A) e (t, B) são semiplanos do mesmo plano. Eles podem ser opostos ou coincidentes. Se (t, A) e (t, B) são semiplanos opostos, tomando-se um ponto P fora do plano deles obtemos um semi-espaço fechado, que será considerado como um diedro raso (por analogia com o ângulo raso).



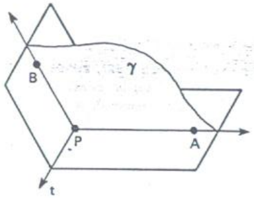
Se (t, A) = (t, B), então esse semiplano recebe o nome de diedro nulo.

Para indicar um diedro podemos usar várias notações, como di (t, A, B) ou AtB ou, ainda, se não houver possibilidade de dúvida, di (t).

Os semiplanos (t, A) e (t, B) são as faces do diedro e a reta **t** é a sua aresta. A união das duas faces é a superfície diédrica e os demais pontos do diedro formam seu interior.

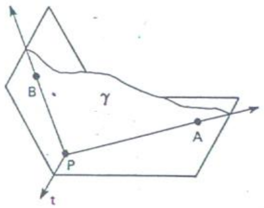
8.6 — MEDIDA DE UM DIEDRO

Dado um diedro de aresta **t**, seja γ um plano perpendicular à reta **t** num ponto P. As semi-retas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são as interseções de γ com as faces do diedro.



> A medida do diedro é a medida do ângulo $A\hat{P}B$.
>
> med $(A\hat{t}B)$ = med $(A\hat{P}B)$

O ângulo $A\hat{P}B$ é chamado seção reta do diedro. É importante demonstrar que *todas as seções retas de um diedro são congruentes*, para que a medida definida acima tenha significado.



Se γ é um plano qualquer que intercepta a aresta do diedro, então a interseção de γ com o diedro é um ângulo que se denomina seção do diedro. A observação acima se baseia no teorema seguinte.

Teorema T25

> Seções paralelas de um diedro são congruentes.

Demonstração

A demonstração é imediata. Basta notar que as seções paralelas são *ângulos de lados concordantes*, donde concluímos que são congruentes (teorema T24).

Observação: Deve-se notar a distinção entre os conceitos de *medida de um diedro* e *medida do ângulo entre dois planos*. A primeira pode variar entre 0° e 180°, enquanto que a segunda varia de 0° a 90°, como ficou convencionado. Assim, por exemplo, se dois semiplanos formam um diedro de 135°, os planos que contêm esses semiplanos formam ângulo de 45°.

Por analogia com os **ângulos planos**, podemos atribuir aos diedros os termos *diedro reto*, *agudo*, *obtuso*, *diedros adjacentes*, *opostos pela aresta*, *congruentes*, *complementares*, *suplementares*.

Exercícios Resolvidos

8.6) Sejam um diedro AîB e um ângulo $P\hat{Q}R$ tais que o lado $\overleftrightarrow{QP}$ do ângulo é perpendicular à face (t, A) do diedro e o lado $\overleftrightarrow{QR}$ do ângulo é perpendicular à face (t, B) do diedro. Mostre que

$$\text{med}(A\hat{i}B) = \text{med}(P\hat{Q}R)$$
$$\text{ou med}(A\hat{i}B) + \text{med}(P\hat{Q}R) = 180°$$

Solução

As *retas* que contêm os lados do ângulo são perpendiculares aos *planos* que contêm as faces do diedro. Como vimos no exercício 8.4, o ângulo entre essas retas tem a mesma medida do ângulo entre esses planos. Seja θ essa medida. Então, a medida do ângulo $P\hat{Q}R$ ou é θ ou é $180° - \theta$, o mesmo ocorrendo com a medida do diedro AîB. Fica claro, portanto, que se tem

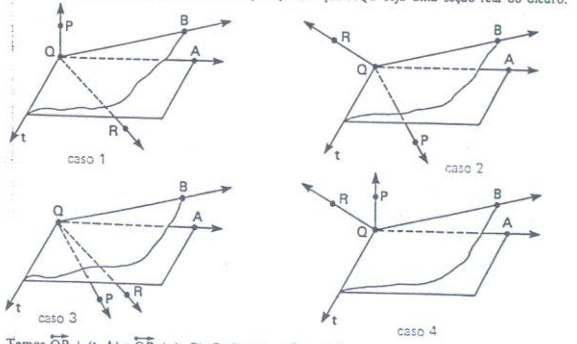
$$\text{med}(A\hat{i}B) = \text{med}(P\hat{Q}R)$$

(ambas iguais a θ ou ambas iguais a $180° - \theta$) ou então:

$$\text{med}(A\hat{i}B) + \text{med}(P\hat{Q}R) = 180°$$

(sendo uma igual a θ e a outra $180° - \theta$).

Observação: Suponha-se, para facilitar, que $Q \in t$ e que $A\hat{Q}B$ seja uma seção reta do diedro.



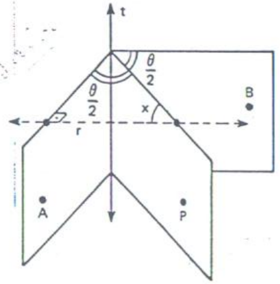
Temos $\overleftrightarrow{QP} \perp$ (t, A) e $\overleftrightarrow{QR} \perp$ (t, B). Os ângulos $A\hat{Q}B$ e $P\hat{Q}R$ serão *suplementares* nas duas situações seguintes:

Caso 1: $\overleftrightarrow{QP}$ e (t, B) estão no mesmo semi-espaço de origem (t, A) e, além disso, $\overleftrightarrow{QR}$ e (t, A) estão no mesmo semi-espaço de origem (t, B).

Caso 2: $\overleftrightarrow{QP}$ e (t, B) estão em semi-espaços opostos de origem (t, A) e, além disso, $\overleftrightarrow{QR}$ e (t, A) estao em semi-espaços opostos de origem (t, B).

Nos casos 3 e 4, os dois ângulos são *congruentes*.

8.7) Semiplano bissetor de um diedro – Dado um diedro não nulo AîB, seja P um ponto do interior desse diedro, tal que os diedros AîP e PîA sejam congruentes (tenham mesma medida). *O semiplano (t, P) chama-se bissetor do diedro AîB*. Seja θ a medida do diedro AîB. Se uma reta r é perpendicular a uma face do diedro, quanto mede o ângulo entre essa reta e o semiplano bissetor?



Solução

É fácil perceber que, sendo x a medida do ângulo entre r e o semiplano bissetor, tem-se:

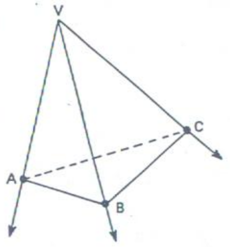
$$x + \text{med}(A\hat{i}P) = 90°$$

Mas

$$\text{med}(A\hat{i}P) = \frac{1}{2}\,\text{med}(A\hat{i}B) = \frac{\theta}{2}$$

logo, $x + \frac{\theta}{2} = 90°$, donde $x = 90° - \frac{\theta}{2}$.

8.7 — TRIEDROS



Sejam $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$, $\overleftrightarrow{VC}$ três semi-retas *não coplanares* e os semi-espaços fechados:

— E_1: com origem no pl (V, A, B) e contendo C
— E_2: com origem no pl (V, A, C) e contendo B
— E_3: com origem no pl (V, B, C) e contendo A

A interseção $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ é uma região do espaço que recebe o nome de **triedro**.

Indicamos tri (V, A, B, C). Examinemos alguns nomes relacionados ao triedro.

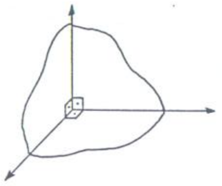
Vértice: é o ponto V.
Arestas: são as semi-retas $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$.
Faces : são os ângulos $A\hat{V}B$, $A\hat{V}C$, $B\hat{V}C$.

Note que cada aresta define, com as duas faces que a contêm, um diedro. Temos então três diedros, cada um relativo a uma das arestas (ou, também, cada um oposto a uma das faces).

A união das três faces é a superfície triédrica. Os demais pontos do triedro formam o seu interior.

Triedro trirretângulo

Um triedro é chamado trirretângulo se as suas três faces são ângulos retos.



Exercícios Resolvidos

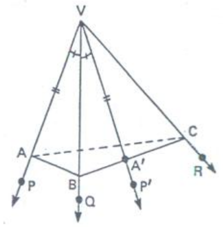
8.8) Demonstre que, em todo triedro, a medida de cada face é menor do que a soma das medidas das outras duas.

Solução

No triedro tri (V, P, Q, R), suponhamos que a face $Q\hat{V}R$ seja a maior das três e provemos que

$$\text{med}(Q\hat{V}R) < \text{med}(P\hat{V}Q) + \text{med}(P\hat{V}R)$$

Tomemos em $Q\hat{V}R$ a semi-reta $\overleftrightarrow{VP'}$ tal que $Q\hat{V}P' \equiv P\hat{V}Q$ e sobre essa semi-reta tomemos um ponto A'. Sobre $\overleftrightarrow{VP}$ tomemos outro ponto A, tal que $\overline{VA} \equiv \overline{VA'}$. Agora, se tomarmos em $\overleftrightarrow{VQ}$ um ponto B qualquer, obteremos a seção ABC do triedro (como a figura ilustra). Passemos à demonstração.



a) $\triangle ABV \equiv \triangle A'BV$ (L A L), logo $AB = A'B$.
b) No $\triangle ABC$ temos $BC < AB + AC$ (exercício 6.17).
c) Assim, $A'B + A'C < AB + AC$, isto é, $AB + A'C < AB + AC$, donde $A'C < AC$.

d) Comparando o $\triangle A'VC$ com o $\triangle AVC$ (veja exercício 6.21), concluímos que

$$\text{med}(A'\hat{V}C) < \text{med}(A\hat{V}C)$$

e) Concluindo, escrevemos:

$$\text{med}(B\hat{V}C) = \text{med}(B\hat{V}A') + \text{med}(A'\hat{V}C) < \text{med}(A\hat{V}B) + \text{med}(A\hat{V}C)$$

que é a tese.

8.9) Em todo triedro, a soma das medidas das três faces é menor do que 360°.

Solução

Seja o triedro (V, A, B, C) cujas faces têm medidas f_1, f_2 e f_3 (como a figura indica). Seja $\overleftrightarrow{VC'}$ a semi-reta oposta a $\overleftrightarrow{VC}$ e consideremos o triedro (V, A, B, C'). Como $C'\hat{V}A$ e $C\hat{V}A$ são suplementares, temos $f'_2 = 180° - f_2$. Do mesmo modo, $f'_1 = 180° - f_1$. Pelo exercício anterior, temos

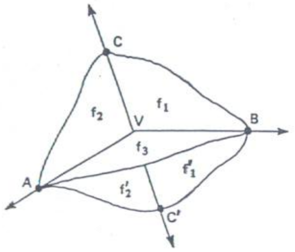
$$f_3 < f'_1 + f'_2$$

donde

$$f_3 < (180° - f_1) + (180° - f_2)$$

e assim

$$f_1 + f_2 + f_3 < 360°$$



8.10) Existe triedro cujas faces tenham medidas iguais a 40°, 50° e 100°?

Solução

Não existe, pois uma das faces teria medida maior do que a soma das outras duas:

$$100° > 40° + 50°$$

8.11) Sejam f_1, f_2 e f_3 as medidas das faces de um triedro. Mostre que

$$f_3 > |f_1 - f_2|$$

isto é, que qualquer delas é maior do que o módulo da diferença das outras duas.

Solução

Pelo exercício 8.8, escrevemos

$$f_1 < f_2 + f_3, \text{ donde } f_3 > f_1 - f_2$$

e

$$f_2 < f_1 + f_3, \text{ donde } f_3 > f_2 - f_1$$

Logo,

$$f_3 > |f_1 - f_2|$$

Observação: Para que três números dados, f_1, f_2 e f_3, possam ser as medidas em graus das faces de um triedro, é necessário e suficiente que tenhamos as seguintes condições:

1.ª) $0° < f_1 < 180°$, $0° < f_2 < 180°$, $0° < f_3 < 180°$
2.ª) $f_1 + f_2 + f_3 < 360°$
3.ª) $|f_1 - f_2| < f_3 < f_1 + f_2$

8.12) Determine o intervalo em que deve variar x para que 100°, 120° e x sejam as medidas das faces de um triedro.

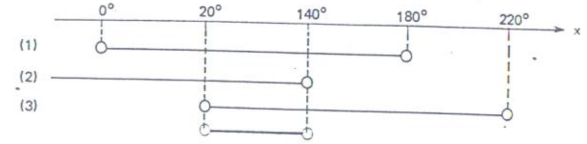
Solução

Vamos impor as três condições acima:

1.ª) $0° < x < 180°$ (1)

2.ª) $100° + 120° + x < 360° \Rightarrow x < 140°$ (2)

3.ª) $|100° - 120°| < x < 100° + 120° \Rightarrow 20° < x < 220°$ (3)



A interseção das condições (1), (2) e (3) nos dá:

$$20° < x < 140°$$

8.13) Determine o intervalo em que deve variar x para que x, x + 10° e x + 50° sejam as medidas das faces de um triedro.

Solução

Impondo as condições:

1.ª) $0° < x < 180°$ (1)

$0° < x + 10° < 180° \Rightarrow -10° < x < 170°$ (2)

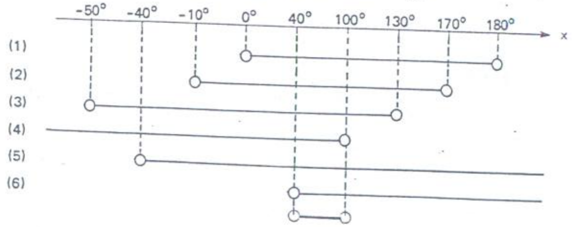
$0° < x + 50° < 180° \Rightarrow -50° < x < 130°$ (3)

2.ª) $x + (x + 10°) + (x + 50°) < 360° \Rightarrow x < 100°$ (4)

3.ª) $|x - (x + 10°)| < x + 50° < x + (x + 10°)$

Na inequação da esquerda: $10° < x + 50° \Rightarrow x > -40°$ (5)

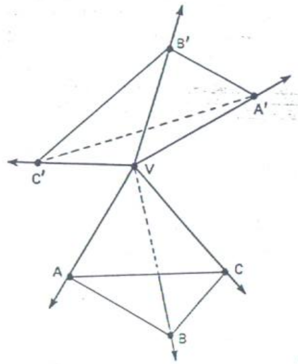
Na inequação da direita: $50° < x + 10° \Rightarrow x > 40°$ (6)



A interseção dessas condições dá-nos

$$40° < x < 100°$$

8.8 — TRIEDRO POLAR DE UM TRIEDRO



Seja dado um triedro tri (V, A, B, C). Considerando a face $A\hat{V}B$, vamos conduzir uma semi-reta $\overleftrightarrow{VC'}$ obedecendo às duas condições seguintes:

1.ª) $\overleftrightarrow{VC'}$ deve ser perpendicular ao plano da face $A\hat{V}B$.

2.ª) Os pontos C' e C devem estar em semi-espaços opostos com relação ao plano da face $A\hat{V}B$.

Tomemos também as semi-retas $\overleftrightarrow{VA'}$ e $\overleftrightarrow{VB'}$ com o mesmo processo, considerando as faces $B\hat{V}C$ e $A\hat{V}C$. As três novas semi-retas determinam um triedro tri (V, A', B', C'), que se denomina polar do triedro tri (V, A, V, C).

Exercícios Resolvidos

8.14) Mostre que, se tri (V, A', B', C') é polar de tri (V, A, B, C), então tri (V, A, B, C) é polar de tri (V, A', B', C').

Solução

Temos

$$\overleftrightarrow{VA'} \perp B\hat{V}C \Rightarrow \begin{cases} \overleftrightarrow{VA'} \perp \overleftrightarrow{VB} & (1) \\ \overleftrightarrow{VA'} \perp \overleftrightarrow{VC} & (2) \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{VB'} \perp A\hat{V}C \Rightarrow \begin{cases} \overleftrightarrow{VB'} \perp \overleftrightarrow{VA} & (3) \\ \overleftrightarrow{VB'} \perp \overleftrightarrow{VC} & (4) \end{cases}$$

$$\overleftrightarrow{VC'} \perp A\hat{V}B \Rightarrow \begin{cases} \overleftrightarrow{VC'} \perp \overleftrightarrow{VA} & (5) \\ \overleftrightarrow{VC'} \perp \overleftrightarrow{VB} & (6) \end{cases}$$

De (3) e (5): $\overleftrightarrow{VA} \perp B'\hat{V}C'$

De (1) e (6): $\overleftrightarrow{VB} \perp A'\hat{V}C'$

De (2) e (4): $\overleftrightarrow{VC} \perp A'\hat{V}B'$

Logo, tri (V, A, B, C) é polar do tri (V, A', B', C').

Com este exercício, podemos dizer que os dois triedros são *polares entre si.*

8.15) A cada face de um triedro corresponde um diedro no seu polar. Por exemplo, à face $A\hat{V}B$ do triedro dado (oposta à aresta $\overleftrightarrow{VC}$) corresponde, no polar, o diedro cuja aresta é $\overleftrightarrow{VC'}$. Indiquemos por f_1, f_2, f_3 as medidas das faces do triedro e por d'_1, d'_2, d'_3 as medidas dos correspondentes diedros no polar. Mostre que

$$f_1 + d'_1 = f_2 + d'_2 = f_3 + d'_3 = 180°$$

Solução

Vamos rever a **observação** feita no exercício 8.6. A situação existente entre as semi-retas $\overleftrightarrow{VA}$ e $\overleftrightarrow{VB}$ e o diedro $(\overleftrightarrow{VC'}, A', B')$ é exatamente aquela do **caso 1**, estudado na observação citada: os ângulos considerados são *suplementares*.

8.16) Mostre que a soma das medidas dos três diedros de um triedro está entre 180° e 540°:

$$180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$$

Solução

Consideremos, no triedro polar, as medidas das faces correspondentes aos diedros do triedro dado. Temos, pelo exercício anterior:

$$d_1 = 180° - f_1$$
$$d_2 = 180° - f_2$$
$$d_3 = 180° - f_3$$

donde

$$d_1 + d_2 + d_3 = 540° - (f_1 + f_2 + f_3) < 540° \qquad (1)$$

Além disso,

$$f_1 + f_2 + f_3 = 540° - (d_1 + d_2 + d_3)$$

e como $f_1 + f_2 + f_3 < 360°$ (veja exercício 8.9) resulta

$$540° - (d_1 + d_2 + d_3) < 360°$$
$$d_1 + d_2 + d_3 > 180° \qquad (2)$$

Por (1) e (2), temos

$$180° < d_1 + d_2 + d_3 < 540°$$

8.17) Mostre que, num triedro, $d_1 + d_2 < d_3 + 180°$.

Solução

Temos

$$\begin{cases} f_1 = 180° - d_1 \\ f_2 = 180° - d_2 \\ f_3 = 180° - d_3 \end{cases}$$

e como $f_3 < f_1 + f_2$ (veja exercício 8.8) resulta

$$180° - d_3 < (180° - d_1) + (180° - d_2)$$

donde

$$d_1 + d_2 < d_3 + 180°$$

É claro que também valem as desigualdades:

$$d_1 + d_3 < d_2 + 180°$$
$$d_2 + d_3 < d_1 + 180°$$

8.18) Existe triedro cujos diedros tenham medidas iguais a 140°, 130° e 80°?

Solução

Não existe, pois se fosse $d_1 = 140°$, $d_2 = 130°$ e $d_3 = 80°$, teríamos:

$$d_1 + d_2 > d_3 + 180°$$

8.19) Existe triedro cujos diedros tenham medidas iguais a 70°, 30° e 10°?

Solução

Não existe, pois teríamos $d_1 + d_2 + d_3 < 180°$.

8.20) Determine o intervalo em que deve variar x para que 140°, 30° e x sejam as medidas dos diedros de um triedro.

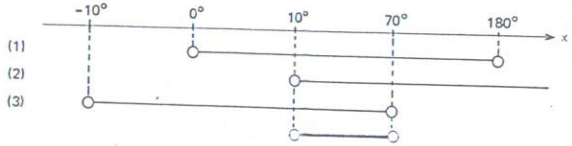
Solução

Para que 140°, 30° e x sejam as medidas dos diedros de um triedro, os seus *suplementares* 40°, 150° e 180° − x devem ser as medidas das faces do triedro polar. Vamos impor as três condições (como no exercício 8.12):

1.ª) $0 < x < 180°$ (1)

2.ª) $40° + 150° + (180° - x) < 360° \Rightarrow x > 10°$ (2)

3.ª) $|40° - 150°| < 180° - x < 40° + 150° \Rightarrow$
$\Rightarrow 110° < 180° - x < 190° \Rightarrow$
$\Rightarrow -70° < -x < 10° \Rightarrow$
$\Rightarrow -10° < x < 70°$ (3)



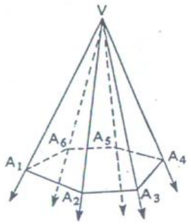
A interseção das condições (1), (2) e (3) dá-nos:

$$10° < x < 70°$$

8.9 — ÂNGULOS POLIÉDRICOS CONVEXOS

Sejam **n** ($n \geq 3$) semi-retas de mesma origem V: $\overleftrightarrow{VA_1}, \overleftrightarrow{VA_2}, \ldots, \overleftrightarrow{VA_n}$, sucedendo-se circularmente (*) de tal modo que três semi-retas consecutivas:

$$(\overleftrightarrow{VA_1}, \overleftrightarrow{VA_2}, \overleftrightarrow{VA_3})$$
$$(\overleftrightarrow{VA_2}, \overleftrightarrow{VA_3}, \overleftrightarrow{VA_4})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\overleftrightarrow{VA_n}, \overleftrightarrow{VA_1}, \overleftrightarrow{VA_2})$$



(*) Quando dizemos que as semi-retas se sucedem circularmente, queremos significar que após a última ($\overleftrightarrow{VA_n}$) devemos voltar à primeira ($\overleftrightarrow{VA_1}$) e continuar a enumeração.

não sejam coplanares. Admitamos ainda que cada par de semi-retas consecutivas: $(\overrightarrow{VA_1}, \overrightarrow{VA_2}), (\overrightarrow{VA_2}, \overrightarrow{VA_3}), \ldots, (\overrightarrow{VA_n}, \overrightarrow{VA_1})$ define um plano que deixa todas as demais em um mesmo semi-espaço.

Indiquemos por $E_1, E_2, \ldots, E_n$ os semi-espaços fechados, definidos pelos pares de semi-retas consecutivas e que contêm as demais semi-retas.

> A interseção $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n$ desses semi-espaços fechados é uma região convexa do espaço denominada **ângulo poliédrico.**

Podemos usar a notação $(V, A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Vértice: é o ponto V.

Arestas: são as semi-retas $\overrightarrow{VA_1}, \ldots, \overrightarrow{VA_n}$.

Faces : são os ângulos $A_1\hat{V}A_2, \ldots, A_n\hat{V}A_1$.

Um ângulo poliédrico está relacionado, também, a **n** diedros, determinados cada um por uma das arestas e as duas faces que a contêm.

A união das faces é a superfície poliédrica e os demais pontos formam o interior.

Exercícios Resolvidos

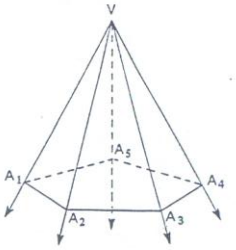
8.21) Prove que a soma das medidas das faces de um ângulo poliédrico convexo é menor do que 360°.

Solução

Se cortarmos o ângulo poliédrico por um plano secante a todas as arestas, obteremos um polígono convexo de vértices

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

Consideremos os triedros de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Em cada um deles, a face que contém o polígono tem sua medida menor do que as das duas faces restantes (estas últimas são ângulos internos dos triângulos $VA_1A_2, VA_2A_3, \ldots, VA_nA_1$). Seja T a soma das medidas dos ângulos internos desses triângulos, excetuados aqueles ângulos com vértice V. Então, se P indicar a soma das medidas dos ângulos internos do polígono, teremos



$$P < T$$

Seja S a soma das medidas das faces do ângulo poliédrico. É claro, então, que S + T equivale à soma das medidas dos ângulos internos de todos os triângulos, logo

$$S + T = n \cdot 180°$$

donde

$$T = n \cdot 180° - S$$

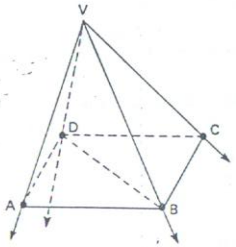
Por outro lado, $P = (n - 2) \cdot 180°$ (veja o exercício 6.42). Assim, a desigualdade $P < T$ fica

$$(n - 2)\,180° < n \cdot 180° - S$$

donde tiramos $S < 360°$.

8.22) Considere um ângulo poliédrico de quatro faces. Mostre que a medida de cada face é menor do que a soma das medidas das demais.

Solução



Indiquemos as medidas das faces $A\hat{V}B$, $B\hat{V}C$, $C\hat{V}D$ e $D\hat{V}A$, respectivamente, por f_1, f_2, f_3 e f_4. Seja também f_5 a medida do ângulo $B\hat{V}D$.

No triedro (V, A, B, D) temos

$$f_1 < f_4 + f_5 \qquad (1)$$

e no triedro (V, B, C, D) temos

$$f_5 < f_2 + f_3 \qquad (2)$$

Somando (1) e (2), vem

$$f_1 + f_5 < f_2 + f_3 + f_4 + f_5$$

donde

$$f_1 < f_2 + f_3 + f_4$$

Nota: Esta propriedade se generaliza facilmente para qualquer ângulo poliédrico convexo.

8.23) Existe ângulo poliédrico convexo de quatro faces, cujas faces medem 10°, 20°, 30° e 60°?

Solução

Não, pois uma das faces teria medida igual à soma das demais: 60° = 10° + 20° + 30°.

8.24) Existe ângulo poliédrico convexo de quatro faces, cujas faces medem 60°, 80°, 100° e 160°?

Solução

Não, pois a soma das medidas das quatro faces seria maior do que 360°.

Exercícios Propostos

8.25) Pelo ponto M situado numa face de um diedro, fora da aresta, conduz-se uma reta perpendicular à outra face. Por um ponto N dessa perpendicular conduz-se uma nova reta, perpendicular à aresta t do diedro em P. Prove que $\overline{MP} \perp t$.

8.26) Mostre que os bissetores de dois diedros adjacentes e suplementares formam um diedro reto.

8.27) Prove que se por um ponto A no interior de um diedro (não raso) conduzimos as retas **r** e **s** perpendiculares às faces do diedro, então o plano pl (r, s) é perpendicular à aresta desse diedro.

8.28) Seja um diedro reto e dois pontos, M e N, um em cada face, pelos quais traçam-se as perpendiculares à aresta, encontrando-a nos pontos A e B, respectivamente, $A \neq B$. Prove que, se $MA = NB$, então a reta $\overleftrightarrow{MN}$ forma com as faces do diedro ângulos congruentes.

8.29) Sendo $\overleftrightarrow{BC}$ a aresta de um diedro, tomam-se A e A', um em cada face, de modo que $\triangle ABC$ e $\triangle A'BC$ sejam eqüiláteros. A perpendicular de A' à outra face encontra esta no ponto M. Prove que, se $\triangle MBC$ é retângulo em M, então $A'M = BM$.

8.30) Tem-se um diedro $A\hat{i}B$, não raso. Por A conduz-se uma reta perpendicular à outra face, que a encontra em P. Toma-se o ponto A', de modo que P seja ponto médio de $\overline{AA'}$. Mostre que

$$\text{med}\,(A\hat{i}A') = 2\,\text{med}\,(A\hat{i}B)$$

8.31) Seja um diedro agudo, de aresta **t**. Pelo ponto $O \in t$ tomemos as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, uma em cada face, sendo $\overrightarrow{OA} \perp t$ e $\overrightarrow{OB}$ não perpendicular a t. Prove que a medida do ângulo $A\hat{O}B$ é maior do que a medida do diedro.

8.32) Dado o ângulo $A\hat{B}C$, conduz-se a semi-reta $\overrightarrow{BD}$ oblíqua ao plano do ângulo e tal que os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ sejam congruentes. Traçando-se por D uma reta perpendicular ao plano (A, B, C), esta vai furá-lo no ponto E situado no interior do ângulo $A\hat{B}C$. Prove que o semi-plano $(\overleftrightarrow{BD}, E)$ é o bissetor do diedro $(A, \overleftrightarrow{BD}, C)$.

8.33) Quantos triedros ficam determinados por três retas não coplanares, que se interceptam em um ponto?

8.34) Responda **sim** ou **não**, caso seja ou não possível construir um triedro cujas faces tenham as medidas dadas:

a) 125°, 80°, 31°;
b) 110°, 80°, 50°;
c) 72°, 56°, 38°;
d) 92°, 56°, 36°;
e) 150°, 140°, 80°;
f) 140°, 130°, 90°.

8.35) Determine em que intervalo varia **x** se as medidas das faces de um triedro são:

a) 85°, 72° e x;
b) 85°, 112° e x.

8.36) Dois diedros de um triedro medem 50° e 120°. Em que intervalo deve variar a medida **x** do terceiro diedro?

8.37) Num triedro, duas faces medem 45° e o diedro determinado por elas é reto. Mostre que a terceira face mede 60°.

8.38) Uma das faces de um triedro mede 90°. As duas outras são congruentes entre si. Um plano perpendicular ao plano da primeira face determina nas três arestas segmentos congruentes. Prove que as duas faces medem 60°.

8.39) Responda **sim** ou **não**, caso seja ou não possível construir um ângulo poliédrico convexo cujas faces tenham as medidas dadas:

a) 30°, 90°, 60°, 150°;
b) 50°, 60°, 110°, 140°;
c) 42°, 62°, 72°, 82°, 92°;
d) 23°, 38°, 85°, 92°, 98°, 100°.

8.40) Determine qual é o número máximo de faces que pode ter um ângulo poliédrico convexo no qual todas as faces têm medida igual a:

a) 90°; b) 60°; c) 45°; d) 30°.

Exercícios Suplementares

III.1) Demonstre que todas as retas que passam por um ponto dado e formam ângulo reto com uma reta dada estão contidas em um mesmo plano.

III.2) Dadas duas retas concorrentes e um ponto P, mostre que existe uma **única** reta que passa por P e forma ângulo reto com as duas retas dadas.

III.3) Dados uma reta **r** e um plano α oblíquos e um ponto A fora de **r** e de α, como se pode obter um plano paralelo à reta e perpendicular ao plano α, passando por A?

III.4) Uma reta **r** é perpendicular a duas retas **s** e **t**, paralelas entre si e contidas em um plano α. Que se pode concluir sobre a posição de **r** em relação a α?

III.5) Uma reta **r** é ortogonal a duas retas **s** e **t**, paralelas entre si e contidas em um plano α. Que se pode concluir sobre a posição de **r** em relação a α?

III.6) Pelo lado $\overleftrightarrow{BC}$ de um triângulo ABC conduz-se um plano $\alpha \perp \overleftrightarrow{AB}$. Toma-se em α o ponto D, de tal modo que o $\triangle BDC$ seja retângulo em B. Que se pode dizer da posição do lado $\overleftrightarrow{BD}$ em relação ao plano pl (A, B, C) e do lado $\overleftrightarrow{BC}$ em relação ao plano pl (A, B, D)?

III.7) Prove que se uma reta **r** está contida em um plano perpendicular a uma reta **s**, então a reta **s** também está contida em um plano perpendicular à reta **r**.

III.8) Seja α o plano de um triângulo ABC. Vamos conduzir por A as retas $r \perp \overleftrightarrow{BC}$ e $s \perp \overleftrightarrow{BC}$. Mostre que $\alpha \perp$ pl (r, s).

III.9) Num plano α tem-se um losango ABCD. Fora de α, toma-se o ponto P, eqüidistante das extremidades B e D da diagonal menor do losango. Mostre que $\overleftrightarrow{BD} \perp$ pl (A, C, P).

III.10) Sendo α o plano do quadrado ABCD, pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$ toma-se o plano $\beta \perp \alpha$. Em β, constrói-se um quadrado ABEF. Prove que $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BE}$.

III.11) Pelo ponto de interseção M das diagonais de um quadrado ABCD, conduz-se a reta $\overleftrightarrow{PM}$ perpendicular ao plano do quadrado. Mostre que $\overleftrightarrow{PC} \perp \overleftrightarrow{BD}$.

III.12) Uma reta **r** e um plano α são oblíquos. Por um ponto $A \in \alpha$, construa uma reta $s \subset \alpha$, que forme ângulo reto com **r**.

III.13) Pelo vértice A do triângulo isósceles ABC ($AB = AC$) conduz-se a reta $\overleftrightarrow{AP}$ perpendicular ao plano do triângulo. A reta que passa por P e é perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ corta-a em M. Prove que M é o ponto médio de $\overline{BC}$.

III.14) Pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$ de um triângulo eqüilátero ABC toma-se um plano α perpendicular ao plano β do triângulo. O ponto $D \in \alpha$ é vértice de um triângulo isósceles ABD ($AD = BD$). Mostre que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

III.15) Fora do plano de um triângulo ABC eqüilátero de lado **a**, toma-se um ponto D cujas distâncias aos vértices do triângulo são iguais a **a**. Mostre que $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

III.16) Uma reta perpendicular a uma das faces de um diedro forma ângulo de medida α com o semi-plano bissetor. Determine a medida do diedro.

III.17) Uma reta perpendicular ao semiplano bissetor de um diedro forma ângulo de medida x com a face do diedro. Determine a medida do diedro.

III.18) Uma reta contida em uma seção reta de um diedro forma ângulos de medida x com uma face e com o semiplano bissetor. Calcule a medida do diedro ($45° < x < 90°$).

III.19) As medidas em graus das faces de um triedro são $7x$, $8x$ e $9x$. Determine os possíveis valores de x.

III.20) As medidas em graus das faces de um triedro são x, $2x$ e x, sendo $60° < x < 90°$. Determine os possíveis valores de x.

PARTE IV

Capítulo 9 — **Lugares geométricos. Círculo e esfera**

Capítulo 10 — **Áreas dos polígonos**

Capítulo 11 — **Semelhança de triângulos. Relações métricas**

Capítulo 12 — **Razões trigonométricas. Áreas do círculo e dos setores**

Capítulo 9

Lugares geométricos. Círculo e esfera

9.1 — LUGAR GEOMÉTRICO

A expressão **lugar geométrico** significa o mesmo que **conjunto de pontos**, ou **figura**. É comum utilizarmos o nome de lugar geométrico para indicar um conjunto de pontos conhecido através de uma determinada propriedade. Por exemplo, o *conjunto dos pontos que são eqüidistantes de dois pontos dados* é um lugar geométrico. Os livros modernos de Matemática começam a omitir essa expressão, já que ela não passa de um substituto para a palavra *figura*, mas a tradição é forte e o uso do nome *lugar geométrico* ainda se conserva, talvez por alguma razão didática.

Para comprovarmos que uma determinada figura é o lugar geométrico definido por uma dada propriedade, é necessário demonstrar que:

a) Todos os pontos que pertencem à figura considerada possuem a propriedade.
b) Todo ponto que possui a propriedade dada pertence à figura.

Os exemplos que examinaremos a seguir irão esclarecer estas idéias.

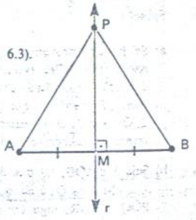
Exercícios Resolvidos

9.1) Sejam dados dois pontos, A e B, distintos, e um plano α que contém esses dois pontos. Prove que o lugar geométrico dos pontos de α, que são eqüidistantes de A e de B, é a reta mediatriz do segmento $\overleftrightarrow{AB}$, contida em α.

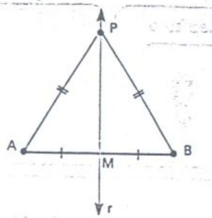
Solução

Seja r a mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$, contida em α (veja o exerc. 6.3).

a) Se $P \in r$, provemos que $PA = PB$. Se $P = M$ (ponto médio de $\overline{AB}$), é imediato que $PA = PB$.
Se $P \neq M$, como $\triangle APM \equiv \triangle BPM$ (L A L), tem-se $PA = PB$.



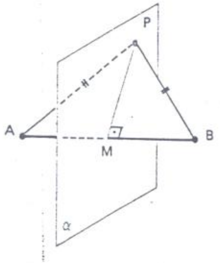
b) Se $P \in \alpha$ e $PA = PB$, provemos que $P \in r$.
Se $P \in \overleftrightarrow{AB}$, então $P = M$, logo $P \in r$. Se $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, sejam os triângulos $\triangle APM$ e $\triangle BPM$. Pelo L L L, eles são congruentes, portanto $A\hat{M}P \equiv B\hat{M}P$, logo estes dois ângulos são retos: $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Assim, $\overleftrightarrow{PM} = r$, donde $P \in r$.



9.2) Sejam dados dois pontos, A e B, distintos. Prove que o lugar geométrico dos pontos (do espaço) que são eqüidistantes de A e de B é o plano mediador do segmento $\overleftrightarrow{AB}$, isto é, o plano que é perpendicular ao segmento e contém o seu ponto médio.

Solução

Seja α o plano mediador de $\overleftrightarrow{AB}$.

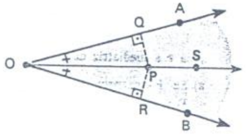


a) Se $P \in \alpha$, provemos que $PA = PB$.
Se $P = M$, é imediato que $PA = PB$. Se $P \neq M$, então $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, logo $\overleftrightarrow{PM}$ é a mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$ no pl (A, B, P) : $PA = PB$.

b) Se P é tal que $PA = PB$, provemos que $P \in \alpha$.
Se $P \in \overleftrightarrow{AB}$, então $P = M$, logo $P \in \alpha$. Se $P \notin \overleftrightarrow{AB}$, fica determinado o plano pl (P, $\overleftrightarrow{AB}$), no qual P pertence à reta mediatriz do segmento $\overleftrightarrow{AB}$. Assim, $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{AB}$, donde $\overleftrightarrow{PM} \subset \alpha$ e $P \in \alpha$.

9.3) Prove que o lugar geométrico dos pontos pertencentes a um ângulo $A\hat{O}B$, que são eqüidistantes das retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$, é a semi-reta $\overrightarrow{OS}$, bissetriz de $A\hat{O}B$.

Solução



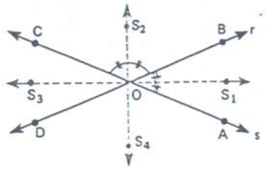
a) Se $P \in \overrightarrow{OS}$, provemos que $\delta_{P,\overleftrightarrow{OA}} = \delta_{P,\overleftrightarrow{OB}}$, isto é, $PQ = PR$ (veja, no exerc. 6.5, a definição de distância de um ponto a uma reta). É verdade que $PQ = PR$, pois $\triangle OPQ \equiv \triangle OPR$ (exerc. 6.43). A tese é imediata também quando $P = O$.

b) Seja $P \in A\hat{O}B$, tal que $\delta_{P,\overleftrightarrow{OA}} = \delta_{P,\overleftrightarrow{OB}}$ e provemos que $P \in \overrightarrow{OS}$.
Se $P = O$, é claro que $P \in \overrightarrow{OS}$. Se $P \neq O$, como $\triangle OPQ \cong OPR$ (exerc. 6.43), temos $P\hat{O}Q \equiv P\hat{O}R$, logo $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS}$ e, assim, $P \in \overrightarrow{OS}$.

9.4) Sejam **r** e **s** retas concorrentes do plano α. Determine o lugar geométrico dos pontos desse plano, que eqüidistam de **r** e de **s**.

Solução

As retas **r** e **s** definem quatro ângulos: $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$, cujas respectivas bissetrizes são $\overrightarrow{OS_1}$, $\overrightarrow{OS_2}$, $\overrightarrow{OS_3}$ e $\overrightarrow{OS_4}$. Provemos que o lugar geométrico procurado é a *união* das quatro bissetrizes, que indicaremos por **u**.



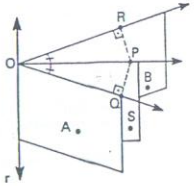
a) Seja $P \in u$. Então, P pertence a uma das bissetrizes, por exemplo, $P \in \overrightarrow{OS_1}$. Então, P é eqüidistante de r e de s.
b) Seja $P \in \alpha$, eqüidistante de **r** e de **s**. Ora, P deve pertencer obrigatoriamente a um dos quatro ângulos, por exemplo, $P \in A\hat{O}B$. Então, $P \in \overrightarrow{OS_1}$, logo $P \in u$.

Sendo assim, *o lugar geométrico dos pontos do plano (r, s) que são eqüidistantes das retas concorrentes r e s é a união das duas retas que contêm as bissetrizes dos ângulos definidos por r e s.*

9.5) Prove que o lugar geométrico dos pontos (do espaço) pertencentes ao **diedro** $A\hat{r}B$, que são eqüidistantes dos planos (A, r) e (B, r), é o semiplano (S, r), bissetor do diedro.

Solução

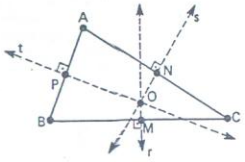
Dado um ponto $P \in A\hat{r}B$, consideremos por P a seção reta do diedro, a qual é um ângulo $\hat{O}$.



a) Se P pertence ao semiplano bissetor, então P pertence à bissetriz de $\hat{O}$, logo P eqüidista dos lados desse ângulo e portanto eqüidista dos planos (A, r) e (B, r).
b) Se P eqüidista dos planos (A, r) e (B, r), então P eqüidista dos lados do ângulo $\hat{O}$, logo P pertence à bissetriz de $\hat{O}$ e portanto P pertence ao semiplano bissetor do diedro.

9.6) Prove que existe um único ponto situado no plano do $\triangle ABC$, eqüidistante dos três vértices desse triângulo.

Solução



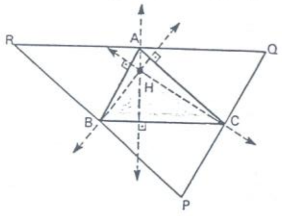
Sejam r, s e t as mediatrizes dos lados $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ do $\triangle ABC$, respectivamente, todas contidas no plano do triângulo. Seja O a interseção de r e s. Como $O \in r$, temos $OB = OC$. Como $O \in s$, temos $OA = OC$. Então, esse ponto eqüidista dos três vértices (e é o único nessas condições).

Nota: Como $OA = OB$, fica provado também que $O \in t$, isto é, que *as mediatrizes dos lados de um triângulo cortam-se em um mesmo ponto*. Esse ponto O tem o nome de circuncentro do triângulo.

9.7) Prove que as retas que contêm as três alturas de um triângulo cortam-se em um mesmo ponto.

Solução

Consideremos o $\triangle PQR$, cujos lados contêm os vértices do $\triangle ABC$ e são paralelos aos lados opostos deste. Pelo exercício 6.44, os pontos A, B e C são os pontos médios dos lados do $\triangle PQR$, logo as retas que contêm as *alturas* do $\triangle ABC$ são as *mediatrizes* do $\triangle PQR$. Assim, essas retas cortam-se em um mesmo ponto H, que é o circuncentro do $\triangle PQR$.



Nota: O ponto H é denominado ortocentro do $\triangle ABC$.

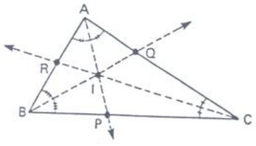
9.8) Prove que existe um único ponto situado no plano do $\triangle ABC$, eqüidistante dos lados desse triângulo (isto é, eqüidistante das retas suportes desses lados).

Solução

Sejam $\overleftrightarrow{AP}$, $\overleftrightarrow{BQ}$ e $\overleftrightarrow{CR}$ as bissetrizes internas do $\triangle ABC$. Seja I a interseção de $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BQ}$. É claro então que I eqüidista dos três lados do triângulo, pois:

$$I \in \overleftrightarrow{AP} \Rightarrow \delta_{I,\overleftrightarrow{AB}} = \delta_{I,\overleftrightarrow{AC}}$$

$$I \in \overleftrightarrow{BQ} \Rightarrow \delta_{I,\overleftrightarrow{AB}} = \delta_{I,\overleftrightarrow{BC}}$$

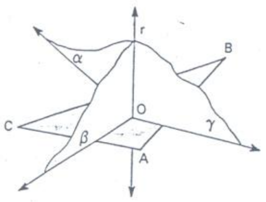


Nota: Como $\delta_{I,\overleftrightarrow{AC}} = \delta_{I,\overleftrightarrow{BC}}$, fica provado também que $I \in \overleftrightarrow{CR}$, isto é, que *as bissetrizes internas de um triângulo cortam-se em um mesmo ponto*. O ponto I chama-se incentro do triângulo.

9.9) Determine o lugar geométrico dos pontos (do espaço) eqüidistantes dos vértices de um triângulo.

Solução

Sejam α, β e γ os planos mediadores dos lados do $\triangle ABC$. Se $r = \alpha \cap \beta$, então os pontos dessa reta eqüidistam dos três vértices, logo $r \subset \gamma$. Isso mostra que os três planos mediadores interceptam-se segundo uma mesma reta r, a qual é perpendicular ao plano do triângulo e passa pelo ponto O, circuncentro do $\triangle ABC$.



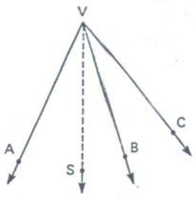
A reta r é o lugar geométrico procurado. Já vimos que todo ponto de r eqüidista dos vértices do $\triangle ABC$. Por outro lado, todo ponto que eqüidista dos três vértices pertence aos planos α, β e γ, logo pertence à reta r.

Sendo assim, *o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes dos vértices de um triângulo é a reta perpendicular ao plano do triângulo e que passa pelo seu circuncentro.*

9.10) Prove que em todo triedro os semiplanos bissetores dos três diedros passam por uma mesma reta.

Solução

Seja $\overrightarrow{VS}$ a interseção dos dois semiplanos bissetores dos diedros de arestas $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$. Os pontos de $\overrightarrow{VS}$ são eqüidistantes das três faces do triedro, logo situam-se também no bissetor do diedro de aresta $\overrightarrow{VC}$.



Exercícios Propostos

9.11) Prove que o lugar geométrico dos pontos do espaço eqüidistantes de dois planos secantes α e β é a união dos dois planos que contêm os bissetores dos diedros definidos por α e β.

9.12) Pelas arestas de um triedro passam-se os planos perpendiculares às faces opostas. Demonstre que esses três planos passam por uma mesma reta.

9.13) Pelas arestas de um triedro passam-se os planos que contêm as bissetrizes das faces opostas. Demonstre que esses três planos passam por uma mesma reta.

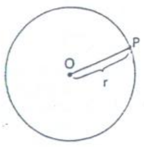
9.14) Pelo vértice de um triedro conduz-se uma reta contida no plano de uma face e perpendicular à aresta oposta. Faz-se o mesmo com as outras duas faces. Prove que as três retas obtidas são coplanares.

9.15) Prove que, dados quatro pontos não coplanares, existe um único ponto eqüidistante deles.

9.2 — CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

Circunferência

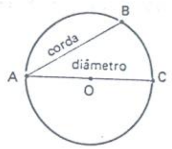
Sejam dados um número positivo **r** e, num plano α, um ponto O. O lugar geométrico dos pontos *desse plano*, cuja distância a O é igual a **r**, chama-se circunferência. O ponto O é o centro e o número **r** é o raio.



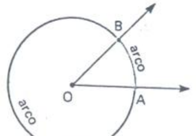
Então, para um ponto P qualquer pertencente à circunferência, tem-se $PO = r$.

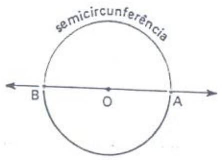
Damos também o nome de raio a qualquer segmento com uma extremidade no centro e a outra em um ponto da circunferência.

Dois pontos A e B pertencentes à circunferência definem um segmento $\overline{AB}$ que se denomina corda. Se a corda $\overline{AC}$ contém o centro, ela se chama diâmetro. Como AO = CO, o centro O é o ponto médio do diâmetro, logo a medida do diâmetro é o dobro do raio.



Uma corda $\overline{AB}$ determina um ângulo AÔB, chamado ângulo central, por ter seu vértice no centro. A interseção do ângulo central com a circunferência chama-se arco (é o arco *compreendido* pelo ângulo AÔB). Dá-se também o nome de arco à parte da circunferência situada fora do ângulo central considerado (este arco é chamado *replementar* do arco compreendido pelo ângulo AÔB). Se o ângulo central é raso (isto é, se $\overline{AB}$ é um diâmetro) os arcos determinados chamam-se semicircunferências.





Medida de um arco, em graus

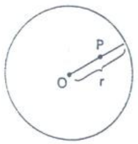
Se o ângulo central tem a medida em graus igual a α, dizemos também que o arco compreendido por ele tem medida em graus igual a α.

Assim, uma semicircunferência mede 180°, a circunferência toda mede 360°. O arco replementar de um arco de medida α tem sua medida em graus igual a $360° - \alpha$.

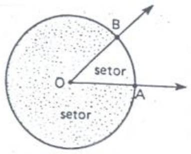
Circulo

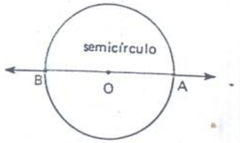
Chama-se circulo de centro O e raio r o lugar geométrico dos pontos P que pertencem ao plano α contendo O e tais que PO ⩽ r.

Os pontos P tais que PO < r formam o interior do circulo e os pontos do plano α, que não pertencem ao circulo, formam o seu exterior.



Um ângulo central AÔB intercepta o círculo segundo uma região chamada setor circular (compreendido pelo ângulo). A parte do círculo que não pertence ao ângulo AÔB também se chama setor (replementar do primeiro). Se o ângulo central é raso (isto é, se $\overline{AB}$ é um diâmetro), então os setores determinados são chamados semicirculos.





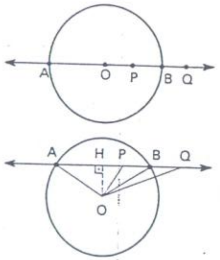
Exercícios Resolvidos

9.16) Demonstre que, dada uma corda $\overline{AB}$ de uma circunferência de centro O e raio **r**, então todo ponto da corda pertence ao circulo e todo ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$, que não pertence à corda, está no exterior do circulo.

Solução

Sejam P entre A e B e $Q \in \overleftrightarrow{AB}$, fora de $\overline{AB}$ (pode-se supor que Q fica do lado do ponto B).

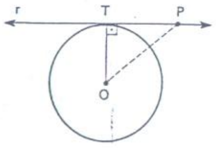
Se $\overline{AB}$ é um diâmetro, é imediato que PO < BO = r e QO > BO = r, logo P pertence ao circulo e Q está no seu exterior. Se $\overline{AB}$ não é um diâmetro, então temos o triângulo isósceles OAB. Pelo exercicio 6.45, temos também PO < BO = r e QO > BO = r.



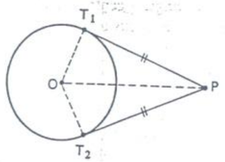
Notas

1.ª) Do exercicio acima conclui-se que três pontos distintos, de uma circunferência, não podem estar alinhados, isto é, *uma reta e uma circunferência têm, no máximo, dois pontos em comum.*

2.ª) Reta tangente a uma circunferência – Seja T um ponto da circunferência. A reta **r** que passa por T e é *perpendicular ao raio* $\overline{OT}$, sendo contida no plano da circunferência, chama-se reta tangente. O ponto T é o ponto da tangência. A reta tangente tem em comum com a circunferência unicamente o ponto T. De fato, se P ∈ r, P ≠ T, então o △ OTP é retângulo, donde PO > TO = r. Assim, P não pertence à circunferência (está no exterior do circulo).



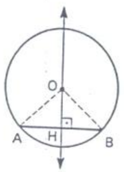
3.ª) Por um ponto P do plano da circunferência, situado no exterior do círculo, podem ser conduzidas duas retas tangentes. Os segmentos PT_1 e PT_2, cujas extremidades são o ponto dado e os pontos de tangência, são congruentes.



9.17) Em uma circunferência, o diâmetro perpendicular a uma corda divide a corda ao meio. Reciprocamente, um diâmetro que divide uma corda ao meio é perpendicular a essa corda. Prove estas afirmações.

Solução

Seja $\overleftrightarrow{AB}$ uma corda (que não passa pelo centro). Como △ OAB é isósceles, a reta $\overleftrightarrow{OH}$ perpendicular à base $\overleftrightarrow{AB}$ contém a altura e a mediana. Logo, H é o ponto médio de $\overline{AB}$. Inversamente, a reta $\overleftrightarrow{OH}$ que liga O com o ponto médio H de $\overline{AB}$ é perpendicular a esta corda.



9.18) Prove que, no plano de uma circunferência, a reta mediatriz de qualquer corda passa pelo centro.

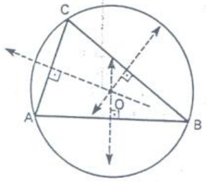
Solução

Basta lembrar que O é eqüidistante das extremidades da corda, logo pertence à sua mediatriz.

9.19) Prove que, pelos vértices de um triângulo, passa uma única circunferência.

Solução

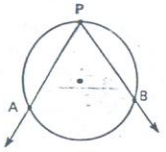
Uma circunferência que passe pelos vértices de um triângulo deve ter o seu centro num ponto O eqüidistante dos três pontos A, B e C. Pelo exercício 9.6 existe um único ponto assim, que é o *circuncentro* do triângulo (interseção das mediatrizes dos lados).



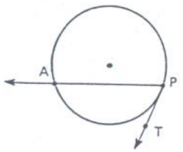
Nota: A circunferência que passa pelos vértices do △ ABC chama-se circunferência circunscrita ao triângulo. Dizemos também que o △ ABC é inscrito nessa circunferência.

9.3 — ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Dada uma circunferência, todo ângulo com vértice num ponto da circunferência e cujos lados passam por outros dois pontos dela, chama-se ângulo inscrito na circunferência. Na ilustração, $A\hat{P}B$ é um ângulo inscrito. Dos dois arcos de extremidades A e B, aquele que não contém o ponto P (e que, portanto, está contido no ângulo $A\hat{P}B$) é chamado arco *correspondente* ao ângulo $A\hat{P}B$ ou arco *compreendido* pelo ângulo $A\hat{P}B$.



A noção de *ângulo inscrito* pode ser estendida ao caso de um ângulo $A\hat{P}T$ com vértice P na circunferência, sendo que um dos lados $\overleftrightarrow{PA}$ contém outro ponto A da circunferência, enquanto que o outro lado $\overleftrightarrow{PT}$ é tangente a ela. O arco de extremidades A e P contido no ângulo é o arco *correspondente*, ou *compreendido* pelo ângulo $A\hat{P}T$.



Teorema

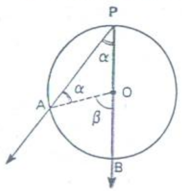
A medida em graus de um ângulo inscrito é igual à **metade** da medida em graus do arco compreendido.

Demonstração

A demonstração deste teorema é feita separadamente para os vários casos possíveis. Consideremos em primeiro lugar os ângulos inscritos que não têm um lado tangente.

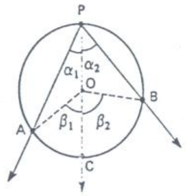
1.° caso: Um dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro da circunferência

Se $O \in \overleftrightarrow{PB}$, então o ângulo central $A\hat{O}B$ é o ângulo externo ao △ AOP, o qual é isósceles. Sejam α e β as medidas de $A\hat{P}B$ e $A\hat{O}B$. Temos então $\beta = 2\alpha$, ou seja, $\alpha = \dfrac{\beta}{2}$, o que é a tese, pois a medida em graus do arco compreendido é igual à medida do ângulo central.



2.º caso: O centro da circunferência encontra-se no interior do ângulo inscrito

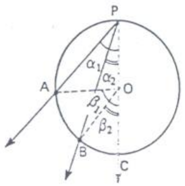
Neste caso, a semi-reta $\overrightarrow{PO}$ separa o ângulo $A\hat{P}B$ em dois outros que satisfazem a hipótese do 1.º caso. Temos (ver figura) $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$. Então



$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\text{, ou seja, } \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

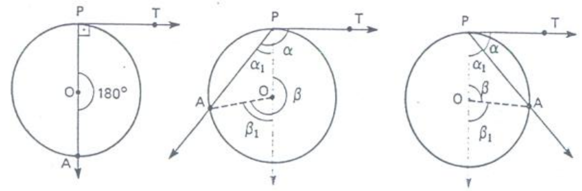
3.º caso: O centro da circunferência encontra-se no exterior do ângulo inscrito

Neste caso, a semi-reta $\overrightarrow{PB}$ (ver figura) separa o ângulo $A\hat{P}O$ em dois, um dos quais é o ângulo $A\hat{P}B$. Temos $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$. Então



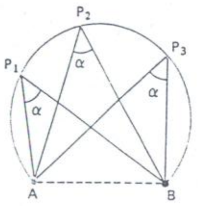
$$\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\text{, ou seja, } \alpha = \frac{\beta}{2}.$$

Consideremos agora os ângulos inscritos em que um dos lados é tangente (são os três casos indicados nas figuras). No primeiro caso, o ângulo $A\hat{P}T$ é reto e o arco compreendido é uma semicircunferência, isto é, $\alpha = 90°$ e $\beta = 180°$:

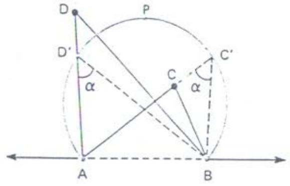


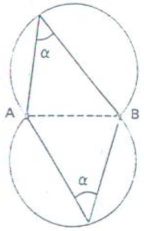
$\alpha = \frac{\beta}{2}$. No segundo caso, temos $\alpha = 90° + \alpha_1$, $\beta = 180° + \beta_1$ e $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$, donde resulta $\alpha = \frac{\beta}{2}$. No último caso, temos $\alpha = 90° - \alpha_1$, $\beta = 180° - \beta_1$ e $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$, donde $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

1.ª) Dado um ângulo $A\hat{P}_1B$ inscrito, consideremos todos os ângulos inscritos, cujos lados passam por A e B e cujos vértices pertencem ao mesmo arco $\widehat{AP_1B}$ de extremidades A e B que contém P_1 (isto é, pertencem ao arco que é replementar daquele que é compreendido pelo ângulo $A\hat{P}_1B$). Todos esses ângulos têm a mesma medida α, que é a metade da medida em graus do arco compreendido. Dizemos que *os pontos P_1, P_2, P_3, etc. vêem o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo de medida α.* Em particular, os pontos A e B vêem o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob qualquer ângulo. O arco $\widehat{AP_1B}$ é chamado *arco capaz* de um ângulo de medida α.

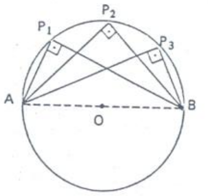


2.ª) Dado um segmento $\overleftrightarrow{AB}$, seja $\widehat{APB}$ um arco capaz de um ângulo de medida α. Se tomamos um ponto do semiplano $(P, \overleftrightarrow{AB})$ que *não pertence* ao arco $\widehat{APB}$, então esse ponto vê o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo cuja medida é diferente de α. De fato, para o ponto C interno ao círculo (ver figura), o ângulo $A\hat{C}D$ é externo ao $\triangle BCC'$, logo med $(A\hat{C}B) > \alpha$. Para o ponto D externo ao círculo, o ângulo $A\hat{D}'B$ é externo ao $\triangle BD'D$, logo med $(A\hat{D}B) < \alpha$. Isso mostra que todo ponto do semiplano $(P, \overleftrightarrow{AB})$ que vê o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo de medida α pertence ao arco capaz $\widehat{APB}$. Isto nos permite concluir que *o lugar geométrico dos pontos do plano, que vêem o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo de medida α, é a união dos dois arcos capazes de α.*



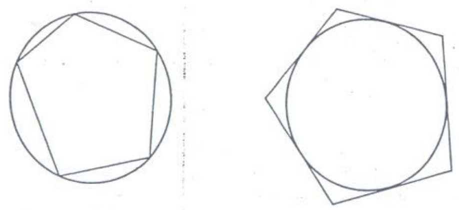


3.ª) Dado o ângulo inscrito $A\hat{P}B$, se $\overline{AB}$ é um diâmetro dizemos que esse ângulo é inscrito na semicircunferência. *Todo ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.* Além disso, podemos concluir também que *o lugar geométrico dos pontos (do plano) que vêem o segmento $\overline{AB}$ sob ângulo reto é a circunferência de diâmetro $\overline{AB}$* (a qual é a união dos dois arcos capazes de 90°).



9.4 — POLÍGONOS INSCRITOS E CIRCUNSCRITOS

Um polígono é inscrito em uma circunferência se todos os seus *vértices* pertencem à circunferência. Diz-se que o polígono é circunscrito à circunferência se todos os seus *lados* tangenciam a circunferência em pontos de tangência que são internos a esses lados. Se o polígono é inscrito, dizemos que *a circunferência é circunscrita ao polígono.* Se o polígono é circunscrito, então *a circunferência é inscrita no polígono*

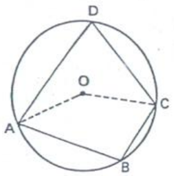


No exercício 9.19 ficou estabelecido que a todo triângulo pode-se circunscrever uma única circunferência, cujo centro é a interseção das três mediatrizes dos lados do triângulo (circuncentro). Pode-se provar também, facilmente, que em todo triângulo é possível inscrever uma circunferência, cujo centro é a interseção das bissetrizes internas do triângulo (incentro) (veja o exercício 9.8). Entretanto, outros polígonos com maior número de lados nem sempre são *inscritíveis* ou *circunscritíveis*. Os exercícios seguintes dão as condições para o caso dos **quadriláteros.**

Exercícios Resolvidos

9.20) Prove que todo quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência tem os ângulos opostos suplementares.

Solução



Indiquemos os arcos de extremidades A e C por $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$. Temos:

$$\text{med}(\hat{D}) = \frac{1}{2}\,\text{med}(\widehat{ABC})$$

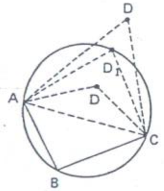
$$\text{med}(\hat{B}) = \frac{1}{2}\,\text{med}(\widehat{ADC})$$

donde $\text{med}(\hat{D}) + \text{med}(\hat{B}) = \frac{1}{2}(\text{med}(\widehat{ABC}) + \text{med}(\widehat{ADC})) = \frac{1}{2}(360°) = 180°$

Da mesma forma, provamos que $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são suplementares.

9.21) Demonstre que todo quadrilátero convexo que tem os ângulos opostos suplementares é inscritível em uma circunferência.

Solução

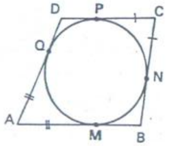


Seja ABCD um quadrilátero que tem os ângulos opostos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ suplementares e consideremos a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Devemos provar que D também pertence a essa circunferência. É claro que D e B estão em semiplanos opostos com relação à diagonal $\overleftrightarrow{AC}$. Seja D_1 um ponto sobre a circunferência, no mesmo semiplano de D. O quadrilátero $ABCD_1$ é inscrito, logo $\hat{B}$ e $\hat{D}_1$ são suplementares. Assim, $\hat{D}_1 \equiv \hat{D}$. Mas então D deve pertencer ao arco $\widehat{AD_1C}$, que é o arco capaz do ângulo $\hat{D}_1$. Portanto, D pertence à circunferência.

Observação: Unindo os resultados dos exercícios 9.20 e 9.21 podemos dizer que *uma condição necessária e suficiente para que um quadrilátero convexo seja inscritível em uma circunferência é que tenha ângulos opostos suplementares.*

9.22) Prove que, se um quadrilátero é circunscrito a uma circunferência, a soma das medidas de dois lados opostos é igual à soma das medidas dos outros dois lados.

Solução



Basta notar que (veja a 3.ª nota do exercício 9.16):

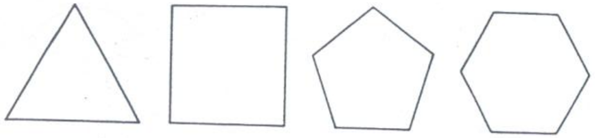
$$AM = AQ$$
$$MB = BN$$
$$CP = NC$$
$$PD = QD$$

Somando: $(AM + MB) + (CP + PD) = (AQ + QD) + (BN + NC)$

logo $AB + CD = AD + BC$

9.5 — POLÍGONOS REGULARES

Um polígono convexo é regular se tem todos os lados congruentes e também todos os ângulos internos congruentes.



O *triângulo eqüilátero* e o *quadrado* são exemplos de polígonos regulares. Vamos citar aqui duas propriedades dos polígonos regulares, dispensando entretanto a sua demonstração.

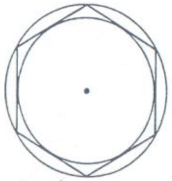
1.ª propriedade

Se uma circunferência é dividida pelos pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ $(n \geq 3)$ em n arcos de mesma medida, então o polígono que tem por vértices esses pontos é regular. É também regular o polígono circunscrito à circunferência tendo esses pontos como pontos de tangência.

2.ª propriedade

A todo polígono regular é possível circunscrever uma circunferência e inscrever outra, ambas com centro em um mesmo ponto.

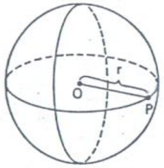
O raio da circunferência circunscrita é chamado *raio do polígono* e o raio da circunferência inscrita é chamado *apótema do polígono*.



9.6 — ESFERA E SUPERFÍCIE ESFÉRICA

Superfície esférica

Sejam dados um número positivo **r** e um ponto O. O lugar geométrico dos pontos (do espaço), cuja distância a O é igual a **r**, chama-se superfície esférica. O ponto O é o centro e o número **r** é o raio.



Então, para um ponto P qualquer pertencente à superfície esférica, tem-se $PO = r$.

Damos também o nome de raio a qualquer segmento $\overline{PO}$, sendo O o centro e P pertencente à superfície esférica.

Um segmento $\overline{AB}$, com A e B na superfície esférica, chama-se corda. Se a corda $\overline{AB}$ contém o centro O, ela se chama diâmetro. A medida do diâmetro é o dobro do raio.

Esfera

Chama-se esfera de centro O e raio **r** o lugar geométrico dos pontos P (do espaço) tais que $PO \leq r$.

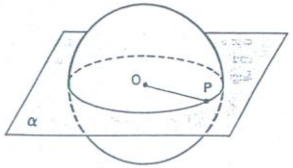
Os pontos P tais que $PO < r$ formam o interior da esfera e os pontos que não pertencem à esfera formam o seu exterior.

Exercícios Resolvidos

9.23) Prove que um plano contendo o centro intercepta a superfície esférica segundo uma circunferência, cujo raio é o mesmo da superfície esférica.

Solução

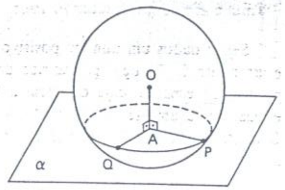
Basta relembrar as definições de superfície esférica e de circunferência. Se α é um plano que contém O e o ponto P está na interseção de α com a superfície esférica, então $PO = r$ (raio da superfície esférica). Assim, P pertence a uma circunferência contida em α, com centro O e raio r. Inversamente, todo ponto P dessa circunferência é tal que $PO = r$, logo pertence à interseção de α com a superfície esférica.



9.24) Prove que um plano que não contém o centro, mas tem mais de um ponto em comum com a superfície esférica, corta-a segundo uma circunferência, cujo raio é menor do que o da superfície esférica.

Solução

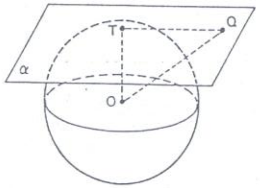
Na ilustração, O é o centro da superfície esférica, $A \in \alpha$ e $\overleftrightarrow{OA} \perp \alpha$. Se P e Q são dois pontos pertencentes à interseção de α com a superfície esférica, então temos AP = AQ, pois Δ OAQ $\equiv$ Δ OAP. Assim, P e Q pertencem à circunferência contida em α, de centro A e raio AP (tem-se ainda AP < OP). Inversamente, todo ponto X dessa circunferência é tal que OX = OP.



9.25) **Plano tangente à superfície esférica** – Um plano que passa pelo ponto T de uma superfície esférica e é perpendicular ao raio $\overline{OT}$ chama-se **plano tangente**. O ponto T é o **ponto de tangência**. Demonstre que todo plano tangente tem um único ponto em comum com a esfera, que é o ponto de tangência.

Solução

Seja α o plano tangente. Tomemos em α o ponto Q $\neq$ T. Como o Δ OTQ é retângulo em T, temos OQ > OT = r. Assim, Q é exterior à esfera de centro O e raio r. O único ponto que α pode ter em comum com a superfície esférica é o ponto de tangência T.

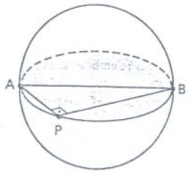


Nota: Uma reta qualquer contida em α e passando pelo ponto T é uma reta tangente à superfície esférica. Assim, pelo ponto T passam infinitas retas tangentes, todas contidas no plano tangente e perpendiculares ao raio $\overline{OT}$.

9.26) Mostre que todos os pontos de uma superfície esférica vêem um diâmetro sob ângulo reto.

Solução

Os extremos A e B do diâmetro $\overline{AB}$ vêem esse segmento sob *qualquer* ângulo (como ficou convencionado), portanto também sob ângulo reto.



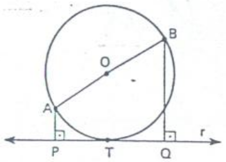
Seja P, distinto de A e B, um ponto pertencente à superfície esférica. O plano pl (A, B, P) intercepta a superfície esférica segundo uma circunferência, da qual $\overline{AB}$ é um diâmetro. Assim, $A\hat{P}B$ é reto, por ser inscrito em uma semicircunferência.

Exercícios Propostos

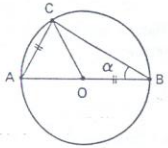
9.27) Prove que se $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$ são diâmetros de uma circunferência, então ABCD é um paralelogramo.

9.28) São dadas duas circunferências concêntricas (isto é, de mesmo centro). Uma corda da circunferência maior tangencia a menor. Mostre que o ponto de tangência divide essa corda ao meio.

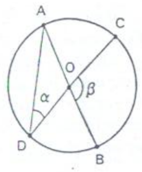
9.29) Na figura, a reta r tangencia a circunferência de centro O em T. Sendo $\overline{AB}$ um diâmetro, tem-se $\overleftrightarrow{AP} \perp r$ e $\overleftrightarrow{BQ} \perp r$. Mostre que OP = = OQ.



9.30) Sendo O o centro da circunferência da figura e C um ponto tal que $\overline{AC} \equiv \overline{OB}$, calcule α.

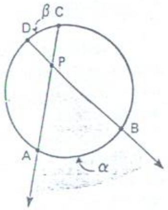


9.31) Na figura, O é o centro da circunferência. Sendo $\alpha = 35°$, calcule β.



9.32) **Ângulo excêntrico interior** – Dada uma circunferência, chama-se *excêntrico interior* todo ângulo com vértice em um ponto do interior do círculo. Um ângulo excêntrico interior $A\hat{P}B$ corta a circunferência segundo um arco de medida α, sendo que o ângulo que lhe é oposto pelo vértice corta a circunferência segundo um arco de medida β. Mostre que

$$\text{med}\,(A\hat{P}B) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

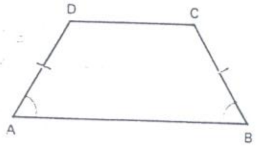


9.33) **Ângulo excêntrico exterior** – Dada uma circunferência, chama-se *excêntrico exterior* todo ângulo com vértice em um ponto do exterior do círculo, cujos lados interceptam a circunferência. Um ângulo excêntrico exterior $A\hat{P}B$ corta a circunferência segundo dois arcos, de medidas α e β, sendo $\alpha > \beta$. Mostre que

$$\text{med}\,(A\hat{P}B) = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

9.34) Num plano α tem-se um ponto A e fora desse plano tem-se o ponto B. A cada reta de α passando por A conduz-se por B a reta perpendicular. Qual é o lugar geométrico dos pés dessas perpendiculares? (Os pés são os pontos em que duas retas perpendiculares se interceptam.) Supor que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é perpendicular a α.

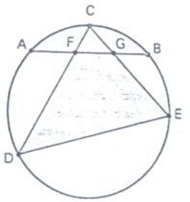
9.35) Trapézio isósceles – Um trapézio é *isósceles* se tem dois lados opostos não paralelos e congruentes entre si. Num trapézio qualquer, os dois lados paralelos são chamados *bases*. Na figura, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são as bases. $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os *ângulos da base* $\overleftrightarrow{AB}$ e $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são os *ângulos da base* $\overleftrightarrow{CD}$. Um trapézio isósceles tem os ângulos de cada base congruentes: $\hat{A} \equiv \hat{B}$ e $\hat{C} \equiv \hat{D}$. Inversamente, um trapézio que tem os ângulos de uma base congruentes é isósceles (veja o exercício 6.48).



Problema: Mostre que um trapézio é inscritível em uma circunferência se e somente se ele é isósceles.

9.36) Prove que todo paralelogramo inscritível em uma circunferência é um retângulo.

9.37) Na figura, o ponto C divide o arco $\widehat{ACB}$ ao meio. Mostre que o quadrilátero DEGF é inscritível em uma circunferência.



9.38) Prove que se um quadrilátero é inscritível em uma circunferência, então as quatro mediatrizes dos lados desse quadrilátero têm um único ponto comum.

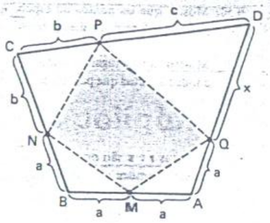
9.39) Prove que se as quatro bissetrizes dos ângulos internos de um quadrilátero convexo têm um ponto em comum, esse quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.

9.40) Seja ABCD um quadrilátero convexo tal que

$$AB + CD = AD + BC$$

(isto é, no qual a soma das medidas de dois lados opostos é igual à dos outros dois). Podemos supor (sem perder a generalidade) que

$$AB \leqslant BC \leqslant AD \leqslant CD$$



Seja M o ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$, com $a = \frac{AB}{2}$. Tomemos N sobre $\overleftrightarrow{BC}$, tal que $BN = a$, sendo $b = BC - a$. Tomemos P sobre $\overleftrightarrow{CD}$, tal que $CP = b$, sendo $c = CD - b$. Finalmente, tomemos Q sobre $\overleftrightarrow{AD}$, tal que $AQ = a$.

Prove que:

a) $QD = c$;

b) o quadrilátero MNPQ é inscritível em uma circunferência;

c) o quadrilátero ABCD é circunscritível a uma circunferência, com mesmo centro daquela do item *b*.

Nota: Este exercício corresponde ao teorema recíproco daquele demonstrado no exercício 9.22.

9.41) Mostre que dados quatro pontos não coplanares, existe uma única superfície esférica que os contém.

9.42) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que passam por dois pontos dados, A e B.

9.43) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que passam pelos vértices de um triângulo dado.

9.44) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que tangenciam uma reta r dada, num ponto dado $A \in r$.

9.45) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que tangenciam um plano α dado, num ponto dado $A \in \alpha$.

9.46) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas tangentes a dois planos secantes, α e β, dados.

9.47) Uma reta corta uma superfície esférica nos pontos A e B. Mostre que o raio que é perpendicular a $\overline{AB}$ corta esta corda ao meio.

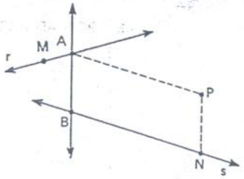
9.48) Dada uma circunferência e um ponto fora do seu plano, determine o centro de uma superfície esférica que contém a circunferência e passa pelo ponto dado.

9.49) Mostre que os planos tangentes a uma esfera nas extremidades de um diâmetro são paralelos.

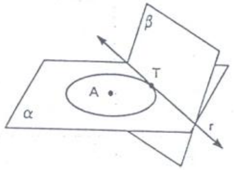
9.50) Mostre que os pontos do espaço que vêem um segmento $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulos reto pertencem à superfície esférica de diâmetro $\overleftrightarrow{AB}$ (o recíproco do teorema do exercício 9.26).

9.51) Mostre que o lugar geométrico dos pés das retas perpendiculares conduzidas por um ponto A a todas as retas que passam por um ponto B $\neq$ A é a superfície esférica que tem $\overleftrightarrow{AB}$ como diâmetro.

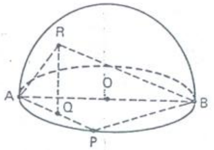
9.52) As retas **r** e **s** são ortogonais, $\overleftrightarrow{AB}$ é a perpendicular comum e o quadrilátero ABNP é paralelogramo (retângulo). Mostre que A, B, P e N pertencem à superfície esférica de diâmetro $\overleftrightarrow{MN}$.



9.53) Num plano α tem-se uma circunferência de centro A. Pelo ponto T dessa circunferência, conduz-se **r** tangente a ela e por **r** o plano β secante a α. Determine o centro de uma superfície esférica que contém a circunferência e tangencia β em T.



9.54) Seja uma circunferência de centro O, diâmetro $\overleftrightarrow{AB}$ e seja P um ponto dessa circunferência. Por um ponto Q ∈ $\overleftrightarrow{AP}$ traça-se uma perpendicular ao plano da circunferência, que corta a superfície esférica de diâmetro $\overleftrightarrow{AB}$ em R. Demonstre que $\overleftrightarrow{AR}$ é perpendicular ao plano pl (R, P, B).



Capítulo

10 Áreas dos polígonos

10.1 — ÁREAS DOS POLÍGONOS

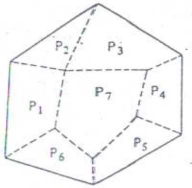
Intuitivamente, a área de um polígono é um número que mede a sua *extensão*, ou seja, a porção de plano ocupada por ele.

Desejamos, entretanto, estabelecer um significado mais preciso para esta idéia, fixando as **propriedades** que a área deve ter.

A cada polígono, então, será associado um *número real não negativo*, chamado área, que deverá satisfazer as propriedades seguintes.

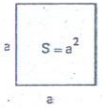
1.ª) Polígonos congruentes têm mesma área.

2.ª) Se um polígono P for decomposto como a união de um certo número de outros polígonos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de tal modo que dois quaisquer dentre eles tenham em comum pontos isolados ou segmentos, então a área de P é a soma das áreas desses polígonos.



3.ª) A área de um quadrado cujo lado tem medida **a** é igual a a^2:

$$S = a^2$$



A partir destas três suposições, poderemos deduzir a área de outros polígonos. Isto será feito a seguir, nos exercícios resolvidos.

Polígonos equivalentes

Dois polígonos se dizem equivalentes se têm mesma área.

Exercícios Resolvidos

10.1) Área do retângulo — Mostre que a área de um retângulo cujos lados têm medidas iguais a **a** e **b** é

$$\boxed{S = a \cdot b}$$

Solução

Veja a ilustração. O quadrado que tem lados medindo a + b compõe-se de quatro quadriláteros, dos quais dois são também quadrados (áreas iguais a a^2 e b^2) e os outros dois são retângulos congruentes ao retângulo dado. Sendo S a área desse retângulo, temos

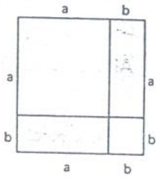
$$2S + a^2 + b^2 = (a + b)^2.$$

Então,

$$2S + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

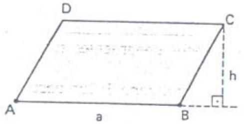
donde

$$S = ab$$



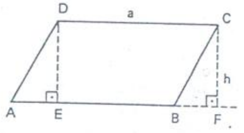
10.2) Área do paralelogramo — Dado um paralelogramo ABCD, vamos escolher um dos lados, $\overleftrightarrow{AB}$, que chamaremos **base**. Sua medida **a** também se chama **base**. A **altura** relativa à base $\overleftrightarrow{AB}$ é a distância **h** entre as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Mostre que a área de um paralelogramo é igual ao produto de sua base pela sua altura:

$$\boxed{S = a \cdot h}$$



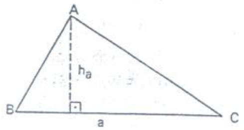
Solução

Observe a figura. Como $\triangle AED \equiv \triangle BFC$, suas áreas são iguais. Assim, a área do pralelogramo é igual à área do retângulo EFCD: $S = a \cdot h$.



10.3) Área do triângulo — Dado um $\triangle ABC$, se escolhermos um lado, $\overleftrightarrow{BC}$, como **base** (sua medida **a** também se chama **base**), então a altura relativa à base $\overleftrightarrow{BC}$ é indicada por h_a. Mostre que a área do triângulo é igual à *metade* do produto de sua base pela sua altura:

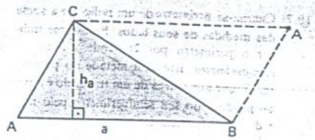
$$\boxed{S = \frac{1}{2} a \cdot h_a}$$



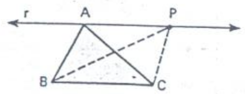
Solução

Com $\overleftrightarrow{CA'} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BA'} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, obtemos o paralelogramo ABA'C, cuja área é igual a $a \cdot h_a$. Mas $\triangle ABC \equiv \triangle A'CB$ (A L A), logo a área do $\triangle ABC$ é igual à *metade* da área do paralelogramo:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$$



10.4) Dado o $\triangle ABC$, seja **r** a reta por A, paralela a $\overleftrightarrow{BC}$. Mostre que todo triângulo $\triangle PBC$, com base $\overleftrightarrow{BC}$ e o vértice P sobre a reta **r**, é eqüivalente ao $\triangle ABC$.



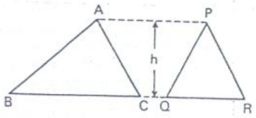
Solução

Basta notar que os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PBC$ têm mesma base BC = a e mesma altura h_a, logo ambos têm a mesma área $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$.

10.5) Sejam os triângulos ABC e PQR. Admitamos que ambos têm alturas iguais, relativas aos vértices A e P. Prove que a razão entre as áreas dos dois triângulos é igual à razão entre as suas bases BC e QR.

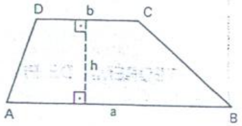
Solução

Sejam S_1 a área do $\triangle ABC$ e S_2 a área do $\triangle PQR$. Temos $S_1 = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot h$ e $S_2 = \frac{1}{2} \cdot QR \cdot h$. Então, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{BC}{QR}$.



10.6) Área do trapézio — A **altura h** de um trapézio é a distância entre as suas bases $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$. Sejam **a** e **b** as medidas das bases (que também se chamam bases). Mostre que a área do trapézio é dada por

$$\boxed{S = \frac{(a + b)}{2} \cdot h}$$



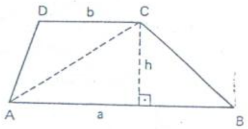
Solução

A área do trapézio é a soma das áreas dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$:

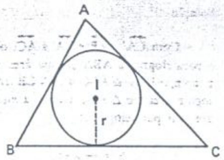
$$S = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h$$

donde

$$S = \frac{(a + b)}{2} \cdot h$$



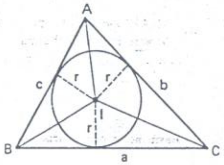
10.7) Chama-se **perímetro** de um polígono a soma das medidas de seus lados. É costume indicar o perímetro por **2p**, onde **p** indica o *semiperímetro*, isto é, a metade do perímetro. Prove que a área de um triângulo é igual ao produto do seu semiperímetro pelo raio **r** da circunferência inscrita no triângulo:



$$\boxed{S = p \cdot r}$$

Solução

Seja I o incentro do triângulo ABC. Os triângulos ABI, BCI e ACI têm áreas iguais a $\frac{1}{2}c \cdot r$, $\frac{1}{2}a \cdot r$ e $\frac{1}{2}b \cdot r$, respectivamente. Assim, a área do $\triangle$ ABC é

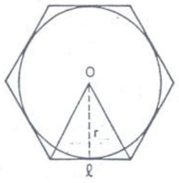


$$S = \frac{1}{2}c \cdot r + \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r = \frac{(a + b + c)}{2} \cdot r = p \cdot r$$

10.8) Lembremos que o apótema de um *polígono regular* é o raio **r** da circunferência inscrita nesse polígono. Prove que a área de um polígono regular é dada por $S = p \cdot r$, onde **p** é o semiperímetro.

Solução

Ligando cada vértice ao centro, o polígono fica decomposto em **n** triângulos congruentes (**n** é o número de lados do polígono). Cada um desses triângulos tem área igual a $\frac{1}{2}\ell \cdot r$. Assim, a área do polígono é



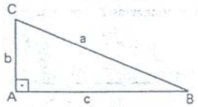
$$S = n\left(\frac{1}{2}\ell \cdot r\right) = \frac{(n\ell)}{2} \cdot r = p \cdot r$$

10.2 — TEOREMA DE PITÁGORAS

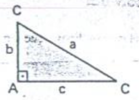
Teorema

Se um triângulo é retângulo, então o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos:

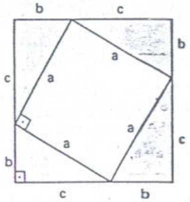
$$a^2 = b^2 + c^2$$



Demonstração



O quadrado com lado medindo $b + c$ é decomposto em quatro triângulos congruentes ao $\triangle$ ABC e um quadrado cujo lado mede **a**. Seja S a área do $\triangle$ ABC. Temos



$$4S + a^2 = (b + c)^2$$

Mas $S = \frac{1}{2} b \cdot c$, logo

$$2bc + a^2 = (b + c)^2$$
$$2bc + a^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

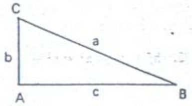
e então

$$a^2 = b^2 + c^2$$

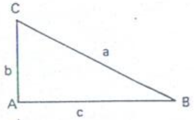
Demonstremos agora o teorema *recíproco* do teorema de Pitágoras.

Teorema

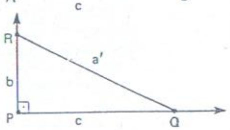
Se os lados do $\triangle$ ABC medem **a**, **b** e **c** e se tem $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é retângulo, com hipotenusa **a** e catetos **b** e **c**.



Demonstração



Por um ponto P qualquer, tomemos a semi-reta $\overrightarrow{PQ}$, de modo que seja $\overline{PQ} = c$. Tomemos por P outra semi-reta $\overrightarrow{PR}$, perpendicular à primeira, de tal modo que seja $PR = b$. Assim, obtemos o $\triangle$ PQR, que é retângulo. Se a' é a sua hipotenusa, temos



$$(a')^2 = b^2 + c^2$$

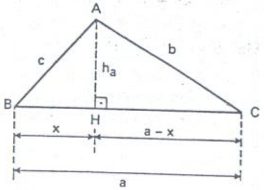
Mas é dado que $a^2 = b^2 + c^2$, logo, $a' = a$. Assim, $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ (L L L), donde $\hat{A} \equiv \hat{P}$, ou seja, o ângulo $\hat{A}$ é reto.

Exercícios Resolvidos

10.9) Fórmula de Herão — Prove que um triângulo de lados **a**, **b**, **c** e semiperímetro **p** tem área igual a

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Solução



Supondo $c \leq b \leq a$, então a altura $\overleftrightarrow{AH}$ divide o lado maior em dois segmentos, de medidas x e $a - x$ (veja a figura). Temos $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, donde

$$4S^2 = a^2h_a^2 \qquad (1)$$

No $\triangle$ ABH: $c^2 = x^2 + h_a^2$ (2)

No $\triangle$ ACH: $b^2 = (a - x)^2 + h_a^2$ (3)

Então

$$b^2 = a^2 - 2ax + x^2 + h_a^2 = a^2 - 2ax + c^2$$

donde

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

De (2): $h_a^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$

Assim,

$$4a^2h_a^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 =$$
$$= [2ac - (a^2 + c^2 - b^2)][2ac + (a^2 + c^2 - b^2)] =$$
$$= [b^2 - (a^2 + c^2 - 2ac)][(a^2 + c^2 + 2ac) - b^2] =$$
$$= [b^2 - (a - c)^2][(a + c)^2 - b^2] =$$
$$= (b - a + c)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b)$$

Sendo $a + b + c = 2p$, temos:

$$b - a + c = (a + b + c) - 2a = 2p - 2a = 2(p - a)$$
$$b + a - c = (a + b + c) - 2c = 2p - 2c = 2(p - c)$$
$$a + c - b = (a + b + c) - 2b = 2p - 2b = 2(p - b)$$

e então

$$4a^2h_a^2 = 16\,p(p - a)(p - b)(p - c)$$

ou

$$a^2h_a^2 = 4\,p(p - a)(p - b)(p - c)$$

Substituindo esta expressão em (1):

$$4S^2 = 4\,p(p - a)(p - b)(p - c)$$
$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

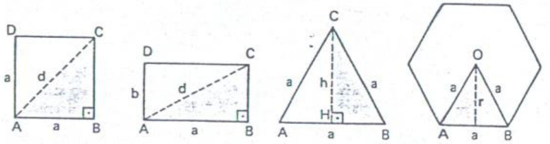
e, finalmente:

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

10.10) Determine a expressão que dá:

a) a diagonal de um quadrado de lado **a**;
b) a diagonal de um retângulo de lados **a** e **b**;
c) a altura de um triângulo eqüilátero de lado **a**;
d) a área de um triângulo eqüilátero de lado **a**;
e) o apótema de um hexágono regular de lado igual a **a**;
f) a área do hexágono regular de lado **a**.

Solução



a) No $\triangle$ ABC: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, donde $d = a\sqrt{2}$

b) No $\triangle$ ABC: $d^2 = a^2 + b^2$, donde $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

c) No $\triangle$ HCB: $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, donde

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

e assim

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

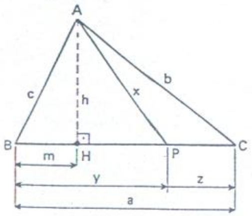
d) $S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

e) O apótema do hexágono regular é a altura do triângulo eqüilátero OAB: $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

f) A área do hexágono regular é igual a seis vezes a área do $\triangle$ OAB:

$$S = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

10.11) Relação de Stewart — Seja P um ponto qualquer entre os vértices B e C de um triângulo ABC. Sendo AP = x, BP = y, PC = z, mostre que $a(x^2 + yz) = b^2y + c^2z$ (relação de Stewart).



Solução

Consideremos a figura anterior.

No △ AHB: $h^2 = c^2 - m^2$ (1)

No △ AHP: $h^2 = x^2 - (y - m)^2$ (2)

No △ AHC: $h^2 = b^2 - (a - m)^2$ (3)

De (1) e (2): $x^2 - (y - m)^2 = c^2 - m^2$

donde: $2ym = c^2 + y^2 - x^2$ (4)

De (1) e (3): $b^2 - (a - m)^2 = c^2 - m^2$

donde: $2am = a^2 + c^2 - b^2$ (5)

Multipliquemos (4) por **a** e (5) por y.

$$2aym = ac^2 + ay^2 - ax^2$$
$$2aym = a^2y + c^2y - b^2y$$

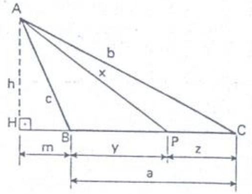
Assim,

$$a^2y + c^2y - b^2y = ac^2 + ay^2 - ax^2$$
$$ax^2 + a^2y - ay^2 = b^2y + ac^2 - c^2y$$
$$ax^2 + ay(a - y) = b^2y + c^2(a - y)$$
$$ax^2 + ayz = b^2y + c^2z$$

e, finalmente,

$$a(x^2 + yz) = b^2y + c^2z$$

Se o ângulo B for obtuso, como na figura ao lado, então teremos:



$h^2 = c^2 - m^2$ (1)

$h^2 = x^2 - (y + m)^2$ (2)

$h^2 = b^2 - (a + m)^2$ (3)

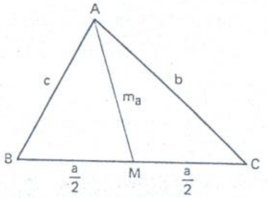
e a dedução conduz ao mesmo resultado.

Examine o caso $\hat{B} = 90°$

10.12) No △ ABC, AM = m_a é a mediana relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$. Determine m_a, em função dos lados **a**, **b** e **c**.

Solução

Apliquemos a relação de Stewart (veja o exercício anterior), sendo $x = m_a$, $y = \frac{a}{2}$ e $z = \frac{a}{2}$:



$$a\left(m_a^2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\right) = b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2}$$

Daí, obtemos

$$m_a = \frac{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{2}$$

Exercícios Propostos

10.13) Sendo **d** a diagonal de um quadrado, mostre que a área desse quadrado é $S = \frac{d^2}{2}$.

10.14) Sendo d_1 e d_2 as diagonais de um losango, mostre que a área desse losango é

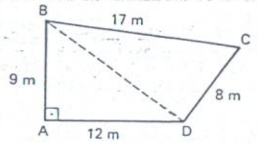
$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

10.15) Um terreno tem a forma de um quadrilátero, com lados medindo 9 m, 17 m, 8 m e 12 m, como indicado na figura. O ângulo $B\hat{A}D$ é reto.

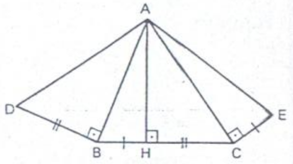
a) Calcule BD.

b) Mostre que $B\hat{D}C$ é reto.

c) Determine a área do terreno.



10.16) Na figura, sendo CE = BH e BD = HC, mostre que AD = AE.

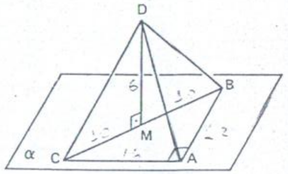


10.17) Na figura, o △ ABC é retângulo em A, M é o ponto médio da hipotenusa e $\overleftrightarrow{DM} \perp \alpha$. Se AC = 16, AB = 12 e DM = 6, calcule:

a) DA, DB e DC;

b) a área do △ ABD;

c) a altura do △ ADB, relativa ao lado $\overleftrightarrow{AB}$.

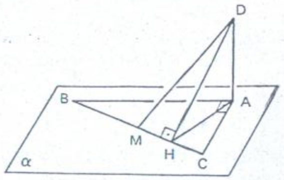


10.18) O △ ABC é retângulo em A, M é o ponto médio da hipotenusa. Tem-se $\overleftrightarrow{DA} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{DH} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Se DA = 2, DM = 6 e DH = $2\sqrt{3}$, calcule:

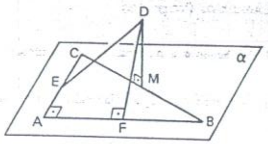
a) a hipotenusa do △ ABC;

b) a altura do △ ABC, relativa à hipotenusa;

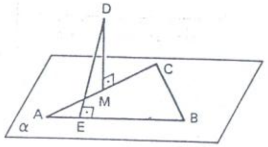
c) a área do △ ABC.



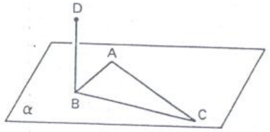
10.19) O △ ABC é retângulo em A, M é o ponto médio da hipotenusa e $\overleftrightarrow{DM} \perp \alpha$. Tem-se $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{DF} \perp \overleftrightarrow{AB}$, AB = 32, AC = 24 e DM = 12. Calcule o perímetro do △ DEF.



10.20) O △ ABC da figura é eqüilátero, M é o ponto médio de $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{DM} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Se DM = MB = 12, calcule o raio da circunferência circunscrita ao △ DME.

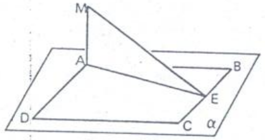


10.21) Na figura, os lados do △ ABC medem a = 13, b = 14, c = 15. Tem-se $\overleftrightarrow{DB} \perp \alpha$ e DB = 5. Calcule a distância de D à reta $\overleftrightarrow{AC}$ (Sugestão: calcule primeiramente a altura BH do △ ABC, utilizando a fórmula de Herão.)



10.22) Pelo vértice A do hexágono regular ABCDEF, conduz-se $\overleftrightarrow{AP}$ perpendicular ao plano do hexágono. Se AP = 3 cm e a área do hexágono é $S = 81\sqrt{3}\ cm^2$, calcule as distâncias de P a cada vértice do hexágono.

10.23) O ângulo do vértice A do paralelogramo ABCD mostrado na figura é obtuso. Tem-se $\overleftrightarrow{AM} \perp \alpha$, AM = 2AD e $\overleftrightarrow{ME} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Calcule a área do paralelogramo, sabendo que a área do △ AME é igual a $24\ cm^2$.



10.24) Calcule a distância entre o ponto M e o plano de um triângulo eqüilátero ABC, se o lado do triângulo é igual a **a** e MA = MB = MC = b. (Veja o exerc. 9.9.)

10.25) Um segmento $\overleftrightarrow{GP}$, de 8 cm de comprimento, é perpendicular ao plano do triângulo eqüilátero ABC, sendo G o baricentro desse triângulo. A área do triângulo é $27\sqrt{3}\ cm^2$. Calcule as distâncias de P a cada vértice e a cada lado do triângulo.

10.26) Os catetos de um triângulo retângulo ABC medem 6 cm e 8 cm. O ponto P dista 13 cm de cada vértice do triângulo. Calcule a distância de P ao plano do triângulo.

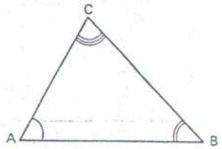
10.27) Pelo vértice A do quadrado ABCD, cujos lados medem 3 m, é levantada uma perpendicular $\overrightarrow{AM}$ ao plano do quadrado. Sendo MB = 4 m, calcule MC.

Capítulo 11

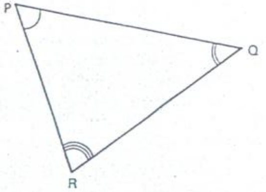
Semelhança de triângulos. Relações métricas

11.1 — TRIÂNGULOS SEMELHANTES

Dois triângulos, ABC e PQR, são *semelhantes* se é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices, de tal modo que os seus ângulos internos sejam dois a dois congruentes:



$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{R}$$



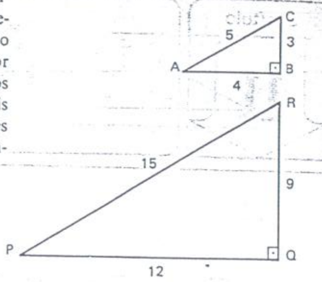
e os seus lados sejam proporcionais:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = k$$

Indicamos △ ABC ~ △ PQR.

O número k, equivalente à razão entre lados correspondentes de dois triângulos semelhantes, chama-se *razão de semelhança*. (Quando falamos em razão de semelhança, estamos sempre pressupondo uma certa *ordem* na qual os dois triângulos são mencionados: se k é a razão de semelhança entre os triângulos ABC e PQR, as medidas dos lados do △ ABC devem figurar nos numeradores e as dos lados do △ PQR, nos denominadores, já que os triângulos foram citados nessa ordem.)

Utilizando uma linguagem imprecisa, podemos dizer que triângulos semelhantes têm a *mesma forma*, mas não necessariamente o mesmo tamanho. Por exemplo, os dois triângulos retângulos da figura ao lado são semelhantes, pois os seus ângulos internos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes apresentam a mesma *razão*:



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{1}{3}$$

É importante notar, como já fizemos para a congruência de triângulos, que a definição de semelhança de triângulos pressupõe a fixação prévia de uma *correspondência* entre os dois triângulos:

$A \leftrightarrow P$
$B \leftrightarrow Q$
$C \leftrightarrow R$

Se os dois triângulos forem relacionados por outra correspondência, por exemplo:

$A \leftrightarrow R$
$B \leftrightarrow P$
$C \leftrightarrow Q$

teremos que $\hat{A}$ e $\hat{R}$ não são ângulos congruentes, nem $\hat{B}$ e $\hat{P}$, nem $\hat{C}$ e $\hat{Q}$, mas nem por isso os dois triângulos deixariam de ser semelhantes. Apenas, não o seriam para *esta* correspondência.

11.2 — CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

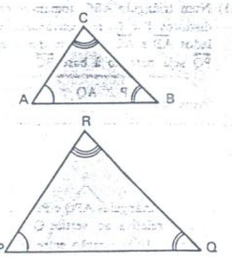
Para se concluir que dois triângulos dados são semelhantes, não é necessário que todas as condições dadas na definição se evidenciem. Por exemplo, sabendo-se que os três ângulos internos são dois a dois congruentes, já se pode garantir que os triângulos são semelhantes, pois a proporcionalidade dos lados será uma conseqüência forçosa. Do mesmo modo, se soubermos que os dois triângulos têm os lados proporcionais, isso acarretará que os ângulos correspondentes são congruentes, resultando que os dois triângulos são semelhantes. Vamos relacionar os principais *critérios de semelhança* de triângulos.

1.º critério **A A A** (ângulo — ângulo — ângulo)

$$\text{Se} \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{P} \\ \hat{B} \equiv \hat{Q} \\ \hat{C} \equiv \hat{R} \end{cases}$$

então $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Se dois triângulos tem congruentes dois a dois **os três ângulos internos**, então esses dois triângulos são semelhantes.

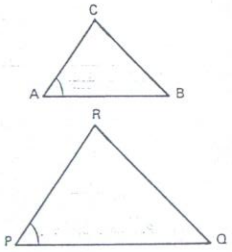


2.º critério **L A L** (lado — ângulo — lado)

$$\text{Se} \begin{cases} \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{AC}{PR} \\ \hat{A} \equiv \hat{P} \end{cases}$$

então $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

Se dois triângulos têm **dois pares de lados** proporcionais **e os ângulos compreendidos entre eles** congruentes, então esses dois triângulos são semelhantes.

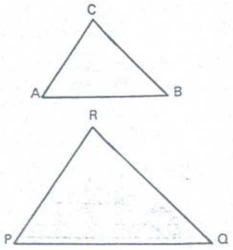


3.º critério **L L L**

$$\text{Se } \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$

então $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.

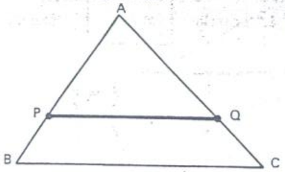
Se dois triângulos têm **os três lados correspondentes proporcionais**, então esses dois triângulos são semelhantes.



Exercícios Resolvidos

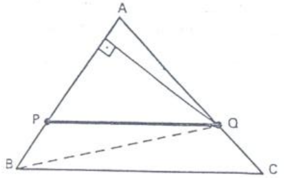
11.1) Num triângulo ABC, tomam-se os pontos distintos P e Q, respectivamente sobre os lados $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, de modo que o segmento $\overleftrightarrow{PQ}$ seja paralelo à base $\overleftrightarrow{BC}$.

Prove que $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$.



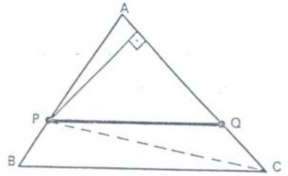
Solução

Os triângulos APQ e PBQ têm mesma altura, relativa ao vértice Q. Então (veja exercício 10.5) a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as bases. Temos então



$$\frac{S_{APQ}}{S_{PBQ}} = \frac{AP}{PB}$$

O mesmo ocorre com os triângulos APQ e QPC, para os quais se tem



$$\frac{S_{APQ}}{S_{QPC}} = \frac{AQ}{QC}$$

Por outro lado, os triângulos PBQ e QPC têm a mesma base $\overleftrightarrow{PQ}$ e as suas alturas relativas a essa base são iguais, pois $\overleftrightarrow{PQ} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$. Assim, suas áreas são iguais:

$$S_{PBQ} = S_{QPC}$$

Concluímos então que $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$, donde tiramos, sucessivamente:

$$\frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ}$$

$$\frac{PB}{AP} + 1 = \frac{QC}{AQ} + 1$$

$$\frac{PB + AP}{AP} = \frac{QC + AQ}{AQ}$$

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$$

ou seja,

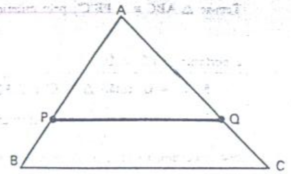
$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

11.2) Prove o recíproco do teorema do exercício anterior, isto é, prove que num triângulo ABC, se tomamos os pontos distintos $P \in \overleftrightarrow{AB}$ e $Q \in \overleftrightarrow{AC}$ de tal modo que

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$$

Então,

$$\overleftrightarrow{PQ} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$$

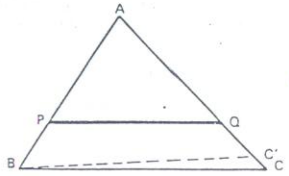


Solução

Imaginemos que a reta conduzida por B, paralela à reta $\overleftrightarrow{PQ}$, intercepta $\overleftrightarrow{AC}$ em C'. Pelo teorema do exercício anterior, tem-se

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{AC'}$$

Conclui-se, então, que AC' = AC. Assim, os pontos C e C' coincidem e portanto $\overleftrightarrow{PQ} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$.



11.3) Demonstre o critério A A A de semelhança.

Solução

Consideremos os triângulos ABC e PQR, para os quais

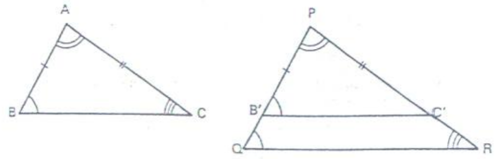
$$\hat{A} \equiv \hat{P}$$
$$\hat{B} \equiv \hat{Q}$$
$$\hat{C} \equiv \hat{R}$$

Para provar que eles são semelhantes, basta provar que os lados correspondentes são proporcionais, ou seja, que

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$

É suficiente provar que $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$, pois a demonstração da última igualdade é totalmente análoga.

Tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ o ponto B' tal que PB' = AB e sobre a semi-reta $\overrightarrow{PR}$ o ponto C' tal que PC' = AC.



Tem-se $\triangle ABC \equiv \triangle PB'C'$, pelo critério LAL de congruência. Sendo assim, tem-se

$$P\hat{B}'C' \equiv \hat{B}$$

e portanto $P\hat{B}'C' \equiv \hat{Q}$.

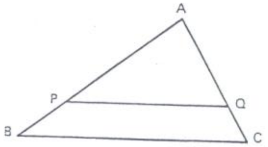
Se $B' = Q$, então $\triangle PB'C'$ e $\triangle PQR$ são coincidentes, logo $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{AR} = 1$.

Se $B' \neq Q$, então podemos afirmar que $\overleftrightarrow{B'C'} /\!/ \overleftrightarrow{QR}$ (veja **nota** no exercício 6.30). Neste caso, recaímos na situação do exercício 11.1, isto é, $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$.

Nota: Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180°, é claro que se $\hat{A} \equiv \hat{P}$ e $\hat{B} \equiv \hat{Q}$, os terceiros ângulos são congruentes obrigatoriamente: $\hat{C} \equiv \hat{R}$. Assim, na aplicação do critério A A A de semelhança, é suficiente verificar que *dois pares de ângulos correspondentes* são congruentes.

11.4) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{PQ} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$. Mostre que

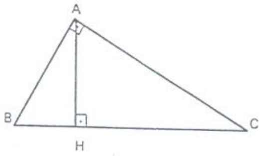
$$\triangle APQ \sim \triangle ABC$$



Solução

As retas paralelas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são cortadas pela transversal $\overleftrightarrow{AB}$, logo, os ângulos correspondentes $A\hat{P}Q$ e $A\hat{B}C$ são congruentes. Assim, os triângulos $\triangle APQ$ e $\triangle ABC$ têm estes dois ângulos congruentes, e como $\hat{A}$ é comum, resulta que são semelhantes, pelo critério A A A.

11.5) O triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A. Seja $\overline{AH}$ a altura relativa à hipotenusa. Mostre que os triângulos $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$ são semelhantes entre si e também são semelhantes ao $\triangle ABC$.



Solução

Observando os triângulos $\triangle HBA$ e $\triangle ABC$, temos $B\hat{H}A \equiv B\hat{A}C$, pois ambos são retos. Além disso, o ângulo $\hat{B}$ é comum aos dois triângulos. Assim, por A A A temos

$$\triangle HBA \sim \triangle ABC$$

Por outro lado, para os triângulos $\triangle HAC$ e $\triangle ABC$ temos $A\hat{H}C \equiv B\hat{A}C$, pois ambos são retos e, também, o ângulo $\hat{C}$ é comum. Logo,

$$\triangle HAC \sim \triangle ABC$$

e, conseqüentemente, $\triangle HBA \sim \triangle HAC$.

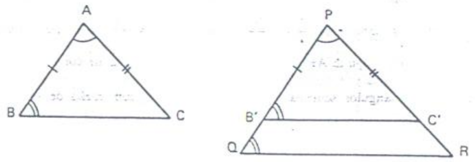
11.6) Demonstre o critério L A L de semelhança.

Solução

Consideremos os triângulos ABC e PQR, para os quais

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \quad \text{e} \quad \hat{A} \equiv \hat{P}$$

Tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ o ponto B' tal que PB' = AB e sobre a semi-reta $\overrightarrow{PR}$ o ponto C' tal que PC' = AC. Pelo critério L A L de congruência, temos $\triangle ABC = \triangle PB'C'$.



Sendo assim, $\frac{PB'}{PQ} = \frac{PC'}{PR}$. Pelo teorema do exercício 11.2, concluímos que $\overleftrightarrow{B'C'} /\!/ \overleftrightarrow{QR}$.

Daí resulta que $\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$ (veja exercício 11.4) e então

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

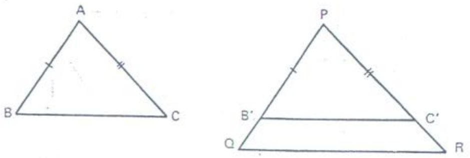
11.7) Demonstre o critério L L L de semelhança.

Solução

Consideremos os triângulos ABC e PQR, para os quais

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$$

Tomemos sobre a semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ o ponto B' tal que PB' = AB e sobre a semi-reta $\overrightarrow{PR}$ o ponto C' tal que PC' = AC. Mostremos, primeiramente, que $\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$. Como



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

temos

$$\frac{PB'}{PQ} = \frac{PC'}{PR}$$

Além disso, o ângulo $\hat{P}$ é comum aos dois triângulos. Assim, pelo critério L A L de semelhança, vem

$$\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$$

Mostremos, agora, que $\triangle ABC \equiv \triangle PB'C'$, o que será suficiente para se concluir que

$$\triangle ABC \sim \triangle PQR$$

Como $\triangle PB'C' \sim \triangle PQR$, temos $\frac{PC'}{PR} = \frac{B'C'}{QR}$, ou seja, $\frac{AC}{PR} = \frac{B'C'}{QR}$, donde tiramos que $B'C' = \frac{AC}{PR} \cdot QR$.

Por outro lado, como $\frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$, temos que $BC = \frac{AC}{PR} \cdot QR$. Assim sendo, conclui-se que $B'C' = BC$, logo $\triangle ABC \equiv \triangle PB'C'$, pelo critério L L L de congruência.

11.8) Sejam dois triângulos semelhantes, $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, com razão de semelhança igual a $\frac{AB}{PQ} = k$. Sejam p_1 e p_2, respectivamente, os semiperímetros dos triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$.

Prove que $\frac{2p_1}{2p_2} = k$.

Solução

Como $\triangle ABC \sim PQR$, temos $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = k$, donde tiramos $AB = k \cdot PQ$, $AC = k \cdot PR$ e $BC = k \cdot QR$. Logo,

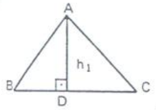
$$AB + AC + BC = k\,(PQ + PR + QR)$$
$$2p_1 = k \cdot (2p_2)$$

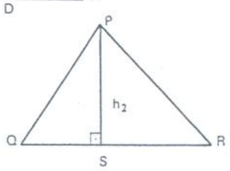
e, assim,

$$\frac{2p_1}{2p_2} = k$$

11.9) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, como no exercício anterior. Seja h_1 a altura do $\triangle ABC$, relativa ao vértice A, e seja h_2 a altura do $\triangle PQR$, relativa ao vértice P.

Prove que $\frac{h_1}{h_2} = k$.



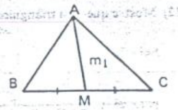


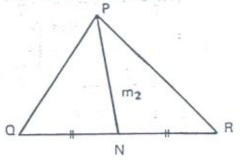
Solução

Observe as figuras. Para os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle PQS$, temos $\hat{B} \equiv \hat{Q}$ e $A\hat{D}B = P\hat{S}Q$, logo, pelo critério A A A, temos $\triangle ABD \sim \triangle PQS$. Daí resulta que $\frac{h_1}{h_2} = \frac{AB}{PQ} = k$.

11.10) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, como no exercício 11.8. Sejam m_1 a mediana do $\triangle ABC$, relativa ao lado $\overline{BC}$, e seja m_2 a mediana do $\triangle PQR$, relativa ao lado $\overline{QR}$.

Prove que $\frac{m_1}{m_2} = k$.





Solução

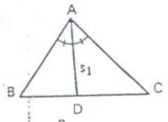
Observe as figuras. Para os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle PQN$, temos $\hat{B} \equiv \hat{Q}$ e ainda

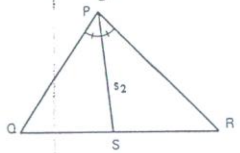
$$\frac{BM}{QN} = \frac{\frac{BC}{2}}{\frac{QR}{2}} = \frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ} = k$$

Logo, pelo critério L A L de semelhança, temos $\triangle ABM \sim \triangle PQN$. Assim, $\frac{m_1}{m_2} = k$.

11.11) Sejam os triângulos $\triangle ABC$ e $\triangle PQR$, como no exercício 11.8. Seja s_1 a bissetriz interna do $\triangle ABC$, relativa ao vértice A, e seja s_2 a bissetriz interna do $\triangle PQR$, relativa ao vértice P.

Prove que $\frac{s_1}{s_2} = k$.





Solução

Observe as figuras. Para os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle PQS$, temos $\hat{B} \equiv \hat{Q}$ e ainda

$$B\hat{A}D = \frac{1}{2}\hat{A} = \frac{1}{2}\hat{P} = Q\hat{P}S$$

Assim, pelo critério A A A, $\triangle ABD \sim \triangle PQS$, donde

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{AB}{PQ} = k$$

11.12) Mostre que dois triângulos isósceles são semelhantes se têm os ângulos dos vértices congruentes.

Solução

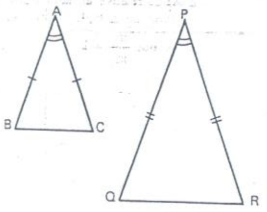
Observe os dois triângulos isósceles, para os quais se tem $\hat{A} \equiv \hat{P}$. Como

$$AB = AC$$

e

$$PQ = PR$$

temos $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$, logo, pelo critério L A L, $\triangle ABC \sim \triangle PQR$.



Nota: Poderíamos ter utilizado o critério A A A, observando que

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180° - \hat{A}}{2} = \frac{180° - \hat{P}}{2} = \hat{Q} = \hat{R}$$

11.13) Sejam os triângulos $\triangle$ ABC e $\triangle$ PQR, como no exercício 11.8. Seja R_1 o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle$ ABC e seja R_2 o raio da circunferência circunscrita ao $\triangle$ PQR. Prove que $\frac{R_1}{R_2} = k$.

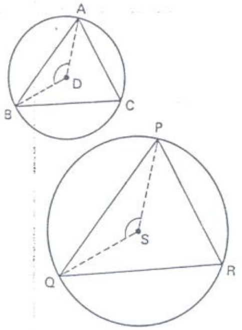
Solução

Observe as figuras. Para os triângulos isósceles ABD e PQS, temos

$$\hat{D} = 2\hat{C} = 2\hat{R} = \hat{S}$$

Assim, pelo resultado do exercício anterior, temos $\triangle ABD \sim \triangle PQS$, donde

$$\frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}, \quad \text{isto é,} \quad \frac{R_1}{R_2} = k$$



11.14) Sejam os triângulos $\triangle$ ABC e $\triangle$ PQR, como no exercício 11.8. Sejam r_1 e r_2 os raios das circunferências inscritas nesses triângulos. Prove que $\frac{r_1}{r_2} = k$.

Solução

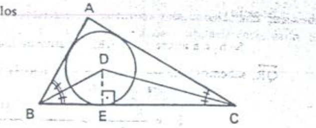
Convém lembrar, inicialmente, que o centro da circunferência inscrita num triângulo (incentro) é a interseção das bissetrizes internas (veja exercício 9.8).

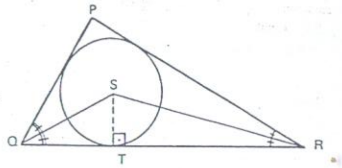
Observe as figuras. Para os triângulos $\triangle$ BCD e $\triangle$ QRS, temos

$$C\hat{B}D = \frac{1}{2}\hat{B} = \frac{1}{2}\hat{Q} = R\hat{Q}S$$

e

$$B\hat{C}D = \frac{1}{2}\hat{C} = \frac{1}{2}\hat{R} = Q\hat{R}S$$

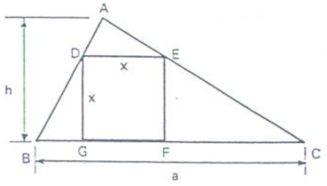




Assim, pelo critério A A A, $\triangle BCD \sim \triangle QRS$, logo para as *alturas* DE e ST destes triângulos (as quais são exatamente os raios r_1 e r_2) podemos escrever

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{DE}{ST} = \frac{BC}{QR} = k \qquad \text{(veja exercício 11.9)}$$

11.15) Na figura, DEFG é um quadrado. Calcule o lado x desse quadrado, em função da base a e da altura h do $\triangle$ABC.



Solução

A altura do $\triangle$ ADE mede h − x, e a sua base mede x. Como $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, podemos escrever

$$\frac{h - x}{h} = \frac{x}{a}$$

donde obtemos $x = \frac{ah}{a + h}$.

11.16) Áreas de triângulos semelhantes – Sejam S_1 e S_2 as áreas de dois triângulos semelhantes $\triangle$ ABC e $\triangle$ PQR, cuja razão de semelhança é $\frac{AB}{PQ} = k$. Prove que $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.

Solução

Se h_1 é a altura do $\triangle ABC$, relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$ e h_2 é a altura do $\triangle PQR$, relativa ao lado $\overleftrightarrow{QR}$, sabemos que $\frac{h_1}{h_2} = k$ (veja exercício 11.9). Temos também $\frac{BC}{QR} = k$. Portanto,

$$S_1 = \frac{BC \cdot h_1}{2} = \frac{(k \cdot QR) \cdot (k \cdot h_2)}{2} = k^2 \cdot \frac{QR \cdot h_2}{2} = k^2 \cdot S_2$$

donde

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2$$

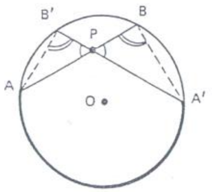
A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

11.17) Potência de um ponto em relação a uma circunferência — Sejam dados uma circunferência fixa, de centro O e raio r, e um ponto P, fixo. Vamos conduzir por P duas retas, que determinam as cordas $\overleftrightarrow{AB}$ ($A \neq B$) e $\overleftrightarrow{A'B'}$ ($A' \neq B'$). Mostre que

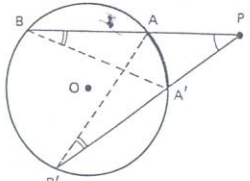
$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Solução

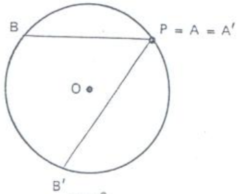
Há três situações a considerar, segundo P esteja no interior do círculo, no seu exterior ou sobre a circunferência.



caso 1



caso 2



caso 3

Casos 1 e 2: Para os triângulos $\triangle APB'$ e $\triangle A'PB$ temos $A\hat{P}B' = A'\hat{P}B$ (opv no caso 1 e comum no caso 2) e ainda

$$A\hat{B}'P = A'\hat{B}P = \frac{1}{2}\,\text{med}\,(\widehat{AA'})$$

Logo, pelo critério A A A, $\triangle APB \sim \triangle A'PB$. Então, $\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}$, donde

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

Caso 3: Se P pertence à circunferência, então $PA = PA' = 0$, logo

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB' = 0$$

Nota: O produto $PA \cdot PB$ não depende, portando, da particular reta considerada passando por P. Este produto tem o nome de **potência do ponto P**, em relação à circunferência dada. Se a circunferência é fixada, podemos indicar

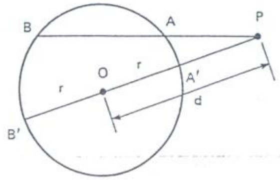
$$PA \cdot PB = \text{Pot}\,(P)$$

É imediato que, se P pertence à circunferência, então $\text{Pot}\,(P) = 0$.

11.18) Dados uma circunferência de centro O e raio r e um ponto P qualquer, seja $PO = d$ a distância de P ao centro da circunferência. Mostre que $\text{Pot}\,(P) = |d^2 - r^2|$.

Solução

Como Pot (P) independe da particular reta considerada, se tomarmos por P uma reta que passe pelo centro O, teremos (veja as figuras):



a) Sendo P externo,

$$\text{Pot}\,(P) = PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

mas

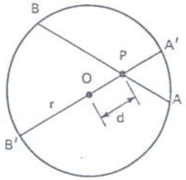
$$PA' = PO - A'O = d - r$$

e

$$PB' = PO + OB' = d + r$$

donde

$$\text{Pot}\,(P) = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2$$



b) Sendo P interno,

$$\text{Pot}\,(P) = PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

mas

$$PA' = A'O - PO = r - d$$

e

$$PB' = OB' + PO = r + d$$

donde

$$\text{Pot}\,(P) = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2$$

Assim, em ambos os casos, temos

$$\text{Pot}\,(P) - |d^2 - r^2|$$

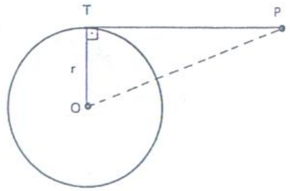
11.19) Seja P um ponto externo a um circulo de centro O e raio r, pelo qual traçamos uma reta que tangencia a circunferência no ponto T. Mostre que $\text{Pot}\,(P) = (PT)^2$.

Solução

Como $\triangle POT$ é retângulo, pelo teorerema de Pitágoras temos

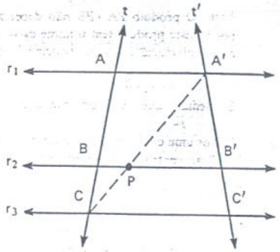
$$(PT)^2 + (OT)^2 = (PO)^2$$

isto é, $(PT)^2 = (PO)^2 - (OT)^2 = d^2 - r^2 = \text{Pot}\,(P)$ conforme se viu no exercício anterior.



11.20) **Teorema de Tales no plano** – Sejam, num mesmo plano, três retas r_1, r_2 e r_3, paralelas duas a duas, cortadas pelas duas retas transversais t e t', nos pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente. Prove que os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais, isto é, prove que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



Solução

Podemos supor que B está entre A e C e B' está entre A' e C', como está indicado na figura, onde foi desenhada também a reta $\overleftrightarrow{A'C}$, que corta r_2 em P. Nestas condições, temos $\triangle A'PB' \sim \triangle A'CC'$, donde $\frac{A'C}{A'P} = \frac{A'C'}{A'B'}$ e também $\triangle CPB \sim \triangle CA'A$, donde $\frac{A'C}{PC} = \frac{AC}{BC}$.

Daí vem $\frac{A'C - A'P}{A'P} = \frac{A'C' - A'B'}{A'B'}$

$$\frac{PC}{A'P} = \frac{B'C'}{A'B'} \qquad (1)$$

e também

$$\frac{A'C - PC}{PC} = \frac{AC - BC}{BC}$$

$$\frac{A'P}{PC} = \frac{AB}{BC}$$

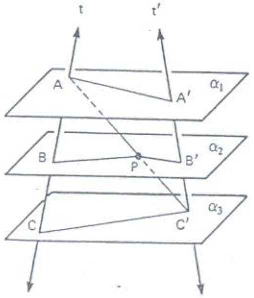
$$\frac{PC}{A'P} = \frac{BC}{AB} \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2), vem $\frac{B'C'}{A'B'} = \frac{BC}{AB}$. Assim,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AB + BC}{A'B' + B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

11.21) **Teorema de Tales no espaço** – Sejam três planos α_1, α_2 e α_3, paralelos dois a dois, furados por duas retas transversais (não necessariamente coplanares) t e t', nos pontos A, B, C e A', B', C', respectivamente. Prove que os segmentos determinados nas duas transversais são proporcionais, isto é,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$



Solução

Observemos a figura, onde foi desenhada a reta $\overleftrightarrow{AC'}$, que encontra α_2 em P. Para o triângulo $\triangle AA'C'$ temos (utilizando o exercício anterior)

$$\frac{A'B'}{AP} = \frac{A'C'}{AC'} = \frac{B'C'}{PC'} \qquad (1)$$

e para o triângulo $\triangle ACC'$ temos

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{PC'} \qquad (2)$$

Assim, dividindo (2) por (1):

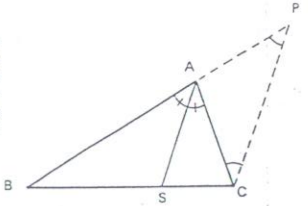
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

11.22) Demonstre que cada bissetriz interna de um triângulo separa o lado em dois segmentos, cujas medidas são proporcionais aos lados adjacentes.

Solução

Vamos construir por C uma reta paralela à bissetriz $\overleftrightarrow{AS}$, a qual encontra a reta $\overleftrightarrow{AB}$ no ponto P. Então, $A\hat{C}P = C\hat{A}S$ (alternos internos). Além disso, o ângulo $C\hat{A}B$, externo ao triângulo $\triangle ACP$, é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele:

$$C\hat{A}B = A\hat{C}P + A\hat{P}C$$
$$2C\hat{A}S = A\hat{C}P + A\hat{P}C$$
$$2C\hat{A}S = C\hat{A}S + A\hat{P}C$$
$$A\hat{P}C = C\hat{A}S$$



Assim, $\triangle ACP$ é isósceles, logo AP = AC.

No $\triangle BCP$ temos

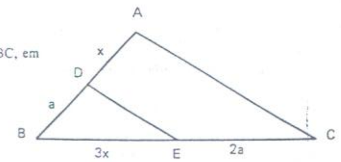
$$\frac{BS}{SC} = \frac{BA}{AP}$$

e portanto

$$\frac{BS}{SC} = \frac{BA}{AC}$$

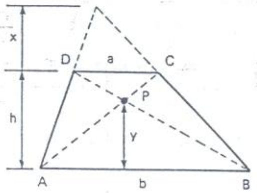
Exercícios Propostos

11.23) Na figura, $\overleftrightarrow{DE} /\!/ \overleftrightarrow{AC}$. Calcule AB e BC, em função de a.

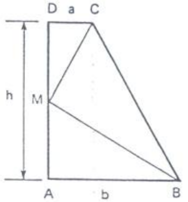


11.24) Duas circunferências tangentes entre si estão inscritas no ângulo Â. Sendo 5 cm e 13 cm seus raios, determine as distâncias de seus centros ao ponto A.

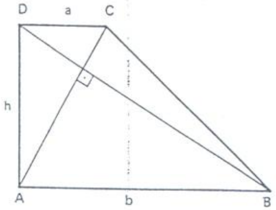
11.25) Do trapézio ABCD da figura, são dadas as bases **a** e **b** e a altura **h** (b > a). Determine **x**, **y** e ainda as razões $\frac{AP}{PC}$ e $\frac{BP}{PD}$.



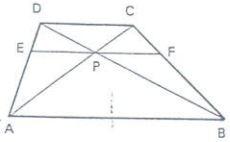
11.26) Dado o trapézio ABCD, retângulo em A e D, toma-se o ponto M sobre $\overleftrightarrow{AD}$, tal que $\frac{AM}{MD} = k$. Sabendo que $B\hat{M}C$ é reto, calcule a altura **h** do trapézio, em função das bases **a** e **b** e de **k**.



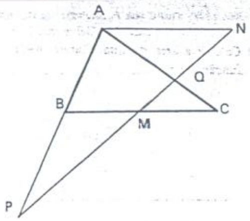
11.27) O trapézio ABCD da figura é retângulo em A e D. Calcule a sua altura **h**, em função das bases **a** e **b**, sabendo que as diagonais são perpendiculares entre si. Determine também, em função de **a** e **b**, as medidas das diagonais.



11.28) Pela interseção P das diagonais do trapézio ABCD, traça-se a reta paralela às bases, que encontra os lados em E e F. Mostre que EP = PF.



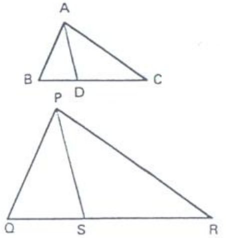
11.29) Na figura, $\overleftrightarrow{AN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e M é o ponto médio de $\overline{BC}$. Mostre que $\frac{PM}{PN} = \frac{MQ}{QN}$.



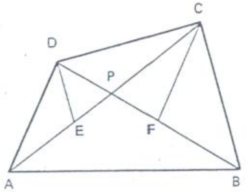
11.30) Sendo △ ABC ~ △ PQR, tomam-se D e S sobre os lados $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{QR}$, respectivamente, de tal modo que

$$\frac{BD}{DC} = \frac{QS}{SR}$$

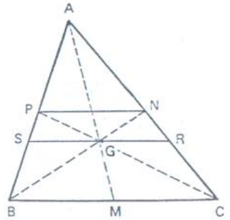
Mostre que $\frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}$.



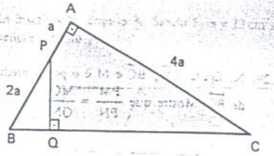
11.31) Na figura, $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{AD}$. Mostre que $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$.



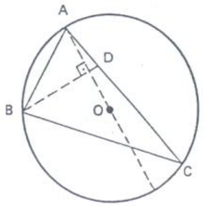
11.32) Na figura, M, N e P são os pontos médios dos lados do triângulo ABC e G é o seu baricentro. Sendo $\overleftrightarrow{SR} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, determine as medidas dos lados do trapézio PSRN, em função das medidas **a**, **b** e **c** dos lados do △ ABC.



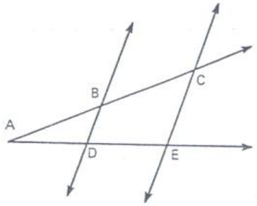
11.33) Calcule a área do quadrilátero APQC, em função de **a**.



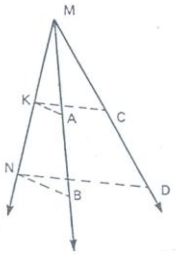
11.34) O △ ABC está inscrito numa circunferência de centro O. Por B conduzimos $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AO}$, que encontra $\overline{AC}$ em D. Sendo AB = 6 e AC = 9, calcule AD.



11.35) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{BD} /\!/ \overleftrightarrow{CE}$, AC + BC = 21 m e $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{5}{3}$. Calcule AB.

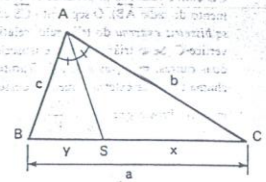


11.36) Têm-se três semi-retas $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MN}$ e $\overrightarrow{MD}$. Sobre $\overrightarrow{MA}$ toma-se o ponto B, tal que MB = 54 cm. Sabe-se que MA = 18 cm e MD = 75 cm. A reta por A, paralela a $\overleftrightarrow{BN}$, encontra $\overrightarrow{MN}$ em K. A reta por K, paralela a $\overleftrightarrow{ND}$, encontra $\overrightarrow{MD}$ em C. Calcule MC.



11.37) O △ ABC tem o ângulo $\hat{B}$ obtuso e está inscrito em uma circunferência. A sua altura $\overleftrightarrow{AD}$ é tangente a essa circunferência. Calcule AD, sendo BC = 12 cm e BD = 4 cm.

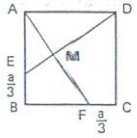
11.38) Sendo $\overleftrightarrow{AS}$ a bissetriz interna relativa ao vértice A, determine **x** e **y** em função de **a**, **b** e **c**.



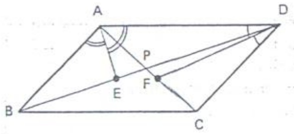
11.39) Dado o quadrado ABCD, de lado **a**, tomam-se os pontos E sobre $\overline{AB}$ e F sobre $\overline{BC}$, tais que $EB = FC = \dfrac{a}{3}$.

a) Mostre que $\overleftrightarrow{AF} \perp \overleftrightarrow{ED}$.

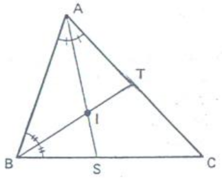
b) Dê a área do △ AEM, em função de a.



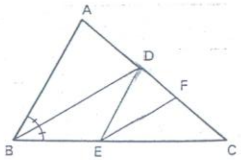
11.40) As bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ do paralelogramo ABCD encontram as diagonais $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ em E e F, respectivamente. Mostre que $\overleftrightarrow{EF} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$.



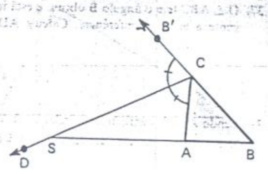
11.41) No △ ABC, tem-se AB = 40, AC = 50, BC = 60. Determine a razão $\dfrac{AI}{IS}$.



11.42) Na figura, $\overleftrightarrow{BD}$ é a bissetriz interna, $\overleftrightarrow{DE} /\!/ \overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF} /\!/ \overleftrightarrow{BD}$. Sendo AB = 20, BC = 30 e AD − FC = 1, calcule AC.

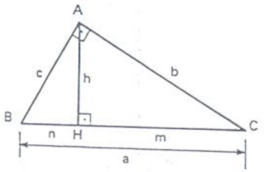


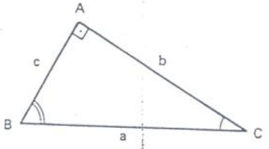
11.43) **Bissetrizes externas de um triângulo** — Seja $\overrightarrow{CD}$ a semi-reta bissetriz do ângulo externo $A\hat{C}B'$ do $\triangle ABC$ e seja S a interseção da reta $\overleftrightarrow{CD}$ com a reta $\overleftrightarrow{AB}$ (S pertence ao prolongamento do lado $\overline{AB}$). O segmento $\overline{CS}$ chama-se *bissetriz externa* do triângulo, relativa ao vértice C. Se o triângulo não é isósceles, há duas outras, relativas a A e B. Também se chama bissetriz externa a medida desses segmentos. Prove que $\frac{AS}{SB} = \frac{AC}{BC}$.

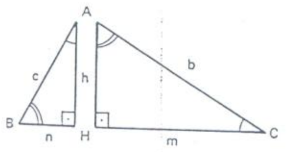


11.3 — RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Se o triângulo ABC é retângulo em A, então a sua altura $\overline{AH}$ separa-o em dois outros triângulos, $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$, ambos semelhantes ao $\triangle ABC$. Examinando a proporcionalidade existente entre os lados destes três triângulos, obteremos um certo número de **relações**, que apresentam uma grande variedade de aplicações. Inicialmente, fixemos alguma **nomenclatura** em relação ao triângulo retângulo, de acordo com as figuras ao lado:







hipotenusa = **a**
catetos = **b** e **c**
altura relativa à hipotenusa = **h**
projeção do cateto **b** sobre a hipotenusa = **m**
projeção do cateto **c** sobre a hipotenusa = **n**

a) $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle HBA}$ Escrevemos:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{h} = \frac{c}{n}$$

De $\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$ vem $bc = ah$ (1)

De $\frac{a}{c} = \frac{c}{n}$ vem $c^2 = an$ (2)

De $\frac{b}{h} = \frac{c}{n}$ vem $ch = bn$ (3)

b) $\boxed{\triangle ABC \sim \triangle HAC}$ Escrevemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} = \frac{c}{h}$$

De $\frac{a}{b} = \frac{b}{m}$ vem $b^2 = am$ (4)

De $\frac{a}{b} = \frac{c}{h}$ vem $bc = ah$ (5)

De $\frac{b}{m} = \frac{c}{h}$ vem $bh = cm$ (6)

c) $\boxed{\triangle HBA \sim \triangle HAC}$ Escrevemos:

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$$

De $\frac{c}{b} = \frac{h}{m}$ vem $bh = cm$ (7)

De $\frac{c}{b} = \frac{n}{h}$ vem $ch = bn$ (8)

De $\frac{h}{m} = \frac{n}{h}$ vem $h^2 = mn$ (9)

Várias das relações obtidas coincidem. Eis um resumo:

1.ª) $b^2 = am$	3.ª) $h^2 = mn$	5.ª) $bh = cm$
2.ª) $c^2 = an$	4.ª) $bc = ah$	6.ª) $ch = bn$

Se três números, **x**, **y** e **z**, são tais que $x^2 = yz$, diz-se que **x** é *média geométrica* ou *média proporcional* entre **y** e **z**. As relações acima podem ser enunciadas assim:

1.ª e 2.ª — Cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e a sua projeção sobre ela.

3.ª — A altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre os dois segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.

4.ª — O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

5.ª e 6.ª — O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto da sua projeção sobre a hipotenusa, pelo outro cateto.

Observações

1.ª) Note que a 4.ª relação, $bc = ah$, pode ser obtida escrevendo-se a área do $\triangle ABC$ de duas maneiras:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ah}{2} = \frac{bc}{2}$$

2.ª) Se somarmos a 1.ª e a 2.ª relações:

$$\begin{array}{r} b^2 = am \\ c^2 = an \\ \hline b^2 + c^2 = am + an \end{array}$$

resulta $b^2 + c^2 = a(m + n) = a \cdot a = a^2$ que é o já conhecido teorema de Pitágoras.

Exercícios Resolvidos

11.44) Dados $m = 3$ e $n = 2$, calcule **a**, **b**, **c** e **h** (os dados referem-se à figura anterior).

Solução

a) $a = m + n = 3 + 2 = 5$ — $a = 5$

b) $h^2 = mn = 3 \cdot 2 = 6$ — $h = \sqrt{6}$

c) $b^2 = am = 5 \cdot 3 = 15$ — $b = \sqrt{15}$

d) $c^2 = an = 5 \cdot 2 = 10$ — $c = \sqrt{10}$

11.45) Mostre que $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (as letras referem-se à figura anterior).

Solução

Lembrando que $bc = ah$ e $b^2 + c^2 = a^2$, escrevemos

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2} = \frac{a^2}{(ah)^2} = \frac{1}{h^2}$$

11.46) Seja um triângulo ABC, cuja altura $\overleftrightarrow{AH}$ encontra a base $\overleftrightarrow{BC}$ num ponto H, interno ao segmento $\overline{BC}$. Prove que, se AH é média geométrica entre BH e HC, então o triângulo é retângulo em A.

Solução

Sabemos que $h^2 = mn$ e devemos provar que $\hat{A}$ é reto.

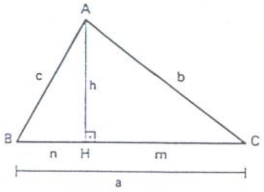
No $\triangle HBA$, temos $c^2 = h^2 + n^2$.

No $\triangle HAC$, temos $b^2 = h^2 + m^2$.

Assim,

$$\begin{aligned} b^2 + c^2 &= 2h^2 + m^2 + n^2 = \\ &= 2mn + m^2 + n^2 = \\ &= (m + n)^2 = a^2 \end{aligned}$$

donde $\hat{A}$ é reto (veja o recíproco do teorema de Pitágoras no item 10.2 do capítulo 10).



11.47) Num triângulo retângulo, traçam-se a bissetriz $\overleftrightarrow{AS}$ do ângulo reto e a altura $\overleftrightarrow{AH}$ relativa à hipotenusa (S e H sobre a hipotenusa). Se $\frac{BS}{SC} = k$, calcule $\frac{BH}{HC}$, em função de **k**.

Solução

Temos (pelo exercício 11.22)

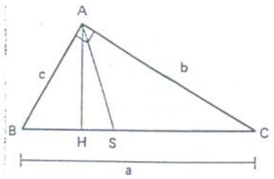
$$\frac{BS}{SC} = \frac{c}{b}, \quad \text{donde} \quad \frac{c}{b} = k.$$

Assim, $\frac{c^2}{b^2} = k^2$

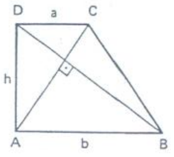
$$\frac{a \cdot (BH)}{a \cdot (HC)} = k^2$$

donde

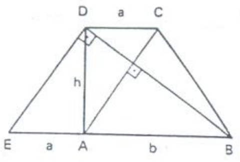
$$\frac{BH}{HC} = k^2$$



11.48) O trapézio ABCD da figura é retângulo em A e D e as suas diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares. Calcule a altura **h**, em função das bases **a** e **b**.



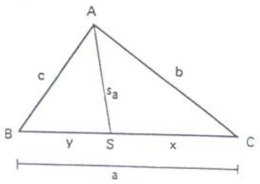
Solução



A reta paralela à diagonal $\overleftrightarrow{AC}$, conduzida por D, encontra $\overline{AB}$ em E. Tem-se EA = a. No triângulo DEB temos: $h^2 = ab$, donde

$$h = \sqrt{ab}$$

11.49) No $\triangle$ ABC, AS = s_a é a bissetriz interna relativa ao vértice A. Determine s_a, em função dos lados **a**, **b** e **c**.



Solução

Utilizando o resultado do exercício 11.38, temos $x = \frac{ab}{b+c}$ e $y = \frac{ac}{b+c}$.

Pela relação de Stewart (veja exercício 10.11), vem

$$a(s_a^2 + xy) = b^2y + c^2x$$

$$a\left(s_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right) = \frac{ab^2c}{b+c} + \frac{abc^2}{b+c}$$

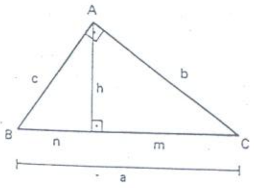
$$s_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = bc$$

e então

$$s_a = \frac{\sqrt{bc\,[(b+c)^2 - a^2]}}{b+c}$$

Exercícios Propostos

11.50) Considere o $\triangle$ ABC da figura, onde estão indicados os elementos **a**, **b**, **c**, **h**, **m** e **n**. Em cada linha da tabela seguinte, são dados os valores de dois destes elementos. Pede-se calcular os demais.



	a	**b**	**c**	**m**	**n**	**h**
a	25	20				
b	169		65			
c	289			225		
d	625				49	
e	841					420
f		20	15			
g		156		144		
h		255			64	
i		600				168
j			580	441		
k			15		9	
l			65			60
m				225	64	
n				576		168
o					400	420
p	65		33			

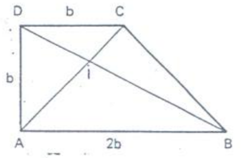
11.51) Para o $\triangle$ ABC do exercício anterior, mostre que $\frac{m}{n} = \frac{b^2}{c^2}$.

11.52) Um segmento de 8 cm é perpendicular ao diâmetro de uma circunferência, tendo suas extremidades no diâmetro e na circunferência. O diâmetro fica, então, separado em dois segmentos cujas medidas diferem de 12 cm. Calcule o raio da circunferência.

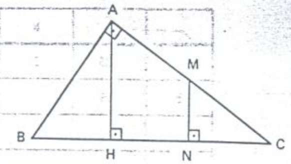
11.53) O trapézio ABCD é retângulo em A e D. Calcule:

a) as diagonais;

b) as medidas AI, BI, CI e DI.

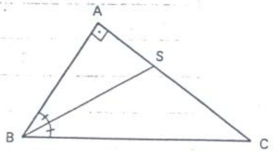


11.54) Pelo ponto médio M do cateto $\overleftrightarrow{AC}$ do triângulo retângulo ABC, toma-se um segmento $\overline{MN}$ perpendicular à hipotenusa $\overline{BC}$, encontrando-a em N. Calcule os lados do triângulo ABC, sabendo que BN = 5 cm e NC = 3 cm.



11.55) No △ ABC da figura, $\overleftrightarrow{BS}$ é a bissetriz do maior dos ângulos agudos. Calcule BS, sabendo que BC = 30 cm e que AC − AB = = 6 cm.

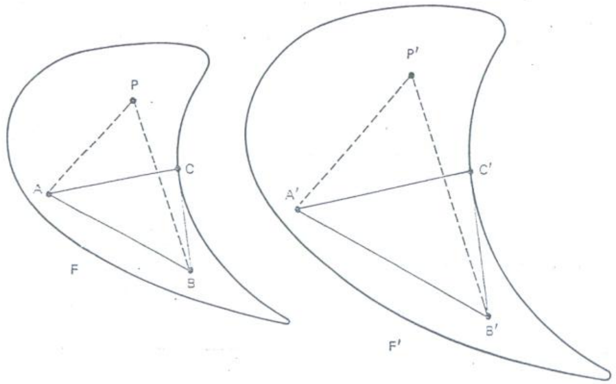
(Sugestão: veja exercício 11.22.)



11.4 — O CONCEITO GERAL DE SEMELHANÇA

No item 11.1, vimos a definição da relação de semelhança entre *triângulos*. Vamos estender este conceito a outras figuras geométricas planas. A partir da figura F da ilustração, vamos *construir* outra figura, F′, que seja semelhante a ela.

Escolhidos três pontos arbitrários, A, B e C, da figura F, **não alinhados**, tomemos outros três pontos A′, B′ e C′, de tal modo que △ A′B′C′ ~ △ ABC.



Agora, dado um ponto qualquer P da figura F, podemos obter em correspondência outro ponto P′, do seguinte modo:

a) Se P ∉ $\overleftrightarrow{AB}$, escolhemos P′ de modo que △ A′P′B′ ~ △ APB (P′ e P em semiplanos correspondentes, com relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$).

b) Se P ∈ $\overleftrightarrow{AB}$, escolhemos P′ de modo que P′ ∈ $\overleftrightarrow{A'B'}$ e $\frac{A'P'}{AP} = \frac{B'P'}{BP} = \frac{A'B'}{AB}$.

Cada ponto de F terá uma *imagem* através da correspondência assim definida. Tais imagens formam uma nova figura, F′, que é semelhante à figura F. Podemos definir:

> Duas figuras são semelhantes se existe uma correspondência entre seus pontos, tal que a razão entre um segmento da primeira e o correspondente segmento da segunda figura seja constante.

A razão entre dois segmentos correspondentes chama-se razão de semelhança.

No exercício 11.16 foi demonstrado que dois triângulos semelhantes, de razão de semelhança igual a **k**, têm suas áreas na razão igual a k^2. Tal fato se estende ao caso de figuras planas semelhantes quaisquer. Vamos enunciar este fato geral, embora omitindo a sua demonstração.

> Dadas duas figuras semelhantes F e F′, seja **k** a razão de semelhança, isto é, se AB ⊂ F e A′B′ ⊂ F′ são dois segmentos correspondentes das duas figuras, seja $k = \frac{AB}{A'B'}$. Sendo assim, as áreas das duas figuras estão entre si na razão k^2, isto é,
>
> $$\frac{S_F}{S_{F'}} = k^2$$

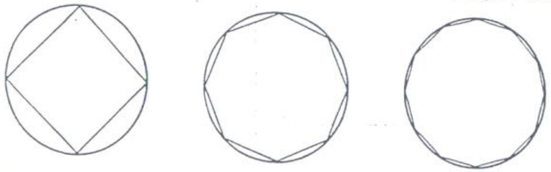
Capítulo

12

Razões trigonométricas. Áreas do círculo e dos setores

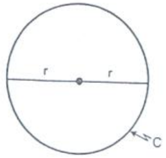
12.1 — A CIRCUNFERÊNCIA E SEUS ARCOS

Vamos estabelecer primeiramente, de modo intuitivo, a noção de comprimento de uma circunferência. Tomando-se quatro pontos na circunferência, obtemos um quadrilátero inscrito. Com oito pontos, temos um octógono inscrito.



Aumentando-se o número de pontos considerados, os polígonos inscritos, cujo número de lados é cada vez maior, têm o comprimento de cada lado cada vez menor. O *perímetro* de cada polígono representa uma melhor aproximação para o comprimento da circunferência, quanto maior é o número de pontos marcados. Podemos dizer que o comprimento da circunferência é o valor para o qual *tende* a seqüência de perímetros, à medida que o números de vértices aumenta indefinidamente.

Indiquemos por C o comprimento de uma circunferência de raio **r**. Vamos admitir, sem demonstração, o seguinte fato.



A razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é a mesma para todas as circunferências.

Isto equivale a admitir que dois círculos quaisquer são **figuras semelhantes**. O valor dessa razão é indicado pela letra grega minúscula π:

$$\frac{C}{2r} = \pi$$

O símbolo π não representa uma variável, mas sim um número bem determinado. Seu valor tem sido calculado com aproximação de um número muito grande de decimais. É, aproximadamente,

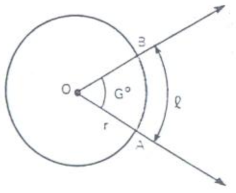
$$\pi \cong 3,1415926535$$

embora se use, na maioria das aplicações, a aproximação $\pi \cong 3{,}14$.

Da definição de π, resulta a expressão que dá o comprimento de uma circunferência de raio **r**:

$$C = 2\pi r$$

Determinemos agora o comprimento de um arco circular. Suponha que o arco $\widehat{AB}$, contido na circunferência de raio **r**, tem a sua *medida em graus* igual a G°. É claro que a **circunferência** toda pode ser vista como um arco cuja medida em graus é 360°. Vamos admitir que os comprimentos dos arcos sejam proporcionais às suas medidas em graus. Podemos, então, utilizar a "regra de três":



arco $\widehat{AB}$		**circunferência**
G°	———	360°
ℓ	———	C

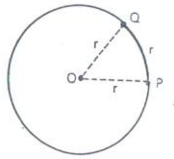
donde resulta

$$\ell = \frac{G}{360} C$$

Mas, sendo $C = 2\pi r$, podemos ainda escrever

$$\ell = \frac{G}{180} \cdot \pi r$$

12.2 — RADIANO



Consideremos um arco $\widehat{PQ}$ cujo comprimento seja igual ao raio **r**. Podemos adotar este arco como unidade de medida (como já fizemos com o grau, no capítulo 5). A esse arco atribuiremos, então, a medida 1 rad (1 radiano). O *ângulo central* $P\hat{O}Q$ também tem medida 1 rad.

Nota: É costume *omitir* o símbolo **rad**. Por exemplo, se escrevemos que um certo arco *mede 2*, fica subentendido que a sua medida é *2 radianos.*

A circunferência toda também pode ser medida em radianos. Fazemos a "regra de três":

comprimento	**medida em radianos**
r	1
C	x

obtendo

$$x = \frac{C}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Assim, a circunferência mede 2π radianos.

Para fazer a conversão de unidades, faz-se a "regra de três":

graus	**radianos**
360	2π
G	α

donde

$$\frac{G}{360} = \frac{\alpha}{2\pi} \text{ ou ainda } \boxed{\frac{G}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

Se o arco $\widehat{AB}$, de comprimento ℓ, tem a sua *medida em radianos* igual a α, então

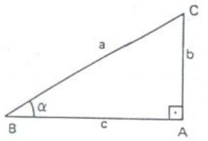
$$\ell = \frac{G}{180}\pi r = \frac{\alpha}{\pi} \cdot \pi r = \alpha r$$

$$\boxed{\ell = \alpha r} \quad (\alpha \text{ rad})$$

O comprimento de um arco de circunferência é igual ao produto do raio pela sua medida em radianos.

12.3 — RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seja α a medida de um *ângulo agudo* do triângulo retângulo mostrado na figura. Definimos:



Seno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.
Cosseno de um ângulo agudo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.

Indica-se $\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos \alpha = \frac{c}{a}$.

É claro que esta definição só se aplica para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (α em radianos).

Para estender as noções de seno e cosseno a outros valores de α, adotamos as definições seguintes:

1.ª) $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$

2.ª) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$

3.ª) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} (\pi - \alpha)$
$\cos \alpha = -\cos (\pi - \alpha)$

Desta última definição resulta que, dado um *ângulo obtuso*, o seu **seno** é o mesmo seno do seu suplemento e o seu **cosseno** é o cosseno do seu suplemento, com o sinal trocado. Temos também $\operatorname{sen} \pi = 0$ e $\cos \pi = -1$.

Definimos ainda, para $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, as razões trigonométricas tangente e secante:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \text{ e } \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$$

e, para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pi$, definimos a cotangente e a cossecante:

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} \text{ e } \text{cossec } \alpha = \frac{1}{\text{sen } \alpha}$$

Para o caso de um *ângulo agudo* do triângulo retângulo ABC, é fácil perceber que a tangente é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{b}{c}$$

É fundamental a seguinte relação: $\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$

válida para todo α. No caso do ângulo agudo, ela é uma conseqüência do teorema de Pitágoras:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Nas aplicações, vamos utilizar freqüentemente os valores da tabela abaixo, referentes aos ângulos de 30°, 45° e 60°.

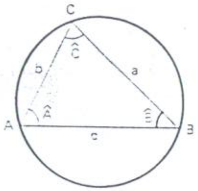
	30°	45°	60°
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Para outros valores de α, as razões trigonométricas estão tabeladas ao final deste volume.

12.4 — LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENOS

Para um triângulo ABC qualquer, valem as relações

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R}$$



onde R é o raio da circunferência circunscrita. Em outras palavras, os lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos

Esta propriedade é conhecida como *lei dos senos*.

Valem, também, as seguintes relações:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{aligned}}$$

conhecidas como *lei dos cossenos*

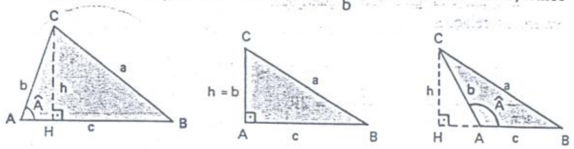
Por brevidade, não apresentamos aqui as demonstrações destas duas importantes propriedades, que o leitor encontra deduzidas no volume 3 desta coleção (*Trigonometria*), à página 207.

12.5 — EXPRESSÕES DA ÁREA DO TRIÂNGULO

A área de um triângulo ABC pode ser dada pelas seguintes expressões:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \text{ sen } \hat{C} \\ S &= \frac{1}{2} ac \text{ sen } \hat{B} \\ S &= \frac{1}{2} bc \text{ sen } \hat{A} \end{aligned}}$$

Mostremos a validade da terceira. A altura $\overleftrightarrow{CH}$ pode ter o seu pé no interior do lado $\overleftrightarrow{AB}$, coincidindo com A, ou no exterior do lado $\overleftrightarrow{AB}$, como as figuras mostram. Nos dois primeiros casos, tem-se $\frac{h}{b} = \text{sen } \hat{A}$. No terceiro, temos

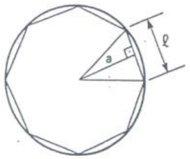


$\frac{h}{b} = \text{sen } (\pi - \hat{A})$, logo também $\frac{h}{b} = \text{sen } \hat{A}$. Assim, em qualquer caso temos $h = b \text{ sen } \hat{A}$, logo

$$S = \frac{ch}{2} = \frac{cb \text{ sen } \hat{A}}{2} = \frac{1}{2} bc \text{ sen } \hat{A}$$

12.6 — ÁREA DO CÍRCULO E DOS SETORES

A noção de área de um círculo pode ser estabelecida, de modo intuitivo, utilizando-se uma seqüência de polígonos inscritos, como fizemos para o comprimento da circunferência. Diz-se que a área do círculo é o valor para o qual *tende* a seqüência das áreas dos polígonos inscritos, quando o número de vértices aumenta indefinidamente. Se pensarmos em polígonos regulares, a área de um polígono é dada por



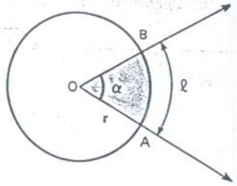
$$S = pa$$

onde **p** é o seu *semiperímetro* e **a** é o seu *apótema* (veja exercício 10.8). Se o número de vértices aumenta, os semiperímetros tendem a $\frac{C}{2}$ e os apótemas se aproximam do próprio **raio** do círculo. A área do círculo será, então,

$$S = \frac{C}{2} \cdot r$$

ou ainda, pondo $C = 2\pi r$: $\boxed{S = \pi r^2}$

Seja, agora, um **setor circular** cujo ângulo central mede α (em radianos) e cujo *arco* tem comprimento ℓ. O círculo todo pode ser visto como um setor cujo ângulo central mede 2π. Vamos admitir que as áreas dos setores são proporcionais às medidas dos seus ângulos centrais. Podemos, então, utilizar a "regra de três":



setor		**círculo**
α	———	2π
S	———	πr^2

donde resulta

$$\boxed{S = \frac{\alpha r^2}{2}}$$

Mas, sendo $\ell = \alpha r$, podemos ainda escrever

$$\boxed{S = \frac{\ell r}{2}}$$

Exercícios Resolvidos

12.1) Prove que, num triângulo ABC, tem-se

$$\frac{\text{tg } \hat{B}}{\text{tg } \hat{C}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

Solução

Pela *lei dos cossenos*, temos

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{e} \quad \cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

donde

$$\frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 + c^2 - b^2} \cdot \frac{c}{b}$$

ou

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

Mas, pela *lei dos senos*, $\frac{b}{c} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{C}}$, logo

$$\frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{C}} \cdot \frac{\cos \hat{C}}{\cos \hat{B}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

isto é,

$$\frac{\text{tg } \hat{B}}{\text{tg } \hat{C}} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 - b^2 + c^2}$$

12.2) Seja R o raio da circunferência circunscrita ao △ABC. Mostre que a área do triângulo é igual a

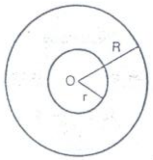
$$S = \frac{abc}{4R}$$

Solução

Sabemos que $S = \frac{1}{2}$ ab sen Ĉ e, pela *lei dos senos*, temos ainda $\frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$. Assim, $\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{2R}$, donde

$$S = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$$

12.3) Área da coroa circular – Sejam dois círculos concêntricos, de raios r e R, r < R. Os pontos do círculo maior, que não pertencem ao interior do círculo menor, formam uma figura chamada **coroa circular**. Dê a área da coroa, em função de **r** e R.



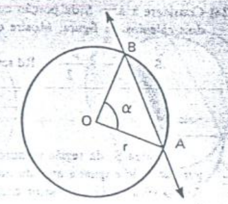
Solução

A área S da coroa é igual à área S_1 do círculo maior *menos* a área S_2 do círculo menor:

$$S = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2)$$

12.4) **Área do segmento circular** – Se uma reta intercepta uma circunferência em dois pontos distintos A e B, o círculo fica separado em duas partes, cada uma delas chamada **segmento circular**.

Seja α = med (AÔB ($0 < \alpha < \pi$). Determine a área do segmento circular, em função de **r** e α.



Solução

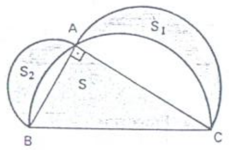
A área S do segmento circular é igual à área S_1 do setor OAB *menos* a área S_2 do triângulo OAB. Como

$$S_1 = \frac{\alpha r^2}{2} \text{ e } S_2 = \frac{1}{2} r^2 \text{ sen } \alpha$$

vem

$$S = \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \text{ sen } \alpha = \frac{r^2}{2} (\alpha - \text{sen } \alpha)$$

12.5) Lúnulas de Hipócrates – Na ilustração, tem-se um triângulo ABC retângulo em A. Por meio de três semicírculos cujos diâmetros são os lados do triângulo, formam-se as duas figuras sombreadas, que se denominam **lúnulas de Hipócrates**. Mostre que a área do triângulo é igual à soma das áreas das duas lúnulas.



Solução

No semicírculo de diâmetro $\overleftrightarrow{BC}$, o lado $\overleftrightarrow{AC}$ determina um segmento circular de área S_3 e o lado $\overleftrightarrow{AB}$ determina outro segmento circular de área S_4. Temos

$$S + S_3 + S_4 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$

Mas $a^2 = b^2 + c^2$, logo

$$S + S_3 + S_4 = \frac{\pi(b^2 + c^2)}{4} = \frac{\pi b^2}{4} + \frac{\pi c^2}{4}$$

Assim,

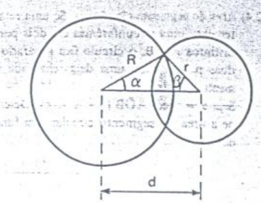
$$S + S_3 + S_4 = (S_1 + S_3) + (S_2 + S_4)$$

donde

$$S = S_1 + S_2$$

12.6) Considere a área S da porção comum aos dois cálculos da figura. Mostre que

$$S = \frac{\alpha R^2}{2} + \frac{\beta r^2}{2} - Rd \operatorname{sen} \alpha$$



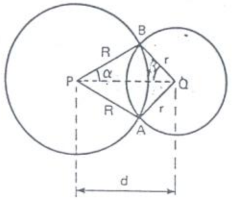
Solução

A área S_1 da região sombreada na figura ao lado é igual à área do quadrilátero APBQ *menos* a área do setor circular PAB. Temos

$$S_{APBQ} = 2S_{\Delta PBQ} =$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} Rd \operatorname{sen} \alpha =$$
$$= Rd \operatorname{sen} \alpha$$

e

$$S_{\text{setor PAB}} = \frac{\alpha R^2}{2}$$



Assim,

$$S_1 = Rd \operatorname{sen} \alpha - \frac{\alpha R^2}{2}.$$

A área S procurada é igual à área do setor circular QAB *menos* a área S_1. Temos

$$S_{\text{setor QAB}} = \frac{\beta r^2}{2}$$

Portanto,

$$S = \frac{\alpha R^2}{2} + \frac{\beta r^2}{2} - Rd \operatorname{sen} \alpha$$

Exercícios Propostos

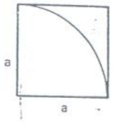
12.7) Dê a expressão da área S de um círculo, em função do comprimento C de sua circunferência.

12.8) A área de um quadrado, *menos* a área do círculo inscrito nele, é igual a $2 - \sqrt{\pi}$. Determine a área S do círculo.

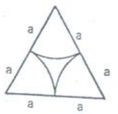
12.9) Um círculo de raio R é dividido, por uma circunferência concêntrica de raio r, em duas partes equivalentes. Determine r, em função de R.

Nas questões seguintes, de números 12.10 a 12.17, calcule a área das partes sombreadas.

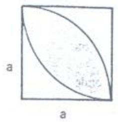
12.10)



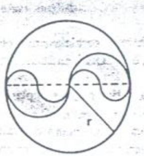
12.11)



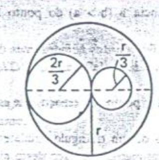
12.12)



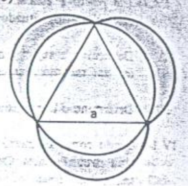
12.13)



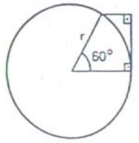
12.14)



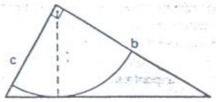
12.15)



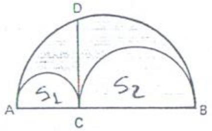
12.16)



12.17)



12.18) Na figura, tem-se $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Mostre que a área da região sombreada é igual à área do círculo que tem diâmetro $\overline{CD}$.



Exercícios Suplementares

IV.1) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas que tangenciam uma dada superfície esférica em um ponto dado.

IV.2) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas tangentes a duas retas, r e s, paralelas entre si.

IV.3) Determine o lugar geométrico dos centros das superfícies esféricas de um dado raio r, tangentes a um plano dado.

IV.4) Determine o lugar geométrico dos pés das retas perpendiculares conduzidas por um ponto A a todos os planos que passam por um ponto B (B ≠ A).

IV.5) Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço, eqüidistantes dos vértices de um trapézio isósceles.

IV.6) Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço, eqüidistantes das retas que contêm os lados de um triângulo.

IV.7) Um ponto P está situado à distância **a** de um plano. Determine o lugar geométrico dos pontos do plano, situados à distância **b** (b > a) do ponto P.

IV.8) Determine o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de três retas paralelas, não contidas em um mesmo plano.

IV.9) Determine o lugar geométrico dos pontos do espaço, que estão à distância **a** de um plano dado.

IV.10) Tendo como diâmetro um lado de um triângulo eqüilátero, toma-se, no plano do triângulo, uma circunferência. Determine a medida do arco dessa circunferência situado no interior do triângulo.

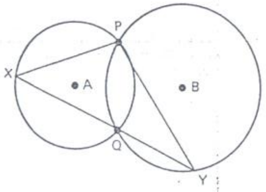
IV.11) Um arco mede 40°. Sob que ângulo os pontos desse arco vêem a corda correspondente?

IV.12) Um triângulo ABC tem ângulos internos medindo $\hat{A} = 50°$, $\hat{B} = 60°$ e $\hat{C} = 70°$. Uma semicircunferência de diâmetro $\overleftrightarrow{BC}$ corta os outros dois lados. Dê as medidas dos arcos em que a semicircunferência fica dividida.

IV.13) Seja P um ponto do interior de um círculo de centro O (P ≠ O). Determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas que contêm P.

IV.14) Seja P um ponto do exterior de um círculo de centro O (P pertence ao plano do círculo). Determine o lugar geométrico dos pontos médios das cordas cujas retas suportes passam por P.

IV.15) As circunferências de centros A e B cortam-se segundo arcos de 90° e 60°. Calcule a medida do ângulo $X\hat{P}Y$.



IV.16) Calcule a área de um trapézio isósceles cujas diagonais são perpendiculares entre si, sabendo que a medida da diagonal é 8 cm.

IV.17) Um trapézio isósceles tem um ângulo agudo de 60° e a diagonal é perpendicular ao lado lateral. Sendo **d** a medida da diagonal e **a** a medida do lado lateral, calcule a área do trapézio.

IV.18) Tomam-se os pontos A e B, um em cada face de um diedro reto. As distâncias desses pontos à aresta são iguais a 52 cm e 15 cm e a distância entre as suas projeções sobre a aresta é igual a 36 cm. Calcule o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

IV.19) Um triângulo isósceles tem lados 10 cm, 10 cm e 12 cm. O ponto P dista 5 cm de cada lado do triângulo. Calcule:

a) a área do triângulo;
b) o raio da circunferência inscrita no triângulo;
c) a distância de P ao plano do triângulo.

IV.20) Os catetos de um triângulo retângulo medem 12 cm e 9 cm. Calcule a distância entre o plano do triângulo e um ponto cujas distâncias aos lados do triângulo são iguais a 5 cm.

IV.21) Um triângulo de área 576 cm² tem as medidas dos lados proporcionais a 17, 10 e 9. Calcule essas medidas.

IV.22) Em um quadrilátero ABCD, a diagonal $\overleftrightarrow{AC}$ mede 34 cm e os lados medem AB = 20 cm, BC = 42 cm, CD = 16 cm, AD = 30 cm. Calcule a área desse quadrilátero.

IV.23) Um dos lados de um paralelogramo mede 14 cm e as diagonais medem 26 cm e 30 cm. Calcule a área desse paralelogramo.

IV.24) Pelo ponto onde a circunferência inscrita tangencia um dos lados de um triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm conduz-se um segmento de 2 cm, perpendicular ao plano do triângulo. Calcule a distância da extremidade desse segmento ao incentro do triângulo.

IV.25) Sobre o lado $\overleftrightarrow{BC}$ de um triângulo ABC, de lados AB = 7a, AC = 8a e BC = 9a, toma-se um ponto P tal que BP = 3a. Calcule AP. (Sugestão: use a relação de Stewart, do exercício 10.11.)

IV.26) Os lados de um triângulo retângulo ABC medem AB = 15 cm, AC = 20 cm e BC = 25 cm. Sobre o lado $\overleftrightarrow{BC}$, toma-se o ponto P tal que BP = 10 cm. Por P conduz-se o segmento $\overleftrightarrow{PQ}$, de 12 cm, perpendicular ao plano do triângulo. Calcule a distância de Q ao vértice do ângulo reto.

IV.27) No △ ABC, AB = 40 cm, AC = 50 cm, BC = 60 cm. Se I é o incentro desse triângulo, determine a razão na qual a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ fica dividida pelo ponto I.

IV.28) No △ ABC, AB = 15 cm, AC = 25 cm e BC = 30 cm. Tomam-se sobre $\overleftrightarrow{AB}$ o ponto D e sobre $\overleftrightarrow{AC}$ o ponto E, tais que $A\hat{E}D \equiv A\hat{B}C$. Sabendo que o perímetro do △ ADE é 28 cm, calcule BD e CE.

IV.29) As bases de um trapézio medem **a** e **b** (a < b). Determine:

a) a medida do segmento paralelo às bases, que divide o trapézio em dois trapézios semelhantes;
b) a razão na qual o lado lateral fica dividido por esse segmento.

IV.30) No △ ABC, o ângulo $\hat{A}$ é o dobro do ângulo $\hat{B}$. Sendo dados AB = c e AC = b, calcule BC = a.

IV.31) Calcule o comprimento da bissetriz interna do ângulo reto de um triângulo de catetos **b** e **c**.

IV.32) Um triângulo ABC tem lados AB = AC = 10 cm e BC = 5 cm. Sendo $\overleftrightarrow{BD}$ e $\overleftrightarrow{CE}$ bissetrizes internas, calcule a razão entre as áreas dos triângulos ADE e ABC.

IV.33) Um triângulo ABC tem lados de medidas AB = c, AC = b e BC = a. Uma circunferência, que contém B e tangencia $\overleftrightarrow{AC}$ no ponto A, corta o lado $\overleftrightarrow{BC}$ em um ponto D. Calcule AD.

IV.34) Pelos vértices A e C de um retângulo ABCD, conduzem-se perpendiculares à diagonal $\overleftrightarrow{BD}$, que a dividem em três partes iguais. Sendo AD = a, calcule AB.

IV.35) Em um trapézio retângulo cujas bases medem 2 cm e 8 cm, as diagonais são perpendiculares entre si. Calcule as medidas dessas diagonais.

IV.36) Em um triângulo ABC, $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{BQ}$ são alturas e H é o ortocentro. Se AH = x, HP = y e HQ = z, calcule BH.

IV.37) Duas circunferências tangenciam-se externamente e seus raios são iguais a 3a e 12a. Calcule a medida do segmento contido em uma tangente comum, cujas extremidades são os pontos de tangência.

IV.38) Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ de uma circunferência cortam-se, de modo que $\overline{AB}$ fica dividida ao meio e $\overline{CD}$ fica dividida na razão CP : PD = 1 : 2 (P é a interseção das duas cordas). Calcule a razão entre as medidas das duas cordas.

IV.39) Em uma circunferência de raio r, $\overline{AB}$ é um diâmetro. Por um ponto C dessa circunferência, tal que $AC = \frac{3r}{2}$, passa-se a corda $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. Calcule CD.

IV.40) Em um triângulo retângulo, seja r o raio da circunferência inscrita e sejam x e y as medidas dos segmentos determinados na hipotenusa pelo ponto de tangência da circunferência. Prove que

$$r(x + y + r) = xy$$

IV.41) Para o triângulo do exercício anterior, mostre que a área é igual a xy.

IV.42) Sendo G o baricentro de um triângulo eqüilátero ABC, toma-se o segmento $\overline{VG}$, perpendicular ao plano do triângulo. Sabe-se que $\overline{VA}$ forma 30° com o plano do triângulo e que $VA = \ell$. Calcule o lado do triângulo.

IV.43) Sobre um plano α, toma-se o ponto A e fora de α, no mesmo semi-espaço, tomam-se os pontos B e C, de tal modo que $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ formam 30° com o plano α e med $(B\hat{A}C) = 60°$. Sendo AB = 4 cm e AC = 6 cm, calcule a medida da projeção de $\overline{BC}$ sobre o plano α.

IV.44) Tomam-se os pontos A e B num plano α e o ponto C fora de α. Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, formam 60° entre si e suas projeções sobre α são perpendiculares entre si e medem 2 cm cada uma. Calcule AC.

IV.45) Um triângulo retângulo ABC tem catetos AB = 5 cm e AC = 12 cm. O cateto $\overline{AB}$ está contido em um plano α e $\overline{AC}$ forma com α um ângulo cujo seno é igual a $\frac{1}{3}$. Calcule o seno do ângulo que a hipotenusa forma com o plano α.

IV.46) Os pontos A e B estão contidos em um plano α. Fora de α toma-se o ponto C, tal que AB = AC. O segmento $\overline{AB}$ forma 45° com α e $\overline{AC}$ forma 45° com a projeção de $\overline{AB}$ sobre α. Calcule a medida do ângulo $B\hat{A}C$.

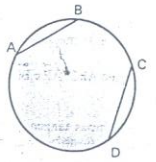
IV.47) De um triângulo, conhecem-se as medidas dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e o raio R da circunferência circunscrita. Determine a área do triângulo. (Veja exercício 12.2.)

IV.48) Prove que, em todo triângulo, tem-se

$$abc = 4\,pRr$$

IV.49) Calcule a área do círculo circunscrito ao triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm.

IV.50) Calcule a área da região assinalada, sendo 2 cm o raio do círculo e sabendo que os arcos têm medidas $\widehat{AB} = 15°$ e $\widehat{CD} = 75°$.



PARTE V

Capítulo 13 — **Prismas**

Capítulo 14 — **Pirâmides**

Capítulo 15 — **Poliedros convexos**

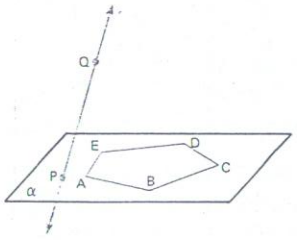
Capítulo

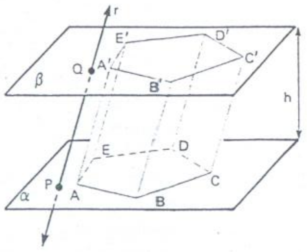
13

Prismas

13.1 — NOÇÃO DE PRISMA

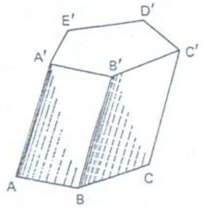
Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um polígono ABC... Seja **r** uma reta que fura o plano α no ponto P (essa reta não precisa ser perpendicular ao plano α). Sobre a **reta r** tomamos um ponto Q, distinto de P, e por esse ponto consideramos o plano β, paralelo a α. Em seguida, construímos todos os segmentos paralelos a r, que têm uma extremidade num ponto do polígono e a outra no plano β. Unindo todos esses segmentos, obtemos um *sólido* que recebe o nome de prisma.





Nomenclatura

Na figura ao lado, temos o exemplo de um prisma. Vamos estabelecer certos **nomes** relacionados a algumas partes desta figura.



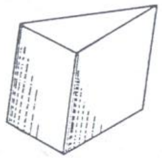
Bases: são os polígonos ABCDE e A'B'C'D'E' (situados em cada um dos dois planos paralelos).
Arestas das bases: são os lados desses polígonos.
Arestas laterais: são os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$, $\overline{EE'}$, todos paralelos à reta r.
Faces laterais: são os *paralelogramos* cujos lados opostos são arestas correspondentes às bases. Exemplos: ABB'A', BCC'B', etc.
Altura do prisma: é a *distância* entre os planos das bases (indicada por h na figura anterior).
Área lateral: é a soma das áreas das faces laterais.
Área total: é a soma das áreas das duas bases com a área lateral.

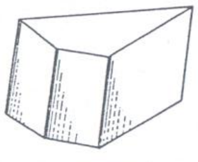
13.2 — CLASSIFICAÇÃO DOS PRISMAS

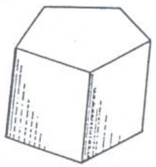
a) Segundo o número de arestas das bases

- Prisma triangular: é aquele cujas bases são triângulos.
- Prisma quadrangular: é aquele cujas bases são quadriláteros.
- Prisma pentagonal: é aquele cujas bases são pentágonos.

E assim por diante.

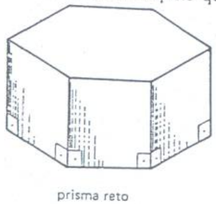

prisma triangular

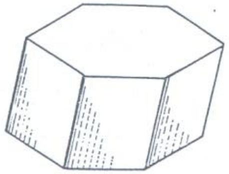

prisma quadrangular


prisma pentagonal

b) Segundo a inclinação das arestas laterais

- Prisma reto: é aquele cujas arestas laterais são *perpendiculares* aos planos das bases. (Neste caso, as faces laterais são retângulos.)
- Prisma oblíquo: é aquele que não é reto.

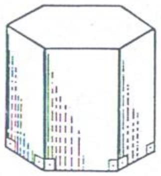

prisma reto

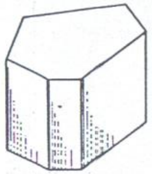

prisma oblíquo

c) **Segundo a forma das bases**

- **Prisma regular**: é o prisma *reto* cujas bases são *polígonos regulares*.

Reforçando: Ao dizermos que um prisma é regular, já se subentende que o mesmo é **reto**, além de ter como bases polígonos regulares. Se um prisma *não é reto* ou então se as bases *não são* polígonos regulares, o prisma é **não regular**.

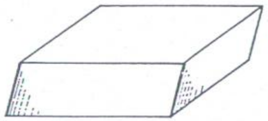

prisma hexagonal regular

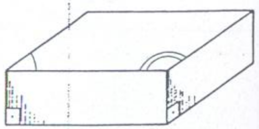

prisma hexagonal não regular

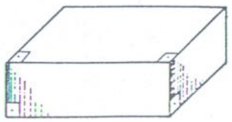
13.3 — PARALELEPÍPEDOS

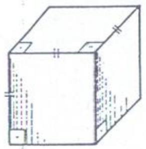
Os prismas cujas bases são *paralelogramos* são chamados paralelepípedos.

Os prismas *retos* cujas bases são *retângulos* são chamados paralelepípedos reto-retângulos. Um caso particular deste tipo de prisma é o cubo, cujas bases, bem como as faces laterais, são **quadrados**. O cubo é também chamado *hexaedro regular*.

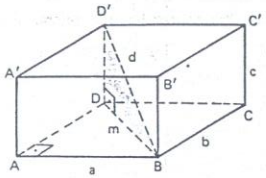

paralelepípedo oblíquo


paralelepípedo reto


paralelepípedo reto-retângulo


cubo (ou hexaedro regular)

Para o paralelepípedo reto-retângulo, existe um modo simples de determinar a medida da **diagonal**, conhecendo-se as medidas das arestas. A diagonal do paralelepípedo está indicada pelo segmento $\overline{BD'}$ e a sua medida é **d**. O segmento $\overline{BD}$ é uma *diagonal da base* e a sua medida é **m**. As letras **a**, **b** e **c** representam as medidas das arestas. Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos ABD e BDD', obtemos sucessivamente:



$$(BD)^2 = (AB)^2 + (AD)^2 \Rightarrow m^2 = a^2 + b^2$$

e

$$(BD')^2 = (BD)^2 + (DD')^2 \Rightarrow d^2 = m^2 + c^2$$

Assim, temos $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ e, finalmente,

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

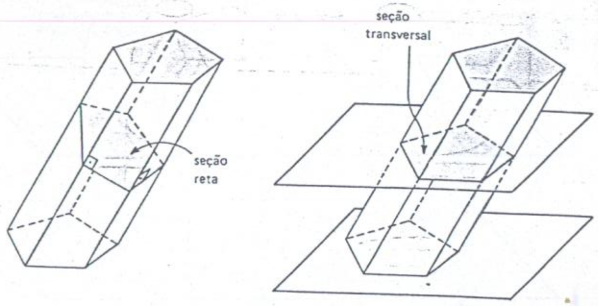
A área total de um paralelepípedo reto-retângulo pode ser também facilmente determinada. Basta notar que cada *base* tem área $S_b = ab$ e que, além disso, o paralelepípedo tem duas faces laterais com área $S_1 = ac$ e outras duas com área $S_2 = bc$. Assim, a área total é

$$S_t = 2\,S_b + 2\,S_1 + 2\,S_2 = 2\,ab + 2\,ac + 2\,bc$$

$$\boxed{S_t = 2\,(ab + ac + bc)}$$

13.4 — SEÇÕES DE UM PRISMA

Consideremos um plano que intercepta todas as arestas laterais de um prisma. A interseção desse plano com o prisma chama-se seção. Se o plano da seção é perpendicular às arestas laterais, então a seção chama-se reta ou normal. Se o plano da seção é paralelo à base do prisma, a seção é chamada transversal. É imediato que as seções transversais são todas polígonos congruentes aos polígonos das bases do prisma. Assim, *todas as seções transversais de um prisma têm mesma área*. Da mesma forma, todas as seções retas de um prisma são polígonos congruentes entre si, resultando que *todas as seções retas de um prisma têm mesma área.*



13.5 — VOLUME DE UM SÓLIDO

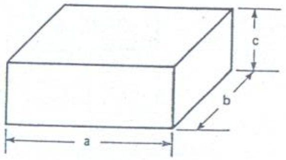
O volume de um sólido é um número que mede a sua *extensão*, ou seja, a porção de espaço ocupada por ele. A noção de volume fica estabelecida, de modo mais preciso, quando fixamos as **propriedades** que o volume deve ter. A cada sólido será, então, associado um *número real não negativo*, chamado volume, que deverá satisfazer as propriedades seguintes:

1.ª) Sólidos congruentes têm mesmo volume.

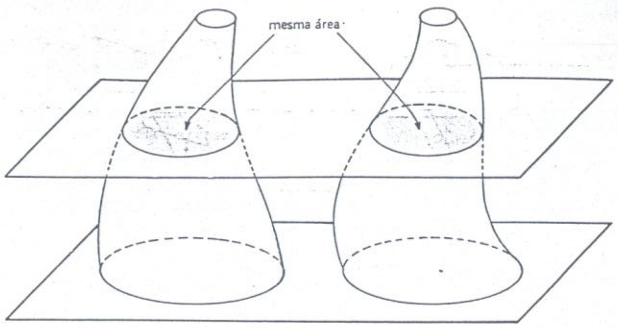
2.ª) Se um sólido S for decomposto como a união de um certo número de outros sólidos $S_1, S_2, \ldots, S_n$, de tal modo que dois quaisquer dentre eles não tenham em comum pontos de seus interiores, então o volume de S é a soma dos volumes desses sólidos.

3.ª) O volume de um **paralelepípedo reto-retângulo** cujas arestas têm medidas **a**, **b** e **c** é igual a

$$\boxed{V = abc}$$



4.ª) Princípio de Cavalieri — Dados dois sólidos e um plano, suponha que todo plano, paralelo ao plano dado, ao interceptar um dos dois sólidos, intercepta também o outro, de tal modo que as duas seções obtidas tenham mesma área. Sendo assim, *os dois sólidos têm o mesmo volume*



Aplicando estas propriedades, podemos obter os volumes de muitos tipos de sólidos, a começar pelos prismas.

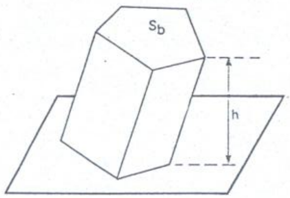
13.6 — VOLUME DE UM PRISMA

Vale a seguinte propriedade:

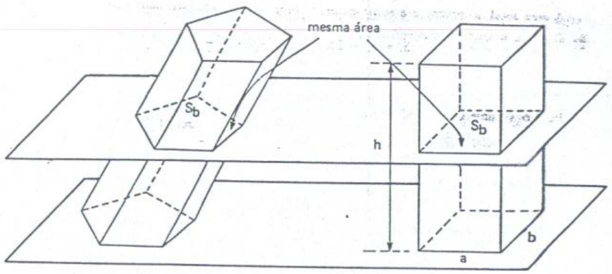
> O volume de um prisma é igual ao produto da *área da sua base*, pela sua *altura*.

Se S_b é a área da base e h é a altura, tem-se

$$V = S_b \cdot h$$



Através do princípio de Cavalieri, esta afirmação pode ser facilmente justificada. Considere um paralelepípedo reto-retângulo com a mesma altura **h** e cuja base tem a mesma área S_b da base do prisma dado. Todo plano paralelo às bases determina, nesses sólidos, seções transversais de mesma área. Isto significa, pelo princípio de Cavalieri, que os dois sólidos têm o mesmo volume.

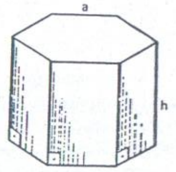


Para o paralelepípedo, como $S_b = a \cdot b$, o volume é $V = abh = S_b h$. Logo, o volume do prisma é também $V = S_b h$.

Exercícios Resolvidos

13.1) Consideremos um prisma hexagonal regular, de altura **h**, no qual a aresta da base tem medida **a**. Pede-se:

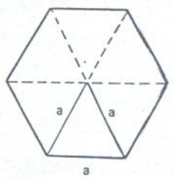
a) a área da base (S_b);
b) a area lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).



Solução

a) A base do prisma é um hexágono regular de lado **a**, cuja área é igual a seis vezes a área de um *triângulo eqüilátero de lado* **a**. Como fizemos no exercício 10.10 d, temos

$$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

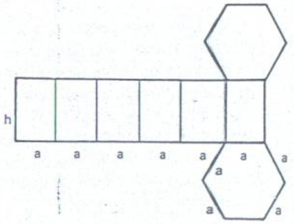


Assim, a área do hexágono é

$$S_b = 6\,S_\Delta = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

b) Cada face lateral do prisma é um retângulo de base **a** e altura **h**, portanto de área igual a $a \cdot h$. A área lateral do prisma é a soma das áreas das seis faces laterais; logo

$$S_\ell = 6\,ah$$



c) A **área total** do prisma é a soma da *área lateral* com as áreas *das duas bases*:

$$S_t = S_\ell + 2\,S_b = 6\,ah + 2\cdot\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

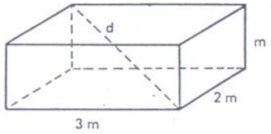
$$S_t = 6ah + 3a^2\sqrt{3}$$

d) Para o volume do prisma, temos:

$$V = S_b h = \frac{3a^2h\sqrt{3}}{2}$$

13.2) As arestas de um paralelepípedo reto-retângulo medem m, 2 m e 3 m. Calcule:

a) a medida da diagonal (d);
b) a área total (S_t);
c) o volume (V)



Solução

a) $d = \sqrt{m^2 + (2\,m)^2 + (3\,m)^2} =$
$= \sqrt{m^2 + 4\,m^2 + 9\,m^2} = \sqrt{14\,m^2}$ $\qquad d = m\sqrt{14}$

b) $S_t = 2\,[m\cdot(2\,m) + m\cdot(3\,m) + (2\,m)\cdot(3\,m)] =$
$= 2\,[2\,m^2 + 3\,m^2 + 6\,m^2] = 22\,m^2$ $\qquad S_t = 22\,m^2$

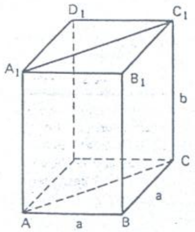
c) $V = m\,(2\,m)\,(3\,m) = 6\,m^3$ $\qquad V = 6\,m^3$

13.3) A área da face lateral de um prisma quadrangular regular é Q. Determine a área da seção diagonal.

Solução

Tem o nome de seção diagonal aquela determinada por um plano que contém as diagonais das duas bases. Temos ab = Q. A área da seção diagonal é S = AC · b. Como $AC = a\sqrt{2}$, temos

$$S = (a\sqrt{2})\,b = ab\sqrt{2} = Q\sqrt{2}$$



13.4) A base de um prisma é um triângulo eqüilátero de lado **a**. Um dos vértices da base superior projeta-se no centro da base inferior. As arestas laterais formam 60° com o plano da base. Calcule o volume do prisma.

Solução

No △ ABC, temos

$$AG = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

No △ AA_1G, temos

$$\frac{h}{AG} = \text{tg}\,60°$$

donde

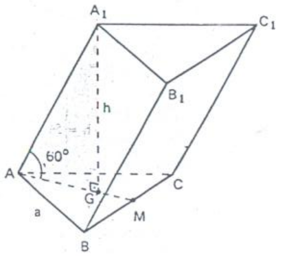
$$h = AG\cdot\text{tg}\,60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = a$$

A área da base do prisma é

$$S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim, o volume é

$$V = S_b\cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$$



13.5) A face lateral de um prisma hexagonal regular é um quadrado de diagonal **d**. Calcule a aresta do cubo que tem volume igual ao desse prisma.

Solução

A aresta da base e a altura do prisma são iguais a

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

Pelo exercício 13.1, temos

$$V = \frac{3a^2h\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{(d\sqrt{2})^2}{4}\cdot\frac{d\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3} =$$

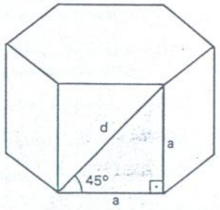
$$= \frac{3d^3\sqrt{6}}{8}$$

Se **b** é a aresta do cubo, temos

$$b^3 = \frac{3d^3\sqrt{6}}{8}$$

donde

$$b = \frac{d\sqrt[6]{54}}{2}$$



13.6) A diagonal da base de um paralelepípedo reto-retângulo mede 6 cm e forma 30° com o lado maior da base. Calcule a altura do paralelepípedo, se o seu volume é 54 cm³.

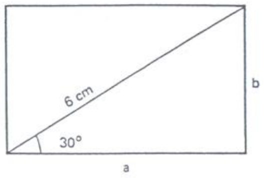
Solução

Os lados da base são

$$a = 6 \cos 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\,\text{cm}$$

e

$$b = 6 \,\text{sen}\, 30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3\,\text{cm}$$



Assim, o volume é

$$V = abh = 9\sqrt{3} \cdot h = 54$$

donde

$$h = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$$

Exercícios Propostos

13.7) Determine a soma dos ângulos internos de todas as faces de um prisma cuja base é um polígono de **n** lados.

13.8) Em um prisma, a soma dos ângulos internos de todas as faces é igual a 2 880°. Quantas faces laterais tem o prisma?

13.9) Em um prisma, a soma dos ângulos internos das duas bases é igual a 1 800°. Quantas faces laterais tem o prisma?

13.10) Em um prisma, a soma dos ângulos internos de todas as faces laterais é igual a 3 960°. Quantas são as faces laterais?

13.11) Um prisma tem, no total, 12 faces. Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces.

13.12) A soma dos ângulos internos de uma das bases de um prisma é igual a 720°. Calcule a soma dos ângulos internos de todas as faces.

13.13) Em um prisma, a soma dos ângulos internos de todas as faces é igual a cinco vezes a soma dos ângulos internos de uma base. Quantas faces laterais tem esse prisma?

13.14) Um prisma tem **n** faces laterais. Quantas são as arestas?

13.15) Quantas faces laterais tem um prisma de 21 arestas?

13.16) Em um prisma, o número de arestas, mais o número de vértices, mais o número de faces, é igual a 32. Quantos lados tem o polígono da base?

13.17) Calcule a soma de todos os diedros de um paralelepípedo (note que arestas opostas, situadas em uma mesma face, determinam diedros suplementares).

13.18) Calcule a área total e a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo de arestas 3, 5 e 12.

13.19) Um paralelepípedo reto-retângulo tem como base um retângulo de lados 4 e 6. Sabendo que a área total é 308, determine a altura e a diagonal desse paralelepípedo.

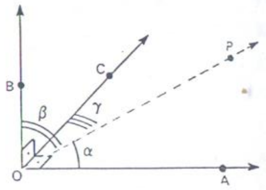
13.20) As arestas de um paralelepípedo reto-retângulo têm por medidas três números inteiros e consecutivos. Determine essas arestas, sabendo que a área total é 52.

13.21) Seja α o ângulo agudo formado por duas diagonais de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 2 cm, 3 cm e 6 cm. Calcule cos α.

13.22) As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são proporcionais a 3, 4 e 12 e a sua diagonal mede 26 cm. Calcule as dimensões do paralelepípedo.

13.23) Sejam OABC um triedro tri-retângulo (veja o item 8.7) e $\overrightarrow{OP}$ uma semi-reta contida no triedro, que forma com as arestas do triedro os ângulos α, β e γ. Mostre que

$$\text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta + \text{sen}^2 \gamma = 2$$



13.24) As diagonais das faces laterais de um paralelepípedo reto-retângulo formam com o plano da base ângulos de 30° e 45°. Sendo α o ângulo que a diagonal do paralelepípedo forma com o plano da base, calcule tg α.

13.25) O perímetro da base de um paralelepípedo reto-retângulo é 14 cm, sua diagonal é 13 cm e sua altura é 12 cm. Calcule a área total.

13.26) As áreas das faces de um paralelepípedo reto-retângulo são proporcionais a 3, 5 e 15 e a área total é 184 cm². Determine as dimensões do paralelepípedo.

13.27) Quantos recipientes em forma de paralelepípedo reto-retângulo podem ser fabricados, no máximo, a partir de uma chapa de aço de 140 cm × 70 cm, se as dimensões dos recipientes são 35 cm × 20 cm × 10 cm?

13.28) Dois paralelepípedos reto-retângulos têm as somas das arestas iguais e uma diagonal também igual. O que ocorre com as áreas totais?

13.29) Num cubo de aresta **a**, as extremidades das três arestas que partem do mesmo vértice são os vértices de um triângulo. Calcule a área desse triângulo.

13.30) Dado um cubo de aresta **a**, constrói-se um segundo cubo, tendo como aresta a diagonal da face do primeiro. Se a diagonal do novo cubo mede 12 cm, calcule a diagonal do primeiro.

13.31) Um cubo tem aresta **a**. Qual é a diagonal de um cubo que tem como aresta a diagonal do primeiro?

13.32) Seja α o ângulo agudo formado por duas diagonais de um cubo. Calcule cos α.

13.33) Um cubo tem diagonal **d** e um segundo cubo tem diagonal d + x. Qual é a diferença entre as suas arestas?

13.34) A aresta de um cubo é a e a aresta de um segundo cubo é a + x. Calcule a diferença entre as suas diagonais.

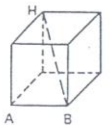
13.35) A área total de um cubo é S. Calcule a diagonal desse cubo.

13.36) Um cubo tem aresta a. De quanto devemos aumentar esta aresta para que a área total do novo cubo seja o dobro da área total do primeiro?

13.37) Um cubo tem diagonal d e um segundo cubo tem diagonal d + x. Calcule a diferença entre suas áreas totais.

13.38) A área total de um cubo de aresta a é S. Calcule a área total de um cubo de aresta ka.

13.39) O cubo da figura tem aresta a. Calcule a distância do vértice A à diagonal $\overleftrightarrow{BH}$.



13.40) Os lados da b[illegible] de um paralelepípedo reto-retângulo são iguais a 16 cm e 18 cm e a diagonal do paralelepípedo mede 34 cm. Determine a razão entre a área total e a área lateral.

13.41) [illegible] pedo reto-retângulo tem arestas de 3 cm, 5 cm e 8 cm. Determine:

a) [illegible] l (d);
b) a área total (S_t);
c) o volume (V).

13.42) Um paralelepípedo reto-retângulo tem volume igual a 216 cm³, área da base igual a 24 cm² e diagonal da base igual a $2\sqrt{13}$ cm. Determine as três medidas das arestas.

13.43) Num paralelepípedo reto-retângulo, cuja diagonal mede $\sqrt{35}$ cm, as três arestas formam uma PA de razão 2 cm. Qual é o volume desse paralelepípedo?

13.44) Calcule o volume de um paralelepípedo reto-retângulo cujas dimensões são a aresta a, a diagonal de face e a diagonal de um cubo.

13.45) Calcule a área total e o volume de um cubo de diagonal d.

13.46) A diagonal da base de um paralelepípedo reto-retângulo é 16 cm. O lado maior da base determina, na circunferência circunscrita, um arco de 120°. A área lateral do paralelepípedo é 24 cm². Calcule o seu volume.

13.47) Seja um cubo de aresta 5 cm. Calcule:

a) a sua diagonal (d);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t);
e) o volume (V).

13.48) Seja um cubo cuja diagonal mede 12 cm. Calcule:

a) a aresta (a);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t);
e) o volume (V).

13.49) A diagonal de uma face de um cubo mede 4 cm. Determine o volume do cubo.

13.50) Um cubo tem área total igual a 18 cm². Determine o volume desse cubo.

13.51) Em um cubo, a aresta, a diagonal e a área total formam, nessa ordem, uma PG. Determine o volume do cubo.

13.52) Seja um cubo de área total 216 cm³. Calcule:

a) a sua aresta (a);
b) a sua diagonal (d);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área da base (S_b);
e) o volume (V).

13.53) Determine a diagonal de uma face de um cubo de volume igual a $2\sqrt{2}$ cm³.

13.54) Determine o volume de um cubo cuja área lateral é igual a 12 cm².

13.55) Em um cubo, a área da base, a área total e o volume formam, nessa ordem, uma PG. Determine a aresta do cubo.

13.56) A soma das medidas das arestas de um cubo é igual a 18 cm. Calcule a diagonal, a área total e o volume do cubo.

13.57) Em um cubo, a diagonal de uma face é ℓ. Calcule a diagonal, a área total e o volume desse cubo.

13.58) A diferença entre as arestas de dois cubos é x e a diagonal do maior é d. Calcule a área total e o volume do cubo menor.

13.59) A soma de todas as diagonais das faces de um cubo é igual a 48 cm. Calcule o volume desse cubo.

13.60) A área total e o volume de um cubo são expressos por um mesmo número. Calcule a aresta do cubo.

13.61) Três cubos de chumbo, com arestas 6 cm, 8 cm e 10 cm são fundidos em um só cubo. Qual é a aresta do cubo obtido?

13.62) Um cubo de chumbo, de aresta 20 cm, é dividido, por fusão, em três cubos cujas arestas são proporcionais a 3, 4 e 5. Calcule os volumes dos cubos assim obtidos.

13.63) Calcule a área total de um cubo cujo volume é igual ao de um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4 cm, 6 cm e 9 cm.

13.64) Um cubo e um paralelepípedo reto-retângulo têm mesma área total. As dimensões do paralelepípedo são proporcionais a 1, 6 e 6, e o seu volume é 562,5 cm³. Calcule o volume do cubo.

13.65) São dados um cubo de aresta 12 cm e um paralelepípedo reto de mesmo volume do cubo. O ângulo agudo da base do paralelepípedo é 30° e as suas arestas são proporcionais a 12, 9 e 4 (as duas primeiras são as arestas da base). Determine a área total do paralelepípedo.

13.66) Um prisma reto pentagonal tem altura 7 e área lateral 91. Qual é o perímetro da base?

13.67) A altura do prisma reto pentagonal da figura é 6 e as arestas da base têm as medidas 2, 3, 5, 7 e 8. Determine a área lateral do prisma.

13.68) Um prisma reto tem área lateral igual a $156\,cm^2$ e o perímetro da base é 26 cm. Quanto mede a aresta lateral?

13.69) A diagonal de um prisma quadrangular regular mede **d** e faz, com o plano da face lateral, um ângulo de 60°. Determine a medida da aresta da base.

13.70) A diagonal de um prisma quadrangular regular mede **d** e faz, com a aresta lateral, um ângulo de 60°. Determine a medida da aresta da base.

13.71) A aresta da base de um prisma quadrangular regular é igual a 20 cm. Calcule a distância entre a diagonal do prisma e uma aresta lateral que não a corta.

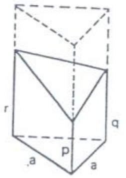
13.72) Calcule a diagonal de um prisma quadrangular regular no qual a área da base é igual a $450\,cm^2$ e a aresta lateral a 40 cm.

13.73) Calcule a diagonal de um prisma quadrangular regular no qual a área da base é $200\,cm^2$ e a área da face lateral é $210\sqrt{2}\,cm^2$.

13.74) A aresta da base de um prisma regular hexagonal é **a** e a altura é **2a**. Calcule as diagonais do prisma e as tangentes trigonométricas dos ângulos que cada diagonal forma com o plano da base.

13.75) Em um paralelepípedo reto, as arestas da base são **m** e **n** e formam entre si 60°. A diagonal maior da base é igual à menor diagonal do paralelepípedo. Calcule as diagonais do paralelepípedo.

13.76) Um prisma triangular regular cuja aresta da base mede **a**, é cortado por um plano inclinado, obtendo-se um tronco com arestas laterais **p**, **q** e **r**. Calcule a área lateral desse tronco.



13.77) A base de um prisma reto é um losango. Sendo 8 cm e 5 cm as medidas das diagonais do prisma e 2 cm a altura, calcule o lado da base.

13.78) A base de um prisma reto é um hexágono regular de lado **a**. As faces laterais são quadrados. Calcule as diagonais do prisma.

13.79) A base de um prisma reto é um losango com lado de 10 cm e altura 9,6 cm. A altura do prisma é 12 cm. Calcule as diagonais do prisma.

13.80) A base de um prisma reto é um paralelogramo, cujos lados são iguais a 13 cm e 15 cm e cuja altura é 12 cm. A diagonal menor do prisma forma 45° com o plano da base. Calcule as diagonais do prisma.

13.81) A base de um prisma oblíquo é um triângulo eqüilátero de lado **a**. A aresta lateral forma 60° com o plano da base. Um dos vértices da base superior tem projeção ortogonal sobre o plano da base no centro da circunferência circunscrita. Calcule a altura do prisma e a área de cada face lateral.

13.82) A base de um prisma reto é um paralelogramo de lados 15 cm e $2\sqrt{38}$ cm. A soma das diagonais da base é 32 cm e a altura do prisma é 12 cm. Calcule as diagonais do prisma.

13.83) Em um prisma quadrangular regular, a diagonal faz 30° com o plano da base e a área lateral é igual a $48\sqrt{6}\,cm^2$. Calcule a aresta da base.

13.84) Em um prisma triangular regular, a aresta da base é **a**. A diagonal da face lateral faz, com o plano de outra face lateral, um ângulo de 30°. Calcule a área lateral.

13.85) A altura de um prisma triangular regular é igual a $14\sqrt{3}$ cm e as áreas da base e lateral são proporcionais a 2 e 7. Determine a aresta da base.

13.86) A diagonal de um prisma quadrangular regular faz 30° com a face lateral. A aresta da base é **a**. Determine a área lateral.

13.87) A aresta da base de um prisma hexagonal regular é **a**. A maior diagonal forma 60° com o plano da base. Calcule a área total.

13.88) Em um prisma reto, a base é um triângulo retângulo de catetos 10 cm e 24 cm. A diagonal da maior face lateral forma 60° com o plano da base. Calcule a área lateral.

13.89) A base de um paralelepípedo reto é um losango cuja diagonal maior é igual a quatro vezes o raio R do círculo inscrito. A menor diagonal do paralelepípedo forma 60° com o plano da base. Determine a área lateral.

13.90) Determine o perímetro da base e a altura de um prisma reto pentagonal, dadas a área lateral 60 e a soma 40 das 15 arestas.

13.91) Em um prisma triangular regular, a altura é igual à aresta da base. Seja α o ângulo formado por duas diagonais de faces que concorrem num mesmo vértice. Calcule $\cos\alpha$.

13.92) Seja um prisma regular de base triangular no qual a altura é igual à aresta da base. Sendo S a área da base, determine, em função de S:

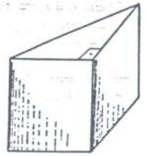
a) a aresta da base (a);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

13.93) Sejam dois prismas regulares de mesma altura, o primeiro de base quadrada e o segundo de base hexagonal. Em ambos os prismas a aresta da base mede 2 cm. Qual é a razão entre os seus volumes?

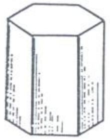
13.94) Seja um prisma regular de base triangular, no qual a altura **h** é igual à aresta da base. Determine, em função de **h**.

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

13.95) Um prisma reto tem como base um triângulo retângulo isósceles cujo cateto mede 3 cm. Sabendo que a área total é 48 cm², determine a altura desse prisma, bem como o seu volume.

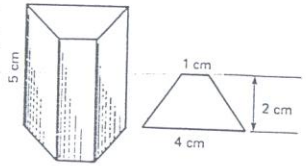


13.96) O prisma regular hexagonal da figura tem volume igual a 27. A altura é **h** e a aresta da base é **a**. Sabendo que $h = a\sqrt{3}$, determine a aresta da base.



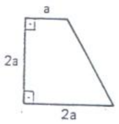
13.97) Um prisma reto tem como base um trapézio isósceles e a sua altura é 5 cm. O trapézio tem altura 2 cm e as suas bases medem 1 cm e 4 cm. Determine:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

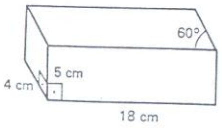


13.98) Um prisma reto de base trapezoidal tem altura **a** e a sua base é o trapézio representado na figura ao lado. Determine:

a) a área do trapézio (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

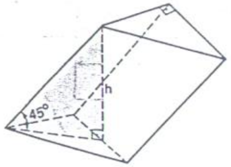


13.99) Um paralelepípedo de altura 5 cm tem como base um paralelogramo de lados 4 cm e 18 cm. Dois lados desse paralelogramo formam ângulo de 60°. Determine a área total e o volume do paralelepípedo.



13.100) Sejam dois prismas regulares de mesma altura, o primeiro de base triangular e o segundo de base hexagonal. Em ambos os prismas a aresta da base mede 2 cm. Qual é a razão entre os seus volumes?

13.101) A base de um prisma oblíquo é um triângulo retângulo isósceles. A projeção de uma das arestas laterais sobre o plano da base coincide com a mediana relativa a um dos catetos do triângulo. As arestas laterais formam 45° com o plano da base. Calcule o volume do prisma, sabendo que sua altura é **h**.



13.102) A altura de um prisma reto de base quadrada é 40 cm e sua área total é 2 208 cm². Determine o volume do prisma.

13.103) Determine o volume de um paralelepípedo reto cujas arestas são todas iguais a 4 cm, sendo 60° o ângulo da base.

13.104) A base de um paralelepípedo reto é um losango com lado **a** e ângulo de 60°. A área lateral do paralelepípedo é $8a^2$. Calcule o volume do paralelepípedo.

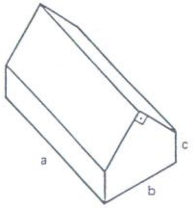
13.105) A base de um paralelepípedo reto é um paralelogramo de lados **a** e **4a** e cujo ângulo agudo é 60°. A maior diagonal do paralelepípedo mede 5a. Calcule o volume.

13.106) A base de um paralelepípedo reto é um paralelogramo cujo lado maior é igual a 25 cm e cuja diagonal menor é igual a 15 cm e serve como altura do paralelogramo. A menor diagonal do paralelepípedo forma 45° com o plano da base. Calcule o volume.

13.107) O lado da base de um prisma regular é igual a **a** e a aresta lateral é igual a **b**. Calcule o volume, se o prisma é:

a) triangular;
b) quadrangular;
c) hexagonal.

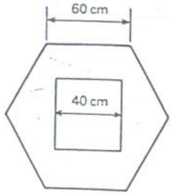
13.108) Calcule a capacidade do armazém da figura, sendo a = 25 m, b = 10 m e c = 4 m.



13.109) Em um prisma triangular regular, o segmento da perpendicular conduzida por um vértice ao lado oposto da outra base tem medida **a** e faz 60° com o plano da base. Determine o volume do prisma.

13.110) O volume de um prisma triangular regular é 90 cm³ e o raio da circunferência inscrita na base é 3 cm. Calcule a altura do prisma.

13.111) A seção reta de uma barra oca de metal é dada na figura ao lado. Calcule o volume de metal que constitui a barra, sabendo que o seu comprimento é 1,5 m (adote $\sqrt{3} = 1{,}7$).



13.112) A base de um prisma reto é um triângulo retângulo cujos catetos são 20 cm e 21 cm. A maior face lateral do prisma é um quadrado. Determine o volume do prisma.

13.113) A base de um prisma reto é um trapézio, cujo maior lado é igual à altura do prisma. As áreas das faces laterais são proporcionais aos números 1, 1, 1 e 2. Se o volume do prisma é igual a $12\sqrt{3}\ cm^3$, calcule os lados da base.

13.114) Um cubo de aresta 15 cm tem o mesmo volume de um prisma triangular reto cujos lados da base e altura são proporcionais a 87, 75, 18 e 50. Determine a área total do prisma.

13.115) As áreas das faces de um prisma reto são $300\ cm^2$, $240\ cm^2$, $180\ cm^2$, $96\ cm^2$ e $96\ cm^2$. Calcule o seu volume.

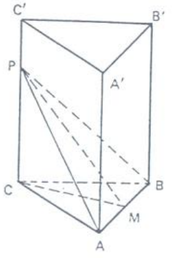
13.116) Em um prisma triangular reto, a maior face lateral tem área S. Calcule a menor altura da base, sabendo que o volume é V.

13.117) Em um prisma regular hexagonal todas as arestas são iguais a **a**. Calcule:

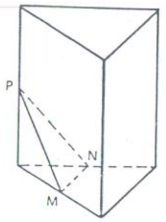
a) as diagonais do prisma;
b) a área da seção obtida por um plano que contém a maior diagonal da base e a aresta paralela da outra base;
c) as distâncias entre esta seção e as arestas do prisma que são paralelas a ela.

13.118) A área da seção diagonal de um cubo é igual a $16\sqrt{2}\ cm^2$. Calcule a aresta do cubo, a diagonal da base e a diagonal do cubo.

13.119) Um prisma triangular regular tem aresta da base igual a **a** e altura **h**. Toma-se sobre a aresta $\overleftrightarrow{CC'}$ um ponto P. Ache a área do triângulo ABP, sabendo que seu plano forma 45° com o plano da base.



13.120) É dado um prisma triangular regular, cuja base tem lado **a**. Pelos pontos médios M e N de duas arestas da base conduz-se um plano que forma 60° com o plano da base e corta a aresta lateral em um ponto P. Ache a área da seção.

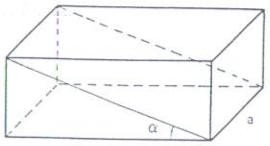


131.121) Num prisma triangular reto, os lados da base são 10 cm, 17 cm e 21 cm e a altura do prisma é 18 cm. Determine a área da seção obtida por um plano que contém uma aresta lateral e a menor altura do triângulo da base.

13.122) Um prisma hexagonal regular tem faces laterais quadradas de lados **a**. Um plano contém uma aresta da base e a aresta oposta da outra base. Determine a área da seção.

13.123) Calcule a área da seção diagonal de um cubo de aresta igual a 6 m.

13.124) Num paralelepípedo reto-retângulo uma das arestas da base tem medida **a**. A seção do paralelepípedo por um plano que contém esta aresta e a aresta oposta da outra base tem área S e forma ângulo α com o plano da base. Calcule o volume do paralelepípedo.



13.125) Em um prisma triangular regular, toma-se um plano que contém uma aresta de uma base e o vértice oposto da outra base. Se a altura do prisma e a aresta da base são iguais, calcule o cosseno do ângulo que o plano tomado forma com o plano da base.

13.126) Em um prisma triangular regular, toma-se um plano que contém uma aresta de uma base e o vértice oposto da outra base, obtendo-se uma seção triangular. Calcule o ângulo do plano da seção com o plano da base, sabendo que a altura da seção (relativa ao lado desigual) é igual à aresta da base do prisma.

13.127) Em um prisma triangular regular, toma-se uma seção por um plano que contém uma aresta de uma base e o vértice oposto da outra base. Se o plano da seção forma 60° com o plano da base e a aresta da base do prisma é **a**, calcule a diagonal da face lateral desse prisma.

13.128) Em um prisma quadrangular regular $ABCDA_1B_1C_1D_1$, a altura é o quádruplo da aresta da base. Tomam-se os pontos M e N sobre as arestas laterais $\overleftrightarrow{AA_1}$ e $\overleftrightarrow{BB_1}$, de tal modo que $AM = \frac{1}{4}AA_1$ e $BN = \frac{1}{2}BB_1$. Calcule o ângulo $D\hat{M}N$.

13.129) A aresta de um cubo mede 5 cm. Calcule o perímetro e a área da seção do cubo por um plano que passa pelas extremidades de três arestas que contêm um mesmo vértice.

13.130) É dado um cubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, com aresta **a**. Sobre a aresta $\overleftrightarrow{C_1D_1}$ toma-se um ponto L, com $C_1L = \frac{3a}{4}$; sobre a aresta $\overleftrightarrow{A_1B_1}$ toma-se o ponto M, com $A_1M = \frac{a}{2}$; sobre a aresta $\overleftrightarrow{BB_1}$ toma-se o ponto N, com $B_1N = \frac{a}{4}$. Calcule o perímetro da seção determinada no cubo, por um plano conduzido pelos pontos L, M e N.

13.131) Os lados da base de um paralelepípedo reto-retângulo são 20 cm e 21 cm e as seções diagonais são quadrados. Determine a área lateral do paralelepípedo.

13.132) Em um prisma regular hexagonal, a aresta da base é igual à aresta lateral. Calcule a área lateral, se a menor seção diagonal tem área $25\sqrt{3}\,cm^2$.

13.133) A área da maior seção diagonal de um prisma hexagonal regular é igual a Q. Calcule a área lateral.

13.134) A área lateral de um prisma hexagonal regular é $48\ m^2$. Calcule as áreas das seções diagonais.

13.135) Um plano, determinado pela aresta da base de um prisma triangular regular e o ponto médio da aresta lateral oposta, forma 30° com o plano da base. Se a aresta da base é 10 cm, calcule a área lateral.

13.136) A base de um prisma reto é um losango cujo lado é **a** e o ângulo agudo é 60°. Um plano, determinado pela diagonal maior de uma base e o vértice de um ângulo obtuso da outra, determina no prisma uma seção em forma de triângulo retângulo. Calcule a área total.

13.137) A base de um paralelepípedo reto é um losango com ângulo agudo de 60°. A área da maior seção diagonal é Q. Calcule a área lateral.

13.138) A base de um paralelepípedo reto é um losango. As áreas das seções diagonais são $60\ cm^2$ e $80\ cm^2$. Determine a área lateral.

13.139) Em um paralelepípedo reto-retângulo $ABCDA_1B_1C_1D_1$, os lados da base são 8 cm e 6 cm e a área da seção ACD_1 é $74\ cm^2$. Determine o volume do paralelepípedo.

13.140) A base de um prisma reto é um triângulo cujos lados são 6 cm, 25 cm e 29 cm. Pelos pontos médios dos dois lados maiores é tomada uma seção paralela à face lateral. A área desta seção é igual a $24\ cm^2$. Calcule o volume do prisma.

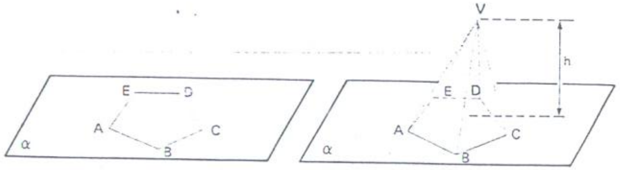
Capítulo 14

Pirâmides

14.1 — NOÇÃO DE PIRÂMIDE

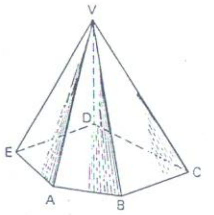
Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um polígono ABC... Seja V um ponto situado fora do plano α.

Podemos construir todos os segmentos que têm uma extremidade num ponto do polígono e a outra no ponto V. Unindo todos esses segmentos, obtemos um *sólido* que recebe o nome de *pirâmide*.



Nomenclatura

Na figura ao lado temos o exemplo de uma pirâmide. Vamos estabelecer os **nomes** das partes dessa figura.



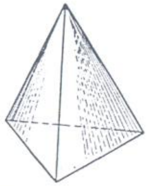
Vértice da pirâmide: é o ponto V.
Base: é o polígono ABCDE.
Arestas da base: são os lados desse polígono.
Arestas laterais: são os segmentos $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$, $\overleftrightarrow{VC}$, $\overleftrightarrow{VD}$ e $\overleftrightarrow{VE}$.
Faces laterais: são os *triângulos* que têm um dos lados numa aresta da base e o vértice oposto no ponto V. Exemplos: VAB, VBC, etc.
Altura da pirâmide: é a *distância* entre o vértice V e o plano da base (indicada por **h** na figura anterior).
Área lateral: é a soma das áreas das faces laterais.
Área total: é a soma da área da base com a área lateral.

14.2 — CLASSIFICAÇÃO DAS PIRÂMIDES

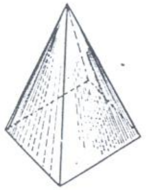
a) Segundo o número de arestas das bases

- Pirâmide triangular: é aquela cuja base é um triângulo.
- Pirâmide quadrangular: é aquela cuja base é um quadrilátero.
- Pirâmide pentagonal: é aquela cuja base é um pentágono.

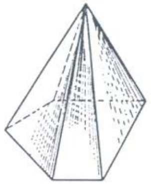
E assim por diante.



pirâmide triangular



pirâmide quadrangular

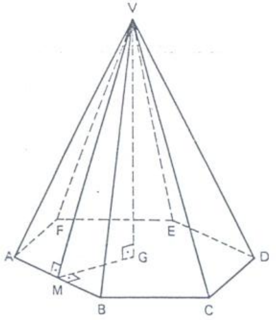


pirâmide pentagonal

b) Segundo a forma da base

- Pirâmide regular: é a pirâmide cuja *base* é um polígono regular e na qual a *projeção* do vértice V sobre o plano da base é o centro G desse polígono. Na figura temos representada uma pirâmide regular hexagonal. Ali, temos:

  VG = h = altura
  GM = apótema da base
  VM = apótema da pirâmide



Numa pirâmide regular, as faces laterais são triângulos isósceles congruentes entre si.

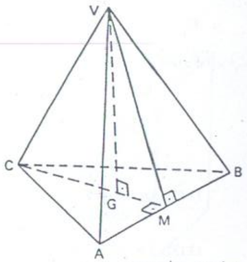
14.3 — TETRAEDRO REGULAR

Uma pirâmide de base triangular é também chamada tetraedro, pois esse sólido tem quatro faces, sendo três faces laterais e uma base.

Ao dizermos que um tetraedro é regular, subentende-se que *todas as suas arestas são congruentes*, tanto as da base como as laterais. Neste caso, todas as faces são triângulos eqüiláteros.

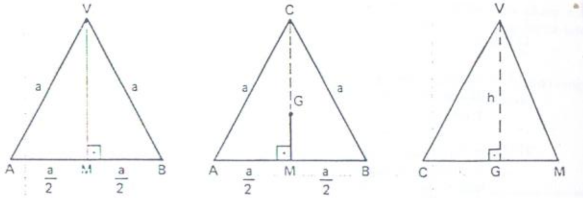
Altura do tetraedro regular

Num tetraedro regular, pode-se determinar a relação entre a altura **h** e a aresta **a**. Basta acompanhar as figuras. Em primeiro lugar, o *apótema da pirâmide*, VM, é a altura do triângulo eqüilátero ABV. Temos



tetraedro regular

$$VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Em segundo lugar, sendo G o baricentro do triângulo ABC, sabemos que $GM = \frac{1}{3}$ CM. Como CM é a altura do triângulo eqüilátero do lado **a**, temos também $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; logo

$$GM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Finalmente, aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo VGM, obtemos:

$$VM^2 = VG^2 + GM^2$$

ou seja $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$

Simplificando esta equação, resulta:

$$h^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

e daí obtemos
$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

que é a **relação entre a altura e a aresta do tetraedro regular.**

Área total do tetraedro regular

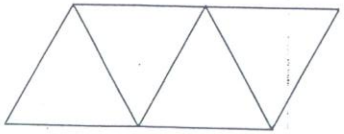
A área de *uma* face do tetraedro regular (como por exemplo o triângulo ABV) é dada pela expressão

$$S_\Delta = \frac{a \cdot VM}{2}$$

e como $VM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, tem-se $S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

A área total do tetraedro regular é igual a quatro vezes esta área:

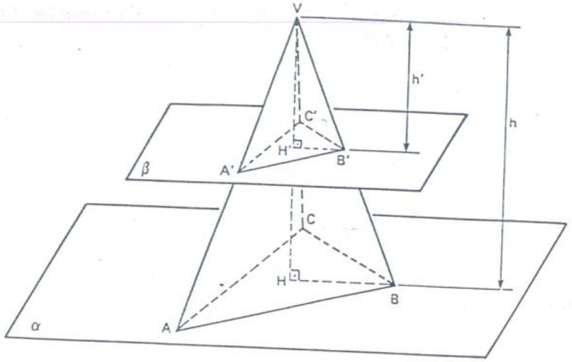
$$S_t = a^2\sqrt{3}$$



A área total do tetraedro regular é a soma das áreas de quatro triângulos eqüiláteros. Recortando a figura acima, em cartolina, e dobrando-a ao longo das linhas podemos construir um modelo do tetraedro regular.

14.4 — SEÇÃO PARALELA À BASE DE UMA PIRÂMIDE TRIANGULAR

Se α é o plano da base ABC de uma pirâmide triangular, então um novo plano $\beta /\!/ \alpha$, que corta as arestas laterais da pirâmide, intercepta a pirâmide segundo um triângulo A'B'C', que pode ser chamado seção paralela à base. Um fato importante a ser estabelecido é que os triângulos Δ A'B'C' e Δ ABC são *semelhantes.*



Notemos que $\overleftrightarrow{A'B'} /\!/ \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{A'C'} /\!/ \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{B'C'} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$. Assim,

$$\Delta VA'B' \sim \Delta VAB \quad \Rightarrow \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB}$$

$$\Delta VA'C' \sim \Delta VAC \quad \Rightarrow \quad \frac{A'C'}{AC} = \frac{VA'}{VA} = \frac{VC'}{VC}$$

$$\Delta VB'C' \sim \Delta VBC \quad \Rightarrow \quad \frac{B'C'}{BC} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC}$$

donde
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{VB'}{VB}$$

Por outro lado, como $\Delta VB'H' \sim \Delta VBH$, temos

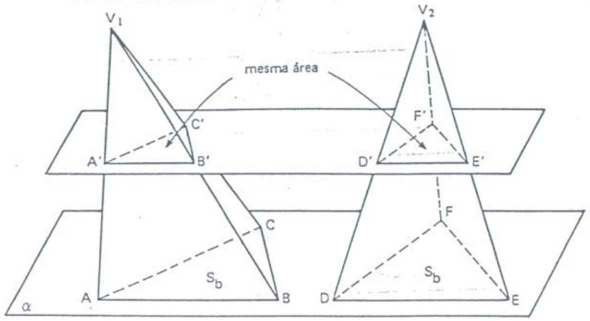
$$\frac{VB'}{VB} = \frac{VH'}{VH} = \frac{h'}{h}$$

e assim,
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{h'}{h}.$$

Concluímos, portanto, que $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ e, ainda, que a *razão de semelhança* é igual a $\frac{h'}{h}$. Como vimos no exercício 11.16, *a razão entre as áreas* desses dois triângulos é o quadrado da razão de semelhança:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2.$$

14.5 — O PRINCÍPIO DE CAVALIERI APLICADO ÀS PIRÂMIDES TRIANGULARES



Se duas pirâmides triangulares têm *bases de áreas iguais* e *mesma altura*, então elas têm **o mesmo volume**. Este fato pode ser reconhecido através do princípio de Cavalieri (veja o item 13.5). Suponhamos que as duas pirâmides têm suas bases contidas em um mesmo plano α. Todo plano paralelo a α, ao interceptar a pirâmide V_1ABC segundo o triângulo $A'B'C'$, intercepta também a pirâmide V_2DEF segundo um outro triângulo $D'E'F'$. Para se concluir que as duas pirâmides têm mesmo volume, basta mostrar que as duas seções assim obtidas têm mesma área.

Como vimos no item anterior,

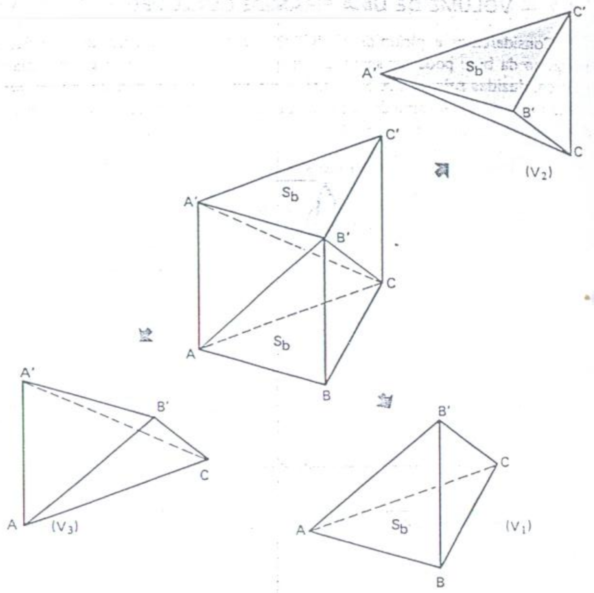
$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{S_{D'E'F'}}{S_{DEF}} = \left(\frac{h'}{h}\right)$$

e como $S_{ABC} = S_{DEF} = S_b$, é claro que

$$S_{A'B'C'} = S_{D'E'F'}$$

14.6 — VOLUME DE UMA PIRÂMIDE TRIANGULAR

O volume de uma pirâmide triangular pode ser determinado, fazendo-se uso de um recurso interessante. Consideremos um prisma triangular com área da base S_b e altura **h**. A ilustração a seguir mostra como esse prisma pode ser decomposto em três pirâmides triangulares. Cortando-se o prisma pelo plano ACB', obtemos a pirâmide $B'ABC$. Um segundo corte do prisma pelo plano $A'B'C$ determina as pirâmides $CA'B'C'$ e $B'AA'C$. Podemos provar que as três pirâmides assim obtidas *têm volumes iguais*.



As pirâmides $B'ABC$ e $CA'B'C'$ têm bases de mesma área S_b e também têm mesma altura, que é igual à altura do próprio prisma. Assim, tem-se $V_1 = V_2$.

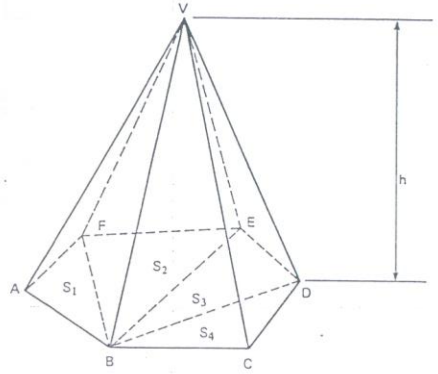
Por outro lado, considerando a pirâmide $B'A'CC'$ (de vértice B' e base $\triangle A'CC'$) e a pirâmide $B'AA'C$ (de vértice B' e base $\triangle AA'C$), vemos que as suas bases têm mesma área (pois os triângulos $\triangle A'CC'$ e $\triangle AA'C$ são congruentes) e ambas têm também alturas iguais (é a distância do ponto B' ao plano que contém a face $ACC'A'$ do prisma). Assim, tem-se $V_2 = V_3$.

Este raciocínio mostra que o volume da pirâmide $B'ABC$ é igual à terça parte do volume do prisma, isto é,

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{3} S_b h}$$

14.7 — VOLUME DE UMA PIRÂMIDE QUALQUER

Consideremos a pirâmide VABCDEF, de altura h e área da base S_b. O polígono da base pode ser separado em quatro triângulos, por meio das diagonais conduzidas pelo vértice B. Assim, a pirâmide fica separada em quatro *pirâmides triangulares*. A soma dos volumes dessas quatro pirâmides é igual ao volume da pirâmide dada. Temos, então,



$$V = \frac{1}{3}S_1h + \frac{1}{3}S_2h + \frac{1}{3}S_3h + \frac{1}{3}S_4h =$$

$$= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)\,h = \frac{1}{3}S_bh$$

É claro que o raciocínio é válido para uma pirâmide com um número qualquer de vértices na sua base. Concluímos, assim, que para qualquer pirâmide, o volume pode ser obtido pela expressão

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S_bh}$$

O volume de uma pirâmide qualquer é a terça parte do produto da *área da sua base*, pela sua *altura*.

Exercícios Resolvidos

14.1) Calcule o volume de um tetraedro regular de aresta **a**.

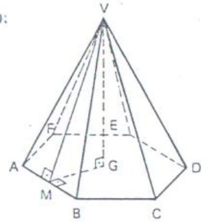
Solução

Como vimos no item 14.3, a altura do tetraedro regular é dada por $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. A área da sua base é a área do triângulo eqüilátero de lado **a**: $S_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Assim, $V = \frac{1}{3}S_bh = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{3}$, donde resulta

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

14.2) Consideremos uma pirâmide hexagonal regular de altura h, na qual a aresta da base tem medida **a**. Pede-se:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_l);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).



Solução

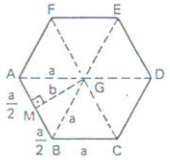
a) A base da pirâmide é um hexágono regular de lado **a**. A sua área é igual a seis vezes a área de um *triângulo eqüilátero* de lado a. A área do triângulo eqüilátero é dada por

$$S_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

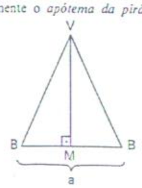
Sendo assim, a área do hexágono é

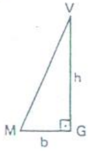
$$S_b = 6S_\Delta = 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{S_b = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}}$$



b) Cada face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles de base **a** e cuja altura VM é justamente o *apótema da pirâmide*. A área desse triângulo é





$S = \dfrac{a \cdot VM}{2}$. Portanto, é necessário determinar VM. Observando o triângulo retângulo MGV, escrevemos:

$$VM^2 = GM^2 + VG^2 = b^2 + h^2$$

O valor de **b** pode ser obtido facilmente. Basta notar que **b** é a altura do triângulo eqüilátero ABG; logo $b = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Então:

$$VM^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{3a^2}{4} + h^2 = \frac{3a^2 + 4h^2}{4}$$

donde

$$\boxed{VM = \frac{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{2}}$$

Agora, já podemos escrever a área do triângulo ABV:

$$S = \frac{a\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{4}$$

A área lateral da pirâmide é a soma das áreas dos seis triângulos, logo:

$$\boxed{S_\ell = \frac{3a\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{2}}$$

c) A **área total** da pirâmide é a soma da *área lateral* com a *área da base*:

$$S_t = \frac{3a\sqrt{3a^2 + 4h^2}}{2} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{S_t = \frac{3a}{2} \cdot [\sqrt{3a^2 + 4h^2} + a\sqrt{3}]}$$

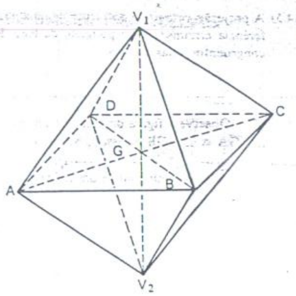
d) Para o volume da pirâmide, temos

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot h$$

$$\boxed{V = \frac{a^2h\sqrt{3}}{2}}$$

14.3) **Octaedro regular** – Consideremos duas pirâmides quadrangulares de mesma base ABCD e vértices V_1 e V_2 situados em semi-espaços opostos em relação ao plano da base. Vamos supor que a base ABCD seja um *quadrado* e que as faces laterais de ambas as pirâmides sejam *triângulos eqüiláteros*. A união dessas duas pirâmides forma um sólido dotado de oito faces triangulares, chamado **octaedro regular**.

Calcule o volume de um octaedro regular de aresta **a**.



Solução

O volume do octaedro é, evidentemente, o dobro do volume de uma das pirâmides. Consideremos, então, a pirâmide V_1ABCD. A área da base dessa pirâmide é $S_b = a^2$. Resta determinar a altura V_1G. Para isso, é suficiente notar que o quadrilátero V_1DV_2B *é um quadrado* de lado **a** e V_1G é a metade da diagonal desse quadrado. Assim, $V_1G = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Temos, então, para o volume da pirâmide:

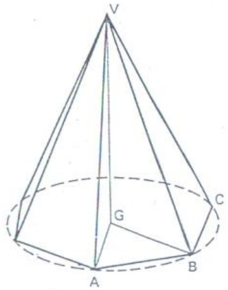
$$V_p = \frac{1}{3} S_b \cdot V_1G = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

e assim o volume do octaedro é $\boxed{V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{3}}$

14.4) Uma pirâmide tem suas arestas laterais congruentes duas a duas. Prove que o polígono da base é inscritível em uma circunferência, cujo centro é a projeção ortogonal do vértice da pirâmide sobre o plano da base.

Solução

Seja G a projeção ortogonal do vértice V sobre o plano da base. Como $V\hat{G}A = V\hat{G}B = 90°$ e $VA = VB$, temos $\triangle VGA \equiv \triangle VGB$, donde $GA = GB$. Da mesma forma, teremos $GB = GC$, e assim por diante. Portanto, o ponto G é o centro de uma circunferência circunscrita ao polígono da base da pirâmide.



14.5) A projeção ortogonal do vértice de uma pirâmide sobre o plano da base é o centro da circunferência circunscrita ao polígono da base. Prove que esta pirâmide tem suas arestas laterais congruentes duas a duas.

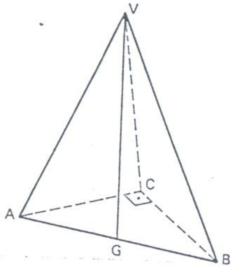
Solução

Observe a figura do exercício anterior. Temos $V\hat{G}A = V\hat{G}B = 90°$ e $GA = GB$. Logo, $\triangle VGA \equiv \triangle VGB$ e, assim, $VA = VB$.

14.6) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo e as arestas laterais são congruentes duas a duas. Prove que uma das faces laterais é perpendicular ao plano da base.

Solução

Se as arestas laterais são congruentes duas a duas, então a projeção ortogonal G do vértice da pirâmide, sobre o plano da base, é o ponto médio da hipotenusa $\overline{AB}$. Assim, o plano pl (VAB) contém uma reta $\overleftrightarrow{VG}$, que é perpendicular ao plano da base, donde a face lateral VAB é perpendicular ao plano da base.



14.7) Uma pirâmide hexagonal regular tem aresta lateral de 10 cm e altura 8 cm. Calcule as áreas das *seções diagonais* (isto é, seções determinadas por planos que contêm o vértice e uma diagonal da base).

Solução

No $\triangle VGD$, temos $(VD)^2 = (VG)^2 + (GD)^2$ donde $(GD)^2 = (VD)^2 - (VG)^2 = 10^2 - 8^2 = 36$ e, assim, $GD = 6$ cm. Para a seção VAD, temos $S_1 = \frac{1}{2}(AD) \cdot (VG)$, logo $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48\ cm^2$.

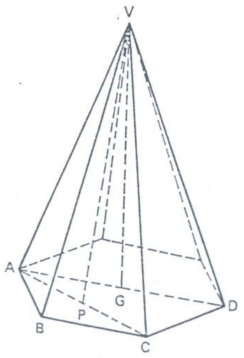
O lado do hexágono mede 6 cm, logo a diagonal $\overleftrightarrow{AC}$ mede $6\sqrt{3}$ cm. Para a seção VAC, temos

$$(VP)^2 = (VC)^2 - (PC)^2 = 10^2 - (3\sqrt{3})^2 = 73$$

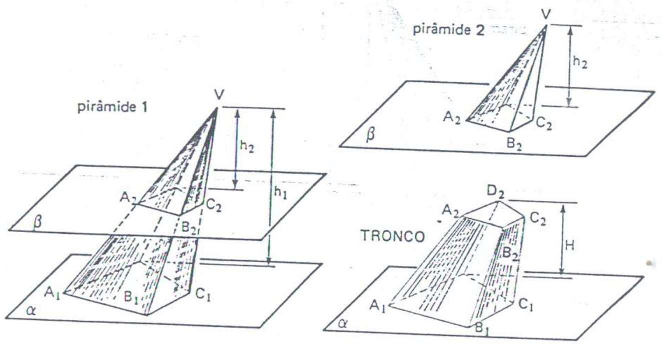
donde $VP = \sqrt{73}$. Portanto, a sua área é

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot (AC) \cdot (VP) =$$

$$= \frac{1}{2}(6\sqrt{3})(\sqrt{73}) = 3\sqrt{219}\ cm$$



14.8 — TRONCO DE PIRÂMIDE DE BASES PARALELAS



Consideremos uma pirâmide de vértice V e altura h_1 (pirâmide 1). Imaginemos que um plano β, paralelo ao plano α da base, corte a pirâmide à distância h_2 do vértice, sendo $h_2 < h_1$. A interseção do plano β com a pirâmide é um polígono *semelhante* ao polígono da base e tem o nome de seção transversal. Note que o plano β separa a pirâmide em dois sólidos, um dos quais é também uma pirâmide de vértice V e altura h_2 (pirâmide 2). O outro é um sólido chamado tronco de pirâmide.

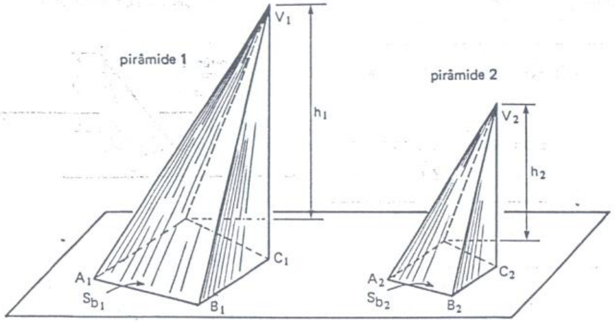
As bases das duas pirâmides são as bases do tronco e a diferença $H = h_1 - h_2$, que representa a distância entre as duas bases, é a altura do tronco. As faces laterais do tronco são *trapézios*.

14.9 — PIRÂMIDES SEMELHANTES

As duas pirâmides, 1 e 2, obtidas acima são semelhantes. No capítulo 11, item 11.4, havíamos examinado a formulação de um conceito geral de semelhança entre *figuras planas*. Não há, no entanto, motivo especial que nos impeça de estender tal conceito a quaisquer figuras geométricas.

> Duas figuras são semelhantes se existe uma correspondência entre seus pontos, tal que a razão entre um segmento da primeira e o correspondente segmento da segunda figura seja constante.

A razão **k** entre dois segmentos correspondentes chama-se **razão de semelhança.**



No caso das duas pirâmides observadas no item anterior, temos:

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2} = \frac{A_1V_1}{A_2V_2} = \frac{B_1V_1}{B_2V_2} = \ldots = k$$

Tomando-se, por exemplo, duas diagonais das bases, temos $\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = k$. Em particular, podemos escrever também $\frac{h_1}{h_2} = k$.

Duas pirâmides semelhantes apresentam:

a) os ângulos poliédricos correspondentes, congruentes;
b) as faces correspondentes, semelhantes;
c) as arestas correspondentes, proporcionais.

Temos ainda as seguintes afirmações:

> 1.ª) As **áreas** de superfícies correspondentes estão entre si na razão k^2.
> 2.ª) Os **volumes** dos dois sólidos, ou de partes correspondentes, estão entre si na razão k^3.

A 1.ª afirmação já tinha sido referida no item 11.4. Considerando-se as áreas das bases, as áreas laterais, as áreas totais, as áreas de faces laterais, etc., de cada pirâmide, podemos escrever

$$\frac{S_{b_1}}{S_{b_2}} = \frac{S_{\ell_1}}{S_{\ell_2}} = \frac{S_{t_1}}{S_{t_2}} = \frac{S_{V_1A_1B_1}}{S_{V_2A_2B_2}} = \ldots = k^2$$

Para os **volumes** das duas pirâmides temos

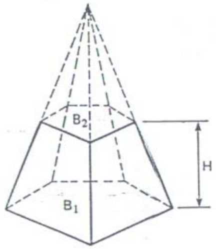
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}S_{b_1} \cdot h_1}{\frac{1}{3}S_{b_2} \cdot h_2} = \frac{S_{b_1}}{S_{b_2}} \cdot \frac{h_1}{h_2} = k^2 \cdot k = k^3$$

confirmando a 2.ª afirmação

14.10 — VOLUME DO TRONCO DE PIRÂMIDE

Para calcular o volume do tronco de pirâmide, basta subtrair do volume da pirâmide 1, o volume da pirâmide 2:

$$V_T = V_1 - V_2$$



Para maior comodidade de notação, indiquemos as áreas das bases do tronco por B_1 e B_2.

Como $V_1 = k^3V_2$, vem

$$V_T = k^3V_2 - V_2 = V_2(k^3 - 1) = V_2(k-1)(k^2+k+1)$$

Mas $V_2(k-1) = \frac{1}{3}B_2h_2\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) = \frac{1}{3}B_2(h_1 - h_2) = \frac{1}{3}B_2H$ e como

$$k^2 = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{e} \quad k = \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}}$$

podemos escrever

$$V_T = \frac{1}{3}B_2H \cdot \left[\frac{B_1}{B_2} + \frac{\sqrt{B_1}}{\sqrt{B_2}} + 1\right]$$

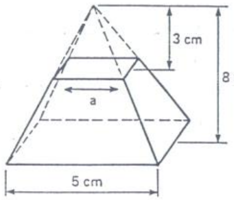
donde resulta, finalmente,

$$\boxed{V_T = \frac{H}{3}\left[B_1 + \sqrt{B_1B_2} + B_2\right]}$$

Exercício Resolvido

14.8) Uma pirâmide regular de base quadrada tem aresta da base igual a 5 cm e altura 8 cm. Seciona-se essa pirâmide com um plano paralelo à base, situado à distância de 3 cm do vértice. Determine o volume do tronco de pirâmide assim obtido.

Solução



O volume da pirâmide dada é

$$V_1 = \frac{1}{3} S_b h =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 8 = \frac{200}{3} \text{ cm}^2$$

A pirâmide menor, de altura 3 cm e aresta da base igual a **a**, tem volume

$$V_2 = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} a^2 \cdot 3 = a^2$$

Determinemos **a**, lembrando que as duas pirâmides são *semelhantes*, isto é, a razão entre as arestas das bases é igual à razão entre as alturas:

$$\frac{a}{5} = \frac{3}{8}$$

donde

$$a = \frac{15}{8} \text{ cm}$$

Assim,

$$V_2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64} \text{ cm}^3$$

O volume do tronco é dado por

$$V_T = V_1 - V_2 = \frac{200}{3} - \frac{225}{64} = \frac{12\,125}{192} \cong 63{,}2 \text{ cm}^3$$

Outro modo

A base maior do tronco tem área $B_1 = 25 \text{ cm}^2$. A base menor tem área B_2 tal que

$$\frac{B_2}{B_1} = k^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2$$

donde

$$B_2 = 25 \cdot \frac{9}{64} = \frac{225}{64} \text{ cm}^2$$

A altura do tronco é H = 5 cm.

Podemos, então, aplicar a *fórmula* deduzida acima.

$$V_T = \frac{H}{3}\left[B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2\right] =$$

$$= \frac{5}{3}\left[25 + \sqrt{25 \cdot \frac{225}{64}} + \frac{225}{64}\right] =$$

$$= \frac{5}{3}\left[25 + \frac{75}{8} + \frac{225}{64}\right] = \frac{12\,125}{192} \cong 63{,}2 \text{ cm}^3$$

Exercícios Propostos

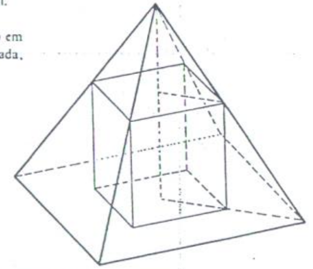
14.9) Dê a soma de todos os ângulos das faces de uma pirâmide:

a) triangular;
b) quadrangular;
c) pentagonal;
d) cuja base é um polígono de **n** lados.

14.10) Quantos lados tem a base de uma pirâmide na qual a soma de todos os ângulos das faces é igual a 3 600°?

14.11) Prove que o plano que contém a altura de uma pirâmide e a altura de uma face lateral é perpendicular ao plano desta face lateral.

14.12) Determine a aresta x do cubo inscrito em uma pirâmide regular de base quadrada, com aresta da base **a** e altura **h**.



14.13) Em uma pirâmide regular de altura **h**, a aresta da base é **a**. Calcule a aresta lateral e a altura da face lateral (correspondente ao lado da base), sendo a pirâmide:

a) triangular;
b) quadrangular.

14.14) Em uma pirâmide regular, a aresta da base é **a** e a aresta lateral é **b**. Calcule a altura da pirâmide, sendo ela:

a) triangular;
b) quadrangular;
c) hexagonal.

14.15) A base de uma pirâmide é um triângulo isósceles cuja base mede 30 cm e cujo ângulo do vértice é 120°. A altura da pirâmide mede 10 cm e passa pelo centro da circunferência circunscrita à base. Determine a medida da aresta lateral da pirâmide.

14.16) Cada aresta lateral de uma pirâmide mede 52 cm. A base da pirâmide é um triângulo com lados $12\sqrt{10}$ cm, 24 cm e $12\sqrt{10}$ cm. Calcule a altura da pirâmide.

14.17) A altura de um prisma triangular regular é igual a 6 cm e a aresta da base é 3 cm. O centro da base superior e os vértices da base inferior servem como vértices de uma pirâmide. Seja x o ângulo da aresta lateral da pirâmide com o plano da base. Calcule $\text{tg}\, x$.

14.18) A base de uma pirâmide é um paralelogramo cujos lados medem 3 cm e 7 cm. A altura da pirâmide é 4 cm e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é a interseção das diagonais da base. Calcule as diagonais da base, sabendo que a maior aresta lateral mede 6 cm.

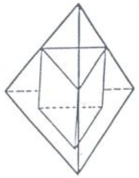
14.19) Em uma pirâmide quadrangular, todas as arestas são congruentes duas a duas. Seja x o ângulo do vértice da seção diagonal da pirâmide. Calcule x.

14.20) Determine quantas diagonais tem um tronco de pirâmide:

a) quadrangular; b) pentagonal; c) cuja base tem n lados.

14.21) Em uma pirâmide triangular regular, a aresta da base mede 6 cm e a aresta lateral oposta dista 5 cm dela. Determine a medida da aresta lateral.

14.22) Em um tetraedro regular de aresta a é inscrito um prisma triangular regular, cujas arestas são todas iguais, de modo que os vértices de uma de suas bases estejam sobre as arestas laterais do tetraedro, enquanto que a outra base está contida na base do tetraedro. Determine a aresta do prisma.

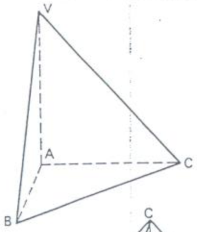


14.23) Seja x a medida do diedro determinado por uma aresta de um tetraedro regular. Calcule $\cos x$.

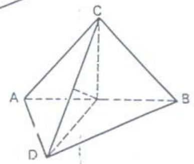
14.24) Seja x a medida do ângulo que uma aresta de um tetraedro regular forma com uma face que não a contém. Calcule $\cos x$.

14.25) Uma pirâmide triangular tem vértice V e a sua aresta lateral $\overleftrightarrow{BV}$ é perpendicular ao plano da base ABC. Sendo AV = 10 cm, CV = 20 cm e $B\hat{A}V = 30°$, calcule $\text{sen}\, x$, onde $x = B\hat{C}V$.

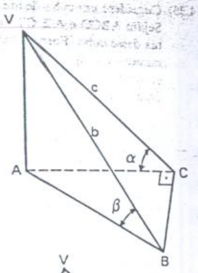
14.26) Uma pirâmide VABC, de base triangular, tem sua aresta lateral $\overleftrightarrow{VA}$ perpendicular ao plano da base. Os ângulos das faces medem $B\hat{V}A = 30°$, $A\hat{V}C = 45°$ e $B\hat{V}C = 60°$. Calcule o cosseno do ângulo $B\hat{A}C$.



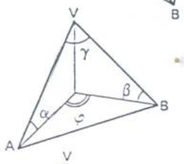
14.27) Uma pirâmide tem como base um triângulo retângulo isósceles ABD, de hipotenusa, AB = a. A face lateral CAB é também um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa $\overleftrightarrow{AB}$, cujo plano é perpendicular ao plano da base. Calcule a distância entre as arestas opostas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$.



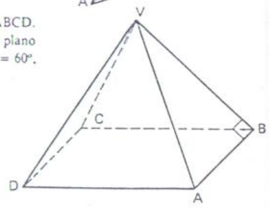
14.28) Uma pirâmide tem como base o $\triangle$ ABC, retângulo em C, e a aresta lateral $\overleftrightarrow{AV}$ é perpendicular ao plano da base. Sendo VB = b, VC = c e $A\hat{C}V = x$, calcule $\text{sen}\, \beta$, onde $\beta = A\hat{B}V$.



14.29) Uma pirâmide tem como base um triângulo ABC e sua aresta lateral $\overleftrightarrow{CV}$ é perpendicular ao plano da base. Sendo $C\hat{A}V = x$, $C\hat{B}V = \beta$ e $A\hat{V}B = \gamma$, determine $\cos \varphi$, onde $\varphi = A\hat{C}B$.



14.30) Uma pirâmide tem como base um retângulo ABCD. O plano da face lateral VBC é perpendicular ao plano da base. Sendo $A\hat{V}B = C\hat{V}D = 30°$ e $A\hat{V}D = 60°$, calcule $\text{sen}\, x$, onde $x = C\hat{V}B$.



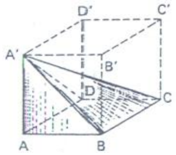
14.31) A base de uma pirâmide é o triângulo eqüilátero ABC. A face lateral VABC é também um triângulo eqüilátero, sendo $VC = \frac{1}{3} AB$. Dado AB = a, calcule a distância entre as arestas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$.

14.32) Qual deve ser a aresta de um tetraedro regular cuja área total é $36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$?

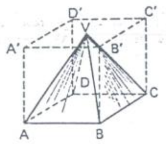
14.33) Seja A a área da base de um tetraedro regular. Calcule a altura desse tetraedro, em função de A.

14.34) Numa pirâmide hexagonal regular, a área lateral é $72\ \text{cm}^2$ e a aresta lateral mede 5 cm. Calcule a aresta da base.

14.35) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm. Sejam ABCD e A'B'C'D' duas faces opostas desse cubo. Podemos obter uma pirâmide tomando o quadrado ABCD como base e o ponto A' como vértice. Qual é a área lateral dessa pirâmide?



14.36) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm. Sejam ABCD e A'B'C'D' duas faces opostas desse cubo. Forma-se uma pirâmide tomando-se o quadrado ABCD como base e, como vértice, o centro V da face A'B'C'D'. Qual é a área lateral dessa pirâmide?



14.37) Uma pirâmide de 10 cm de altura tem por base um quadrado de lado 15 cm. Qual é a área da seção transversal dessa pirâmide, situada à distância de 6 cm do vértice?

14.38) A base de uma pirâmide é um triângulo ABC com lados AB = AC = 15 cm e BC = 16 cm. A aresta $\overleftrightarrow{VA}$ da pirâmide mede 8 cm e é perpendicular ao plano da base. Determine as medidas das arestas $\overleftrightarrow{VB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$ e a área da face VBC.

14.39) A base de uma pirâmide é um retângulo ABCD, com lados de 9 cm e 12 cm. A aresta lateral $\overline{VB}$ é perpendicular ao plano da base e mede 12 cm. Determine as áreas das seções diagonais da pirâmide.

14.40) Dadas a aresta da base 3 e a altura 4 de uma pirâmide regular, determine a área lateral, sendo a pirâmide:
a) triangular; b) quadrangular; c) hexagonal.

14.41) Determine a área lateral de uma pirâmide regular a) triangular, b) quadrangular, c) hexagonal, cuja aresta da base mede **a**, sabendo que cada face lateral forma 60° com o plano da base.

14.42) A área lateral de uma pirâmide regular é 12 cm² e a aresta da base mede 2 cm. Calcule a aresta lateral e a altura, se a pirâmide é:
a) triangular; b) quadrangular; c) hexagonal.

14.43) Calcule a altura de uma pirâmide regular a) triangular, b) quadrangular, c) hexagonal, de aresta da base **a**, sabendo que a área lateral é o dobro da área da base.

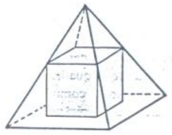
14.44) A área da seção diagonal de uma pirâmide quadrangular regular é igual à área da base, cuja aresta é **a**. Calcule a área lateral da pirâmide.

14.45) A altura de uma pirâmide hexagonal regular é igual a 8 cm e a aresta da base mede $4\sqrt{3}$ cm. Determine a área total da pirâmide.

14.46) Determine a área lateral de uma pirâmide hexagonal regular cuja aresta lateral mede 17 cm, sabendo que o diâmetro da circunferência inscrita na base é igual a $16\sqrt{3}$ cm.

14.47) Em uma pirâmide triangular regular com aresta da base igual a 24 cm, cada face lateral é perpendicular à aresta lateral não contida nela. Calcule a área lateral desta pirâmide.

14.48) Um cubo é inscrito em uma pirâmide quadrangular regular, como mostra a figura. A altura da pirâmide é igual ao dobro da aresta do cubo. Sendo **a** a aresta do cubo, calcule a área lateral da pirâmide.



14.49) As faces laterais de uma pirâmide triangular apresentam no vértice da pirâmide ângulos de 60°, 60° e 90°. Cada aresta lateral mede **a**. Determine a área total da pirâmide.

14.50) A aresta da base de uma pirâmide é **a**. Uma das arestas laterais é perpendicular ao plano da base e mede **a**. Calcule a área lateral da pirâmide, se sua base é:
a) um triângulo eqüilátero;
b) um quadrado,
c) um hexágono regular.

14.51) A base de uma pirâmide é um retângulo de área igual a 100 cm². Duas faces laterais são perpendiculares ao plano da base e duas outras formam com ele 30° e 60°. Calcule a área total da pirâmide.

14.52) A base de uma pirâmide é um retângulo cuja diagonal mede **m**. O ângulo entre as diagonais é de 60° e as arestas laterais formam também 60° com o plano da base. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

14.53) É dado um cubo de aresta **a**. Forma-se um quadrado com vértices nos pontos médios das arestas de uma face. Calcule a área total da pirâmide que tem como base esse quadrado e como vértice o centro da face oposta do cubo.

14.54) Com base em um mesmo triângulo eqüilátero de lado **a** constroem-se uma pirâmide e um prisma regulares, de mesmas altura e área lateral. Calcule a altura.

14.55) Os lados correspondentes das bases de um tronco de pirâmide são proporcionais a 3 e 7. Um ponto de uma aresta lateral divide-a na razão 2 : 1 (o maior segmento ficando do lado da menor base). Por esse ponto conduz-se um plano paralelo às bases. Em que razão fica dividida a área lateral do tronco?

14.56) Em uma pirâmide triangular regular, a aresta da base e a altura são iguais a **a**. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

14.57) Calcule a altura de uma pirâmide quadrangular regular de aresta da base 6 cm, sabendo que a sua área lateral é $\frac{5}{8}$ da área lateral de um prisma reto de base e altura iguais às da pirâmide.

14.58) É dada a altura **h** de uma pirâmide hexagonal regular. Determine a aresta da base, sabendo que a área lateral é $\frac{16}{3}$ da área de um triângulo eqüilátero de lado igual à altura dada.

14.59) Em uma pirâmide quadrangular regular, de aresta da base **a**, a área lateral é igual a $3a^2$. Calcule a altura da pirâmide.

14.60) Uma pirâmide regular triangular de altura **h** tem como faces laterais triângulos retângulos. Calcule a área lateral da pirâmide.

14.61) De uma pirâmide de altura igual a 12 m obtém-se um tronco de altura igual a 9 m. Qual é a razão entre as áreas da base menor e da base maior desse tronco?

14.62) Uma pirâmide de base quadrada tem altura de 25 cm. Calcule a aresta da base, sabendo que a seção transversal feita a 15 cm do vértice tem área de 36 cm².

14.63) Os lados das bases de um tronco de pirâmide medem 16 cm e 12 cm. Pelo ponto médio da altura, conduz-se um plano paralelo às bases. Em que razão fica dividida a área lateral do tronco?

14.64) Uma pirâmide tem altura **h** e área de base B. A que distância do vértice deve ser conduzido um plano paralelo à base, para que a área da seção seja **b**?

14.65) A que distância do vértice deve ser conduzido um plano paralelo à base de uma pirâmide, para se obter dois sólidos de mesma área lateral?

14.66) Dá-se a altura 9 cm de uma pirâmide regular de base quadrada e constrói-se sobre a base um cubo, de modo que a face do cubo, oposta à base, corte a pirâmide segundo um quadrado de lado $\frac{5}{4}$ cm. Calcule o lado da base da pirâmide.

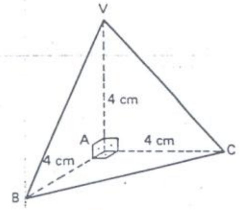
14.67) Dois planos paralelos à base de uma pirâmide dividem a superfície lateral em três partes cujas áreas são proporcionais a 3, 4 e 5 (contadas a partir do vértice). Em que proporção fica a altura dividida por esses planos?

14.68) Considere uma pirâmide regular de altura 8 cm cuja base é um quadrado de 5 cm de lado. Calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

14.69) Uma pirâmide de altura igual a 4 cm tem como base um triângulo retângulo isósceles de cateto igual a 4 cm, como indica a figura. A aresta $\overline{VA}$ é perpendicular ao plano da base. Calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).



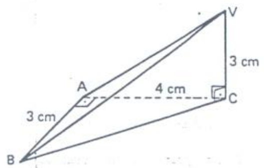
14.70) Determine o volume de um tetraedro regular de altura igual a 10 cm.

14.71) Considere uma pirâmide regular de altura 8 cm, cuja base é um triângulo eqüilátero de 4 cm de lado. Calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).

14.72) Uma pirâmide de altura igual a 3 cm tem como base um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm, como indica a figura. A aresta $\overline{VC}$ é perpendicular ao plano da base. Calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V).



14.73) Determine o volume de um tetraedro regular cuja base tem área igual a $12\sqrt{3}$ cm².

14.74) Numa pirâmide hexagonal regular, a altura é igual ao triplo da aresta da base. Determine a aresta da base, sabendo que o volume dessa pirâmide é igual a $12\sqrt{3}$ cm³.

14.75) Qual é o volume de um tetraedro regular cuja área total é $25\sqrt{3}$ cm²?

14.76) Numa pirâmide hexagonal regular, a aresta da base mede $\sqrt{3}$ cm. Qual deve ser a altura dessa pirâmide para que a aresta da base, a altura e o volume formem, nessa ordem, uma PG?

14.77) Calcule o volume de uma pirâmide regular triangular na qual a aresta da base mede **a** e a altura é igual a 2**a**. (Note que não é um tetraedro regular!)

14.78) A área total de um tetraedro regular é S. Calcule, em função de S:

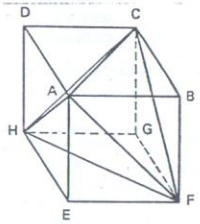
a) a altura do tetraedro (h);
b) o volume (V).

14.79) Considere um prisma regular e uma pirâmide regular, ambos de mesma altura. O prisma tem como base um triângulo eqüilátero de lado **a** e a pirâmide tem como base um quadrado de lado **a**. Qual é a razão entre os volumes do prisma e da pirâmide?

14.80) Numa pirâmide regular de base quadrada, a aresta da base mede $\sqrt{2}$ cm. Qual deve ser a altura dessa pirâmide para que a aresta da base, a altura e o volume formem, nessa ordem, uma PG?

14.81) Prove que, num tetraedro regular, sendo P um ponto de seu interior, então a soma das distâncias de P às quatro faces é igual à altura do tetraedro.

14.82) As diagonais das faces de um cubo de aresta **a** (mostrado na figura) são as arestas de um tetraedro regular ACFH. Determine o volume do tetraedro.



14.83) Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, de aresta da base **a** e aresta lateral **2a**.

14.84) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, de aresta da base **a** e aresta lateral **2a**.

14.85) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, de aresta da base **a** e aresta lateral **2a**.

14.86) Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, de altura **h** e aresta lateral **2h**.

14.87) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, de altura **h** e aresta lateral **2h**.

14.88) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, de altura **h** e aresta lateral **2h**.

14.89) Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, cuja face lateral é um triângulo isósceles de base **a** e altura 2**a**.

14.90) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, cuja face lateral é um triângulo isósceles de base **a** e altura **2a**.

14.91) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular, cuja face lateral é um triângulo isósceles de base **a** e altura **2a**.

14.92) Em uma pirâmide triangular regular, de aresta da base **a**, a face lateral forma 30° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.93) Em uma pirâmide quadrangular regular, de aresta da base **a**, a face lateral forma 45° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.94) Em uma pirâmide hexagonal regular, de aresta da base **a**, a face lateral forma 60° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.95) Em uma pirâmide triangular regular, de aresta da base **a**, a aresta lateral forma 30° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.96) Em uma pirâmide quadrangular regular, de aresta da base **a**, a aresta lateral forma 60° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.97) Em uma pirâmide hexagonal regular, de aresta da base **a**, a aresta lateral forma 45° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.98) A aresta da base de uma pirâmide triangular regular mede 2 cm e a reta perpendicular conduzida de um vértice da base à face oposta encontra o apótema da pirâmide no seu ponto médio. Calcule o volume da pirâmide.

14.99) O centro da base superior de um prisma triangular regular e os pontos médios das arestas da base inferior são os vértices de uma pirâmide. Calcule a razão entre os volumes do prisma e da pirâmide.

14.100) Mesmo problema anterior, no caso de um prisma quadrangular regular.

14.101) Mesmo problema anterior, no caso de um prisma hexagonal regular.

14.102) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que a seção diagonal é um triângulo eqüilátero de lado **a**.

14.103) Calcule o volume de uma pirâmide quadrangular regular, sabendo que a face lateral é um triângulo eqüilátero de lado **a**.

14.104) Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular, sabendo que o plano determinado pela altura e uma aresta lateral define uma seção que é um triângulo isósceles a) cuja base é o apótema da pirâmide; b) cuja base é a aresta lateral. A aresta da base é **a**.

14.105) É dada uma pirâmide quadrangular regular. A área da seção que contém uma diagonal da base, e é perpendicular à aresta lateral, é igual a S. O plano da seção é inclinado de 60° sobre o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.106) A face lateral de uma pirâmide hexagonal regular forma 60° com o plano da base e tem área de $\sqrt{3}\,cm^2$. Calcule o volume da pirâmide.

14.107) Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular na qual a seção que contém a menor diagonal da base e o vértice da pirâmide forma 60° com o plano da base e tem área igual a $2\sqrt{3}\,cm^2$.

14.108) O volume de uma pirâmide hexagonal regular é igual a $45\sqrt{3}\,cm^3$ e a área da seção que contém a diagonal maior da base e o vértice da pirâmide é $15\,cm^2$. Calcule a medida da aresta lateral da pirâmide.

14.109) A aresta da base de uma pirâmide triangular regular é **a** e a distância de um vértice da base à face oposta é $\frac{a}{2}$. Calcule o volume da pirâmide.

14.110) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo do qual um dos catetos é **a** e o ângulo adjacente mede 30°. Calcule o volume da pirâmide, sabendo que as arestas laterais formam 60° com a base.

14.111) A base de uma pirâmide é um triângulo isósceles de base igual a 12 cm e altura 18 cm. Cada aresta lateral mede 26 cm. Determine o volume da pirâmide.

14.112) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo de catetos 24 cm e 32 cm. Cada aresta lateral forma 60° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

14.113) Uma pirâmide triangular tem duas faces perpendiculares entre si, cada uma delas sendo um triângulo eqüilátero de lado igual a 12 cm. Calcule o volume da pirâmide.

14.114) A base de uma pirâmide é um retângulo de área igual a $1\,m^2$. Duas faces laterais são perpendiculares ao plano da base e as duas outras formam 30° e 60° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

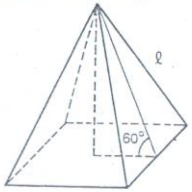
14.115) A base de uma pirâmide é um retângulo. A face lateral que contém o maior lado da base é perpendicular à base, tem a forma de um triângulo eqüilátero e forma 60° com a face lateral que contém o lado oposto da base. Calcule o volume da pirâmide, sabendo que a área desta outra face lateral é $\sqrt{3}\,cm^2$.

14.116) Um tetraedro tem como base um triângulo retângulo isósceles de cateto **a** e as suas arestas laterais são todas iguais a **a**. Calcule o volume do tetraedro.

14.117) Sobre uma mesma base de área $100\,cm^2$, constroem-se um prisma reto e uma pirâmide, de modo que o volume do prisma é o dobro do da pirâmide. Calcule a área da seção que a base superior do prisma determina na pirâmide.

14.118) Dê a razão entre o volume de um cubo e o volume de um tetraedro regular cuja aresta é a diagonal de uma face do cubo.

14.119) Ache o volume de uma pirâmide quadrangular regular, de aresta lateral ℓ, sabendo que as faces laterais formam ângulo de 60° com o plano da base.



14.120) Uma pirâmide triangular regular tem aresta lateral ℓ e as faces laterais formam ângulo de 45° com o plano da base. Calcule a área lateral e o volume da pirâmide.

14.121) Qual é o volume de um octaedro regular cuja aresta mede 15 cm?

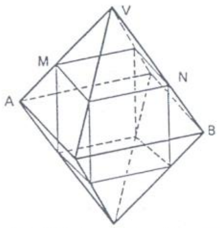
14.122) Qual deve ser a aresta de um octaedro regular para que o seu volume seja $8\sqrt{2}\ cm^3$?

14.123) Os pontos médios das arestas de um tetraedro regular são vértices de um octaedro regular. Determine a razão entre o volume do octaedro e do tetraedro.

14.124) Os centros das faces de um cubo são vértices de um octaedro regular. Determine a aresta **b** do octaedro, sendo **a** a aresta do cubo.

14.125) Os baricentros das faces de um octaedro regular são os vértices de um cubo. Determine a aresta **b** do cubo, sendo **a** a aresta do octaedro.

14.126) Um cubo está inscrito em um octaedro regular, de modo que seus vértices estejam nas arestas do octaedro, como a ilustração mostra. A aresta do octaedro é **a**. Determine a aresta do cubo. (Note que $\triangle ABV \sim \triangle MNV$.)



14.127) Determine a área da superfície de um octaedro regular de aresta **a**.

14.128) A aresta de um octaedro regular é igual a 1 m. Determine a distância entre dois vértices opostos.

14.129) Seja α a medida do diedro determinado por uma aresta de um octaedro regular. Calcule cos α.

14.130) Uma pirâmide tem altura de 15 cm e a sua base tem área de 18 cm². Uma seção transversal separa essa pirâmide em dois sólidos de mesmo volume. Qual é a área dessa seção transversal?

14.131) Numa pirâmide de 3 m de altura, toma-se uma seção transversal a 1 m do vértice, separando-se, desta forma, a pirâmide em dois sólidos. Qual é a razão entre os volumes desses dois sólidos?

14.132) Com duas seções transversais, separa-se uma pirâmide em três sólidos de igual altura, dos quais um é também uma pirâmide e os outros dois são troncos. Qual é a razão entre os volumes desses troncos?

14.133) Planos paralelos à base de uma pirâmide dividem a sua altura em três partes iguais. Em que proporção o volume da pirâmide fica dividido por estes planos?

14.134) Planos paralelos à base dividem uma pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Em que proporção a altura da pirâmide fica dividida por estes planos?

14.135) A que distância do vértice de uma pirâmide deve ser conduzido um plano paralelo à base, para se obter duas partes de volumes iguais?

14.136) A que distância do vértice de uma pirâmide de altura **h** deve ser conduzido um plano paralelo à base, de modo a obter uma pirâmide cujo volume seja $\frac{1}{8}$ do volume do tronco?

14.137) Em um tronco de pirâmide triangular regular, as arestas das bases são 5 cm e 11 cm e a aresta lateral é 4 cm. Calcule a altura do tronco.

14.138) Em um tronco de pirâmide triangular regular, de altura igual a 15 cm, a face lateral é um trapézio de 17 cm de altura. A altura da base menor é 6 cm. Calcule os lados das bases e a aresta lateral do tronco.

14.139) Em um tronco de pirâmide triangular regular, a aresta lateral mede 12 cm e forma 60° com o plano da base maior. A aresta da base menor mede $3\sqrt{3}$ cm. Calcule a aresta da base maior e a altura do tronco.

14.140) Em um tronco de pirâmide triangular regular, as arestas das bases medem 18 cm e 12 cm e a face lateral forma 45° com o plano da base maior. Calcule a altura e a aresta lateral do tronco.

14.141) As bases de um tronco de pirâmide de 6 cm de altura são triângulos retângulos isósceles cujas hipotenusas medem 10 cm e 26 cm. O vértice da pirâmide correspondente tem suas projeções ortogonais, sobre os planos das bases, nos pontos médios das hipotenusas. Determine as arestas laterais do tronco.

14.142) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, a altura é igual à metade da aresta lateral e as arestas das bases são **a** e **b** ($a > b$). Calcule a altura do tronco.

14.143) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, as arestas das bases são **a** e **b** ($a > b$). A aresta lateral forma 60° com a aresta da base maior. Determine a altura da face lateral, a aresta lateral, o ângulo que a aresta lateral forma com o plano da base maior e a altura do tronco.

14.144) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, as diagonais são perpendiculares entre si. As arestas das bases medem 20 cm e 10 cm. Determine a altura e a aresta lateral do tronco, bem como a altura da face lateral.

14.145) As faces laterais de um tronco de pirâmide regular são trapézios de bases iguais a 10 cm e 6 cm e altura 15 cm. Calcule a área total do tronco, sabendo que a pirâmide é:

a) triangular; b) quadrada; c) hexagonal.

14.146) Em um tronco de pirâmide hexagonal regular, a altura é 13 cm e os lados das bases medem 18 cm e 12 cm. Calcule a área lateral do tronco.

14.147) Os lados das bases de um tronco de pirâmide regular são iguais a **a** e **3a**. Sua altura é **2a**. Calcule a área lateral do tronco, se a pirâmide é:

a) triangular; b) quadrangular; c) hexagonal.

14.148) Os lados das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular são proporcionais a 1 e 5. A altura do tronco é 21 cm e a área da seção diagonal é $630\sqrt{2}\ cm^2$. Calcule a área lateral do tronco.

14.149) Os lados das bases de um tronco de pirâmide triangular regular são 6 cm e 4 cm. As faces laterais formam 60° com o plano da base. Determine a área total do tronco.

14.150) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, as arestas das bases medem 18 cm e 12 cm. As arestas laterais formam 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

14.151) Em um tronco de pirâmide triangular regular, as arestas das bases medem 18 cm e 12 cm. As arestas laterais formam 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

14.152) As áreas da base maior, face lateral e base menor de um tronco de pirâmide quadrangular regular são proporcionais a 25, 16 e 9. Calcule a área total deste tronco, se a área da sua seção diagonal é $16\sqrt{30}$ cm².

14.153) A diagonal de um tronco de pirâmide quadrangular regular forma 60° com a diagonal da base maior. Estas diagonais medem 8 cm e 5 cm, respectivamente. Calcule a área lateral do tronco.

14.154) A aresta lateral de um tronco de pirâmide triangular regular mede 20 cm e forma 30° com o plano da base. A aresta da base menor mede 12 cm. Calcule a área lateral do tronco.

14.155) Em um tronco de pirâmide triangular regular, a área lateral é $12\sqrt{601}$ cm², a altura é 12 cm e a aresta lateral é 13 cm. Calcule as arestas das bases.

14.156) Em um tronco de pirâmide hexagonal regular, a altura e a aresta da base menor são iguais a 6 cm. A aresta lateral forma 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

14.157) Dentro de um tronco de pirâmide quadrangular regular, toma-se uma pirâmide cuja base é a base maior do tronco e cujo vértice é o centro da base menor. As arestas das bases medem a e 2a. As áreas laterais do tronco e da pirâmide são iguais. Determine a altura do tronco.

14.158) As bases de um tronco de pirâmide são triângulos retângulos isósceles, cujas hipotenusas medem $4\sqrt{2}$ cm e $6\sqrt{2}$ cm. A aresta lateral que liga os vértices dos ângulos retos das bases é perpendicular aos planos das bases e mede 4 cm. Calcule a área lateral do tronco.

14.159) As arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular são **a** e **b**. Determine a altura para que a área lateral do tronco seja igual à soma das áreas das bases.

14.160) Em um tronco de uma pirâmide quadrangular regular a altura é 2 cm, os lados das bases são 3 cm e 5 cm. Calcule a diagonal do tronco.

14.161) Determine as arestas das bases de um tronco de uma pirâmide quadrangular regular sabendo que a altura do tronco é 7 cm, sua aresta lateral é 9 cm e a diagonal é 11 cm.

14.162) Em um tronco de uma pirâmide quadrangular regular, a aresta da base maior é 9 cm e a aresta lateral é 8 cm. Calcule a altura do tronco, sabendo que a diagonal do tronco é perpendicular à aresta lateral.

14.163) Em um tronco de uma pirâmide triangular regular, os lados das bases são 2 cm e 6 cm. Calcule a altura do tronco, sabendo que a face lateral forma 60° com o plano da base maior.

14.164) A altura de um tronco de uma pirâmide quadrangular regular é 4 cm e a diagonal do tronco é 5 cm. Calcule a área da seção determinada por um plano que contém as diagonais das duas bases.

14.165) Em um tronco de uma pirâmide quadrangular regular, as áreas das bases são Q e q ($Q > q$) e as arestas laterais formam ângulos de 45° com o plano da base maior. Calcule a área da seção por um plano que contém as diagonais das bases.

14.166) O tronco de uma pirâmide triangular regular tem bases de lados 8 m e 5 m e altura 3 m. Um plano contém uma aresta da base maior e o vértice oposto da base menor. Calcule a área da seção.

14.167) Em um tronco de pirâmide, a razão entre arestas correspondentes das duas bases é $\frac{13}{17}$. A seção paralela que contém o ponto médio da altura do tronco (seção média) tem perímetro igual a 45 m. Calcule os perímetros das bases.

14.168) As áreas das bases de um tronco de pirâmide são 2 m² e 98 m². Calcule a área da seção paralela que passa pelo ponto médio da altura do tronco.

14.169) A altura de um tronco de pirâmide é igual a **h** e as áreas das bases são 16 e 81. A que distância da base maior deve ser tomada uma seção paralela às bases, de modo que sua área seja igual a 36?

14.170) Calcule a altura de um tronco de pirâmide de volume igual a 49 cm³ sabendo que as áreas das bases são 9 cm² e 25 cm².

14.171) Uma pirâmide de base quadrada tem 15 m de altura e aresta da base igual a 6 m. Cortando-se nessa pirâmide uma seção transversal situada a 5 m da base, obtém-se um tronco. Calcule:
a) as áreas das bases do tronco (S_1 e S_2);
b) o volume do tronco (V_T).

14.172) Calcule o volume de um tronco de pirâmide de 12 cm de altura sabendo que as áreas das bases são 5 cm² e 20 cm².

14.173) As faces laterais de um tronco de pirâmide regular são trapézios de altura 13 cm. As bases do tronco são quadrados de lados 4 cm e 14 cm. Calcule o volume desse tronco.

14.174) Um tronco de pirâmide hexagonal regular tem altura de 8 m e as arestas das duas bases medem 7 m e 5 m. Determine o volume desse tronco.

14.175) Determine o volume de um tronco de pirâmide triangular regular, no qual as arestas das bases medem 4 cm e 2 cm, e a altura é 5 cm.

14.176) Determine o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular, no qual as arestas das bases medem 4 cm e 2 cm e a altura é 5 cm.

14.177) Determine o volume de um tronco de pirâmide hexagonal regular, no qual as arestas das bases medem 4 cm e 2 cm e a altura é 5 cm.

14.178) As arestas das bases de um tronco de pirâmide triangular regular medem 12 cm e 8 cm e as faces laterais formam 60° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.179) As arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular medem 12 cm e 8 cm e as faces laterais formam 45° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.180) As arestas das bases de um tronco de pirâmide hexagonal regular medem 6 cm e 4 cm e as faces laterais formam 60° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.181) Os lados das bases de um tronco de pirâmide triangular regular são 8 cm e 4 cm e as arestas laterais formam 30° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.182) Os lados das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular são 8 cm e 4 cm e as arestas laterais formam 45° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.183) Os lados das bases de um tronco de pirâmide hexagonal regular são 8 cm e 4 cm e as arestas laterais formam 60° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

14.184) Os lados das bases de um tronco de pirâmide triangular regular são 6 m e 4 m e o ângulo agudo da face lateral é de 60°. Calcule o volume do tronco.

14.185) Mesmo problema anterior, no caso de um tronco de pirâmide quadrangular regular.

14.186) Mesmo problema anterior, no caso de um tronco de pirâmide hexagonal regular.

14.187) Calcule o volume de um tronco de pirâmide triangular regular de aresta lateral $\sqrt{48}$ cm e arestas das bases 10 cm e 4 cm.

14.188) Calcule o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular de arestas das bases 10 cm e 4 cm e aresta lateral $\sqrt{48}$ cm.

14.189) Calcule o volume de um tronco de pirâmide hexagonal regular de aresta lateral $\sqrt{48}$ cm e arestas das bases 10 cm e 4 cm.

14.190) As arestas das bases de um tronco de pirâmide triangular regular medem 9 cm e 3 cm. As faces laterais são trapézios cuja altura é igual à soma dos raios das circunferências inscritas nas bases. Calcule o volume do tronco.

14.191) Em um tronco de pirâmide triangular regular a aresta lateral é igual ao raio R da circunferência circunscrita à base maior e forma 60° com o plano da base. Determine o volume do tronco.

14.192) Em um tronco de pirâmide triangular regular as áreas das bases são iguais a $4\sqrt{3}$ cm² e $9\sqrt{3}$ cm² e a área da face lateral é $\dfrac{5\sqrt{30}}{3}$ cm². Calcule o volume do tronco.

14.193) As arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular são 24 cm e 12 cm e a face lateral é um trapézio de altura 10 cm. Calcule o volume do tronco.

14.194) Determine o volume de um tronco de pirâmide quadrangular regular sabendo que a diagonal mede 40 cm e é perpendicular à aresta lateral, que mede 30 cm.

14.195) Um tronco de pirâmide quadrangular regular tem volume 109 cm³, altura 3 cm e as suas diagonais das bases são proporcionais a 5 e 7. Calcule as medidas das arestas das bases.

14.196) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, a área da base menor é 16 cm² e a área da face lateral é 64 cm². Calcule o volume do tronco, se a face lateral forma 60° com o plano da base.

14.197) Em um tronco de pirâmide triangular regular, a altura é 6 m, os lados de uma base são 29 m, 52 m e 27 m e o perímetro da outra base é 72 m. Determine o volume do tronco.

14.198) Em um tronco de pirâmide de volume 152 m³ e altura 6 m, as áreas das bases são proporcionais a 9 e 4. Determine o volume da pirâmide não truncada.

14.199) Em um tronco de pirâmide as áreas das bases são 9 m² e 49 m² e a altura é 36 m. Calcule o volume da pirâmide não truncada.

14.200) Em um tronco de pirâmide de bases quadradas, a soma dos perímetros das bases é 32 cm, a soma das áreas das bases é 34 cm² e o volume é 245 cm³. Calcule as arestas das bases e a altura do tronco.

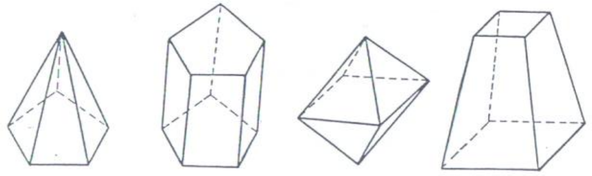
Capítulo

15

Poliedros convexos

15.1 — TIPOS DE POLIEDROS

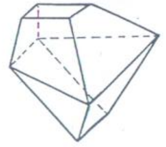
Pirâmides, prismas, octaedros regulares, troncos de pirâmides, são sólidos limitados por superfícies fechadas, formadas exclusivamente de polígonos convexos. Toda superfície fechada que consiste inteiramente de polígonos convexos é chamada *superfície poliédrica* e o sólido limitado por essa superfície chama-se *poliedro*. Os polígonos que formam a superfície poliédrica são as *faces* do poliedro. Para um *poliedro convexo* supõe-se que:



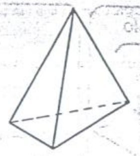
a) Não há duas faces num mesmo plano.
b) Cada lado de uma face está contido em duas, e somente duas faces.
c) O plano que contém cada face deixa todas as demais faces num mesmo semi-espaço.

Os *vértices* das faces são também os vértices do poliedro e os *lados* das faces são chamados *arestas* do poliedro. Note que cada vértice do poliedro corresponde a um *ângulo poliédrico*, no qual está contido todo o poliedro.

Um segmento com extremidades em dois vértices do poliedro e não contido em uma face é chamado *diagonal* do poliedro.



Os poliedros são classificados de acordo com o seu número de faces. O mínimo número de faces é quatro e o poliedro com quatro faces chama-se **tetraedro**. Outros nomes seguem na tabela abaixo.

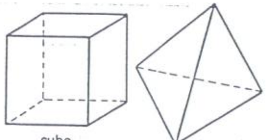


tetraedro

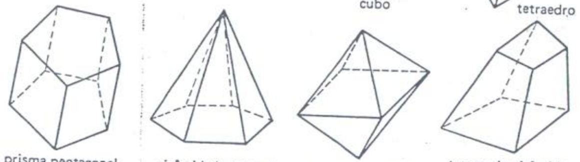
nome	número de faces
tetraedro	4
pentaedro	5
hexaedro	6
octaedro	8
decaedro	10
dodecaedro	12
icosaedro	20

15.2 — TEOREMA DE EULER

Consideremos os sólidos representados nas figuras. São todos eles exemplos de poliedros convexos.



cubo tetraedro



prisma pentagonal pirâmide hexagonal octaedro regular tronco de pirâmide quadrangular

Indiquemos por: V: o número de **vértices**
A: o número de **arestas**
F: o número de **faces**

de cada um desses poliedros e calculemos, para cada um, o valor da expressão

$$V - A + F$$

Os resultados estão resumidos na tabela abaixo.

poliedro convexo	V	A	F	V − A + F
cubo	8	12	6	2
tetraedro	4	6	4	2
prisma pentagonal	10	15	7	2
pirâmide hexagonal	7	12	7	2
octaedro regular	6	12	8	2
tronco	8	12	6	2

Como você pode notar, o valor da expressão V − A + F permanece o mesmo para todos os poliedros convexos do exemplo. Na verdade, encontraríamos o mesmo valor para qualquer outro poliedro convexo. A propriedade que estamos observando é conhecida como teorema de Euler.

Eis o seu enunciado geral:

Para todo **poliedro convexo** vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

Antes de dar a sua demonstração, examinemos um exemplo de aplicação.

Exercício Resolvido

15.1) Um poliedro convexo tem oito faces, sendo uma pentagonal, duas quadrangulares e cinco triangulares. Quantas arestas e quantos vértices tem esse poliedro?

Solução

Calculemos o número de arestas:

1 face pentagonal	−	5 arestas
2 faces quadrangulares	−	8 arestas
5 faces triangulares	−	15 arestas
		28 arestas

Sendo assim, o número de arestas do poliedro é A = 14 (pois como cada aresta é comum a duas faces, no cálculo acima, cada aresta havia sido contada duas vezes). Temos, então: F = 8 e A = 14 e como

$$V - A + F = 2$$

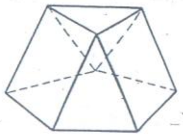
obtemos

$$V - 14 + 8 = 2$$

isto é,

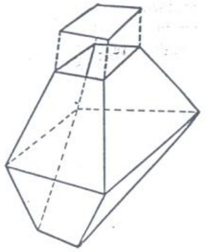
$$V = 8$$

A figura sugere *uma das formas possíveis* de um sólido com essas características.



15.3 — DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE EULER

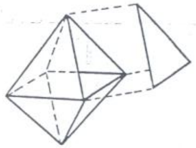
A superfície poliédrica S que limita um poliedro convexo tem V vértices, A arestas e F faces. Sendo $N = V - A + F$, provemos que $N = 2$. Ao longo da demonstração, vamos eliminar sucessivamente as faces, uma a uma, da superfície poliédrica.



Vamos, primeiramente, remover uma das faces. Na *superfície aberta* S_1 o número de arestas A_1 e o número de vértices V_1 não se alteram, enquanto que o número de faces decresce em uma unidade. Assim,

$$V_1 - A_1 + F_1 = N - 1$$

Uma aresta de uma superfície poliédrica é chamada *de fronteira* se está contida em uma única face. Um *vértice de fronteira* é aquele que pertence a uma única face. Uma face também se chama *face de fronteira* se contém uma aresta de fronteira. É claro que somente superfícies abertas têm elementos de fronteira. Uma face qualquer deve ter no mínimo uma aresta que *não seja de fronteira*, caso contrário a superfície estaria reduzida a um polígono plano.



Consideremos agora dois casos:

1.º) Todas as faces de S_1 são triângulos.
2.º) Ao menos uma das faces de S_1 tem mais que três lados.

Demonstração no 1.º caso

Uma face triangular pode ter **uma** ou **duas** arestas de fronteira e **no máximo um** vértice de fronteira. Assim, vamos remover de S_1 uma face de fronteira, obtendo uma nova superfície S_2. A face removida pode ter uma aresta de fronteira e nenhum vértice de fronteira. Neste caso,

$$V_2 - A_2 + F_2 = V_1 - (A_1 - 1) + (F_1 - 1) = V_1 - A_1 + F_1 = N - 1$$

Mas, se a face removida tem duas arestas de fronteira e um vértice de fronteira, então

$$V_2 - A_2 - F_2 = (V_1 - 1) - (A_1 - 2) + (F_1 - 1) = V_1 - A_1 + F_1 = N - 1$$

Assim, a remoção de uma face de fronteira não muda o valor da expressão $V_1 - A_1 - F_1$. Se continuarmos removendo faces de fronteira, uma por uma, chegaremos a uma só face triangular, para a qual

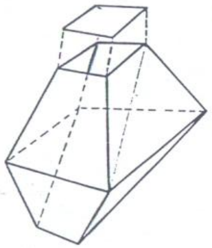
$$V - A + F = 1$$

Logo, $N - 1 = 1$, isto é, $N = 2$, como queríamos provar.

Demonstração no 2.º caso

Se uma face de S_1 tem mais que três lados, consideramos nessa face uma diagonal, que passa a ser considerada como se fosse *uma nova aresta*. Esta nova aresta divide a face em duas. Com tal recurso, o número de faces e o número de arestas aumentam em uma unidade cada, de modo que a expressão $V_1 - A_1 + F_1$ não se altera. Assim, dividindo cada face não triangular em faces triangulares, recaímos no 1.º caso, onde já foi provado que

$$V - A + F = 2$$



15.4 — SOMA DOS ÂNGULOS DAS FACES

Recordemos, inicialmente, a seguinte propriedade da Geometria Plana, já examinada no exercício 6.42:

> Em um polígono convexo de **n** lados, a soma das medidas dos ângulos internos é dada pela expressão
>
> $$S_n = (n - 2) \cdot 180°$$

Assim, por exemplo,

para o triângulo: $S_3 = (3 - 2) \cdot 180° = 180°$
para o quadrilátero: $S_4 = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$
para o pentágono: $S_5 = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$

e assim por diante.

Tomemos o sólido apresentado no exercício 15.1, o qual tem uma face pentagonal, duas quadrangulares e cinco triangulares. Podemos calcular a soma das medidas dos ângulos de todas as faces desse poliedro, escrevendo

$$S = S_5 + 2S_4 + 5S_3 = 540^\circ + 2 \cdot (360^\circ) + 5 \cdot (180^\circ) = 2\,160^\circ$$

Entretanto, esta soma pode também ser calculada mediante uma *fórmula geral*, que daremos a seguir.

> A soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo é dada pela expressão
>
> $$S = (V - 2) \cdot 360^\circ$$

Para o poliedro do exemplo acima, temos $V = 8$, donde

$$S = (8 - 2) \cdot 360^\circ = 2\,160^\circ$$

resultado que confirma a contagem direta feita anteriormente. Vejamos, agora, como se demonstra essa fórmula geral.

Demonstração

Se o poliedro tem F faces, podemos considerá-las numeradas 1, 2, 3, ..., F. Sejam $n_1, n_2, \ldots, n_F$ os números de lados de cada face. Se somarmos $n_1 + n_2 + \ldots + n_F$, como cada lado está contido em duas faces, esta soma resultará igual a 2A.

A soma das medidas dos ângulos da face **i** é igual a

$$S_i = (n_i - 2) \cdot 180^\circ$$

A soma das medidas de todos os ângulos de todas as faces é

$$\begin{aligned} S &= (n_1 - 2) \cdot 180^\circ + (n_2 - 2) \cdot 180^\circ + \ldots + (n_F - 2) \cdot 180^\circ = \\ &= (n_1 + n_2 + \ldots + n_F - 2F) \cdot 180^\circ = \\ &= (2A - 2F) \cdot 180^\circ = (A - F) \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

Mas, pelo teorema de Euler, temos $V - A + F = 2$, donde $A - F = V - 2$ e assim

$$\boxed{S = (V - 2) \cdot 360^\circ}$$

Exercício Resolvido

15.2) Qual é o polígono da base de uma pirâmide na qual a soma dos ângulos das faces é 12π radianos?

Solução

Sendo $S = 2\pi(V - 2) = 12\pi$ obtemos imediatamente $V = 8$. Ora, um destes vértices é o *vértice da pirâmide*; logo, os outros sete são os *vértices da base*. Isto mostra que o polígono da base é um heptágono.

Exercícios Propostos

15.3) Um poliedro convexo de oito faces tem cinco faces triangulares e três pentagonais. Calcule o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

15.4) Um poliedro convexo tem sete faces triangulares, três pentagonais e uma face hexagonal. Determine o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

15.5) Quantos vértices tem um poliedro convexo de doze faces pentagonais?

15.6) Em um poliedro convexo de 13 arestas, o número de vértices é igual ao dobro do número de faces. Quantas faces tem esse poliedro?

15.7) Um poliedro convexo tem nove faces quadrangulares e duas pentagonais. Calcule o número de arestas e o número de vértices desse poliedro.

15.8) Em um poliedro convexo de 30 arestas, a diferença entre o número de faces e o número de vértices é $F - V = 8$. Quantos vértices tem esse poliedro?

15.9) Qual é a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo que tem 11 faces e 18 arestas?

15.10) Qual é o polígono da base de uma pirâmide na qual a soma dos ângulos das faces é igual a 4π radianos?

15.11) Qual é o polígono da base de uma pirâmide na qual a soma dos ângulos das faces é igual a 8π radianos?

15.12) Qual é o polígono da base de um prisma no qual a soma dos ângulos das faces é igual a 20π radianos?

15.13) Calcule o número de faces de um poliedro convexo de 18 arestas sabendo que a soma dos ângulos das faces é 28π radianos.

15.14) A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 16π. Esse poliedro só tem faces triangulares e pentagonais. Sendo 20 o número de arestas, qual é o número de faces de cada tipo?

15.15) A soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 26π radianos. Esse poliedro só tem faces quadrangulares e hexagonais. Sendo 21 o número de arestas, qual é o número de faces de cada tipo?

15.16) Um poliedro convexo tem quatro faces triangulares e quatro quadrangulares. Calcule a soma das medidas dos ângulos das faces desse poliedro.

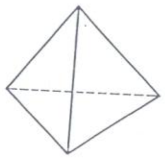
15.5 — POLIEDROS REGULARES

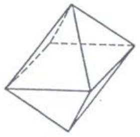
Poliedro regular é um poliedro cujas faces são todas polígonos regulares com mesmo número de lados e cujos ângulos poliédricos são congruentes.

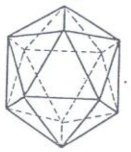
Cada vértice determina um ângulo poliédrico, constituído de *no mínimo três faces*. A soma das medidas dos ângulos das faces deste ângulo poliédrico é, como vimos no exercício 8.21, *menor do que* 360°.

Caso das faces triangulares

Se as faces do poliedro regular são **triângulos eqüiláteros**, então o mesmo vértice pode pertencer a *três triângulos* ($3 \cdot 60° < 360°$), ou a *quatro triângulos* ($4 \cdot 60° < 360°$), ou a *cinco triângulos* ($5 \cdot 60° < 360°$). Assim, só pode haver três tipos de poliedros regulares com faces triangulares. São eles:


tetraedro regular


octaedro regular


icosaedro regular

a) Tetraedro regular, formado por:

F = 4 faces triangulares
V = 4 vértices
A = 6 arestas

b) Octaedro regular, formado por:

F = 8 faces triangulares
V = 6 vértices
A = 12 arestas

c) Icosaedro regular, formado por:

F = 20 faces triangulares
V = 12 vértices
A = 30 arestas

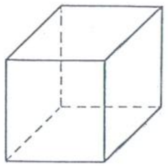
Caso das faces quadradas

Se as faces de um poliedro são **quadrados**, então o mesmo vértice pode pertencer a *três quadrados* ($3 \cdot 90° < 360°$), mas nunca a 4 ou mais ($4 \cdot 90° = 360°$).

Assim, só pode haver um tipo de poliedro regular com faces quadradas: o *cubo*, também chamado *hexaedro regular*.

Cubo ou Hexaedro regular

F = 6 faces quadradas
V = 8 vértices
A = 12 arestas

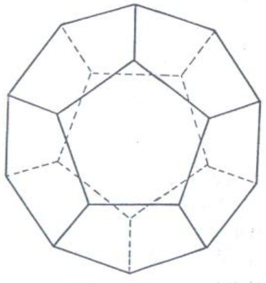

cubo ou hexaedro regular

Caso das faces pentagonais

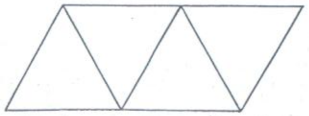
Se as faces de um poliedro são **pentágonos regulares**, então o mesmo vértice pode pertencer a *três pentágonos* ($3 \cdot 108° < 360°$), mas nunca a 4 ou mais ($4 \cdot 108° > 360°$). Assim, só pode haver um tipo de poliedro regular com faces pentagonais: o *dodecaedro regular*.

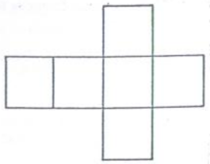
Dodecaedro regular

F = 12 faces pentagonais
V = 20 vértices
A = 30 arestas

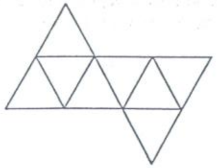

dodecaedro regular

A área total de cada poliedro regular é a soma das áreas de todos os polígonos regulares que constituem suas faces. Recortando as figuras seguintes, em cartolina, e dobrando-as ao longo das linhas, podemos construir os modelos dos poliedros regulares.

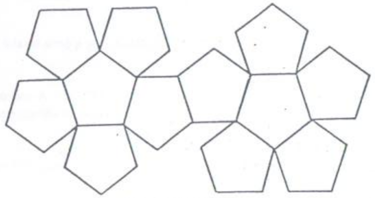

tetraedro regular



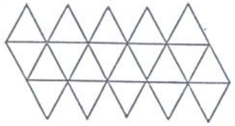
cubo ou hexaedro regular



octaedro regular



dodecaedro regular



icosaedro regular

Exercícios Propostos

15.17) Quantos vértices tem um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais?

15.18) Dois tetraedros regulares de arestas iguais são colocados juntos, de modo que as faces de contato coincidam. Quantos vértices, arestas e faces tem o poliedro assim obtido?

15.19) Prove que, num poliedro convexo que tem o número de vértices igual ao de faces, o número de arestas é par.

15.20) Existe poliedro convexo com número par de faces e número ímpar de vértices, sendo que cada face tem o número de lados par igual para todas as faces?

15.21) Um poliedro convexo tem **a** faces de **n** lados, **b** faces de **m** lados e **c** faces de **r** lados. Calcule o número de vértices.

15.22) Um poliedro convexo, cujas faces são quadriláteros e pentágonos, tem 15 arestas. A soma das medidas dos ângulos das faces é 2 880°. Quantas faces de cada tipo tem o poliedro?

15.23) A soma das medidas dos ângulos das faces de uma pirâmide é igual a $n \cdot 360°$. Dê o número de vértices da base da pirâmide.

15.24) A soma das medidas dos ângulos das faces de um tronco de pirâmide é igual a $n \cdot 360°$. Dê o número de arestas laterais do tronco.

15.25) Um poliedro convexo tem 16 faces. De um de seus vértices partem cinco arestas, de cinco outros vértices partem quatro arestas e de cada um dos vértices restantes partem três arestas. Calcule o número de arestas e de vértices desse poliedro.

15.26) Quantos vértices tem um poliedro convexo com três faces triangulares, cinco quadrangulares e sete pentagonais?

15.27) Calcule o número de faces de um poliedro convexo que tem cinco vértices, sabendo que de dois vértices partem cinco arestas e que partem quatro arestas de cada um dos demais.

15.28) Um poliedro convexo de 65 vértices tem **n** faces triangulares e **2n** faces pentagonais. Calcule o número de arestas.

15.29) A soma das medidas dos ângulos das faces de um poliedro convexo é 2 520°. Qual é o número de faces, se há 30 arestas?

15.30) Num poliedro convexo, cada face tem um número ímpar de lados. Diga se o número de faces é par ou ímpar.

15.31) Num poliedro convexo, o número de arestas que parte de cada vértice é ímpar. Diga se o número de vértices é par ou ímpar.

15.32) De um tetraedro regular, suprimem-se duas faces. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.33) De um octaedro regular, suprimem-se três faces com um vértice em comum. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.34) De um icosaedro regular, suprimem-se três faces com um vértice em comum. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.35) De um cubo, suprimem-se três faces com um vértice em comum. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.36) De um dodecaedro regular, suprimem-se três faces com um vértice em comum. Dê o número de arestas, vértices e faces da superfície aberta.

15.37) Em uma pirâmide regular de volume V, a aresta da base é **a** e a soma das medidas dos ângulos das faces é 1 080°. Determine a altura da pirâmide.

15.38) Em uma pirâmide regular de área lateral S, a aresta da base é **a** e a soma das medidas dos ângulos das faces é 1 440°. Determine o apótema da pirâmide.

15.39) Em um tronco de pirâmide regular de volume V, as arestas das bases são **a** e **2a** e a soma das medidas dos ângulos das faces é 2 160°. Determine a altura do tronco.

15.40) Mesmo problema anterior, sendo a soma das medidas dos ângulos das faces igual a 1 440°.

15.41) Calcule a área lateral de uma pirâmide regular cujas arestas têm todas medida **a**, sabendo que $V + A + F = 18$.

15.42) Um tronco de pirâmide regular tem as arestas das bases iguais a **a** e **2a** e as arestas laterais iguais a **a**. Calcule a área lateral do tronco, sabendo que $V + F = 26$.

15.43) Em uma pirâmide regular, a altura é igual à aresta da base. Determine tg α, onde α é o ângulo que a face lateral forma com o plano da base, sabendo que $2V + F = 2A$.

15.44) Com base em um mesmo polígono regular de lado **a**, constroem-se uma pirâmide e um prisma, ambos de altura igual a **a**. O número de faces da pirâmide somado ao número de faces do prisma resulta em 11. Calcule o volume da pirâmide.

15.45) São dados um prisma e uma pirâmide regulares, cujas bases são polígonos congruentes. O número total de arestas dos dois sólidos é igual ao dobro do número total de faces. Se ambos os sólidos têm aresta da base **2a** e altura **a**, calcule a razão entre a área lateral da pirâmide e a do prisma.

15.46) São dados dois poliedros regulares de mesmo número de arestas. O primeiro tem o número de arestas igual ao dobro do seu número de vértices. Calcule a razão entre os volumes desses dois sólidos, se as arestas de ambos têm medida **a**.

15.47) São dados dois poliedros regulares de aresta **a**. A soma das medidas dos ângulos das faces do primeiro é igual ao dobro da do segundo. Calcule a razão entre os volumes desses dois sólidos.

15.48) Uma pirâmide e um prisma regulares têm todas as arestas iguais a **a**. O total de vértices é 11 e o total de faces é 10. Calcule a razão entre as áreas laterais dos dois sólidos.

15.49) Duas pirâmides regulares têm aresta da base **a** e altura **h**. O total de vértices é 11 e o número de arestas da primeira é o dobro do da segunda. Calcule a razão entre os volumes das duas pirâmides.

15.50) Dois prismas regulares têm aresta da base **2a** e altura **a**. O número de vértices do primeiro é igual ao número de faces do segundo, enquanto que o número de arestas do segundo é o triplo do número de faces do primeiro. Determine a razão entre os volumes dos dois prismas.

15.51) Dê a área da superfície total de um poliedro regular, no qual a aresta mede 2 cm e a soma das medidas dos ângulos das faces é igual àquela correspondente a um prisma triangular.

15.52) Um prisma regular tem como base um polígono com número par de lados. Com um plano que contém uma aresta lateral e a maior diagonal da base, divide-se o prisma em dois outros, congruentes, cada um dos quais tem quatro vértices a menos que o prisma inicial. Quantas arestas tem o prisma inicial?

15.53) Em um prisma regular as arestas todas têm medida **a** e o número de arestas é igual ao número de diagonais do prisma. Calcule o seu volume.

15.54) Dois prismas são tais que o número de faces do primeiro é igual ao número de diagonais do segundo e o número de arestas do segundo é o dobro do número de vértices do primeiro. Quantas faces tem o segundo prisma?

15.55) Um prisma regular tem todas as arestas iguais a **a** e o número de arestas é igual ao número de diagonais de faces. Dê a área total desse prisma.

15.56) Um prisma tem o número de vértices igual ao número de diagonais. Quantas arestas tem esse prisma?

15.57) O número de diagonais de um prisma é igual a quatro vezes o seu número de faces. Quantos vértices tem o prisma?

15.58) O número de diagonais de um prisma é o dobro do seu número de arestas. Calcule a soma das medidas dos ângulos das faces desse prisma.

Exercícios Suplementares

V.1) Determine as medidas das três arestas de um paralelepípedo reto-retângulo, dada a sua soma 43a, a medida da diagonal 25a e a área de uma face $180a^2$.

V.2) Num prisma quadrangular regular, a soma das medidas das 12 arestas é 7a e a área total é $2a^2$. Determine as medidas das arestas e da diagonal.

V.3) Um paralelepípedo reto-retângulo tem diagonal de 13 cm e área total de 192 cm^2. A seção por um plano que contém duas arestas opostas tem área de 60 cm^2. Determine as dimensões do paralelepípedo.

V.4) Calcule a área total de um paralelepípedo reto-retângulo, sabendo que a sua diagonal mede 5 cm e que a soma das medidas de todas as suas 12 arestas é igual a 36 cm.

V.5) Calcule as três dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo, sabendo que estão em PA, que a diagonal mede $3\sqrt{2}$ cm e que a área total é 18 cm^2.

V.6) Calcule a distância entre um vértice de um cubo de aresta **a** e uma diagonal do cubo que não passa por esse vértice.

V.7) A base de um paralelepípedo oblíquo é um losango de lado 60 cm. O plano da seção diagonal que contém a maior diagonal do losango é perpendicular ao plano da base e a área desta seção é 7 200 cm^2. A aresta lateral mede 80 cm e forma 60° com o plano da base. Calcule a medida da diagonal menor da base.

V.8) As três dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo estão em PG. A área total é 28 cm^2 e a diagonal mede $\sqrt{21}$ cm. Calcule o volume.

V.9) Determine as três dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo sabendo que a soma de duas delas é 25 cm, o volume é 900 cm^3 e a área total é 600 cm^2.

V.10) Uma das dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo é 1 cm. Sendo 18 cm^3 o volume e 54 cm^2 a área total, calcule as duas outras dimensões.

V.11) Se a medida da aresta de um cubo é aumentada de k metros, o volume aumenta de $7k^3$ metros cúbicos. Qual é a medida da aresta desse cubo?

V.12) Um cubo ABCD $A_1B_1C_1D_1$ tem aresta de 8 cm. Um plano que passa pelos pontos médios das arestas $\overleftrightarrow{CC_1}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ determina no cubo uma seção. Calcule o perímetro dessa seção.

V.13) No exercício anterior, calcule a área da seção.

V.14) Em um prisma triangular regular, todas as arestas têm medida **a**. Calcule a área da seção obtida por um plano que contém uma aresta da base e o ponto médio da aresta lateral oposta.

V.15) Um prisma reto de altura 10 cm tem como base um triângulo de lados 4 cm, 13 cm e 15 cm. Calcule o volume do prisma.

V.16) No exercício anterior, calcule a área da seção obtida por um plano que contém uma aresta lateral e a menor altura da base.

V.17) No exercício anterior, calcule a área da seção obtida por um plano que contém a menor aresta da base e o vértice oposto da outra base.

V.18) No exercício anterior, calcule a área da seção obtida por um plano que contém a maior aresta da base e o ponto da aresta lateral oposta, situado à distância de 2,4 cm da base.

V.19) A base de um prisma reto é um triângulo retângulo de catetos 15 cm e 20 cm e a sua altura é 16 cm. Calcule a área da seção obtida por um plano que contém a hipotenusa da base e o vértice do ângulo reto da outra base.

V.20) Um prisma tem como base um triângulo retângulo isósceles de cateto 10 cm. Uma aresta lateral forma 45° com o plano da base e sua projeção sobre o plano da base é a bissetriz do ângulo reto. Calcule a área da seção obtida por um plano que contém essa aresta lateral e o ponto médio da hipotenusa da base.

V.21) No exercício anterior, calcule a distância do vértice do ângulo reto da base ao plano da face lateral oposta.

V.22) Um paralelepípedo tem como faces losangos de lado **a** e ângulo de 60°. Determine as áreas das seções diagonais.

V.23) Calcule o volume do paralelepípedo do exercício anterior.

V.24) A base de um prisma reto é um trapézio isósceles de bases 12 cm e 22 cm. Um plano que contém a base maior da base do prisma e a base menor da outra forma 60° com o plano dessa base e determina uma seção de área 408 cm². Calcule a área lateral do prisma.

V.25) A base de um paralelepípedo reto é um paralelogramo de lados 2 cm e 25 cm e ângulo de 60°. A diagonal maior do paralelogramo é congruente à diagonal menor do paralelepípedo. Calcule a área lateral do paralelepípedo.

V.26) A base de um prisma reto é um trapézio isósceles circunscrito a uma circunferência de raio 8 cm. O lado lateral do trapézio mede 20 cm. Calcule a altura do prisma, se a sua área lateral é 160 cm².

V.27) Os lados da base de um prisma triangular reto são proporcionais a 3, 25 e 26. A aresta lateral do prisma mede 10 cm e a área total é de 288 cm². Calcule a área lateral.

V.28) Em um prisma triangular obliquo, as distâncias entre as arestas laterais são 7 cm, 8 cm e 9 cm e a aresta lateral mede 10 cm. Calcule a área lateral desse prisma.

V.29) A base de um prisma oblíquo é um triângulo eqüilátero de lado **a**. Uma das arestas laterais mede **b** e forma 60° com as arestas da base adjacentes. Calcule a área lateral do prisma.

V.30) A base de um prisma é um triângulo eqüilátero de lado **a**. Um dos vértices da base superior tem projeção no centro da base inferior. A aresta lateral do prisma forma 60° com o plano da base. Calcule o volume do prisma.

V.31) A base de um paralelepípedo reto é um losango de lado **a**. A seção que contém duas arestas opostas das bases forma 45° com o plano da base e tem área S. Calcule o volume do paralelepípedo.

V.32) A diagonal da base de um paralelepípedo reto-retângulo mede **d**. Por esta diagonal conduz-se um plano que contém a extremidade de uma aresta lateral e forma 30° com o plano da base. A área da seção é S. Calcule o volume do paralelepípedo.

V.33) Um paralelepípedo oblíquo tem como base um retângulo de lados 7 cm e 24 cm. Uma das seções diagonais é um paralelogramo cujo plano é perpendicular ao plano da base e tem área igual a 250 cm². Calcule o volume do paralelepípedo.

V.34) Em um prisma triangular regular, conduz-se um plano que contém uma aresta da base e o vértice oposto da outra base, formando 45° com o plano da base. Sendo S a área da seção, calcule o volume do prisma.

V.35) A maior diagonal de um prisma regular hexagonal mede ℓ e forma 30° com o plano da face lateral do prisma. Calcule o volume do prisma.

V.36) A base de um prisma triangular regular é inscrita em uma circunferência de raio 4 cm. A altura do prisma é igual ao lado do hexágono regular circunscrito a essa mesma circunferência. Calcule o volume do prisma.

V.37) A base de um prisma é um triângulo eqüilátero de lado **a** e as faces laterais são losangos com ângulo de 60°. Calcule o volume do prisma.

V.38) Dê a expressão do volume de um prisma reto cuja base é um triângulo eqüilátero de lado **a** e cujas faces laterais são quadrados.

V.39) Dê a expressão do volume de uma pirâmide regular de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos eqüiláteros de lado **a**.

V.40) Numa pirâmide quadrangular regular, a altura é **h** e a área lateral excede de $\frac{3h^2}{2}$ a área da base. Calcule a aresta da base.

V.41) Calcule a aresta da base de uma pirâmide triangular regular, de altura **h**, sabendo que a área total é igual à área de um triângulo eqüilátero de lado $h\sqrt{2}$.

V.42) Uma pirâmide tem como base um retângulo e o pé da altura é o centro desse retângulo. Um dos lados da base mede **a**, a altura da pirâmide é $a\sqrt{2}$ e a área lateral é $a^2\sqrt{3}$. Calcule o outro lado da base.

V.43) Em uma pirâmide quadrangular regular cuja aresta da base é **a** e cuja altura é também **a**, inscreve-se um prisma regular de base quadrada, com uma base na base da pirâmide. Sendo $\frac{16a^2}{9}$ a área total do prisma, calcule o seu volume.

V.44) Uma pirâmide tem como base um triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm e as arestas laterais medem 8,1 cm. Calcule o volume da pirâmide.

V.45) Dê a razão entre o volume de um cubo e o volume de um tetraedro regular cuja aresta é a diagonal de uma face do cubo.

V.46) A diagonal da base de uma pirâmide quadrangular regular mede **a** e a aresta lateral também mede **a**. Calcule a área total da pirâmide.

V.47) No exercício anterior, calcule o volume da pirâmide.

V.48) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $BC = 4\sqrt{29}$ cm. A aresta lateral $\overline{VA}$ é perpendicular ao plano da base. Sendo $VB = 17$ cm e $VC = 25$ cm, calcule o volume da pirâmide.

V.49) A altura de uma pirâmide é dividida em três partes iguais por planos paralelos à base. Determine as áreas das seções, se a área da base é $900\ cm^2$.

V.50) Pelo ponto que divide a altura de uma pirâmide na razão 2 : 3 (contada do vértice à base) conduz-se um plano paralelo à base. A área da sèção é $10\ cm^2$ menor do que a área da base. Calcule a área da seção.

V.51) Em que razão fica dividida a altura de uma pirâmide, a partir do vértice, por uma seção paralela à base, se a área da seção é igual à metade da área da base?

V.52) Em que razão fica dividida a altura de uma pirâmide, a partir do vértice, por uma seção paralela à base, se a área da seção é igual a $\frac{m}{n}$ da área da base? $(m < n)$.

V.53) A área da base de uma pirâmide é igual a $224\ cm^2$ e a área de uma seção paralela à base é $14\ cm^2$. A distância da seção à base é 27 cm. Calcule a altura da pirâmide.

V.54) a) Tome um ponto qualquer no interior de um quadrado. Sejam **a**, **b**, **c** e **d** as distâncias desse ponto aos vértices. Calcule **d**, em função de **a**, **b** e **c**.
b) A base de uma pirâmide é um quadrado e o pé da altura é um ponto do interior desse quadrado. Sejam **x**, **y** e **z** as medidas de três arestas laterais. Calcule a medida da quarta aresta lateral.

V.55) O lado da base de uma pirâmide quadrangular regular mede 5 cm e as arestas laterais determinam diedros de 120°. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

V.56) Calcule a área total de uma pirâmide triangular regular de aresta da base **a**, sabendo que o diedro determinado pela aresta da base mede 60°.

V.57) A área da seção de uma pirâmide quadrangular regular, que contém a altura e o apótema da pirâmide, é igual a $9\ cm^2$. A face lateral forma 60° com o plano da base. Calcule a área lateral da pirâmide.

V.58) Em uma pirâmide quadrangular regular, as arestas laterais determinam diedros de 120°. Sendo S a área da seção que contém o vértice da pirâmide e uma diagonal da base, calcule a área lateral da pirâmide.

V.59) Calcule o volume de uma pirâmide triangular, cujas arestas laterais medem 10 cm, 15 cm e 9 cm e formam um triedro triretângulo.

V.60) A base de uma pirâmide é um triângulo de lados 12 cm, 20 cm e 28 cm. Cada aresta lateral forma 45° com o plano da base. Calcule o volume da pirâmide.

V.61) A base de uma pirâmide é um triângulo isósceles ABC cujo ângulo do vértice é $\hat{A} = 45°$. A aresta lateral $\overrightarrow{VA}$ é perpendicular e congruente a $\overleftrightarrow{AB}$ e a $\overleftrightarrow{AC}$. Sendo $VB = VC = \ell$, calcule o volume da pirâmide.

V.62) Pelo centro da base de uma pirâmide triangular regular, conduz-se uma seção paralela à face lateral. Calcule a razão entre os volumes das partes obtidas.

V.63) Um tronco de pirâmide tem áreas das bases B e $k \cdot B$ $(k > 1)$ e altura H. Calcule a altura da pirâmide não truncada.

V.64) Um tronco de pirâmide tem altura $\frac{13\sqrt{3}}{6}$ cm e as suas bases são quadrados cujos perímetros têm soma igual a $16\sqrt{3}$. Calcule as medidas das arestas das bases, sabendo que o volume do tronco é igual ao de um cubo com altura igual à do tronco.

V.65) Um tronco de pirâmide tem por base inferior um quadrado de 4 m de lado. O volume desse tronco é $40\ m^3$ e a sua altura é 5 m. Quanto mede o lado da base superior?

V.66) Em um tronco de pirâmide de altura **h** e áreas das bases B_1 e B_2, a seção paralela às bases, que divide a altura ao meio, tem área B. Mostre que o volume do tronco pode ser dado por

$$V = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B)$$

V.67) Em um tronco de pirâmide quadrangular regular, a área da base menor é $36\ cm^2$ e a área da face lateral é $14\ cm^2$. A face lateral forma 60° com o plano da base. Calcule a medida da aresta da base maior.

V.68) O lado da base menor de um tronco de pirâmide hexagonal regular mede 14 cm. A face lateral tem altura 8 cm e forma 30° com o plano da base. Calcule a medida do lado da base maior.

V.69) As bases de um tronco de pirâmide triangular regular têm lados 20 cm e 50 cm e a altura do tronco é 10 cm. Uma seção paralela a uma face lateral contém um vértice da base menor. Calcule a área dessa seção.

V.70) As diagonais de um tronco de pirâmide quadrangular regular são perpendiculares às arestas laterais. A medida da aresta lateral é 72 cm e a altura do tronco é 56 cm. Calcule as medidas dos lados das bases.

V.71) As arestas das bases de um tronco de pirâmide quadrangular regular medem 18 cm e 12 cm e as faces laterais formam 60° com o plano da base. Calcule a diagonal do tronco.

V.72) A face lateral de um tronco de pirâmide quadrangular regular é um trapézio de bases 6 cm e 12 cm e altura 20 cm. Calcule a área da seção que contém duas arestas opostas das bases.

V.73) As bases de um tronco de pirâmide são retângulos de lados 30 cm e 40 cm e ainda 15 cm e 20 cm. Uma das arestas laterais mede 8 cm e é perpendicular aos planos das bases. Calcule as medidas das três outras arestas.

V.74) Uma aresta lateral de um tronco de pirâmide triangular regular mede 4 m e forma 60° com o plano da base. O raio da circunferência circunscrita à base menor é 1 m. Calcule o volume do tronco.

V.75) As áreas das bases de um tronco de pirâmide hexagonal regular são $60\sqrt{3}\ cm^2$ e $40\sqrt{3}\ cm^2$ e as faces laterais formam 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

PARTE VI

Capítulo 16 — **Cilindros circulares**

Capítulo 17 — **Cones circulares**

Capítulo 18 — **Esfera**

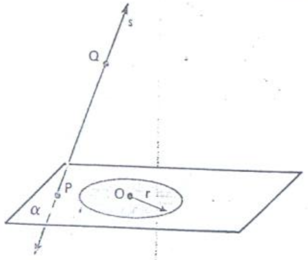
Capítulo

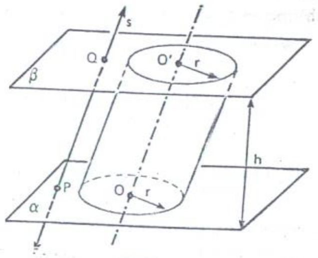
16

Cilindros circulares

16.1 — NOÇÃO DE CILINDRO CIRCULAR

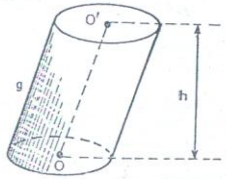
Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um círculo de centro O e raio **r**. Seja **s** uma reta que fura o plano α no ponto P (essa reta não precisa ser perpendicular ao plano α). Sobre a reta **s** tomamos um ponto Q, distinto de P, e por esse ponto consideramos o plano β, paralelo a α. Em seguida, construímos todos os segmentos paralelos a **s**, que têm uma extremidade num ponto do círculo e a outra no plano β. Unindo todos esses segmentos, obtemos um *sólido* que recebe o nome de cilindro circular.





Nomenclatura

Na figura ao lado temos o exemplo de um cilindro circular. Vejamos quais são os nomes de certas partes dessa figura.



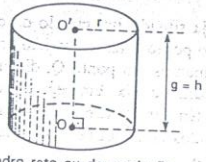
Bases: são os círculos de centros O e O' e raio **r** (contidos nos planos α e β).
Eixo: é a reta $\overleftrightarrow{OO'}$.

Geratrizes: são os segmentos paralelos a $\overline{OO'}$ que têm extremidades nos pontos das *circunferências* das bases.
Altura: é a distância entre os planos das bases (indicada por **h** na figura).
Área lateral: é a área da superfície formada pela união das geratrizes.
Área total: é a soma das áreas das bases com a área lateral.

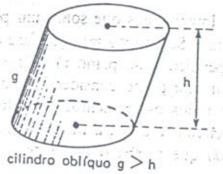
16.2 — CLASSIFICAÇÃO DOS CILINDROS

a) **Segundo a inclinação do eixo**

- **Cilindro reto**: é aquele cujas geratrizes são perpendiculares ao plano da base.
- **Cilindro oblíquo**: é aquele que não é reto.



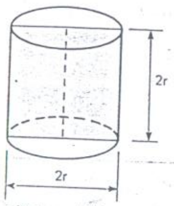
cilindro reto ou de revolução



cilindro oblíquo g > h

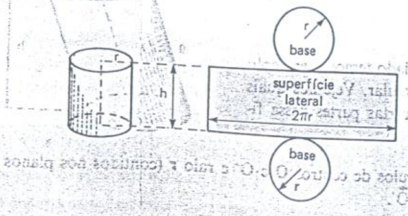
b) **Segundo a forma da seção meridiana**

- **Cilindro eqüilátero**: é o *cilindro reto* para o qual h = 2r, isto é, cuja interseção com um plano que contém o eixo é um *quadrado*. A interseção de um cilindro qualquer com um plano que contém o eixo é chamada **seção meridiana**. Assim, o cilindro eqüilátero é aquele cujas seções meridianas são quadrados.



cilindro eqüilátero

16.3 — ÁREA LATERAL E ÁREA TOTAL DO CILINDRO RETO



Se a superfície lateral do cilindro reto for *desenrolada*, isto é, **desenvolvida num plano**, o resultado será um retângulo de altura **h** e comprimento $2\pi r$. Portanto, a **área lateral** do cilindro reto é dada por

$$\boxed{S_\ell = 2\pi rh}$$

A **área total** do cilindro reto é obtida somando-se a área lateral com as áreas das duas bases:

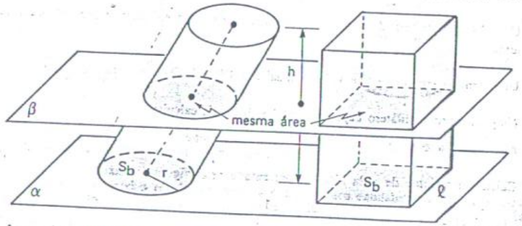
$$S_t = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

e, assim,

$$\boxed{S_t = 2\pi r\,(h + r)}$$

16.4 — VOLUME DO CILINDRO

O *princípio de Cavalieri* (veja item 13.5) pode ser utilizado para determinarmos o volume de um cilindro circular. Sejam **h** a altura e **r** o raio da base do cilindro. A área da base é $S_b = \pi r^2$. Imaginemos um paralelepípedo reto-retângulo cuja altura seja **h** e cuja base esteja contida no mesmo plano α que contém a base do cilindro.



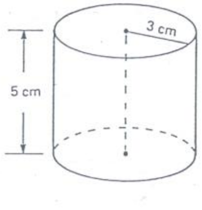
A base do paralelepípedo pode ser adotada como sendo um quadrado com a mesma área S_b da base do cilindro. Basta, para isto, que tal quadrado tenha lado de medida $\ell = r\sqrt{\pi}$. Qualquer plano $\beta \parallel \alpha$ que secciona o cilindro, secciona também o paralelepípedo e tais seções têm *mesma área*, pois são figuras congruentes às respectivas bases. Assim, o cilindro e o paralelepípedo têm **mesmo volume**. Daí resulta que o volume do cilindro é dado por

$$\boxed{V = S_b \cdot h = \pi r^2 h}$$

Exercício Resolvido

16.1) Dado um cilindro reto de altura 5 cm e raio da base igual a 3 cm, calcule:

a) a área da base (S_b);
b) a área lateral (S_ℓ);
c) a área total (S_t);
d) o volume (V);
e) a área da seção meridiana (S_m).



Solução

a) $S_b = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$
b) $S_\ell = 2\pi r h = 2\pi \cdot 3 \cdot 5 = 30\pi \text{ cm}^2$
c) $S_t = S_\ell + 2S_b = 30\pi + 18\pi =$
$= 48\pi \text{ cm}^2$
d) $V = S_b h = \pi r^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 45\pi \text{ cm}^3$
e) $S_m = (2r)h = 6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}^2$

Exercícios Propostos

16.2) Dado um cilindro reto de altura 4 cm e volume igual a $3\pi \text{ cm}^3$, calcule:
a) o raio da base (r);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t).

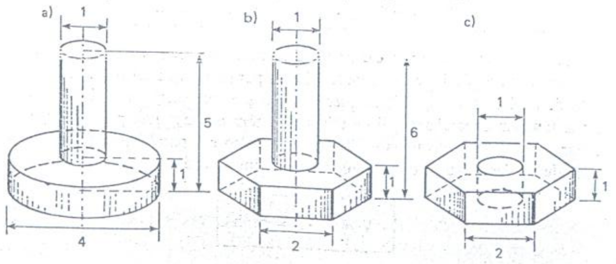
16.3) Um cilindro reto tem volume igual a $15\pi \text{ cm}^3$ e a área da sua base é igual a $10\pi \text{ cm}^2$. Determine:
a) o raio da base (r);
b) a altura (h);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t).

16.4) Um cilindro reto tem altura igual ao raio da base e a sua área lateral é $16\pi \text{ cm}^2$. Calcule o volume.

16.5) Um cilindro eqüilátero tem volume igual a $1\,000 \text{ cm}^3$. Qual é o raio da base?

16.6) Num cilindro eqüilátero cuja área total é $16\pi \text{ cm}^2$, calcule:
a) o raio da base (r);
b) o volume (V).

16.7) Calcule o volume de cada sólido representado pelas figuras abaixo:



16.8) Determine a altura de um cilindro reto cuja área lateral é igual ao dobro da área da base, sabendo que a circunferência da base tem comprimento igual a 4π cm.

16.9) Um primeiro cilindro tem altura 2h e raio da base r; um segundo cilindro tem altura **h** e raio da base 2r. Qual é a razão entre os seus volumes?

16.10) Sendo V o volume de um cilindro eqüilátero, calcule em função de V:
a) o raio da base (r);
b) a área lateral (S_ℓ).

16.11) Aumentando de 6 cm o raio ou a altura de um cilindro reto, num ou noutro caso, o seu volume aumenta de y cm^3. Sendo 2 cm a altura original, calcule o raio original.

16.12) Sendo A a área lateral de um cilindro eqüilátero, calcule em função de A:
a) o raio da base (r);
b) o volume (V).

16.13) Um primeiro cilindro reto tem altura **h** e raio da base **r** e um segundo tem altura **H** e raio da base R. Sabendo que os dois cilindros têm áreas laterais iguais, determine a razão entre seus volumes, em função dos raios das bases.

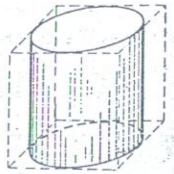
16.14) Qual é o volume de ferro utilizado para fabricar um pedaço de tubo com 10 cm de comprimento e diâmetro interno de 2 cm, sendo 0,3 cm a espessura do ferro?

16.15) Uma indústria produz azeite em latas de 1 litro, com a forma de paralelepípedo reto-retângulo, tendo por base um quadrado de lado **2a** e altura **3a**. Deseja-se modificar a forma das latas, passando-se a usar latas cilíndricas de altura igual a **2a**. Pergunta-se:

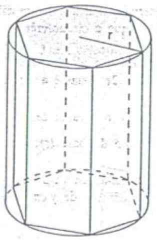
a) Qual deve ser o raio da base?
b) Qual das duas embalagens utiliza menos material?

16.16) Considere um tetraedro regular de aresta **a** e um cilindro eqüilátero de altura **a**. Determine a razão entre as áreas totais dos dois sólidos.

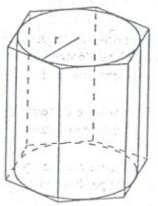
16.17) Calcule o volume de um cilindro inscrito em um cubo de aresta **a**.



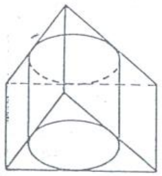
16.18) Calcule a razão entre o volume de um cilindro reto de raio r e o volume do prisma regular hexagonal nele inscrito.



16.19) Calcule a razão entre o volume de um cilindro reto de raio r e o volume do prisma hexagonal regular a ele circunscrito.

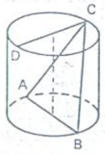


16.20) Um cilindro reto de raio R e altura h está inscrito em um prisma triangular. Sendo P o perímetro da base do prisma, calcule o seu volume.



16.21) A seção meridiana de um cilindro circular reto é um retângulo cuja diagonal mede 10 cm e forma 60° com o plano da base. Calcule a área lateral do cilindro.

16.22) Os diâmetros $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ das bases do cilindro reto indicado são ortogonais entre si. Sendo ABC um triângulo eqüilátero de lado **a**, calcule a área lateral do cilindro.



16.23) A seção meridiana de um cilindro é um quadrado de área S. Calcule a área da base.

16.24) A altura de um cilindro reto é 16 cm e o raio da base é 10 cm. Um segmento de 20 cm tem uma extremidade em cada circunferência das bases. Calcule a distância entre o eixo do cilindro e a reta suporte deste segmento.

16.25) Um triângulo ABC, com lados AB = 15 cm, AC = 14 cm e BC = 13 cm, gira em torno de um eixo que passa por C e é paralelo ao lado $\overleftrightarrow{AB}$. Calcule a área da seção meridiana da superfície cilíndrica gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$.

16.26) Um cilindro reto com raio da base 8 cm é cortado por um plano que contém duas geratrizes. A área da seção obtida é igual a 75% da área da seção meridiana. Calcule a distância entre o eixo do cilindro e o plano da seção.

16.27) Dado um cilindro reto de altura 30 cm e raio da base 40 cm, conduz-se um plano paralelo ao eixo e à distância de 24 cm dele. Calcule a área da seção.

16.28) Um plano paralelo ao eixo de um cilindro reto corta em suas bases arcos de 120°. O perímetro da seção obtida é 60 cm e a sua área é 225 cm². Determine o raio da base e a altura do cilindro.

16.29) Um cilindro reto tem altura 16 cm e raio da base 10 cm. Um plano paralelo ao eixo determina uma seção quadrada. Calcule a distância desse plano ao eixo do cilindro.

16.30) Em um cilindro reto toma-se uma seção perpendicular à base, de modo que a circunferência da base fica dividida na razão de 1 : 5. Calcule a razão entre as áreas desta seção e da seção meridiana.

16.31) A superfície lateral de um cilindro é obtida a partir de um quadrado de lado **a**. Calcule a área da base do cilindro.

16.32) A área da seção meridiana de um cilindro reto está para a área da base na razão de $4 : \pi$. Calcule o ângulo entre as diagonais da seção meridiana.

16.33) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cilindro. A diagonal da face lateral do prisma tem medida ℓ e forma 60° com o plano da base. Calcule a diagonal da seção meridiana do cilindro.

16.34) Em um cilindro eqüilátero inscreve-se uma pirâmide cuja base é um triângulo eqüilátero, sendo uma de suas arestas laterais uma geratriz do cilindro. Se a diagonal da seção meridiana do cilindro mede $8\sqrt{2}$ cm, calcule a área da maior face da pirâmide.

16.35) Um cubo de aresta **a** é inscrito em um cilindro. Determine a área da seção meridiana do cilindro.

16.36) Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita em um cilindro reto de altura 5 cm. A aresta lateral forma 60° com o plano da base. Calcule o raio da base do cilindro.

16.37) Um prisma triangular regular é inscrito em um cilindro. Um segmento tem por extremidades o centro da base do cilindro e o ponto médio de uma aresta lateral do prisma. Sabendo que esse segmento mede 16 cm e forma 30° com a aresta lateral, calcule a área da seção meridiana do cilindro.

16.38) A diagonal da seção meridiana de um cilindro eqüilátero mede **d**. Calcule a aresta lateral da pirâmide quadrangular regular inscrita nesse cilindro.

16.39) Um cilindro está inscrito em um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 26 cm, 28 cm e 30 cm. Sendo 40 cm a altura do prisma, calcule a área da seção meridiana do cilindro.

16.40) Um cilindro está inscrito em um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 30 cm, 36 cm e 42 cm. Sendo 50 cm a medida da diagonal da seção meridiana do cilindro, calcule a área lateral do prisma.

16.41) Um cilindro é inscrito em um prisma reto de altura 17 cm, cuja base é um losango de diagonais iguais a 8 cm e 15 cm. Calcule a área da seção meridiana do cilindro.

16.42) Um cilindro é inscrito em um prisma hexagonal regular cuja altura é 23 cm. Calcule a área da base do cilindro, se a área lateral do prisma é igual a $276\sqrt{3}\,cm^2$.

16.43) Um segmento tangencia a superfície lateral de um cilindro reto de altura 25 cm e raio da base 12 cm. As extremidades do segmento estão situadas nos planos das bases e suas distâncias ao eixo do cilindro são 20 cm e 15 cm. Calcule o comprimento desse segmento.

16.44) Um cilindro é inscrito em um prisma quadrangular regular de altura 2**a** e diagonal da base 2**a**. Calcule a diagonal da seção meridiana do cilindro.

16.45) Em um cilindro inscrito em um prisma triangular regular de aresta da base **a** e altura 3**a**, inscreve-se um prisma quadrangular regular. Calcule a área lateral deste prisma.

16.46) Um retângulo de área S, girando em torno de um de seus lados, gera um cilindro circular reto. Calcule a área da face lateral de um prisma triangular regular circunscrito a esse cilindro.

16.47) Um cilindro está inscrito em um prisma reto, cuja base é um trapézio isósceles de bases 8 cm e 18 cm. Nesse cilindro inscreve-se um prisma triangular regular. Calcule a área lateral deste prisma, sendo 10 cm a sua altura.

16.48) Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita em um cilindro de altura 10 cm. A extremidade de uma geratriz que passa por um vértice da base da pirâmide dista 6 cm da aresta lateral. Calcule a aresta da base e a aresta lateral da pirâmide.

16.49) Calcule a área lateral de um cilindro eqüilátero de geratriz ℓ.

16.50) Calcule a altura de um cilindro eqüilátero de área lateral S.

16.51) Calcule a razão entre a área lateral e a área da base de um cilindro eqüilátero.

16.52) Calcule a área lateral de um cilindro reto, sendo S a área da sua seção meridiana.

16.53) Calcule a área lateral de um cilindro reto cuja diagonal da seção meridiana tem medida ℓ e forma 60° com o plano da base.

16.54) A área lateral de um cilindro reto é igual à área de um círculo cujo diâmetro é uma geratriz do cilindro. Calcule a razão entre a altura e o raio da base do cilindro.

16.55) A área lateral de um cilindro reto é igual à área do círculo circunscrito à seção meridiana. Calcule a razão entre a altura do cilindro e o raio da base.

16.56) Calcule a razão entre as áreas laterais de um cilindro eqüilátero e de uma pirâmide quadrangular regular inscrita nele.

16.57) Calcule a área lateral de uma pirâmide triangular regular inscrita em um cilindro eqüilátero de altura 2r.

16.58) Inscreve-se um tetraedro regular em um cilindro reto. Calcule a área lateral do cilindro, sendo **a** a aresta do tetraedro.

16.59) A aresta de um cubo é igual ao raio **r** da base de um cilindro reto e a área total do cubo é igual à área lateral do cilindro. Determine a altura do cilindro.

16.60) Calcule a razão entre as áreas laterais dos cilindros circunscrito e inscrito em um prisma triangular regular.

16.61) Calcule a área total de um cilindro cujo diâmetro da base é igual à diagonal da face de um cubo de aresta **a** e cuja altura é igual ao diâmetro desse cubo.

16.62) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cilindro eqüilátero. Calcule a razão entre as áreas laterais dos dois sólidos.

16.63) Calcule a razão entre a área total de um cubo e a área lateral do cilindro inscrito nele.

16.64) Um retângulo de lados **a** e **b** gira em torno do lado de medida **a** e depois em torno do lado de medida **b**. Calcule a razão entre as áreas laterais dos cilindros obtidos.

16.65) Na questão anterior, dê a razão entre as áreas totais dos dois cilindros.

16.66) Um plano paralelo ao eixo de um cilindro reto determina na circunferência da base um arco de 120°. Se a área da seção é S, calcule a área lateral do cilindro.

16.67) Um prisma quadrangular regular inscrito em um cilindro tem face lateral de área S. Calcule a área lateral do cilindro.

16.68) O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro é um retângulo cuja diagonal mede **d** e forma 30° com a base do retângulo. Calcule a área total do cilindro.

16.69) Determine a altura de um cilindro eqüilátero cuja área total é igual à de um cubo de aresta **a**.

16.70) Um cilindro reto de altura 15 cm e raio da base 10 cm é cortado por um plano paralelo ao seu eixo, que determina na circunferência da base um arco de 120°. Calcule a área da maior porção da superfície lateral do cilindro, separada por esse plano.

16.71) No problema anterior, calcule a área da maior porção da base do cilindro.

16.72) A área total de um cilindro eqüilátero é igual a $15\,m^2$. Calcule a área da sua seção meridiana.

16.73) Calcule a área total de um cilindro reto se a área da base é igual a $490\pi\,cm^2$ e a área da seção meridiana é $400\,cm^2$.

16.74) A seção meridiana de um cilindro reto tem área $300\,cm^2$ e diagonal de 25 cm. Calcule a área total desse cilindro.

16.75) O diâmetro $\overleftrightarrow{AB}$ da base superior de um cilindro reto é ortogonal ao diâmetro $\overleftrightarrow{CD}$ da base inferior. Sendo AC = 10 cm e sabendo que a distância do segmento $\overleftrightarrow{AC}$ ao eixo do cilindro é 4 cm, calcule a área total do cilindro.

... prisma reto cuja base é um quadrado de lado igual ao raio da base do cilindro e cuja altura é igual ao comprimento da circunferência da base do cilindro. Dê a razão dos volumes dos dois sólidos.

16.77) São dados dois cilindros retos. A altura do primeiro é o dobro da altura do segundo e o raio da base do segundo é o triplo do raio da base do primeiro. Calcule a razão entre seus volumes.

16.78) Um cilindro tem raio **r** e altura 3r, enquanto que um segundo cilindro tem raio 3r e altura **r**. Calcule a razão entre seus volumes.

16.79) O raio da base de um cilindro reto é 10 cm e a área da seção paralela ao eixo, que dista 6 cm do eixo, é 80 cm². Calcule o volume do cilindro.

16.80) A seção meridiana de um cilindro é um quadrado de área S. Calcule o volume do cilindro.

16.81) Um triângulo ABC, com lados AB = 7 cm, BC = 8 cm e AC = 9 cm, gira em torno de um eixo que passa por A e é paralelo ao lado $\overleftrightarrow{BC}$. Calcule o volume do cilindro correspondente à superfície gerada pelo lado $\overleftrightarrow{BC}$.

16.82) Os diâmetros $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ das bases de um cilindro reto são ortogonais. Sendo 6 cm o raio da base do cilindro e AC = 11 cm, calcule o volume do cilindro.

16.83) Em um cilindro reto de volume 980 cm³ conduz-se um plano paralelo ao eixo, à distância de 7 cm deste. A área da seção obtida é a metade da área da seção meridiana do cilindro. Calcule a altura do cilindro.

16.84) Um plano paralelo ao eixo de um cilindro reto corta em suas bases arcos de 60°. O perímetro da seção é 26 cm e a sua área é 42 cm². Calcule o volume do cilindro.

16.85) A diagonal da seção meridiana de um cilindro reto mede ℓ e forma 30° com o plano da base. Calcule o volume do cilindro.

16.86) Um cilindro tem altura igual a 6 cm. Um plano paralelo ao eixo e distante 3 cm dele determina no cilindro uma seção quadrada. Calcule o volume do cilindro.

16.87) Em um cilindro reto, toma-se uma seção perpendicular à base, de modo que a circunferência da base fica dividida na razão 1 : 5. Se a área da seção é 49 cm² e a altura do cilindro é 7 cm, calcule o volume.

16.88) O desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro é um quadrado de lado **a**. Calcule o volume do cilindro.

16.89) Calcule a área total de um cilindro eqüilátero de volume igual a V.

16.90) Calcule a área da seção meridiana de um cilindro eqüilátero de volume V.

16.91) Um cilindro eqüilátero é obtido fundindo-se um cubo de chumbo de aresta **a**. Qual é a altura do cilindro?

16.92) Um cubo é obtido fundindo-se um cilindro de chumbo de altura $\sqrt{3}$ cm e raio da base 1 cm. Qual é a diagonal do cubo?

16.93) Um prisma triangular regular é inscrito em um cilindro e um cilindro é inscrito nesse prisma. Calcule a razão entre os volumes desses cilindros.

16.94) Mesmo problema anterior, no caso de um prisma quadrangular regular.

16.95) Mesmo problema anterior, no caso de um prisma hexagonal regular.

16.96) Um cilindro reto tem volume V. Calcule o volume de um prisma quadrangular regular inscrito.

16.97) Um cilindro reto tem volume V. Calcule o volume de um prisma quadrangular regular circunscrito.

16.98) Calcule o volume de um prisma triangular regular, inscrito em um cilindro de volume V.

16.99) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cilindro. A diagonal da face lateral do prisma mede ℓ e forma 60° com o plano da base. Calcule o volume do cilindro.

16.100) Em um cilindro eqüilátero inscreve-se uma pirâmide cuja base é um triângulo eqüilátero, sendo uma de suas arestas laterais perpendicular ao plano da base. Se a área da face maior da pirâmide é $15\sqrt{3}$ cm², calcule o volume do cilindro.

16.101) Um cubo de aresta **a** é inscrito em um cilindro. Calcule o volume do cilindro.

16.102) Uma pirâmide triangular regular é inscrita em um cilindro reto de altura 5 cm. A aresta lateral forma 30° com o plano da base. Calcule o volume do cilindro.

16.103) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cilindro. O segmento que tem por extremidades o centro de uma base do cilindro e o ponto médio de uma aresta lateral do prisma mede 2 cm e forma 60° com a aresta lateral. Calcule o volume do cilindro.

16.104) O volume de um cilindro eqüilátero é V. Calcule a medida da aresta lateral da pirâmide quadrangular regular inscrita nesse cilindro.

16.105) Calcule o volume de um cilindro eqüilátero, sabendo que é numericamente igual à área total do cilindro.

16.106) Calcule a área total de um cilindro eqüilátero, sabendo que o seu volume é numericamente igual à área lateral.

16.107) Calcule o volume de um cilindro de altura igual a 9 cm, inscrito em um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 5 cm, 6 cm e 7 cm.

16.108) O raio da base de um cilindro reto é **r** e, no desenvolvimento da superfície lateral, a geratriz forma 60° com a diagonal. Calcule o volume do cilindro.

16.109) Um cilindro de volume $\pi\sqrt{5}$ cm³ está inscrito em um prisma reto cuja base é um triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm. Calcule o volume do prisma.

16.110) Um cilindro é inscrito em um prisma reto de altura **h**, cuja base é um losango de lado **h** e ângulo agudo de 60°. Calcule o volume do cilindro.

16.111) Um cilindro é inscrito em um prisma hexagonal regular cujas arestas são todas iguais a **a**. Dê o volume do cilindro.

16.112) Um prisma triangular regular tem a diagonal da face lateral medindo 4 cm e formando 60° com o plano da base. Calcule o volume do cilindro inscrito.

16.113) Em um cilindro inscrito em um prisma quadrangular regular, inscreve-se um tetraedro regular de aresta **a**. Calcule o volume do prisma.

16.114) Um cilindro eqüilátero é inscrito em um prisma cuja base é um trapézio isósceles de bases 4 cm e 9 cm. Calcule o volume do cilindro.

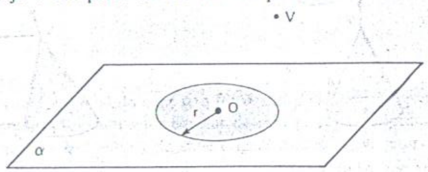
16.115) Calcule a razão entre os volumes de um cilindro eqüilátero de raio da base **a** e um tetraedro regular de aresta **a**.

Capítulo 17

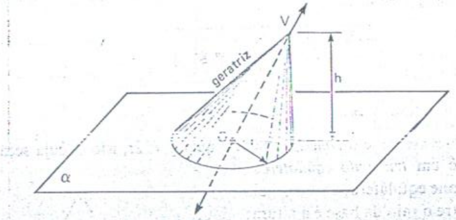
Cones circulares

17.1 — NOÇÃO DE CONE CIRCULAR

Imaginemos que sobre um plano α esteja situado um círculo de centro O e raio **r**. Seja V um ponto situado fora do plano α.



Podemos construir todos os segmentos que têm uma extremidade num ponto do círculo e a outra no ponto V. Unindo todos esses segmentos, obtemos um *sólido* que recebe o nome de **cone circular**.

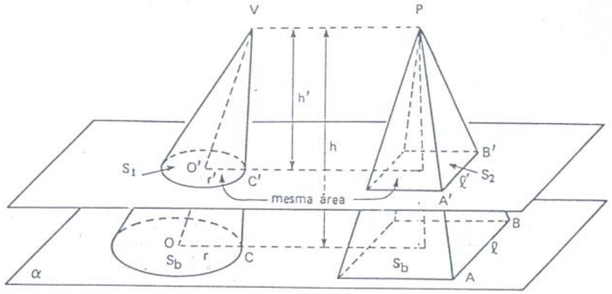


Nomenclatura

Vamos estabelecer os nomes de algumas partes do cone circular.

Vértice: é o ponto V.
Base: é o círculo de centro O e raio **r**.

17.4 — VOLUME DE UM CONE



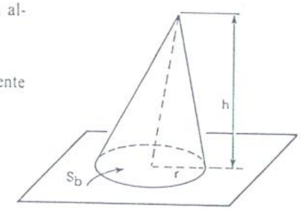
Propriedade

> O **volume** de um cone qualquer é a terça parte do produto da *área de sua base* pela sua *altura*.

Se S_b é a área da base e **h** é a altura, temos $V = \frac{1}{3} S_b h$.

Sendo **r** o raio da base, logicamente $S_b = \pi r^2$, portanto:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$



Este fato pode ser reconhecido através do princípio de Cavalieri (veja o item 13.5). Suponhamos que uma *pirâmide de base quadrada* tem sua base contida no mesmo plano α da base do cone e que sua altura é a mesma altura **h** do cone. Imaginemos que a base da pirâmide tenha área igual à da base do cone. Para isto, basta tomar o lado ℓ do quadrado tal que $\pi r^2 = \ell^2$, isto é, $\ell = r\sqrt{\pi}$. Um plano paralelo a α, ao interceptar o cone segundo um círculo de raio r', intercepta também a pirâmide segundo um quadrado de lado ℓ'. Para se concluir que a pirâmide e o cone têm mesmo volume, basta mostrar que as duas seções assim obtidas têm mesma área.

Conforme vimos no item 14.9, para a pirâmide temos

$$\frac{S_2}{S_b} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ donde } S_2 = S_b \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Para o cone, como △ VO'C' ~ △ VOC, temos

$$\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}. \text{ Assim, } \frac{S_1}{S_b} = \frac{\pi (r')^2}{\pi r^2} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \text{ donde}$$

$$S_1 = S_b \cdot \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Daí resulta que $S_1 = S_2$. Fica, portanto, confirmada a propriedade citada anteriormente que dá o volume do cone circular:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} \pi r^2 h}$$

Exercícios Resolvidos

17.1) Considere um cone eqüilátero cujo raio da base é **r**. Determine:

a) a geratriz (g);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ) e a área total (S_t);
d) a altura (h);
e) o volume (V).

Solução

Como vimos no item 17.2, se o cone considerado é eqüilátero, tem-se $g = 2r$ e ainda $h = r\sqrt{3}$. A área da base é $S_b = \pi r^2$. Para a área lateral, temos

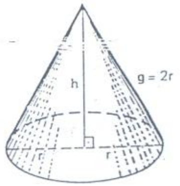
$$S_\ell = \pi r g = \pi r(2r) = 2\pi r^2$$

donde a área total resulta

$$S_t = S_\ell + S_b = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi^2$$

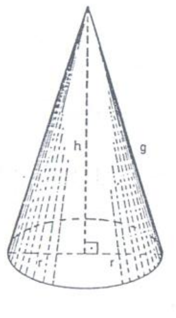
Finalmente, o volume é dado por

$$V = \frac{1}{3} S_b h = \frac{1}{3} (\pi r^2) \cdot r\sqrt{3} = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}$$



17.2) Num cone reto, a seção meridiana (isto é, a seção determinada por um plano que contém o eixo do cone) é um triângulo cuja área é igual à área da base do cone. Se o raio da base mede 1 cm, determine a área lateral e o volume do cone.

Solução



A área da seção meridiana é dada por $\frac{(2r)h}{2} = rh$. Temos, então, $rh = \pi r^2$, donde

$$h = \pi r = \pi \text{ cm}.$$

Como $g^2 = h^2 + r^2 = \pi^2 r^2 + r^2 = r^2(\pi^2 + 1)$ temos $g = r\sqrt{\pi^2 + 1} = \sqrt{\pi^2 + 1}$ cm. Assim, a área lateral é

$$S_\ell = \pi r g = \pi\sqrt{\pi^2 + 1} \text{ cm}^2$$

e o volume é igual a

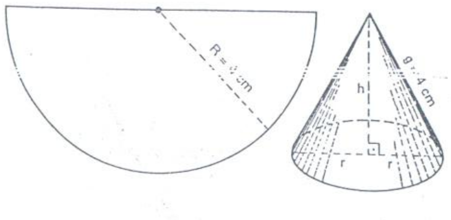
$$V = \frac{1}{3}S_b h = \frac{1}{3}(\pi r^2)h =$$

$$= \frac{1}{3}(\pi)(\pi) = \frac{\pi^2}{3} \text{ cm}^3$$

17.3) Se a superfície lateral de um cone reto é desenvolvida em um plano (*desenrolada*), resulta um semicírculo de raio igual a 4 cm. Calcule o volume do cone.

Solução

O raio R do semicírculo é igual à geratriz do cone: g = 4 cm. A área do semicírculo é igual à área lateral do cone:



$$\frac{\pi R^2}{2} = \pi r g$$

$$\frac{\pi \cdot 4^2}{2} = \pi \cdot r \cdot 4$$

Daí obtemos

$$r = 2 \text{ cm}$$

o que indica que o cone obtido é *eqüilátero*. Sua altura é $h = r\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. Assim, para o volume temos:

$$V = \frac{1}{3}S_b h = \frac{1}{3}(\pi r^2) \cdot h = \frac{1}{3}(\pi \cdot 2^2) \cdot 2\sqrt{3} = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$$

Exercícios Propostos

17.4) Considere um cone reto de altura 4 m, cuja base tem 3 m de raio. Calcule:

a) a geratriz (g);
b) a área da base (S_b);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t);
e) o volume (V).

17.5) A geratriz de um cone de revolução mede 6 cm e a área da base é 5π cm². Calcule:

a) o raio da base (r);
b) a altura (h);
c) a área lateral (S_ℓ);
d) a área total (S_t);
e) o volume (V).

17.6) Considere um cone cuja geratriz mede 7 cm. Sabendo que a altura desse cone é igual ao diâmetro da base, calcule:

a) o raio da base (r);
b) a altura (h);
c) a área da base (S_b);
d) a área lateral (S_ℓ);
e) a área total (S_t);
f) o volume (V).

17.7) Determine o volume de um cone eqüilátero de altura igual a $\sqrt{3}$ cm.

17.8) Num cone reto, a altura é igual ao triplo do raio da base. Determine a geratriz, sabendo que o volume desse cone é igual a 10π cm³.

17.9) Qual é a área total de um cone eqüilátero cuja geratriz mede 12 cm?

17.10) Qual deve ser a altura de um cone eqüilátero cuja área lateral é 12π cm²?

17.11) A seção meridiana de um cone reto é um triângulo de área igual a 16 cm². Sabendo que a altura é maior do que o raio da base e que a geratriz mede 7 cm, calcule o volume desse cone.

17.12) Calcule o volume de um cone eqüilátero cuja base tem área igual a 12π m².

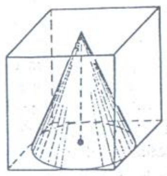
17.13) Num cone de revolução, a área lateral é 72 cm² e a geratriz mede 5 cm. Calcule o raio da base.

17.14) Qual deve ser o raio da base de um cone eqüilátero para que o seu volume seja 8π cm³?

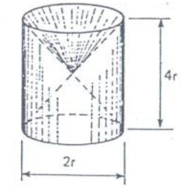
17.15) Qual é o volume de um cone eqüilátero cuja área total é 25π cm²?

17.16) Num cone reto, o raio da base é igual a $\sqrt{3}$ cm. Qual deve ser a altura desse cone para que o raio da base, a altura e o volume formem, nessa ordem, uma PG?

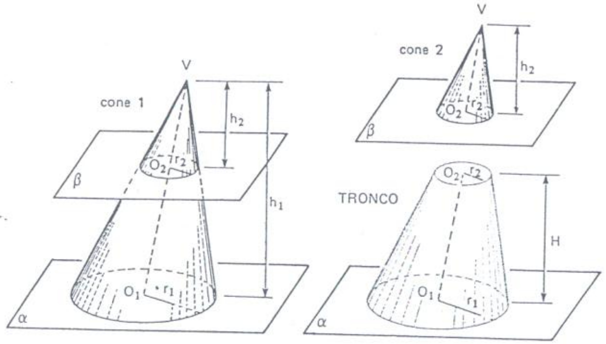
17.17) Considere um cubo de aresta igual a 1 cm. Podemos obter um cone tomando como base o círculo inscrito numa das faces do cone e como vértice o centro da face oposta. Qual é a área lateral desse cone?



17.18) A figura ao lado representa um cilindro do qual foram retirados dois cones. Determine o volume da parte do sólido que permaneceu onde estava.



17.5 — TRONCO DE CONE DE BASES PARALELAS



Consideremos um cone circular de vértice V e altura h_1, cuja base é um círculo de centro O_1 e raio r_1 (cone 1). Imaginemos que um plano β, paralelo ao plano α da base, corte o cone à distância h_2 do vértice, sendo $h_2 < h_1$. A interseção do plano β com o cone, ou seja, a **seção transversal** assim obtida é um círculo de centro O_2 e raio r_2. Note que o plano β separa o cone em dois sólidos, um dos quais é também um cone de vértice V e altura h_2 (cone 2). O outro é um sólido chamado tronco de cone.

As bases dos dois cones são as bases do tronco e a diferença $H = h_1 - h_2$ é a altura do tronco.

17.6 — CONES SEMELHANTES

Os cones 1 e 2 do item anterior são *semelhantes*, isto é, os segmentos correspondentes desses dois sólidos são proporcionais. Tomando-se, por exemplo, os raios das bases, as alturas e os segmentos de eixos de cada um dos cones, temos

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{VO_1}{VO_2} = k$$

onde **k** é a razão de semelhança

Para cones semelhantes valem também as duas propriedades seguintes.

1.ª) As **áreas** de superfícies correspondentes estão entre si na razão k^2.
2.ª) Os **volumes** dos dois sólidos, ou de partes correspondentes, então entre si na razão k^3.

Assim, por exemplo, para as áreas das bases, temos

$$\frac{S_{b_1}}{S_{b_2}} = k^2$$

e para os volumes:

$$\frac{V_1}{V_2} = k^3$$

As duas afirmações acima são de fácil constatação.

17.7 — VOLUME DO TRONCO DE CONE

Para calcular o volume do tronco de cone, basta subtrair do volume do cone 1 o volume do cone 2:

$$V_T = V_1 - V_2$$

Então, $V_T = \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$

$$V_T = \frac{1}{3}\pi [r_1^2 h_1 - r_2^2 h_2]$$

Exercícios Resolvidos

17.19) Mostre que o volume do tronco de cone é igual a

$$V_T = \frac{\pi H}{3}[r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2]$$

Solução

Devemos lembrar que

$$h_1 - h_2 = H,\ h_1 = kh_2 \text{ e } r_1 = kr_2$$

Escrevemos, então,

$$V_T = \frac{1}{3}\pi[r_1^2h_1 - r_2^2h_2] = \frac{1}{3}\pi[k^2r_2^2 \cdot kh_2 - r_2^2h_2] =$$

$$= \frac{\pi r_2^2 h_2}{3} \cdot [k^3 - 1] =$$

$$= \frac{\pi r_2^2 h_2}{3} \cdot (k-1)(k^2 + k + 1) =$$

$$= \frac{\pi}{3}(h_2k - h_2)(r_2^2k^2 + r_2^2k + r_2^2) =$$

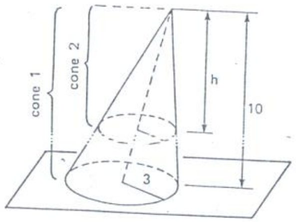
$$= \frac{\pi}{3}(h_1 - h_2)(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) =$$

$$= \frac{\pi H}{3}(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$

17.20) Um cone circular tem raio da base igual a 3 cm e altura igual a 10 cm. A que distância do vértice deve ser tomada uma seção transversal para se obter um tronco de volume igual à metade do volume do cone dado?

Solução

A situação do problema está representada na figura. A distância pedida é a altura **h** do cone 2. Sendo V_1, V_2 e V_T, respectivamente, os volumes dos cones 1 e 2 e do tronco, temos



$$V_T = \frac{1}{2}V_1$$

e como $V_T = V_1 - V_2$, vem $\frac{1}{2}V_1 = V_1 - V_2$ donde $V_1 = 2V_2$ ou ainda $\frac{V_1}{V_2} = 2$. Isto significa que a razão de semelhança k entre os cones 1 e 2 é tal que $k^3 = 2$, ou seja: $k = \sqrt[3]{2}$.

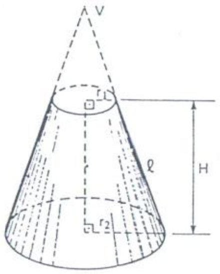
Sendo assim, $\frac{10}{h} = k = \sqrt[3]{2}$, isto é, $h = \frac{10}{\sqrt[3]{2}}$. Então a seção transversal deve estar à distância

$$h = \frac{10}{\sqrt[3]{2}} \cong 7{,}94 \text{ cm}$$

do vértice do cone. (Note que o raio da base é, neste problema, um dado desnecessário.)

17.21) Seja um **tronco de cone reto**, de altura H e raios das bases r_1 e r_2. Indiquemos por ℓ a *geratriz do tronco* (veja a figura). Mostre que a área lateral do tronco pode ser dada pela expressão

$$S_\ell = \pi(r_1 + r_2) \cdot \ell$$



Solução

Seja V o vértice dos cones cujas bases são os círculos de raios r_1 e r_2 que constituem as bases do tronco. O cone maior tem área lateral $S_2 = \pi r_2 g_2$ e o cone menor tem área lateral $S_1 = \pi r_1 g_1$, onde $g_2 - g_1 = \ell$. A área lateral do tronco é dada por $S = S_2 - S_1 = \pi(r_2g_2 - r_1g_1)$. Mas como $\frac{g_2}{g_1} = \frac{r_2}{r_1}$, temos $g_2r_1 - g_1r_2 = 0$, portanto podemos escrever

$$S = \pi(r_2g_2 - r_1g_1 + g_2r_1 - g_1r_2) =$$
$$= \pi[g_2(r_1 + r_2) - g_1(r_1 + r_2)] =$$
$$= \pi(r_1 + r_2)(g_2 - g_1) =$$
$$= \pi(r_1 + r_2) \cdot \ell$$

Exercícios Propostos

17.22) Um cone de 35 cm de altura tem raio da base igual a 7 cm. Qual é a área da seção transversal desse cone, situada à distância de 30 cm do vértice?

17.23) De um cone de altura igual a 22 cm obtém-se um tronco de altura igual a 11 cm. Qual é a área da base menor do tronco se se sabe que a base maior tem raio igual a 6 cm?

17.24) Um cone circular tem altura de 77 m. Calcule o raio da base sabendo que a seção transversal feita a 21 m do vértice tem área de 225π m².

17.25) Um cone tem 15 cm de altura e raio da base igual a 6 cm. Cortando-se nesse cone uma seção transversal situada a 5 cm da base, obtém-se um tronco. Calcule:

a) as áreas das bases do tronco (S_1 e S_2);
b) o volume do tronco (V_T).

17.26) Calcule o volume de um tronco de cone de 36 cm de altura sabendo que as áreas das bases são 5π cm² e 20π cm².

17.27) Calcule o volume de um tronco de cone que se obtém cortando-se um cone eqüilátero, cujo raio da base mede 6 cm, por um plano cuja distância ao vértice é igual à metade da altura do cone.

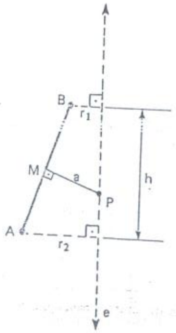
17.28) Calcule a altura de um tronco de cone de 78π cm³ de volume sabendo que os raios das bases são 2 cm e 5 cm.

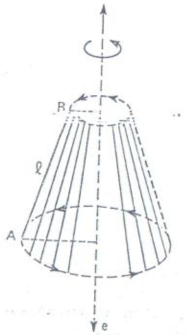
17.29) Um cone é separado, por meio de duas seções transversais, em três sólidos, de mesmo volume, sendo um deles um cone e os outros dois, troncos de cone. Determine a razão entre as áreas laterais dos dois troncos.

17.30) Com uma seção transversal separa-se um cone eqüilátero em dois sólidos de igual volume. Calcule a área dessa seção transversal sabendo que o raio da base do cone dado é 10 cm.

17.8 — SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Consideremos uma reta e (que chamaremos eixo de rotação) e um segmento $\overline{AB}$, coplanar com a reta e e contido em um dos semiplanos que têm origem nessa reta. Imaginemos que o segmento "gira" em torno do eixo e, produzindo uma *superfície*. Com uma linguagem mais precisa, imaginèmos que cada ponto do segmento $\overline{AB}$ determina uma circunferência que passa por ele e tem como centro o pé da perpendicular conduzida desse ponto ao eixo. A união de todas estas circunferências forma uma superfície, chamada *superfície de revolução*. Se o segmento $\overline{AB}$ está inclinado em relação ao eixo, sem cortá-lo, obtém-se a superfície lateral de um tronco de cone. Se $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo, obtém-se a superfície lateral de um cilindro reto. Se $\overline{AB}$ tem uma extremidade sobre o eixo, obtém-se a superfície lateral de um cone reto (estamos supondo que o segmento $\overline{AB}$ não é perpendicular ao eixo, pois neste caso teríamos um círculo ou uma coroa circular).





Seja ℓ o comprimento do segmento $\overline{AB}$ e indiquemos por r_1 e r_2 as distâncias de suas extremidades ao eixo. Já vimos, no exercício resolvido 17.21, que a área da superfície de revolução pode ser dada por

$$S = \pi(r_1 + r_2)\ell$$

Consideremos o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$. A mediatriz de $\overline{AB}$ encontra o eixo no ponto P. Indiquemos MP = a. É possível provar que a área da superfície de revolução pode ser dada também pela expressão

$$\boxed{S = 2\pi ah}$$

Basta notar, na figura ao lado, que $\triangle ABC \sim \triangle PMQ$, donde

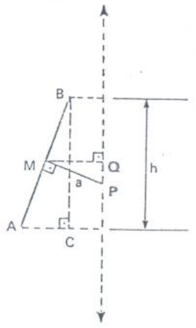
$$\frac{AB}{PM} = \frac{BC}{MQ}$$

Lembrando que $MQ = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$, temos

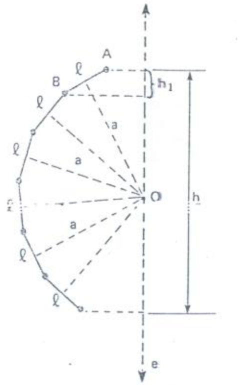
$$\frac{\ell}{a} = \frac{2h}{r_1 + r_2}$$

donde $(r_1 + r_2)\ell = 2ah$

e, assim, $S = 2\pi ah$.



Este resultado pode ser generalizado. Consideremos uma seqüência de segmentos congruentes entre si, formando uma poligonal regular, circunscrita a uma circunferência de raio a e centro O. Seja e um eixo de rotação que passa por O e não corta a poligonal, como mostra a figura. A área da superfície de revolução gerada pela rotação do segmento $\overline{AB}$ é igual a $S_1 = 2\pi ah_1$. Analogamente, para os demais segmentos da poligonal, teríamos $S_2 = 2\pi ah_2$, $S_3 = 2\pi ah_3$, etc.



Assim, a área total resulta

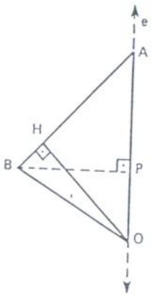
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots = 2\pi a\,(h_1 + h_2 + h_3 + \ldots) = 2\pi ah$$

A área da superfície de revolução gerada pela rotação de uma poligonal regular em torno de um eixo de seu plano, passando pelo centro da circunferência inscrita, é igual ao produto do comprimento da circunferência inscrita pela projeção da poligonal sobre o eixo:

$$S = 2\pi ah$$

17.9 — SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Se o triângulo ABO gira em torno de um eixo que contém o lado $\overleftrightarrow{AO}$, obtém-se um sólido que se chama *de revolução*. Vamos mostrar que o volume desse sólido é igual à terça parte do produto da altura OH pela área da superfície de revolução gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$. Para isso, notemos que o sólido de revolução é a união de dois cones retos, gerados pela rotação dos triângulos ABP e BPO. Assim, o seu volume é



$$V = \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot AP + \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot PO = \frac{1}{3}\pi(BP)^2(AP + PO) =$$

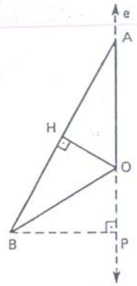
$$= \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot AO$$

Mas (BP) · (AO) = (AB) · (OH), pois ambos os produtos dão o dobro da área do △ ABO. Assim,

$$V = \frac{1}{3}\pi(BP)(AB) \cdot (OH)$$

A expressão $\pi(BP)(AB)$ representa a área lateral do cone gerado pela rotação do △ ABP, isto é, é a área da superfície de revolução gerada pela rotação do lado $\overleftrightarrow{AB}$. Indicando esta área por S_{AB}, escrevemos

$$V = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot OH$$



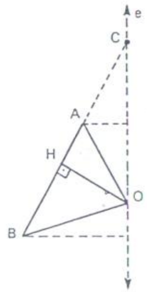
Na situação ilustrada ao lado, o volume do sólido obtido é a *diferença* entre os volumes dos dois cones:

$$V = \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot AP - \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot PO =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(BP)^2(AP - PO) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi(BP)^2 \cdot AO$$

mas, como se vê, a conclusão final é igualmente válida.

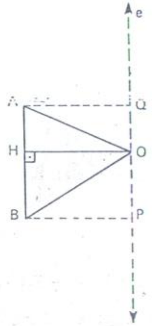


Seja, agora, um triângulo que gira em torno do eixo e de seu plano, mas tendo apenas um vértice pertencente ao eixo, como na figura ao lado. Neste caso, prolongando $\overleftrightarrow{AB}$ até encontrar o eixo no ponto C, podemos exprimir o volume procurado como a diferença entre os volumes dos sólidos gerados pelos triângulos CBO e CAO:

$$V = \frac{1}{3}S_{CB} \cdot OH - \frac{1}{3}S_{CA} \cdot OH =$$

$$= \frac{1}{3}(S_{CB} - S_{CA}) \cdot OH = \frac{1}{3}S_{AB} \cdot OH$$

resultado idêntico ao anterior.



Se $\overleftrightarrow{AB} \parallel e$, caso em que seu prolongamento não encontraria este eixo, o volume pedido pode ser calculado como sendo o volume do cilindro gerado pelo retângulo ABPQ (veja a figura), *menos* os volumes dos cones gerados pelos triângulos OAQ e OBP. Teríamos:

$$V = \pi(OH)^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi(OH)^2 \cdot OP - \frac{1}{3}\pi(OH)^2 \cdot OQ =$$

$$= \pi(OH)^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi(OH)^2(OP + OQ) =$$

$$= \pi(OH)^2 \cdot AB - \frac{1}{3}\pi(OH)^2 \cdot AB =$$

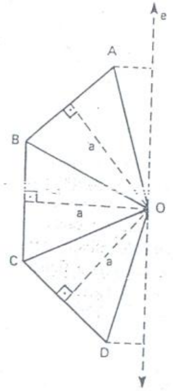
$$= \frac{2}{3}\pi(OH)^2 AB$$

Mas $2\pi(OH)(AB)$ é a área da superfície gerada por $\overline{AB}$, assim temos também

$$V = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot OH$$

Impõe-se uma conclusão geral:

> O volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo em torno de um eixo do seu plano, que contém um de seus vértices, deixando o triângulo contido em um só semiplano, é igual à terça parte do produto da área gerada pelo lado oposto a esse vértice, pela altura relativa a esse vértice.



O resultado acima pode ser generalizado. Consideremos um *setor poligonal regular* (veja a figura ao lado), circunscrito a uma circunferência de raio **a** e centro O. Seja **e** um eixo coplanar com o setor, passando O, mas sem cortar o setor. O volume do sólido gerado pela rotação do setor poligonal em torno do eixo **e** é igual à terça parte do produto do apótema **a** pela área da superfície gerada pela poligonal do setor. Basta notar que o $\triangle OAB$ gera um sólido de volume $V_1 = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot a$, o $\triangle OBC$ gera um sólido de volume $V_2 = \frac{1}{3} S_{BC} \cdot a$ e assim por diante. Logo, o volume total é

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots =$$

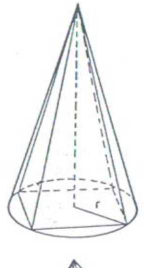
$$= \frac{1}{3} S_{AB} \cdot a + \frac{1}{3} S_{BC} \cdot a + \frac{1}{3} S_{CD} \cdot a + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3}(S_{AB} + S_{BC} + S_{CD} + \ldots) \cdot a =$$

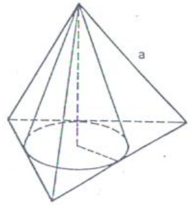
$$= \frac{1}{3} S_{poligonal} \cdot a$$

Exercícios Propostos

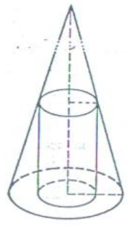
17.31) Calcule a razão entre o volume de um cone circular reto de raio **r** e o volume da pirâmide regular de base quadrada inscrita nele.



17.32) Calcule o volume de um cone circular reto inscrito em um tetraedro regular de aresta **a**. (Lembre-se de que, no item 14.3, ficou determinado que a altura de um tetraedro regular é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.)



17.33) Em um cone circular reto inscreve-se um cilindro reto de volume V, cujo raio é a metade do raio da base do cone. Determine o volume do cone, em função de V.



17.34) A seção meridiana de um cone reto é um triângulo retângulo de área igual a 25 cm². Calcule a geratriz e a área da base do cone.

17.35) A razão entre a área da base de um cone reto e a área da sua seção meridiana é $\pi\sqrt{3}$. Dê o ângulo formado pela geratriz com o plano da base.

17.36) Calcule a razão entre a área da base e a área da seção meridiana de um cone eqüilátero.

17.37) Duas geratrizes de um cone reto são perpendiculares entre si e determinam na circunferência da base uma corda de medida igual ao dobro da altura do cone. Calcule o ângulo que a geratriz forma com o plano da base.

17.38) No problema anterior, sendo ℓ o comprimento da geratriz, calcule a área da seção meridiana do cone.

17.39) O ângulo do vértice da seção meridiana de um cone reto é 120° e a altura é **h**. Um segundo cone é construído com mesmo vértice, sendo a geratriz perpendicular à geratriz do cone dado. Se o novo cone tem altura **h**, qual é a área da sua seção meridiana?

17.40) Um cone reto tem altura 4 cm e geratriz de 10 cm. Conduz-se um plano pelo vértice, formando 30° com a altura. Calcule a área da seção.

17.41) O raio da base de um cone reto é **r**. O ângulo do vértice da seção meridiana é 120°. Calcule a área da seção que contém duas geratrizes perpendiculares entre si.

17.42) A altura de um cone reto é 6 m. Calcule a área da seção obtida por um plano que contém o vértice, forma 30° com o plano da base e determina na circunferência da base um arco de 120°.

17.43) Pelo vértice de um cone reto de altura **h**, conduz-se um plano que forma 60° com o plano da base e corta na circunferência da base um ângulo de 90°. Qual é a razão entre a área da base e a área da seção?

17.44) A seção meridiana de um cone reto é um triângulo retângulo. Uma seção é tomada por duas geratrizes que formam um ângulo de 60°. Seja α o ângulo que essa seção forma com o plano da base. Calcule tg α.

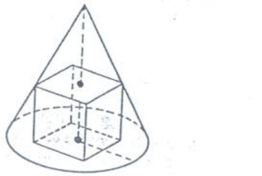
17.45) A altura de um cone reto é 36 cm e o diâmetro da base é 24 cm. Uma seção paralela à base tem área 64π cm². Determine a distância dessa seção ao plano da base.

17.46) A altura de um cone reto é 15 cm. Uma seção paralela à base, de área igual a 36π cm², situa-se à distância de 6 cm da base. Qual é o raio da base do cone?

17.47) Em um cone de altura **h** é inscrita uma pirâmide triangular regular. As faces laterais da pirâmide formam com o plano da base um ângulo α, tal que tg α = 2. Calcule a geratriz do cone.

17.48) Um tetraedro regular é inscrito em um cone. Seja α o ângulo do vértice da seção meridiana do cone. Calcule tg α.

17.49) Um cubo de aresta **a** é inscrito em um cone eqüilátero. Calcule a geratriz do cone.



17.50) Em um cone eqüilátero, inscreve-se um cilindro eqüilátero, de modo que ambos tenham mesmo eixo. Calcule a área da seção meridiana do cone, sabendo que a do cilindro é a².

17.51) Um prisma quadrangular regular é inscrito em um cone eqüilátero. A aresta da base é **a** e a altura do prisma é o dobro dessa medida. Calcule a área da seção meridiana do cone.

17.52) Calcule a área lateral de um cone reto, sabendo que um cilindro reto com a mesma base do cone e altura igual à metade da geratriz do cone tem área lateral igual a S.

17.53) Em um cone reto o raio da base é **r** e a área lateral é o dobro da área da base. Calcule a geratriz do cone.

17.54) Calcule a altura de um cone eqüilátero cuja área lateral é S.

17.55) A área da base de um cone reto é 9π cm² e a sua altura é 4 cm. Calcule a área lateral.

17.56) Um cone e um cilindro retos têm mesma base, mesma altura e mesma área lateral. Calcule o ângulo do vértice da seção meridiana do cone.

17.57) Um cone eqüilátero e um cilindro eqüilátero têm mesma área lateral. Qual é a razão entre as suas áreas totais?

17.58) Um cone e um cilindro retos têm mesmas base, altura e área lateral. Qual é o ângulo que a geratriz do cone forma com o plano da base?

17.59) Calcule a área total de um cone reto, sabendo que a sua seção meridiana é um triângulo retângulo de perímetro igual a P.

17.60) Um triângulo retângulo gira em torno da hipotenusa. Calcule a área da superfície do sólido gerado, se os catetos são 10 cm e 24 cm.

17.61) Pelo vértice de um cone reto conduz-se um plano que forma 30° com o plano da base e corta, na circunferência da base, um arco de 60°. Calcule a área lateral do cone, sabendo que a distância desse plano ao centro da base é igual a **a**.

17.62) Um plano que contém o vértice de um cone reto e corta, na circunferência da base, um arco de 90°, determina uma seção em forma de triângulo eqüilátero de área S. Calcule a área lateral do cone.

17.63) O desenvolvimento da superfície lateral de um cone de geratriz igual a 30 cm é um setor de 120°. Calcule o raio da base do cone.

17.64) Um cone reto tem raio da base **r** e geratriz **g**. Qual é o ângulo do setor circular obtido desenvolvendo-se a superfície lateral desse cone?

17.65) De um setor circular de 90° e raio 18 cm obtém-se a superfície lateral de um cone. Calcule a área total desse cone.

17.66) De um setor circular de 90°, cuja área é S, obtém-se a superfície lateral de um cone. Calcule a área total desse cone.

17.67) Uma superfície cônica é obtida a partir de um semicírculo. Qual é o ângulo do vértice da seção meridiana dessa superfície cônica?

17.68) A área lateral de um cone reto é 20 cm² e a sua superfície lateral provém de um setor circular de 72°. Determine a área total do cone.

17.69) Um cilindro eqüilátero é inscrito em um cone eqüilátero. Calcule a razão entre as áreas laterais do cone e do cilindro.

17.70) A base menor de um tronco de cone tem raio 8 cm. A altura é 6 cm e a geratriz forma 45° com o plano da base. Calcule a área lateral do tronco.

17.71) A área lateral de um tronco de cone é 128π cm² e a geratriz mede 8 cm. Calcule os raios das bases, sabendo que são proporcionais a 2 e 5.

17.72) A geratriz de um tronco de cone mede ℓ e forma 60° com o plano da base. O raio da base maior é três vezes o da menor. Calcule a área total do tronco.

17.73) A geratriz de um tronco de cone mede ℓ, forma 60° com o plano da base e é perpendicular à diagonal da seção meridiana do tronco. Calcule a área lateral do tronco.

17.74) A geratriz de um tronco de cone forma 60° com o plano da base e é perpendicular à diagonal da seção meridiana do tronco. Sendo R o raio da base maior, calcule a área total do tronco.

17.75) Um tronco de cone reto tem altura 16 cm e raios das bases 8 cm e 20 cm. Calcule o raio da base de um cilindro reto que tem a mesma altura e a mesma área total do tronco de cone.

17.76) Um tronco de cone reto tem altura 20 cm e raios das bases 15 cm e 30 cm. Calcule a geratriz de um cone eqüilátero cuja área total é igual à área lateral do tronco dado.

17.77) Um tronco de cone tem áreas das bases iguais a 100π cm² e 256π cm² e área da seção meridiana igual a 208 cm². Calcule a área lateral do tronco.

17.78) Um tronco de cone tem área lateral 90π cm² e o raio da base menor é 4 cm. Sabendo que o raio da base maior é igual à soma da metade da geratriz com o raio da base menor, calcule o raio da base maior.

17.79) Um tronco de cone tem geratriz ℓ e a sua seção meridiana é um trapézio circunscritível a uma circunferência. Calcule a área lateral do tronco.

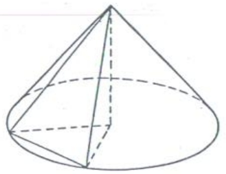
17.80) Uma seção de um tronco de cone reto por um plano que contém duas geratrizes é um trapézio com ângulo de 60° e corta nas circunferências das bases arcos de 90°. Sendo 100 cm² a área desta seção, calcule a área lateral do tronco.

17.81) Os raios das bases de um tronco de cone reto são 12 cm e 6 cm e a área da base maior é média geométrica entre as áreas lateral e da base menor. Calcule a área da seção meridiana.

17.82) A altura de um cone é igual a H e o ângulo entre a geratriz e o plano da base é 45°. Calcule a área da seção que contém duas geratrizes que formam entre si 30°.

17.83) Em um tronco de cone de raios das bases R e r (R > r) toma-se uma seção por um plano que forma 45° com o plano da base a corta arcos de 45° nas circunferências das bases. Calcule a área desta seção.

17.84) A altura de um cone circular reto é igual ao raio r da base. Pelo vértice do cone conduz-se um plano que determina na circunferência da base um arco de 60°. Calcule a área da seção.



17.85) A altura de um cone circular reto é igual ao raio r da base. Pelo vértice do cone conduz-se um plano que determina na circunferência da base um arco de 90°. Calcule a área da seção.

17.86) A altura de um cone é 20 cm e o raio da base é 25 cm. Calcule a área da seção do cone por um plano que contém o vértice e cuja distância ao centro da base é 12 cm.

17.87) As bases de um tronco de cone têm áreas 1 m² e 49 m². A área de uma seção paralela é igual à sua média artimética. Se a altura do tronco é H, quais são as alturas dos dois tronos determinados por essa seção?

17.88) Um trono de cone tem altura igual a 10 cm e os raios das bases 8 cm e 18 cm. A que distância da base menor deve ser tomada uma seção paralela às bases, cuja área seja a média geométrica das áreas das bases?

17.89) Num cone de altura **h**, a geratriz forma ângulo de 60° com o plano da base. Cortando-se o cone por um plano paralelo à base, distante **d** dessa base, obtém-se um tronco de cone cuja área lateral é igual à área da base do cone. Determine **d**.

17.90) As bases de um tronco de cone de bases paralelas têm raios r_1 e r_2 ($r_1 < r_2$). A área lateral do tronco é igual à soma das áreas das bases. Sabendo que $r_1 = 10$ cm e que a geratriz do tronco forma ângulo de 60° com o plano da base maior, calcule o raio da base maior.

17.91) Um cone circular reto, cuja altura é igual ao raio da base, está inscrito em uma pirâmide de base triangular. A área total da pirâmide é o dobro da do cone. Calcule o volume da pirâmide, sabendo que a área lateral do cone é igual a $\pi\sqrt{2}$.

17.92) Um cone de volume V tem o raio da base triplicado e a altura reduzida à metade. Qual é o volume do novo cone?

17.93) A altura de um cone é multiplicada por 12. Como deve mudar o raio da base para que o volume triplique?

17.94) Em um cone reto de área lateral S, a distância do centro da base à geratriz é **d**. Calcule o volume do cone.

17.95) Em um cone reto, a área da seção meridiana é S e o comprimento da circunferência da base é ℓ. Calcule o volume do cone.

17.96) Um cone reto tem geratriz **g** e o comprimento da circunferência da base é ℓ. Calcule o volume do cone.

17.97) Um cone tem área da base igual a 16π cm² e área lateral 20π cm². Calcule o seu volume.

17.98) Um cone tem área da base igual a 9π cm² e área total 24π cm². Calcule o seu volume.

17.99) A área da seção meridiana de um cone reto é 120 cm² e a geratriz mede 17 cm. Calcule o volume do cone.

17.100) Em um cone reto, a área lateral e o volume são numericamente iguais. Dê a relação entre a altura e o raio da base.

17.101) Em um cone reto, a área total e o volume são numericamente iguais. Dê a relação entre a altura e o raio da base.

17.102) Em um cone reto, a área da base e o volume são numericamente iguais. Dê a relação entre a altura e o raio da base.

17.103) O volume de um cone é $\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$ m³ e o raio da base é 4 m. Calcule o ângulo central do desenvolvimento da superfície lateral do cone.

17.104) Um cone é inscrito e outro é circunscrito a uma pirâmide triangular regular. Calcule a razão entre os volumes desses cones.

17.105) Em uma pirâmide hexagonal regular, a aresta lateral é o dobro da aresta da base. O apótema da base é 6 cm. Calcule os volumes dos cones inscrito e circunscrito à pirâmide.

17.106) Um cubo é inscrito em um cone eqüilátero, de modo que uma de suas faces está contida no plano da base do cone e os quatro vértices da face oposta pertencem à superfície lateral do cone. Calcule a razão dos volumes do cone e do cubo.

17.107) A base de uma pirâmide é um triângulo retângulo. As faces laterais que contêm os catetos formam com a base ângulos de 30° e 60°. Um cone circular reto está circunscrito à pirâmide. Determine o volume do cone, se a altura da pirâmide é **h**.

17.108) Um cone reto é inscrito em um cubo. Calcule a razão entre os seus volumes.

17.109) Um cone eqüilátero é inscrito em um prisma quadrangular regular. Calcule a razão entre os seus volumes.

17.110) Um cone eqüilátero é inscrito em um prisma hexagonal regular. Calcule a razão entre os seus volumes.

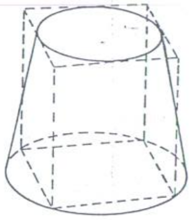
17.111) Em um tronco de cone reto a altura é igual ao raio da base menor. O raio da base maior é 12 cm e a geratriz forma 45° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

17.112) Os raios das bases de um tronco de cone reto são 3 cm e 10 cm e o volume é $1\,112\pi$ cm³. Calcule a altura e a geratriz do tronco.

17.113) A altura de um tronco de cone é 4 m e o raio de uma das bases é 6 m. Calcule a área lateral do tronco, cujo volume é 228π m³.

17.114) A geratriz de um tronco de cone forma 60° com o plano da base e sua medida ℓ é igual ao diâmetro da base menor. Calcule o volume do tronco.

17.115) Calcule o volume de um tronco de cone se uma de suas bases é um círculo inscrito numa face de um cubo de aresta **a**, e a outra base é um círculo circunscrito à base oposta desse cubo.



17.116) O volume de um tronco de cone é igual a 416π cm³. Os raios das bases e a geratriz são proporcionais a 5, 2 e 5. Calcule a área total do tronco.

17.117) Em um tronco de cone a seção meridiana é um trapézio cujas diagonais são perpendiculares entre si. A geratriz tem medida ℓ e forma 60° com o plano da base. Calcule o volume do tronco.

17.118) Em um tronco de cone, o segmento que tem extremidades no centro da base maior e num ponto da circunferência da base menor tem medida **d** e forma 30° com o plano da base. Calcule o volume do tronco, sabendo que esse segmento é perpendicular à geratriz.

17.119) Os raios das bases de um tronco de cone reto são 6 cm e 8 cm. Uma pirâmide quadrangular regular é inscrita nesse tronco e tem volume igual a 1 280 cm³. Calcule o volume do tronco.

17.120) Em um tronco de cone reto, a circunferência inscrita na seção meridiana tem raio R e o raio da base maior é o dobro do da menor. Calcule o volume do tronco.

17.121) A circunferência inscrita na seção meridiana de um tronco de cone tangencia as geratrizes em pontos cuja distância é igual a **a**. Sabendo que as geratrizes formam 45° com o plano da base, calcule o volume do tronco.

17.122) Dado um tronco de cone reto, considere-se uma superfície cônica com vértice no centro da base maior do tronco e com base coincidindo com a base menor do tronco. Calcule a relação entre os raios das bases do tronco ($r_1 < r_2$) sabendo que aquela superfície cônica divide o tronco em duas partes cujos volumes estão na razão de 4 para 15 (a parte menor é o cone).

17.123) Inscreve-se um cone em um tronco de cone reto, de modo que a base do cone coincide com a base maior do tronco e o seu vértice é o centro da base menor do tronco. Se o volume do cone é a metade do do tronco, calcule a relação entre os raios das bases do tronco ($r_1 < r_2$)

17.124) Um tetraedro regular de aresta **a** é inscrito em um tronco de cone reto de geratriz **a**, de modo que uma face do tetraedro é inscrita na base menor do tronco. Calcule o volume do tronco.

17.125) Em um tronco de cone reto as áreas das bases são π cm² e 16π cm² e a área da seção meridiana é $\frac{245}{4}$ cm². Calcule a altura do cilindro eqüilátero que tem o mesmo volume desse tronco.

17.126) Em um tronco de cone reto é cavado um furo cilíndrico com o mesmo eixo do tronco, cujo diâmetro é igual ao da base menor do tronco. Se a altura do tronco é igual a três vezes o raio da base menor e a geratriz é igual a cinco vezes esse raio, calcule o volume do sólido resultante.

17.127) Um tronco de cone reto tem raios das bases r e 2r e altura 4r. A que distância da base maior deve ser tomado um ponto V, sobre o eixo do tronco, de modo que tenham mesmo volume os dois cones de vértice V e bases nas bases do tronco?

17.128) No problema anterior, qual é o volume do sólido obtido retirando-se do tronco os dois cones?

17.129) Dado um tronco de pirâmide triangular regular, circunscreve-se a ele um tronco de cone cujas bases são os círculos circunscritos às bases do tronco de pirâmide. Qual é a razão entre os volumes dos dois troncos?

17.130) Dado um tronco de pirâmide triangular regular, inscreve-se nele um tronco de cone cujas bases são os círculos inscritos nas bases do tronco de pirâmide. Qual é a razão entre os volumes dos dois troncos?

17.131) Dado um tronco de pirâmide triangular regular, toma-se um tronco de cone cuja base maior é o círculo circunscrito à base maior do tronco de pirâmide e cuja base menor é o círculo inscrito na base menor do tronco de pirâmide. Se V é o volume do tronco de pirâmide, calcule o volume do tronco de cone. Sabe-se que a aresta da base maior do tronco de pirâmide é o dobro da aresta da base menor.

17.132) Dado um tronco de cone reto, toma-se um prisma triangular regular cuja base inferior é inscrita na base maior do tronco e cuja base superior é circunscrita à base menor do tronco. Se V é o volume do prisma, calcule o volume do tronco.

17.133) Em um tronco de cone de altura **a**, a base maior é um círculo circunscrito a um quadrado de lado **a** e a base menor é um círculo inscrito em um triângulo eqüilátero de lado **a**. Calcule o volume do tronco.

17.134) O raio da base de um cone é 16 cm. Calcule a área da seção paralela à base, que divide a altura na razão 2 : 3 (considere dois casos).

17.135) Um vaso cônico de altura 16 cm e raio da base 12 cm contém uma quantidade de líquido igual a $\frac{1}{8}$ do seu volume. Determine o nível do líquido (isto é, a distância do vértice do cone à superfície do líquido).

17.136) Dois planos paralelos à base de um cone de volume V dividem a altura em três partes iguais. Calcule o volume da parte do meio.

17.137) Um plano paralelo à base de um cone divide a altura na razão 1 : 2. Em que razão fica dividido o volume? (Considere dois casos.)

17.138) Os raios das bases de um tronco de cone são 4 cm e 10 cm. Dois planos paralelos às bases dividem a altura do tronco em três partes iguais. Em que proporção fica dividido o volume do tronco?

17.139) Dados os raios das bases R e r ($r < R$), determine a razão entre os volumes do tronco de cone e do correspondente cone não truncado.

17.140) Em que razão fica dividido o volume de um tronco de cone por um plano paralelo à base, que divide a altura ao meio? Admita que o raio da base maior é o triplo do da menor.

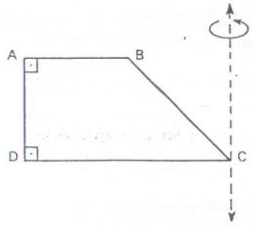
17.141) Dois planos paralelos à base de um cone dividem a área lateral em três partes iguais. Em que proporção fica dividido o volume?

17.142) Um triângulo retângulo ABC, de hipotenusa $\overleftrightarrow{AC}$, gira em torno do cateto $\overleftrightarrow{BC}$. Calcule:

a) o comprimento da circunferência gerada pelo ponto A;
b) a área da superfície gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AB}$;
c) a área da superfície gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AC}$;
d) o volume do sólido gerado pelo triângulo.

17.143) O trapézio ABCD da figura, para o qual AB = AD = a e CD = 2a, gira em torno de um eixo do seu plano, que passa por C e é paralelo ao lado $\overleftrightarrow{AD}$. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados do trapézio;
b) o volume do sólido gerado pelo trapézio.



17.144) Um triângulo eqüilátero ABC de lado **a** gira em torno de um eixo que passa por A e é perpendicular ao lado $\overleftrightarrow{AB}$. Calcule:

a) a área da superfície gerada pela altura $\overleftrightarrow{AH}$;
b) a área da superfície gerada pelo lado $\overleftrightarrow{AC}$;
c) o volume do sólido gerado pelo triângulo.

17.145) Um losango ABCD de lado **a** e ângulo agudo de 60° ($\overleftrightarrow{AC}$ é a diagonal maior) gira em torno de um eixo do seu plano, que passa pelo ponto C e é perpendicular à diagonal $\overleftrightarrow{AC}$. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados do losango;
b) o volume do sólido gerado pelo losango.

17.146) Um trapézio isósceles de bases **a** e **3a** e altura **a** gira em torno de um eixo do seu plano, que passa por uma extremidade da base maior e é perpendicular às bases. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados do trapézio;
b) o volume do sólido gerado pelo trapézio.

17.147) Um triângulo de lados AB = 26 cm, AC = 28 cm e BC = 30 cm gira em torno do lado $\overleftrightarrow{AC}$. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados;
b) o volume do sólido gerado pelo triângulo.

17.148) Um triângulo retângulo de hipotenusa **2a** e ângulo de 30° gira em torno de um eixo que passa pelo vértice do ângulo reto e é paralelo à hipotenusa. Determine:

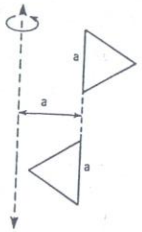
a) a área da superfície gerada pelos lados do triângulo;
b) o volume do sólido gerado pelo triângulo.

17.149) Calcule o volume e a área total do sólido gerado pela rotação de um hexágono regular de lado **a**, em torno da sua maior diagonal.

17.150) Um triângulo eqüilátero de lado **a** gira em torno de um eixo paralelo a um de seus lados e à distância **a** dele. Calcule (considerando dois casos):

a) a área da superfície gerada pelos lados do triângulo;

b) o volume do sólido gerado pelo triângulo.



17.151) Um hexágono regular de lado **a** gira em torno de um de seus lados. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados; b) o volume do sólido gerado.

17.152) Um losango de lado **a** e ângulo agudo de 60° gira em torno de um eixo que passa pelo vértice de um ângulo agudo e é perpendicular a um lado. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados; b) o volume do sólido gerado.

17.153) Um trapézio isósceles, de bases 9 cm e 15 cm e lado 5 cm, gira em torno de um eixo do seu plano, que passa por uma extremidade da base maior e é perpendicular a ela. Calcule:

a) a área da superfície gerada pelos lados; b) o volume do sólido gerado.

17.154) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação de um triângulo ABC de lados AB = 10 cm, AC = BC = 13 cm em torno do lado $\overleftrightarrow{AC}$.

17.155) Um triângulo ABC gira em torno do lado $\overleftrightarrow{AB}$. Sendo S a área do triângulo e ℓ o comprimento da circunferência gerada pelo vértice C, calcule o volume do sólido gerado.

17.156) Determine o volume do sólido gerado pela rotação de um trapézio isósceles em torno de sua base menor, sendo as bases 5 cm e 21 cm e o lado 17 cm.

17.157) Um triângulo ABC, de área S, gira em torno do lado $\overleftrightarrow{BC}$, sendo BC = a. Calcule o volume do sólido gerado.

17.158) Um trapézio isósceles, com ângulo agudo de 60° e lado lateral de 6 cm, tem a diagonal perpendicular ao lado lateral. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse trapézio em torno do lado lateral.

Capítulo

18

Esfera

18.1 — ESFERA E SUPERFÍCIE ESFÉRICA

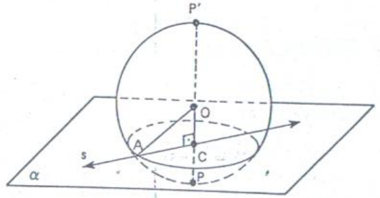
No item 9.6 vimos definidas as noções de esfera e superfície esférica, que recordamos aqui.

Sejam dados um ponto O e uma medida **r**. O conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a O é *menor ou igual a r* chama-se esfera de centro O e raio r.

Chama-se superfície esférica o conjunto dos pontos da esfera cuja distância ao centro O é *igual a r*.

18.2 — SEÇÃO PLANA DE UMA ESFERA. PÓLOS

Consideremos um plano α cuja distância ao centro O da esfera *seja menor do que o raio r*. A interseção desse plano com a esfera é um círculo de centro C.



Determinemos a relação entre os raios da esfera e desse círculo. Sejam ρ o raio do círculo e **d** a distância do plano do círculo ao centro da esfera. Conforme se vê na figura, pode-se escrever

$$OA^2 = OC^2 + CA^2$$

isto é:

$$r^2 = d^2 + \rho^2$$

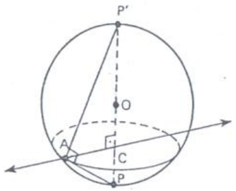
portanto:

$$\boxed{\rho = \sqrt{r^2 - d^2}}$$

Os pontos P e P′ que a reta $\overleftrightarrow{OC}$ determina na superfície esférica são denominados pólos. As distâncias dos pólos ao ponto A chamam-se *distâncias polares*. Podemos indicá-las assim:

$$PA = p \qquad P'A = p'$$

Observemos a figura. O triângulo PAP′ é retângulo em A, sendo que podemos aplicar nele a conhecida *relação métrica*:



$$PA^2 = PP' \cdot PC$$

Mas PA = p, PP′ = 2r e PC = r − d, donde

$$p^2 = 2r\,(r - d)$$

isto é:

$$\boxed{p = \sqrt{2r\,(r - d)}}$$

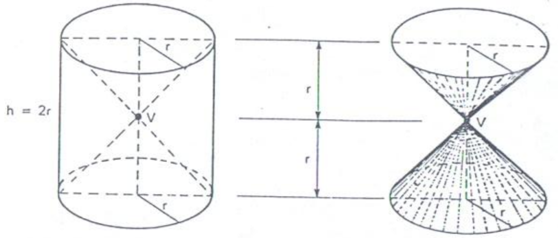
Analogamente, encontraremos

$$\boxed{p' = \sqrt{2r\,(r + d)}}$$

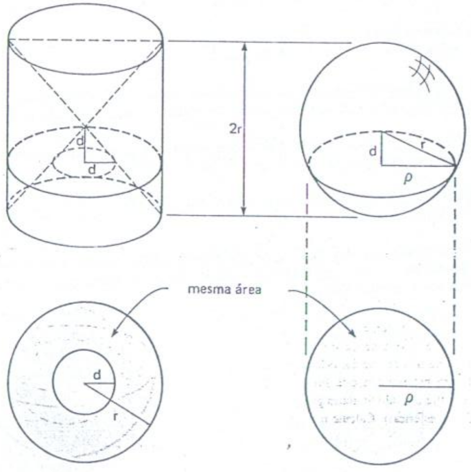
18.3 — VOLUME DA ESFERA

> O volume de uma esfera de raio **r** é dado pela expressão
>
> $$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Este resultado pode ser obtido pela aplicação do *princípio de Cavalieri* (veja o item 13.5). Para isto, imaginemos um cilindro eqüilátero cujo raio da base seja **r**, igual ao raio da esfera. Seja V o centro do cilindro, isto é, o ponto médio



do seu eixo. Podemos considerar *dois cones*, com vértice nesse ponto V e tendo como bases as bases do cilindro. Suponhamos que estes dois cones são *retirados* do cilindro e vamos tomar o sólido que resulta, ou seja, a parte do cilindro situada fora dos dois cones. Este sólido será denominado **sólido auxiliar** (em verdade, seu nome clássico é ***anticlepsidra***).



Vamos imaginar que a esfera tangencia os dois planos das bases do cilindro. Um plano paralelo a estes, situado a uma distância **d** ($d < r$) do centro da esfera, intercepta o sólido auxiliar segundo uma *coroa circular* e a esfera, segundo um *círculo*. As circunferências que limitam a coroa circular têm raios **d** e **r**, logo a área da coroa é

$$S_{coroa} = \pi r^2 - \pi d^2$$

A área do círculo determinado na esfera é

$$S_{círculo} = \pi \rho^2$$

Mas, como vimos no item 18.2, tem-se $\rho^2 = r^2 - d^2$. Assim,

$$S_{círculo} = \pi (r^2 - d^2) = \pi r^2 - \pi d^2$$

Nota-se, então, que $S_{coroa} = S_{círculo}$. Pelo princípio de Cavalieri, isto acarreta que *o volume da esfera é igual ao volume do sólido auxiliar.*

Podemos, então, calcular este volume tomando o volume do cilindro, *menos* duas vezes o volume de um dos cones retirados. Temos

$$V_{cilindro} = S_b h = (\pi r^2)\, h = (\pi r^2)\, 2r = 2\pi r^3$$

$$V_{cone} = \frac{1}{3} (\pi r^2) \cdot r = \frac{\pi r^3}{3}$$

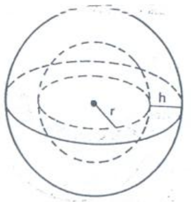
Então, para o volume da esfera obtemos

$$V = V_{cilindro} - 2V_{cone} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Exercício Resolvido

18.1) Duas esferas concêntricas (isto é, de mesmo centro) têm raios r e r + h, como ilustrado ao lado.

a) Calcule o volume da esfera *interna*.
b) Calcule o volume da esfera *externa*.
c) Chamemos de **concha esférica** a parte da esfera externa que está fora da esfera interna (é o sólido limitado pelas duas superfícies esféricas). Calcule o seu volume.



Solução

a) Seja V_1 o volume da esfera interna. Temos

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

b) Seja V_2 o volume da esfera externa. Temos

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi (r + h)^3 = \frac{4}{3} \pi (r^3 + 3r^2h + 3rh^2 + h^3)$$

c) O volume da concha esférica é dado por

$$V = V_2 - V_1 = \frac{4}{3} \pi (3r^2h + 3rh^2 + h^3)$$

ou seja,

$$V = \frac{4\pi h}{3} (3r^2 + 3rh + h^2)$$

18.4 — ÁREA DA SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A determinação de fórmulas para a área lateral de um cone reto, ou de um cilindro reto, é um problema relativamente simples. Já o cálculo da *área de uma superfície esférica* representa um desafio maior, pois não é possível "desenrolar" uma superfície esférica, transformando-a em uma figura plana, como no caso do cone ou do cilindro. Examinando o exercício resolvido 18.1, podemos obter um caminho para chegar à fórmula desejada. Embora o método que usaremos esteja apoiado numa espécie de "conceito de limite", ele é aceitável, dentro de um nível intuitivo.

Seja S a área da superfície esférica de raio r (a *interna*, no exercício 18.1). Parece fácil de se aceitar, intuitivamente, que o produto $S \cdot h$ é uma boa aproximação para o volume V da concha esférica. Tal aproximação torna-se tanto melhor quanto menor fica a espessura **h** da concha. Em outras palavras, o quociente $\frac{V}{h}$ representa uma boa aproximação para a área S, desde que h seja suficientemente pequeno. Assim, parece claro que, se **h** tende a zero, a razão $\frac{V}{h}$ tende ao valor S da área da superfície esférica de raio **r**. Ora, como vimos,

$$V = \frac{4\pi h}{3} (3r^2 + 3rh + h^2)$$

donde

$$\frac{V}{h} = \frac{4\pi}{3} (3r^2 + 3rh + h^2)$$

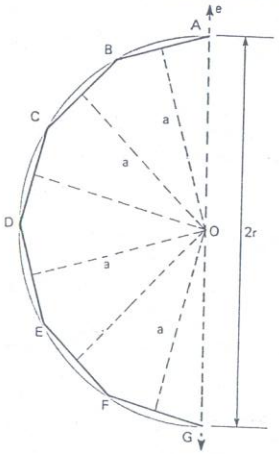
Assim, a área S é dada pela expressão que se obtém desta, supondo $h = 0$:

$$S = \frac{4\pi}{3}(3r^2 + 3r \cdot 0 + 0^2)$$

e então

$$\boxed{S = 4\pi r^2}$$

Outra maneira de se chegar a este resultado é aproveitar as observações feitas no item 17.8. Uma superfície esférica é a superfície de revolução gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo contendo seu diâmetro. A poligonal regular ABCDEFG, inscrita na semicircunferência, gera uma superfície de área



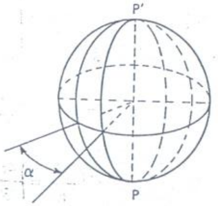
$$S_6 = 2\pi a\,(2r) = 4\pi ar$$

(O índice 6 relaciona-se ao número de lados da poligonal.) É intuitivo que, aumentando-se o número de lados da poligonal considerada, as superfícies de revolução passam a ter áreas cada vez mais próximas da área da superfície esférica. Ora, nestas circunstâncias, o apótema **a** tenderia ao valor do próprio raio **r**. Assim, a área da superfície esférica ficaria igual a

$$S = 4\pi r \cdot r = 4\pi r^2$$

18.5 — FUSO ESFÉRICO

Seja $\overleftrightarrow{PP'}$ um diâmetro de uma superfície esférica de raio **r**. Tomando-se dois semiplanos com origem na reta $\overleftrightarrow{PP'}$, obtemos um *diedro*. A interseção do diedro com a superfície esférica recebe o nome de **fuso esférico**



Um fuso esférico é caracterizado pela medida do diedro correspondente. Utilizando esta medida *em graus*, é fácil notar que um fuso esférico corresponde ao diedro de 90° abrange a quarta parte da superfície esférica; um diedro de 180° determina um fuso que é a metade da superfície esférica. Por extensão, podemos considerar a superfície esférica toda como sendo um fuso cujo diedro mede 360°.

Para calcular a área de um fuso esférico, basta construir a "regra de três":

ângulo		**área**
$\alpha°$	———	S_{fuso}
360°	———	$4\pi r^2$

donde se obtém $$\boxed{S_{fuso} = \frac{4\pi r^2\alpha}{360}}$$ (α em graus).

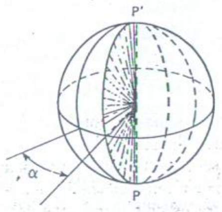
Podemos exprimir esta área utilizando a medida do diedro em *radianos*. Neste caso, teremos a "regra de três":

ângulo		**área**
α rad	———	S_{fuso}
2π rad	———	$4\pi r^2$

donde se obtém $$\boxed{S_{fuso} = 2r^2\alpha}$$ (α em radianos).

18.6 — CUNHA ESFÉRICA

O diedro cuja aresta contém o diâmetro $\overleftrightarrow{PP'}$ da esfera de raio **r** intercepta a esfera segundo um *sólido* que se denomina **cunha esférica**. Note que este sólido é limitado por dois semicírculos de raio **r** e pelo fuso esférico correspondente a esse mesmo diedro. Podemos calcular o **volume da cunha** como calculamos a área do fuso, isto é, construindo uma "regra de três". Se α é a medida do diedro *em graus*, temos



ângulo		volume
$\alpha°$	—	V_{cunha}
360°	—	$\frac{4\pi r^3}{3}$

donde

$$V_{cunha} = \frac{4\pi r^3 \alpha}{360 \cdot 3} \quad (\alpha \text{ em graus}).$$

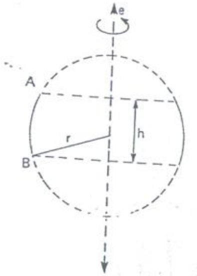
Se α é a medida do diedro *em radianos*, temos

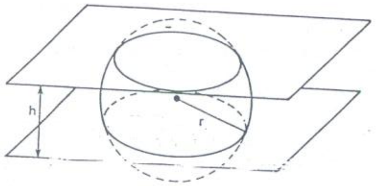
ângulo		volume
α rad	—	V_{cunha}
2π rad	—	$\frac{4\pi r^3}{3}$

donde

$$V_{cunha} = \frac{2r^3\alpha}{3} \quad (\alpha \text{ em radianos}).$$

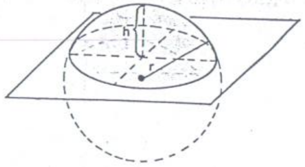
18.7 — ZONA ESFÉRICA E CALOTA





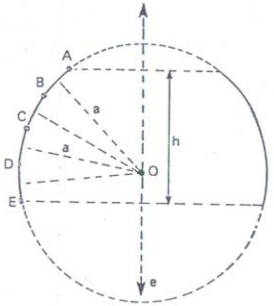
A parte de uma superfície esférica compreendida entre dois planos paralelos é denominada zona esférica. A zona esférica pode ser considerada, também, como sendo a superfície de revolução gerada pela rotação de um arco de circunferência em torno de um diâmetro coplanar com ele, e que não o corte. A distância entre os dois planos que determinam a zona é a altura da zona.

Até aqui estamos subentendendo que os dois planos realmente *cortam* a superfície esférica. Se um dos planos corta e o outro *tangencia* a superfície esférica, obtemos uma zona esférica *de uma so base*, que é denominada calota.



Podemos mostrar que a área de uma zona esférica pode ser obtida pela expressão

$$S = 2\pi rh$$



onde **h** é a altura da zona e **r** é o raio da superfície esférica. Para isto, basta considerar uma poligonal regular inscrita no arco que gera a zona. Como vimos no item 17.8, a poligonal gera uma superfície de área igual a

$$S_4 = 2\pi ah$$

(O índice 4 refere-se ao caso da figura ao lado, onde a poligonal tem quatro segmentos.) Se o número de lados da poligonal aumenta, a área obtida tende à área da zona. É claro que o apótema **a** tende a ficar igual ao raio **r**. Assim, a área da zona é

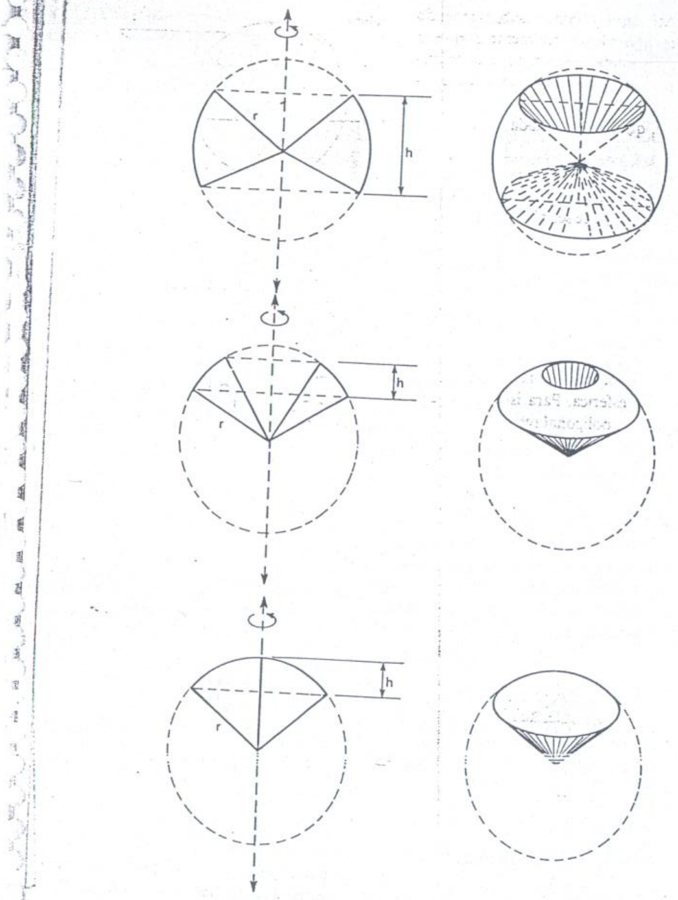
$$S = 2\pi rh$$

Esta expressão vale, também, para a calota.

É interessante notar que a superfície esférica toda pode ser considerada como sendo uma zona, de altura h = 2r. Teríamos de volta a expressão da área da superfície esférica: $S = 4\pi r^2$.

18.8 — SETOR ESFÉRICO

Imaginemos um *setor circular* contido em um círculo de raio **r** e um eixo de rotação que contém um diâmetro desse círculo, mas não corta o arco do setor,



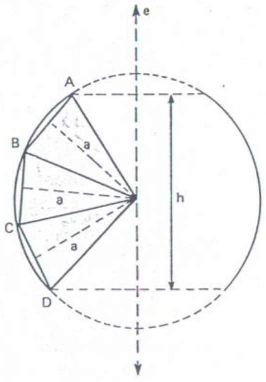
exceto eventualmente em uma extremidade. O sólido gerado pela rotação desse setor circular em torno desse eixo chama-se **setor esférico**. Note que a parte da superfície esférica que limita o setor esférico é uma *zona* (ou, eventualmente,

uma *calota*). Podemos mostrar que o volume de um setor esférico pode ser obtido pela expressão

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

onde **r** é o raio do setor e **h** é a altura da zona esférica (ou da calota) que corresponde ao setor esférico.

Para isto, basta considerar um *setor poligonal regular* inscrito no setor circular considerado, lembrando em seguida as observações feitas no item 17.9. O setor poligonal gera um sólido de revolução cujo volume é dado por



$$V_3 = \frac{1}{3} S_{poligonal} \cdot a$$

apótema e $S_{poligonal}$ é a área da superfície de revolução gerada pela poligonal ABCD (o índice 3 refere-se ao número de lados da poligonal). É intuitivo que, aumentando-se o número de lados dessa poligonal, ao mesmo tempo o apótema **a** tende ao valor do raio **r** e a área S tende à área da zona esférica correspondente. Assim, o volume do setor esférico fica

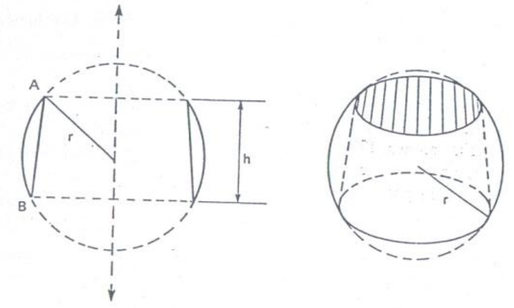
$$V = \frac{1}{3}(2\pi r h) \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

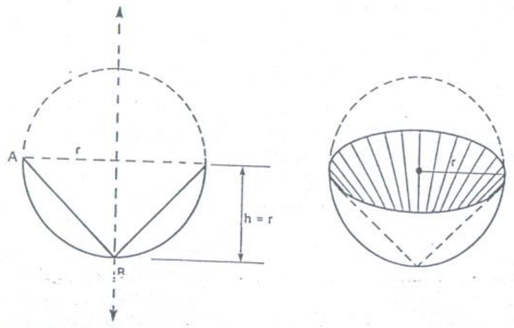
É interessante notar que a esfera toda pode ser considerada como sendo um setor esférico de altura h = 2r (gerado pela rotação do semicírculo em torno de seu diâmetro). Teríamos de volta a expressão do volume da esfera:

$$V = \frac{2}{3}\pi r^2 \cdot (2r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

18.9 — ANEL ESFÉRICO

O arco $\overset{\frown}{AB}$ e a corda $\overline{AB}$ de uma circunferência limitam uma figura plana chamada **segmento circular**. Imaginemos um segmento circular contido em um círculo de raio **r** e um eixo de rotação que contém um diâmetro desse círculo, mas não corta o arco do segmento circular, exceto eventualmente em uma extremidade.

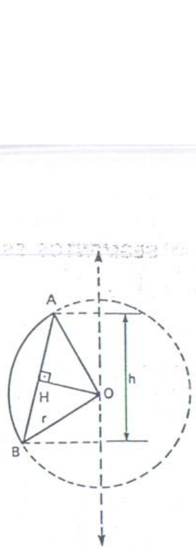




O sólido gerado pela rotação desse segmento circular em torno desse eixo chama-se **anel esférico**. Note que, externamente, o anel esférico é limitado por uma zona esférica e, internamente, pela superfície lateral de um tronco de cone, ou de um cilindro, ou de um cone mesmo, dependendo da posição da corda $\overline{AB}$ em relação ao eixo de rotação.

Podemos mostrar que o volume de um anel esférico pode ser obtido pela expressão

$$V = \frac{1}{6}\pi(AB)^2 \cdot h$$



O volume do anel esférico é igual ao volume do *setor esférico* gerado pelo **setor circular OAB** *menos* o volume do *sólido de revolução* gerado pelo **triângulo OAB**.

O volume do setor esférico é, como vimos no item anterior, igual a

$$V_1 = \frac{2}{3}\pi r^2 h$$

O sólido de revolução gerado pelo triângulo OAB tem volume igual a

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{AB} \cdot OH$$

(como vimos no item 17.9). Por outro lado, a área gerada pela rotação do segmento $\overline{AB}$ é (conforme o item 17.8): $S_{AB} = 2\pi \cdot (OH) \cdot h$.

Assim, $V_2 = \frac{2}{3}\pi (OH)^2 h$.

Para o volume do anel esférico, temos:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi (OH)^2 h = \frac{2}{3}\pi (r^2 - OH)^2 . h$$

Mas $r^2 - (OH)^2 = (HB)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{(AB)^2}{4}$ e assim

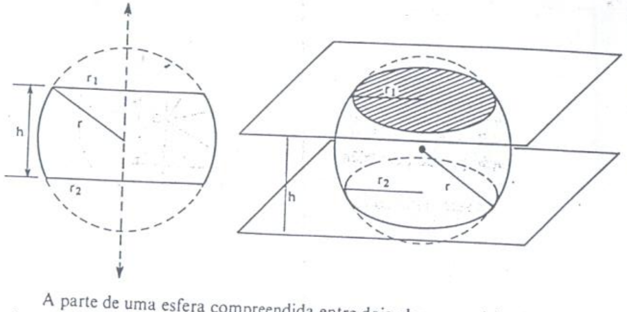
$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{(AB)^2}{4} \cdot h = \frac{1}{6}\pi (AB)^2 h$$

Note que, no caso em que o segmento circular considerado abrange todo o semicírculo, cujo diâmetro está contido no eixo de rotação, o anel esférico alcança toda a extensão da esfera. Neste caso, teríamos $AB = 2r$ e $h = 2r$, logo o volume da esfera fica

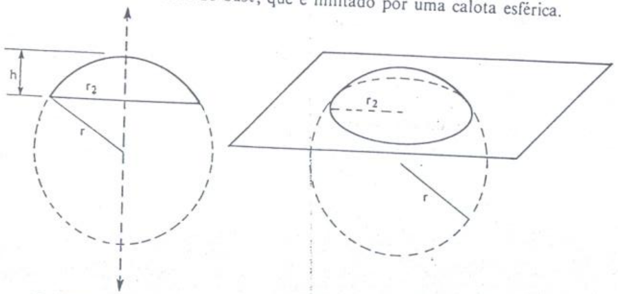
$$V = \frac{1}{6}\pi (2r)^2 \cdot 2r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

como já sabíamos.

18.10 — SEGMENTOS ESFÉRICOS



A parte de uma esfera compreendida entre dois planos paralelos é um sólido denominado segmento esférico. Ele é limitado lateralmente por uma zona esférica e apresenta como *bases* círculos contidos em cada um dos planos. É claro que o segmento esférico tem duas bases unicamente quando os dois planos cortam a esfera. Se um dos planos corta a esfera e o outro a *tangencia*, obtemos um segmento esférico de uma só base, que é limitado por uma calota esférica.

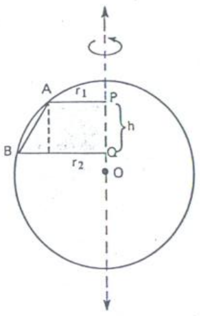


Podemos mostrar que o volume de um segmento esférico pode ser obtido pela expressão

$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)$$

onde r_1 e r_2 são os raios das bases.

Para isso, notemos, inicialmente, que o volume do segmento esférico é igual ao volume do *anel esférico* gerado pelo segmento circular de corda $\overline{AB}$, *mais* o volume do *tronco de cone* gerado pela rotação do trapézio ABQP (veja a figura a seguir).



O volume do anel esférico, como vimos no item 18.9, é igual a $V_1 = \frac{1}{6}\pi\,(AB)^2 h$. O volume do tronco de cone (veja o exercício 17.19) é igual a

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi\,(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\,h = \frac{1}{6}\pi\,(2r_1^2 + 2r_1 r_2 + 2r_2^2)\,h$$

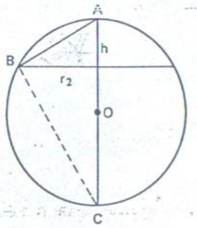
Mas $(AB)^2 = (r_2 - r_1)^2 + h^2 = r_2^2 - 2r_1 r_2 + r_1^2 + h^2$

Assim, o volume do segmento esférico fica

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{6}\pi\,(r_2^2 - 2r_1 r_2 + r_1^2 + h^2 + 2r_1^2 + 2r_1 r_2 + 2r_2^2)\,h = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2)$$

No caso de um segmento esférico de uma só base, basta considerar um dos raios igual a zero. Pondo, por exemplo, $r_1 = 0$, temos

$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 3r_2^2)$$



É possível, entretanto, escrever esta fórmula em função do raio r da esfera. Basta notar que no triângulo retângulo ABC vale a conhecida relação métrica

$$r_2^2 = h\,(2r - h) = 2hr - h^2$$

e então

$$V = \frac{1}{6}\pi h\,(h^2 + 6hr - 3h^2) = \frac{1}{3}\pi h^2\,(3r - h)$$

18.2) Determine o raio da esfera inscrita em um cubo de aresta **a**.

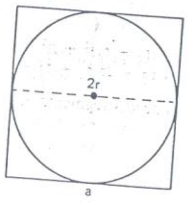
Solução

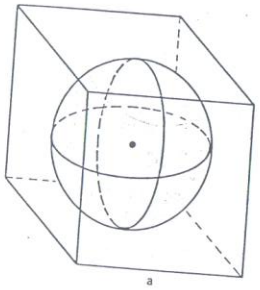
Basta notar que o diâmetro da esfera é igual à aresta do cubo:

$$2r = a$$

donde

$$r = \frac{a}{2}$$





18.3) Determine a aresta de um cubo inscrito em uma esfera de raio **r**.

Solução

Basta notar que a *diagonal do cubo* (segmento $\overleftrightarrow{AB}$ indicado na figura) é um *diâmetro da esfera*:

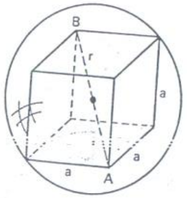
$$AB = 2r$$

Como vimos (item 13.3), a diagonal do cubo é dada por

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

Assim, $a\sqrt{3} = 2r$, donde

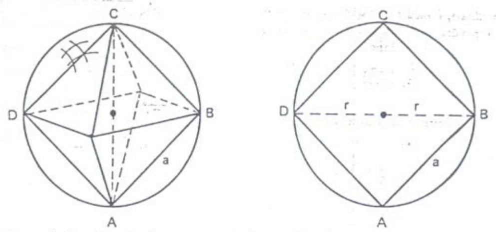
$$a = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$$



18.4) Calcule a aresta de um octaedro regular inscrito em uma esfera de raio **r**.

Solução

Basta notar que o diâmetro da esfera é igual à diagonal do quadrado ABCD. Temos então $2r = a\sqrt{2}$, logo $a = r\sqrt{2}$.



18.5) Calcule o raio da esfera inscrita em um octaedro regular de aresta **a**.

Solução

A superfície esférica tangencia a face ABV do octaedro em um ponto P situado sobre a altura $\overleftrightarrow{VM}$ do $\triangle$ ABV. Assim, o raio $\overline{CP}$ é a altura do $\triangle$ VCM que pode ser visto na ilustração. De uma conhecida relação métrica (veja item 11.3) temos

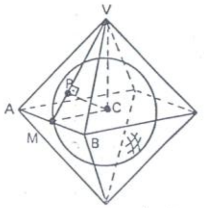
$$(CP) \cdot (VM) = (CM) \cdot (CV)$$

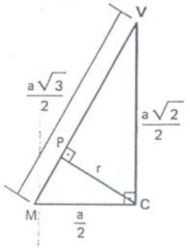
ou seja

$$r \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

e daí resulta

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$



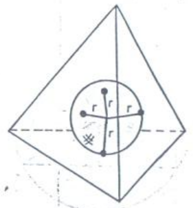


18.6) Determine o raio da esfera inscrita em um tetraedro regular de aresta **a**.

Solução

Seja O o centro da esfera inscrita. As suas distâncias a cada face do tetraedro são iguais ao raio da esfera. Como vimos no exercício 14.81, a soma dessas quatro distâncias é igual à altura do tetraedro, logo $4r = h$. Mas, do item 14.3, sabemos que $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, logo $4r = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, donde $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$. É importante observar, neste exercício, que *o raio da esfera inscrita no tetraedro regular é a quarta parte da altura*:

$$r = \frac{h}{4}$$

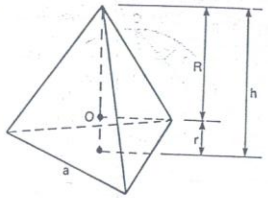


Além disso, é fácil notar que a distância de O a um vértice do tetraedro é o raio R *da esfera circunscrita*, donde obtemos

$$R = \frac{3h}{4}$$

ou, se preferirmos colocá-lo em função da aresta:

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$



18.7) Determine o raio da esfera que tangencia *as arestas* de um tetraedro regular de aresta a.

Solução

As arestas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são tangenciadas pela esfera em seus pontos médios M e N. Observe que

$$\triangle AMO \sim \triangle NGO$$

donde tiramos

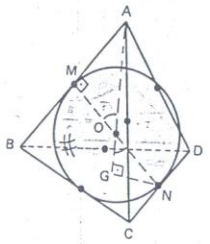
$$\frac{MO}{GO} = \frac{AO}{NO}$$

Mas MO = NO = s (raio da esfera tangente às arestas), GO = r e AO = R (raios das esferas inscrita e circunscrita ao tetraedro). Assim,

$$\frac{s}{r} = \frac{R}{s}, \quad \text{donde} \quad s^2 = Rr$$

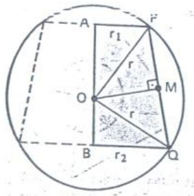
e, finalmente,

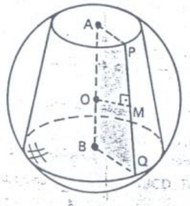
$$s = \sqrt{R \cdot r}$$



18.8) Numa esfera de raio r está inscrito um tronco de cone cujas bases têm raios r_1 e r_2. Determine a altura do tronco. (Suponha que o centro da esfera está no interior do tronco.)

Solução





As distâncias do centro da esfera a cada um dos planos das bases do tronco são dadas por $OA = \sqrt{r^2 - r_1^2}$ e $OB = \sqrt{r^2 - r_2^2}$ e como h = OA + OB, obtemos $h = \sqrt{r^2 - r_1^2} + \sqrt{r^2 - r_2^2}$.

18.9) Um tronco de cone reto de bases paralelas tem raios das bases r_1 e r_2. Qual deve ser a altura do tronco, para que seja possível inscrever nele uma esfera?

Solução

Observe que a geratriz do tronco é igual a $r_1 + r_2$. Além disso, é fácil perceber que o $\triangle POQ$ é retângulo em O. Assim, se r é o raio da esfera inscrita, temos

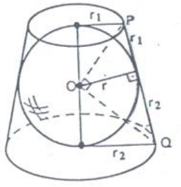
$$r^2 = r_1 r_2$$

ou seja,

$$r = \sqrt{r_1 r_2}$$

Como a altura do tronco é h = 2r, resulta que

$$h = 2\sqrt{r_1 \cdot r_2}$$



Exercícios Propostos

18.10) Uma esfera tem 1,5 m de raio. Calcule:

a) o seu volume (V);
b) a área da sua superfície (S);
c) o raio da seção da esfera por um plano situado a 1 m do centro;
d) as distâncias polares correspondentes a essa seção.

18.11) Uma esfera tem volume igual a $36\pi\ cm^3$. Calcule:

a) o seu raio (r);
b) a área de sua superfície (S).

18.12) A seção de uma esfera por um plano situado a 3 cm do centro tem área igual a $16\pi\ cm^2$. Determine o volume da esfera.

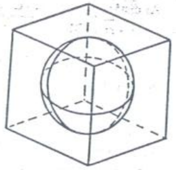
18.13) A seção de uma esfera por um plano que passa pelo centro tem área igual a $12\pi\ cm^2$. Determine:

a) o raio da esfera (r);
b) o volume da esfera (V);
c) a área da superfície esférica (S).

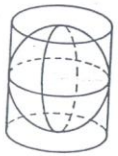
18.14) Numa esfera de raio igual a 6 cm, a que distância do centro deve ser tomada uma seção plana cuja área seja igual à metade da área da seção plana que contém o centro da esfera?

18.15) Numa esfera de volume igual a $\frac{1\,372\pi}{3}\ cm^3$ toma-se uma seção plana cuja área é igual a $24\pi\ cm^2$. Qual é a distância dessa seção ao centro da esfera?

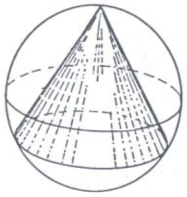
18.16) Determine o volume de uma esfera inscrita num cubo de aresta **a**.



18.17) Considere uma esfera inscrita em um cilindro eqüilátero. Determine a razão entre a área da superfície esférica e a área lateral do cilindro.



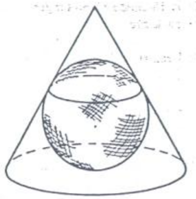
18.18) Um cone eqüilátero está inscrito em uma esfera. Determine a razão entre os volumes desses dois sólidos.



18.19) Um cubo está inscrito em uma esfera de raio **r**. Determine a razão entre os volumes desses dois sólidos.

18.20) Considere um cilindro eqüilátero inscrito numa esfera de raio **r**. Determine a razão entre os volumes desses dois sólidos.

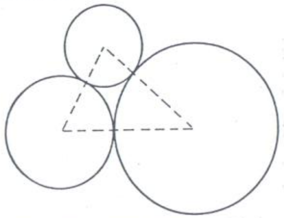
18.21) Uma esfera está inscrita em um cone eqüilátero. Determine a razão entre os volumes desses dois sólidos.



18.22) Sejam duas esferas das quais uma tem área igual ao dobro da área da outra. Determine a razão entre os seus volumes.

18.23) Sejam duas esferas das quais uma tem o volume igual ao dobro do volume da outra. Determine a razão entre as áreas das duas superfícies esféricas.

18.24) Os centros de três esferas que se tangenciam duas a duas, externamente (como a figura indica), formam um triângulo de lados 3, 4 e 5. Determine a soma dos volumes das três esferas.



18.25) Duas seções paralelas de uma esfera de raio 10 cm têm raios iguais a 6 cm e 8 cm. Calcule a distância entre os planos das duas seções.

18.26) A distância entre os centros de duas superfícies esféricas é 9 cm e seus raios são 7 cm e 8 cm. Calcule o raio da circunferência segundo a qual elas se cortam.

18.27) A área do círculo máximo de uma esfera (aquele que contém o centro) é 225π cm² e a área de uma seção paralela a ele é 144π cm². Calcule a distância desta seção ao centro da esfera.

18.28) Dois planos paralelos dividem o diâmetro de uma esfera na proporção 1 : 2 : 3. Em que proporção fica dividida a área da superfície esférica?

18.29) Conduz-se um plano pela extremidade de um raio de uma esfera de raio **r**, formando com ele 30°. Calcule a área da seção obtida.

18.30) Por um ponto de uma superfície esférica de raio **r**, conduz-se um plano que forma 45° com o plano tangente nesse ponto. Calcule a área da seção que esse plano determina na esfera.

18.31) Um plano tangente e um plano secante são conduzidos por um ponto de uma superfície esférica. Calcule o ângulo entre estes planos, sabendo que a área da seção é igual à quarta parte da área do círculo máximo.

18.32) O raio de uma esfera é 13 cm. A que distância do centro da esfera deve passar um plano secante, de modo que a seção obtida circunscreva um triângulo de lados 6 cm, 8 cm e 10 cm?

18.33) A 18 cm do plano tangente a uma esfera de raio 25 cm passa um plano secante. Calcule o raio da seção.

18.34) Uma superfície cônica toca uma esfera ao longo de uma circunferência de raio 12 cm. Se o raio da esfera é 13 cm, calcule a distância do vértice da superfície cônica ao centro da esfera.

18.35) Uma superfície esférica tem como diâmetro a altura de um cone eqüilátero cujo raio da base é 8 cm. Calcule o comprimento da linha de interseção do cone com a superfície esférica.

18.36) Duas superfícies esféricas de mesmo raio r são tais que o centro de cada uma pertence à outra. Calcule o comprimento da circunferência ao longo da qual elas se interceptam.

18.37) A base e a altura de um hemisfério são a base e a altura de um cone reto inscrito nele. Um plano paralelo à base divide a altura ao meio. Sendo S a área da base do cone, calcule a área da coroa circular contida nesse plano, limitada pela superfície esférica e pela superfície lateral do cone.

18.38) Uma pirâmide regular tem como base um quadrado de lado a = 24 cm e altura h = 5 cm. Calcule o raio da esfera inscrita nessa pirâmide.

18.39) Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base igual a 1 cm e altura 2 cm. Calcule o raio da esfera inscrita.

18.40) Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base igual a 6 cm e altura 3 cm. Calcule o raio da esfera circunscrita.

18.41) A base de uma pirâmide é um triângulo eqüilátero de lado a. A aresta lateral $\overline{VA}$ é perpendicular ao plano da base e a face lateral VBC forma 60° com o plano da base. Calcule o raio da esfera inscrita.

18.42) Em uma esfera de raio r está inscrito um tetraedro regular. Calcule o volume do tetraedro. (Veja exercício 18.6.

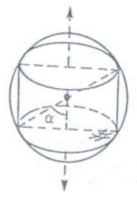
18.43) Calcule o volume da esfera e a área da superfície esférica circunscritas a um tetraedro regular de aresta a. (Veja exercício 18.6.

18.44) Num tetraedro regular, inscreve-se uma esfera de raio r = 10 cm. Calcule o volume do tetraedro. (Veja os exercícios 18.6 e 14.1.)

18.45) Um tetraedro regular tem aresta a. Determine o raio da esfera que tangencia as faces laterais do tetraedro nos pontos situados sobre os lados da base.

18.46) Calcule a distância entre duas faces opostas de um octaedro regular de aresta a. (Veja exercício 18.5.)

18.47) Um cilindro está inscrito em uma esfera. A diagonal da seção meridiana do cilindro forma com seu eixo um ângulo $\alpha = 60°$. Calcule a razão entre os volumes do cilindro e da esfera.



18.48) Em uma esfera está inscrito um cilindro circular reto. Sejam V_1, R e S o volume, o raio e a área da superfície da esfera. Sejam V_2, r e A o volume, o raio da base e a área lateral do cilindro. Sabendo que 2RA = rS, calcule $\frac{V_1}{V_2}$.

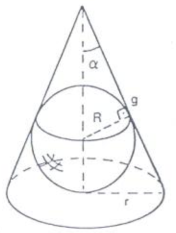
18.49) Um cone reto, inscrito em uma esfera de raio r, apresenta um ângulo de 30° entre a geratriz e o eixo. Calcule o volume do cone.

18.50) Em uma esfera de raio R está inscrito um cone de altura h. Calcule a área lateral do cone.

18.51) Uma esfera está inscrita em um cone circular reto cuja base tem raio R. A circunferência segundo a qual a esfera tangencia a superfície lateral do cone tem raio r. Determine a área da superfície esférica.

18.52) Em um cone circular reto está inscrita uma superfície esférica cuja área é igual à área da base do cone. A circunferência de contato entre a superfície esférica e a superfície lateral do cone divide esta última em duas partes. Qual é a razão entre as áreas dessas duas partes?

18.53) Uma esfera de raio R está inscrita em um cone, cuja área lateral é igual a $\frac{3}{2}$ da área da superfície esférica. Calcule a altura do cone. (Sugestão: adote como variável auxiliar x = sen α, pondo os raios R, r e a geratriz g em função de x.)



18.54) Em um tronco de cone de bases paralelas está inscrita uma esfera de raio R. A geratriz do tronco forma 60° com o plano da base maior. Calcule o volume do tronco.

18.55) O diâmetro de uma superfície esférica de área S é igual à altura de um cone eqüilátero. Calcule a área total do cone.

18.56) O diâmetro de uma superfície esférica de área S é igual ao diâmetro da base de um cone eqüilátero. Calcule a área lateral do cone.

18.57) O diâmetro de uma superfície esférica de área S é igual ao diâmetro da base de um cilindro reto, cuja altura é igual ao raio da base. Calcule a área total do cilindro.

18.58) Sobre um plano tangente a uma superfície esférica, toma-se um ponto distante 16 cm do ponto de tangência e 8 cm da superfície esférica. Calcule a área da superfície esférica.

18.59) Um cone eqüilátero e um hemisfério têm base comum. Se a área da superfície do hemisfério é S, calcule a área lateral do cone. (A superfície do hemisfério corresponde à metade da superfície esférica, acrescida do círculo da base.)

18.60) No problema anterior, calcule o comprimento da circunferência segundo a qual a superfície lateral do cone corta o hemisfério.

18.61) A base de um segmento esférico tem diâmetro 10 cm e o arco da seção meridiana mede 120°. Calcule a área da calota.

18.62) Em uma esfera de raio 25 cm, toma-se um segmento esférico de raios das bases 20 cm e 24 cm. Calcule a área da zona esférica correspondente. (Considere dois casos.)

18.63) Determine a área de uma calota esférica de altura 30 cm e raio da base 40 cm.

18.64) Um ponto luminoso situa-se à distância r de uma superfície esférica de raio r. Qual é a porcentagem da área da superfície esférica iluminada pelo ponto?

18.65) Em um círculo de raio **r**, toma-se um segmento circular cujo arco mede 90°. Calcule a área total da superfície do sólido obtido quando esse segmento circular gira em torno do diâmetro perpendicular à sua corda.

18.66) Um segmento circular de 120° e área S gira em torno da sua altura. Calcule a área total do sólido gerado.

18.67) Qual deve ser o ângulo formado pela geratriz de um cone reto com o plano de sua base, de modo que a superfície esférica inscrita no cone fique dividida, pela circunferência ao longo da qual ela toca a superfície do cone, em duas calotas cujas áreas estejam entre si na razão 1/3?

18.68) Uma das bases de uma zona esférica de uma superfície esférica de raio **r** é o círculo máximo. Sabendo que a área da zona esférica é igual à soma das áreas das suas bases, determine a sua altura.

18.69) Uma esfera de volume V tem raio igual ao raio da base de um cilindro cuja altura é igual a $\frac{4}{3}$ do raio da base. Calcule o volume do cilindro.

18.70) Com duas superfícies esféricas concêntricas, obtém-se uma concha esférica de espessura **d** (veja exercício 18.1). Qual deve ser a altura de um tronco de cone reto cujos raios das bases são iguais aos raios das duas superfícies esféricas, de modo que o volume do tronco seja igual ao da concha?

18.71) Calcule a área de uma superfície esférica, que é numericamente igual ao volume da esfera correspondente.

18.72) Um cilindro eqüilátero e uma esfera têm mesmo volume. Qual é a razão entre as áreas de suas superfícies?

18.73) Um vaso cilíndrico de diâmetro da base 12 cm e altura 72 cm tem água até metade de sua altura. Quanto subirá o nível da água se uma esfera de aço de 10 cm de diâmetro for colocada dentro da água do vaso?

18.74) Determine o volume de um segmento esférico cuja base tem 16 cm de diâmetro, sabendo que a seção meridiana tem um arco de 60°.

18.75) Em uma esfera de raio 25 cm tomam-se duas seções paralelas, de raios 20 cm e 24 cm. Calcule o volume do segmento esférico limitado pelas duas seções (considere dois casos).

18.76) Duas esferas de mesmo raio **r** são colocadas de modo que o centro de cada uma pertence à superfície da outra. Calcule o volume da parte comum.

18.77) Um cubo está inscrito em uma esfera de raio R. Determine o volume do menor segmento esférico determinado por um plano que contém uma face do cubo.

18.78) Pelos pontos que dividem um diâmetro de uma esfera de raio R em quatro partes iguais, conduzem-se três planos paralelos entre si, perpendiculares ao diâmetro. Calcule os volumes dos segmentos esféricos em que a esfera fica separada pelos três planos.

18.79) Uma esfera é inscrita em um cone eqüilátero de volume V. O plano que contém a circunferência de tangência separa a esfera em dois segmentos esféricos. Calcule seus volumes.

18.80) Calcule o volume de uma esfera inscrita em um tronco de cone reto, cujas bases têm raios 9 cm e 25 cm.

Exercícios Suplementares

Com esta série de exercícios, faremos uma revisão geral dos capítulos anteriores.

VI.1) São dados os pontos A e B, pertencentes a um plano α, e o ponto O pertencente ao plano $\beta /\!/ \alpha$. Tomam-se por O um plano γ que contém A e um plano δ que contém B, os quais cortam α segundo retas paralelas entre si. Mostre que $\gamma \cap \delta \subset \beta$.

VI.2) São dados um plano α, uma reta **r** que fura α e um ponto O fora de **r** e de α. Construa por O uma reta paralela a α e concorrente com **r**.

VI.3) Prove que os segmentos que têm extremidades nos pontos médios de lados opostos de um quadrilátero reverso cortam-se no seu ponto médio.

VI.4) Mostre que o perímetro de um quadrilátero convexo é maior do que a soma das duas diagonais.

VI.5) Mostre que o perímetro de um quadrilátero convexo é menor do que o dobro da soma das duas diagonais.

VI.6) Prove que, num triângulo ABC, os vértices B e C são eqüidistantes da reta que contém a mediana relativa ao vértice A.

VI.7) Dá-se um triângulo ABC, retângulo em A. A bissetriz interna relativa ao vértice B encontra o lado oposto em S. Mostre que AS < SC.

VI.8) Dado um triângulo ABC, qual é o ponto P do lado $\overleftrightarrow{AB}$, pelo qual se pode passar uma reta paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, que encontra $\overleftrightarrow{AC}$ em um ponto Q tal que PQ = CQ?

VI.9) Pelo incentro I de um triângulo ABC, conduz-se uma reta paralela ao lado $\overleftrightarrow{BC}$, que encontra $\overleftrightarrow{AB}$ em D e $\overleftrightarrow{AC}$ em E. Mostre que

$$BD + CE = DE$$

VI.10) Dado um triângulo isósceles ABC, de vértice A, por um ponto $D \in \overleftrightarrow{BC}$ tomamos retas paralelas a $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, obtendo os pontos E em $\overleftrightarrow{AC}$ e F em $\overleftrightarrow{AB}$. Mostre que o perímetro do quadrilátero AFDE é igual a 2(AB).

VI.11) É dado um triângulo eqüilátero ABC, cujo lado tem medida a. Por um ponto O do seu interior, traça-se uma paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, encontrando A' em $\overleftrightarrow{BC}$, uma paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, encontrando B' em $\overleftrightarrow{AC}$ e uma paralela a $\overleftrightarrow{AC}$, encontrando C' em $\overleftrightarrow{AB}$. Calcule OA' + OB' + OC'.

VI.12) Sendo α a medida em graus do ângulo $\hat{A}$ de um triângulo ABC e I o incentro, calcule a medida do ângulo $B\hat{I}C$.

VI.13) Sendo β e γ ($\beta > \gamma$) as medidas dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC, determine a medida do ângulo entre a altura $\overleftrightarrow{AH}$ e a bissetriz interna $\overleftrightarrow{AS}$.

VI.14) Mostre que a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados é igual a 360°.

VI.15) Qual é o polígono convexo cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual à dos externos?

VI.16) São dados a reta r e o plano α, oblíquos. Fora de r e de α, toma-se o ponto A. Construa por A uma reta paralela a α e que forme ângulo reto com r.

VI.17) Considere uma pirâmide triangular VABC cuja aresta lateral $\overleftrightarrow{VA}$ é perpendicular ao plano da base ABC. Mostre que a reta determinada pelos ortocentros dos triângulos ABC e VBC é perpendicular ao plano da face lateral VBC.

VI.18) Seja uma pirâmide triangular VABC, cujas arestas laterais $\overleftrightarrow{VA}$, $\overleftrightarrow{VB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$ determinam um triedro tri-retângulo. Mostre que a projeção ortogonal do vértice V desse triedro sobre a base ABC é o ortocentro do $\triangle$ ABC.

VI.19) As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são ortogonais. Prove que $(BC)^2 - (BD)^2 = (AC)^2 - (AD)^2$.

VI.20) Dados dois triângulos ABC e ABD, retângulos em A, tais que $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$, mostre que $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$.

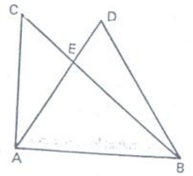
VI.21) Prove que as retas que contêm duas arestas opostas de uma pirâmide triangular regular são ortogonais.

VI.22) Mostre que a diagonal de um cubo é ortogonal à diagonal de face que não a intercepta.

VI.23) Pelo vértice A do ângulo reto de um triângulo retângulo ABC, toma-se uma reta $\overleftrightarrow{AM}$ perpendicular ao plano do triângulo. Construa uma reta por M, perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$.

VI.24) Mostre que a área de um trapézio é igual ao produto da medida de um lado lateral pela distância dele ao ponto médio do lado oposto.

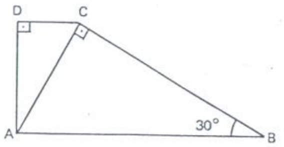
VI.25) O $\triangle$ ABC é retângulo em A e AB = 4, AC = 3. O $\triangle$ ABD é isósceles de base $\overline{AB}$ e tem a mesma área do $\triangle$ ABC. Calcule a área do $\triangle$ ABE.



VI.26) Calcule a razão entre os raios das circunferências circunscrita e inscrita em um triângulo de lados 7 cm, 8 cm e 9 cm.

VI.27) Um trapézio isósceles com ângulo agudo α é circunscrito a uma circunferência de raio r. Calcule a área do trapézio.

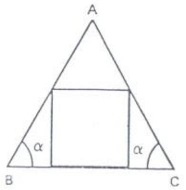
VI.28) Calcule o perímetro do trapézio retângulo da figura, sendo AC = d.



VI.29) A altura de um triângulo isósceles é 13 cm e a altura relativa ao lado lateral é 10 cm. Calcule a área do triângulo.

VI.30) Em um quadrado de lado a, inscreve-se um outro quadrado, de modo que o ângulo entre os lados desses quadrados tenha medida α. Qual é a razão entre as áreas dos dois quadrados?

VI.31) Calcule a área do quadrado assinalado, sabendo que BC = 14 cm e $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{2}$.



VI.32) A bissetriz do ângulo reto de um triângulo retângulo divide a hipotenusa em segmentos de medidas 5 cm e 12 cm. Calcule a área do triângulo.

VI.33) O ponto D divide o lado $\overleftrightarrow{BC}$ do triângulo eqüilátero ABC em segmentos de medidas BD = = 4 cm e DC = 2 cm. Calcule AD.

VI.34) Dois lados de um triângulo de área 6 cm² medem 3 cm e 5 cm. Calcule a medida do terceiro lado.

VI.35) Dois lados de um triângulo medem a e b e a circunferência circunscrita tem raio R. Calcule a altura relativa ao terceiro lado.

VI.36) Calcule as medidas dos lados da base de um paralelepípedo reto-retângulo de altura $3\sqrt{6}$ cm, sabendo que a diagonal do paralelepípedo forma 30° com o plano da base e que a diagonal de uma face lateral forma 60° com esse plano.

VI.37) A aresta da base de um prisma quadrangular regular mede a e a diagonal do prisma forma 45° com o plano da base. Calcule a área da seção que contém a diagonal do prisma e os pontos médios de duas arestas laterais opostas.

VI.38) Em um prisma triangular regular, o segmento com extremidades no vértice de uma base e no ponto médio da aresta oposta da outra base tem medida d e forma ângulo de medida α com o plano da base. Calcule o volume desse prisma.

VI.39) Um prisma triangular regular tem aresta da base **a**. Um plano que contém a aresta da base e o ponto médio da aresta lateral oposta determina uma seção cuja área é igual a $\frac{a^2}{2}$. Calcule a altura do prisma.

VI.40) Um plano, que contém a aresta da base de um prisma triangular regular, forma um ângulo de medida α com o plano da base e determina uma seção triangular cujo perímetro é igual ao dobro do perímetro da base do prisma. Calcule $\cos \alpha$.

VI.41) A base de um prisma triangular reto é um triângulo isósceles, com ângulo de 120°. Pela base desse triângulo, toma-se um plano que determina uma seção em forma de triângulo retângulo. Se α é a medida do ângulo formado por esse plano com o plano da base, calcule $\cos \alpha$.

VI.42) Uma pirâmide quadrangular regular apresenta faces laterais com ângulo do vértice de medida α. Calcule $\cos \beta$, onde β é o ângulo que a face lateral forma com o plano da base.

VI.43) Resolva o exercício anterior, para o caso de uma pirâmide triangular regular.

VI.44) Em uma pirâmide quadrangular regular, a aresta lateral forma ângulo α com o plano da base. Calcule $\text{tg}\, \beta$, onde β é a medida do ângulo que a face lateral forma com o plano da base.

VI.45) Resolva o exercício anterior, para o caso de uma pirâmide triangular regular.

VI.46) Seja α a medida do ângulo agudo formado por duas alturas de um tetraedro regular. Calcule $\cos \alpha$.

VI.47) Em uma pirâmide quadrangular regular, o ângulo entre duas arestas laterais opostas é α. Calcule $\cos \beta$, sendo β o ângulo do vértice de uma face lateral.

VI.48) Em uma pirâmide triangular regular, a aresta lateral mede **b** e forma com a aresta da base um ângulo α tal que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Calcule o volume da pirâmide.

VI.49) A aresta lateral de um tronco de pirâmide quadrangular regular forma com a aresta da base um ângulo α tal que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Sendo **a** e **7a** as medidas das arestas das bases, calcule o volume do tronco.

VI.50) A superfície lateral de um cilindro provém de um retângulo cuja diagonal mede **d** e forma ângulo de medida α com o lado. Calcule o raio da base do cilindro.

VI.51) Em um cilindro eqüilátero, toma-se um segmento com uma extremidade em cada circunferência das bases, de modo que os raios por esses pontos formem 120°. Seja α o ângulo que o segmento forma com o eixo do cilindro. Calcule $\text{tg}\, \alpha$.

VI.52) Em um cilindro eqüilátero de raio 15 cm, toma-se um segmento com uma extremidade em cada circunferência das bases, distante 12 cm do eixo do cilindro. Seja α o ângulo que esse segmento forma com o plano da base. Calcule $\text{tg}\, \alpha$.

VI.53) Um plano, paralelo ao eixo de um cilindro reto, corta na circunferência da base um arco de medida α ($\alpha < 180°$). O segmento que liga o centro de uma base ao ponto médio da corda correspondente ao arco α da outra base mede **m** e forma com o plano da base um ângulo de medida α. Calcule a área da seção.

VI.54) Um triângulo eqüilátero é construído em um cilindro reto, de modo que um lado seja o diâmetro da base inferior e o vértice oposto esteja na circunferência da base superior. Sendo **h** a altura do cilindro, calcule o raio da base.

VI.55) Um plano, paralelo ao eixo de um cilindro reto, à distância **d** desse eixo, determina uma seção quadrada. Esse plano corta na circunferência da base um arco de 120°. Calcule a área da seção.

VI.56) A base de um prisma reto de altura **h** é um triângulo retângulo com um ângulo agudo α e a altura relativa à hipotenusa igual a **h**. Calcule o volume do cilindro circunscrito a esse prisma.

VI.57) Toma-se no círculo da base de um cilindro uma corda $\overleftrightarrow{AB}$, correspondente a um arco de 90°. Sendo C o centro da outra base, obtém-se o triângulo ABC, de área S, cujo plano forma 60° com o plano da base. Calcule o raio da base do cilindro.

VI.58) Um cilindro é circunscrito a um tetraedro regular, de modo que a base do tetraedro é inscrita na base do cilindro. Calcule a razão entre os volumes dos dois sólidos.

VI.59) Calcule o volume de um cilindro de raio da base **r**, sabendo que o desenvolvimento da sua superfície lateral é um quadrado.

VI.60) Calcule o volume de um cilindro de altura 8 cm, inscrito em um prisma triangular reto cujas arestas da base medem 7 cm, 8 cm e 9 cm.

VI.61) Um cone circular reto é circunscrito a um tetraedro regular. Calcule a razão entre os volumes dos dois sólidos.

VI.62) O desenvolvimento da superfície lateral de um cone é um semicírculo de diâmetro 20 cm. Calcule o volume do cone.

VI.63) Calcule o volume de um cone reto cuja seção meridiana é um triângulo retângulo de área S.

VI.64) Um tronco de cone reto tem raios das bases 2 cm e 3 cm e altura 4 cm. Calcule a altura do cone eqüilátero que tem o mesmo volume desse tronco.

VI.65) O triângulo ABC é isósceles de base $\overleftrightarrow{AB}$. Os ângulos da base medem 30° e o lado lateral tem medida ℓ. Calcule o volume do sólido gerado pela rotação desse triângulo em torno de um eixo que passa pelo vértice A e é paralelo ao lado $\overleftrightarrow{BC}$.

VI.66) A área lateral de um cone reto é igual a quatro vezes a área da base e a geratriz forma ângulo α com o plano da base. Calcule $\cos \alpha$.

VI.67) A seção meridiana de um cone é um triângulo eqüilátero. Calcule a razão entre a área total e a área lateral.

VI.68) Duas geratrizes de um cone reto e uma corda da circunferência da base formam um triângulo retângulo de área S. O plano do triângulo forma 60° com o plano da base. Calcule a altura do cone.

VI.69) Um cone reto de altura **h** tem como seção meridiana um triângulo retângulo. Calcule a área da seção determinada por um plano que contém o vértice do cone e forma 60° com o plano da base.

VI.70) A seção meridiana de um cone reto é um triângulo retângulo. Dê a medida em radianos do ângulo do setor que representa o desenvolvimento da superfície lateral desse cone.

VI.71) Uma esfera tem raio r. Calcule as distâncias polares correspondentes a uma seção plana cuja área seja igual à metade da área do círculo máximo.

VI.72) Um cilindro, inscrito em uma esfera de raio r, tem área lateral igual a 3/5 da área da superfície esférica. Determine o raio da base desse cilindro.

VI.73) Por um ponto de uma superfície esférica de raio r, conduz-se um plano que forma 60° com o plano tangente nesse ponto. Calcule a área da seção que esse plano determina na esfera.

VI.74) Uma pirâmide triangular regular tem aresta da base a e altura a. Calcule o raio da esfera circunscrita.

VI.75) Em uma esfera de raio r está inscrito um cilindro cuja área lateral é igual ao dobro da área do círculo máximo da esfera. Calcule o volume do cilindro.

VI.76) Em uma esfera de raio r está inscrito um cone reto cuja área lateral é igual à metade da área de um círculo que tem como raio a geratriz do cone. Calcule o volume do cone.

VI.77) Sobre um plano tangente a uma superfície esférica, toma-se um ponto cuja distância à superfície esférica é a e ao ponto de tangência é 2a. Calcule o volume da esfera.

VI.78) Um cone reto está inscrito em uma esfera de raio r e a sua seção meridiana apresenta um ângulo do vértice de 45°. Calcule o volume do cone.

TESTES DE VESTIBULARES

RETAS E PLANOS NO ESPAÇO

1) (PUC-SP) A soma dos diedros de um triedro está compreendida entre:

a) 3 retos e 6 retos
b) 1 reto e 2 retos
c) 2 retos e 6 retos
d) 2 retos e 5 retos
e) 3 retos e 5 retos

2) (MACKENZIE-SP) Considere as afirmações:

I – Se uma reta é paralela a dois planos, então este planos são paralelos.
II – Se dois planos são paralelos, toda reta de um é paralela a uma reta do outro.
III – Se duas retas são reversas, então existe uma única perpendicular comum a elas.

Então:

a) todas são verdadeiras
b) somente a II é verdadeira
c) somente a III é verdadeira
d) somente a I é verdadeira
e) somente II e III são verdadeiras

3) (MACKENZIE-SP) O triângulo MNP, retângulo em N, e o paralelogramo NPQR situam-se em planos distintos. Então a afirmação "MN e QR são segmentos ortogonais":

a) é sempre verdadeira
b) não pode ser analisada por falta de dados
c) é verdadeira somente se MN = QR
d) nunca é verdadeira
e) é verdadeira somente se MN = 2QR

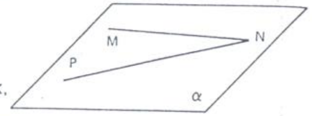
4) (F.M. SANTA CASA-SP) Esta questão deve ser respondida de acordo com o seguinte código:

a) se somente as proposições I e II estiverem corretas
b) se somente as proposições I e II estiverem corretas
c) se somente as proposições II e III estiverem corretas
d) se todas as proposições estiverem corretas
e) se nenhuma proposição estiver correta

I – Se duas retas distintas não são paralelas, elas são concorrentes.
II – Se uma reta é paralela à interseção de dois planos, ela é paralela a pelo menos um desses planos.
III – As interseções de um diedro com dois planos paralelos entre si e que interceptam a aresta, são ângulos congruentes.

5) (U.F.BA) Seja O um ponto fora do plano α que contém o ângulo MNP. Se R e S são os pontos simétricos de O em relação a PN e MN, respectivamente, conclui-se que:

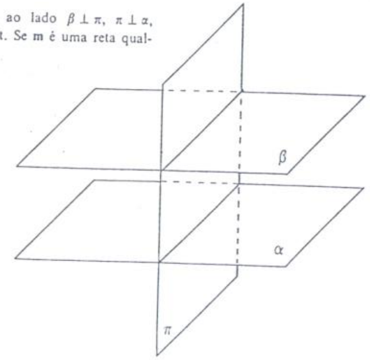
O .



a) a reta RS é paralela a α
b) a reta RS é concorrente em α, em N
c) a reta RS intercepta α em Z, $Z \neq N$
d) as retas RS e PN são concorrentes em X, $X \neq N$
e) as retas RS e MN são concorrentes em Y, $Y \neq N$

6) (U.F.BA) Na figura ao lado $\beta \perp \pi$, $\pi \perp \alpha$, $\beta \cap \pi = r$ e $\alpha \cap \pi = t$. Se **m** é uma reta qualquer de β, então:

a) $m \parallel r$
b) $m \parallel t$
c) $m \perp \pi$
d) $m \parallel \alpha$
e) $m \perp \alpha$



7) (CESESP-PE) Seja **r** uma reta que é perpendicular a uma outra reta **s** contida em um plano P e seja O o ponto de interseção de **r** com **s**. Assinale, dentre as alternativas abaixo, aquela que é a verdadeira:

a) Toda reta do plano P que passa por O é perpendicular à reta **r**.
b) **r** é perpendicular a todas as retas de P se e somente se existir uma outra reta s' contida em P, diferente de **s** e passando por O, que seja perpendicular a **r**.
c) **r** é perpendicular a todas as retas do plano se e somente se existir uma outra reta s' diferente e paralela a **s**, que seja também perpendicular a **r**.
d) A reta **r** sendo perpendicular a **s** contida em P, jamais estará inclusa em P.
e) Uma tal reta **r** não existe.

Nota: Nesta questão, o examinador utiliza o termo *perpendiculares* para indicar retas ortogonais ou perpendiculares, indiferentemente.

8) (F.M. SANTA CASA-SP) Esta questão deve ser respondida de acordo com o seguinte código:

a) se somente as proposições I e II estiverem corretas
b) se somente as proposições I e III estiverem corretas
c) se somente as proposições II e III estiverem corretas
d) se todas as proposições estiverem corretas
e) se nenhuma proposição estiver correta

I – Dois ângulos não situados em um mesmo plano e de lados paralelos:
1.º) têm sempre medidas iguais;
2.º) determinam planos paralelos.

II – Se uma reta é paralela a um plano, todo plano conduzido pela reta e cortando o primeiro plano dá uma interseção paralela à reta dada.

III – De um ponto tomado no interior de um ângulo diedro, duas perpendiculares às faces formam um ângulo suplementar deste diedro.

9) (F.C. CHAGAS-SP) Sejam **r** a reta determinada pelos pontos A e B e **s** a reta determinada pelos pontos C e D, onde $r \cap s = \{A\}$ e A está entre C e D. Sejam X e Y, respectivamente, as projeções de C e D sobre a reta **r**. Então, necessariamente:

a) A está entre X e Y
b) o triângulo BCD é retângulo
c) ou X ou Y deve pertencer ao segmento AB
d) os triângulos AXC e AYD são congruentes
e) $r \perp s$

10) (F.C. CHAGAS-SP) Qual das afirmações é verdadeira?

a) Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
b) Se as retas **a** e **b** são distintas e ambas paralelas a um plano α, então **a** e **b** são retas paralelas.
c) No espaço, se **r** e **s** são duas retas perpendiculares a uma reta **t**, então **r** e **s** são paralelas.
d) Se dois planos são paralelos, toda reta perpendicular a um deles é perpendicular ao outro.
e) Três pontos distintos determinam um único plano.

11) (FATEC-SP) Se o plano α é paralelo a duas retas, r_1, r_2, do plano β, então:

a) α é paralelo a β
b) a projeção ortogonal de uma qualquer reta de α sobre β intercepta r_1 ou r_2
c) α e β se interceptam segundo uma reta paralela a r_1 e r_2, simultaneamente
d) r_1 é paralela a r_2
e) n.d.a.

12) (PUC-SP) Assinale a afirmação verdadeira.

a) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos entre si.
b) Dois planos perpendiculares a uma reta são perpendiculares entre si.
c) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.
d) Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.
e) Dois planos perpendiculares a um terceiro são perpendiculares entre si.

13) (PUC-SP) Se **r** e **s** são retas reversas, então pode-se garantir que:

a) todo plano que contém **r** também contém **s**
b) existe um plano que contém **r** e é perpendicular a **s**
c) existe um único plano que contém **r** e **s**
d) existe um plano que contém **r** e é paralelo a **s**
e) toda reta que encontra **r** encontra **s**

14) (MOJI-SP) Das afirmações abaixo, apenas uma é verdadeira. Assinale-a.

a) Dois planos são perpendiculares quando têm uma reta comum.
b) Dois planos são perpendiculares quando um deles contém uma reta perpendicular ao outro.
c) Dois planos são perpendiculares quando toda reta de um é perpendicular ao outro.
d) Dois planos são perpendiculares quando são perpendiculares a uma reta.
e) Dois planos são perpendiculares quando têm um único ponto em comum.

15) (MOJI-SP) Dadas as afirmações:

I – Se dois planos têm um ponto P comum, então eles têm uma reta em comum que passa por P.
II – Dadas duas retas reversas, sempre existe reta que se apóia em ambas.
III – Uma reta é perpendicular a um plano quando ela é ortogonal ou perpendicular a todas as retas do plano.
IV – Se duas retas não têm ponto em comum, então elas são necessariamente paralelas.

a) Somente I, III e IV estão corretas.
b) Somente I, II e IV estão corretas.
c) Somente II e IV estão corretas.
d) Somente IV é incorreta.
e) Todas estão corretas.

16) (MOJI-SP) Dadas duas retas reversas **r** e **s**, então necessariamente:

a) existe plano paralelo a ambas
b) existe um e um só plano paralelo a ambas
c) existe um plano perpendicular a uma, que contém a outra
d) todo plano perpendicular a uma encontra a outra em um ponto
e) todo plano paralelo a uma encontra a outra em um ponto

17) (MOJI-SP) As projeções ortogonais de um conjunto S de retas sobre um plano π são retas paralelas entre si; então as retas de S necessariamente:

a) são paralelas entre si
b) são paralelas ao plano π
c) estão contidas em π
d) estão contidas em um plano que forma 45° com o plano π
e) estão contidas em planos paralelos

18) (FMU/FIAM-SP) Dados: um plano α e duas retas distintas **r** e **s** tais que $r \perp s$ e $s \perp \alpha$, podemos afirmar que:

a) $r \cap s = \varnothing$
b) **r** e **s** são retas reversas
c) $r \parallel s$
d) **r** é paralela a α
e) é impossível encontrar as retas **r** e **s** nestas condições

19) (FMU/FIAM-SP) Das afirmações abaixo:

I – Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas entre si.
II – Duas retas paralelas a um plano são paralelas entre si.
III – Se um plano α é perpendicular à reta **r**, então α é perpendicular a todo plano que contém **r**.

a) todas são verdadeiras
b) I e II são verdadeiras
c) I e III são verdadeiras
d) II e III são falsas
e) todas são falsa

20) (MACKENZIE-SP) Considerando-se as afirmações abaixo, assinale a alternativa *correta*.

I – Se uma reta é paralela a dois planos, então esses planos são paralelos.
II – Dadas duas retas reversas, sempre existe reta que se apóia em ambas.
III – Se um plano é perpendicular a dois planos secantes, então é perpendicular à interseção desses planos.

a) Somente a afirmação I é verdadeira.
b) Somente a afirmação II é verdadeira.
c) São verdadeiras as afirmações II e III, apenas.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Nenhuma afirmação é verdadeira.

21) (MACKENZIE-SP) Quando dois planos paralelos são interceptados por um terceiro plano, as interseções são retas:

a) reversas
b) paralelas
c) concorrentes
d) coincidentes
e) faltam dados para responder

22) (FUVEST-SP) São dados cinco pontos não coplanares A, B, C, D, E. Sabe-se que ABCD é um retângulo, $AE \perp AB$ e $AE \perp AD$. Pode-se concluir que são perpendiculares as retas:

a) EA e EB
b) EC e CA
c) EB e BA
d) EA e AC
e) AC e BE

23) (FESP) Um ponto P não pertence nem à reta **a**, nem à reta **b**; **a** e **b** são reversas.

a) Por P passa uma única reta que se apóia em **a** e **b** simultaneamente.
b) Por P nem sempre passa reta que se apóia em **a** e **b** simultaneamente.
c) Por P passam infinitas retas que se apóiam em **a** e **b** simultaneamente.
d) Por P passam duas retas que se apóiam em **a** e **b** simultaneamente.
e) n.d.a.

24) (FATEC-SP) Três semi-retas, **a**, **b**, **c**, com mesma origem V, são não coplanares e tais que $\measuredangle(a, b) = 163°$ e $\measuredangle(b, c) = 104°$. Se $x = \measuredangle(a, c) < 180°$, então:

a) $79° < x < 103°$
b) $x < 93°$
c) $x > 93°$
d) $59° < x < 93°$
e) n.d.a.

25) (FATEC-SP) É falso que:
a) por um ponto fora de uma reta passa pelo menos um plano perpendicular a essa reta
b) se uma reta **r** é paralela a um plano α, então toda reta paralela a **r** e que passa por um ponto de α está contida em α
c) as interseções de dois planos paralelos, com um terceiro plano distinto dos anteriores, determinam retas paralelas
d) dois planos secantes determinam quatro diedros
e) uma das afirmações acima é falsa

26) (FASP) Considere as afirmações:

I – Se as projeções ortogonais de duas retas sobre um plano são paralelas, então as retas são paralelas.
II – A projeção ortogonal de um ângulo sobre um plano pode ser um segmento de reta.
III – A projeção ortogonal de um segmento oblíquo é congruente ao segmento.

a) Somente I é verdadeira.
b) I e III são verdadeiras.
c) I e II são falsas.
d) II e III são verdadeiras.

27) (FASP) Considere as afirmações:

I – Se uma reta **r** é paralela a um plano, que não a contém, **r** é paralela a uma reta contida nesse plano.
II – Se duas retas são ortogonais, então elas são perpendiculares.
III – Seja o ponto $P \in r$; pelo ponto P passam muitos planos perpendiculares à reta **r**.
IV – Uma reta perpendicular a um plano é ortogonal a qualquer reta desse plano.

A alternativa correta é:

a) apenas I
b) II e III
c) II e IV
d) I e III

28) (U.E. LONDRINA-PR) São dadas as afirmações:

I – Se dois planos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto.
II – Dados uma reta e um plano, é sempre possível traçar no plano uma reta paralela à reta dada.
III – Duas retas reversas e uma reta concorrente com as duas determinam dois planos.

Pode-se afirmar que:

a) I, II e III são verdadeiras
b) I, II e III são falsas
c) apenas I é verdadeira
d) apenas I e II são verdadeiras
e) apenas I e III são verdadeiras

29) (PUC-SP) Dois planos β e γ se cortam na reta **r** e são perpendiculares a um plano α.

Então:

a) β e γ são perpendiculares
b) **r** é perpendicular a α
c) **r** é paralela a α
d) todo plano perpendicular a α encontra **r**
e) existe uma reta paralela a α e a **r**

30) (MACKENZIE-SP) Considere as afirmações:

I – Se dois planos são paralelos, toda reta paralela a um deles ou está contida no outro, ou é paralela a esse outro.
II – Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas ou coincidentes.
III – Um plano perpendicular a uma reta de um outro plano é perpendicular a este último plano.

Então:

a) todas são verdadeiras
b) somente a afirmação I é verdadeira
c) somente a afirmação II é verdadeira
d) somente as afirmações II e III são verdadeiras
e) nenhuma afirmação é verdadeira

31) (FATEC-SP) Assinale a afirmação *correta*.

a) Se uma reta é paralela a um plano, ela é paralela a qualquer reta deste plano.
b) Se uma reta é paralela a um plano, ela é concorrente a uma reta deste plano.
c) Dadas duas retas reversas, qualquer reta que encontra uma, encontra a outra.
d) Por qualquer ponto é possível conduzir uma reta que intercepta duas retas reversas dadas.
e) n.d.a.

32) (FATEC-SP) Se **r** e **t** são duas retas reversas, então:

a) existe um plano que contém, simultaneamente, **r** e **t**
b) **r** é paralela a **t**
c) existe um ponto que pertence, simultaneamente, a **r** e **t**
d) existe uma única reta perpendicular, simultaneamente, a **r** e **t**
e) **r** e **t** são perpendiculares entre si

33) (U.F.PR) Dadas as afirmações abaixo:

I – Dois pontos determinam uma reta.
II – Uma reta que tenha um ponto sobre um plano está contida nesse plano.
III – Três pontos não alinhados determinam um plano.
IV – Uma reta **r** é perpendicular a um plano α se, e somente se, ela é perpendicular a uma reta de α que passe pelo ponto em que **r** intercepta α.

São verdadeiras:

a) I e III
b) I e IV
c) II e III
d) II e IV
e) III e IV

34) (CESESP-PE) Sejam r_1, r_2 e r_3 três retas concorrentes no espaço a três dimensões. Suponha que as retas r_1 e r_2 são perpendiculares à reta r_3. Assinale a alternativa que completa corretamente a sentença "r_1 e r_2 são obrigatoriamente . . .":

a) perpendiculares entre si
b) pertencentes a um plano perpendicular a r_3
c) coincidentes
d) paralelas
e) coincidentes com r_3

LUGARES GEOMÉTRICOS

35) (UnB-DF) Sejam **a**, **b** e **c** três pontos não alinhados pertencentes a um plano P. L é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de **a**, **b** e **c**. Então:

a) L é uma reta pertencente a P
b) L é uma circunferência à qual **a**, **b** e **c** pertencem
c) L é uma reta perpendicular a P
d) nenhuma dessas

36) (FESP) Por uma circunferência e um ponto fora do seu plano, passam:

a) infinitas superfícies esféricas
b) duas superfícies esféricas
c) três superfícies esféricas
d) quatro superfícies esféricas
e) n.d.a.

37) (FATEC-SP) Os pontos A, B, A ≢ B, de uma superfície esférica E estão diametralmente opostos, respectivamente, aos pontos A', B'. Então:

a) os quatro pontos, A, B, A' e B' não são, necessariamente, coplanares
b) o quadrilátero ABA'B' é um quadrado
c) o triângulo AB'A' é retângulo
d) a projeção ortogonal de B' sobre o segmento AA' é o centro de E
e) n.d.a.

38) (PUC-SP) O conjunto dos pontos que têm mesma distância aos lados de um triângulo é uma reta que é perpendicular ao plano do triângulo e passa pelo ponto comum:

a) às alturas do triângulo
b) às medianas do triângulo
c) às bissetrizes do triângulo
d) às mediatrizes dos lados do triângulo
e) aos três lados do triângulo

39) (UNESP) A distância entre os pontos A e B, distintos, é k. O lugar geométrico dos pontos P do espaço, tais que a soma dos quadrados das distâncias de P a A e de P a B é k^2, é:

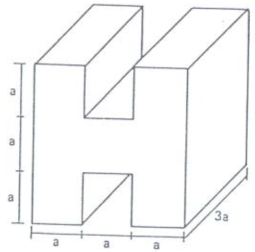
a) um plano que passa por A e por B
b) um plano normal à reta que passa por A e por B
c) uma superfície esférica
d) a reta que passa por A e por B
e) duas retas paralelas à reta que passa por A e por B

PRISMAS

40) (F.G.V.-SP) Um cubo tem 96 m² de área total. De quanto deve ser aumentada a sua aresta para que seu volume se torne igual a 216 m³?
a) 2 m b) 3 m c) 1 m d) 0,5 m e) 9 m

41) (CESGRANRIO) De um bloco cúbico de isopor de aresta 3a recorta-se o sólido em forma de "H", mostrado na figura. O volume do sólido é:

a) $27a^3$
b) $21a^3$
c) $18a^3$
d) $14a^3$
e) $9a^3$



42) (U.C.MG) Se um cubo tem 216 m³ de volume, a sua diagonal, em m, mede:
a) [illegible] b) [illegible] c) $6\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $6\sqrt{3}$

43) (U.F.ES) A diagonal de um paralelepípedo retângulo mede 17 cm. A soma das três dimensões é 29 cm e a área de uma face é 72 cm². O produto das três dimensões mede, em cm³:
a) 864 b) 1 080 c) 1 530 d) 1 224 e) 2 720

44) (CEUB-DF) Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo sabendo que a área total é 180 m², a diagonal da base é 10 m e que a soma das arestas que concorrem em um mesmo vértice é 17 m.

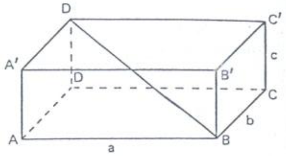
a) V = 120 m³ b) V = 144 m³ c) V = 169 m³ d) V = 196 m³

45) (U.C.MG) Um certo sólido tem volume V cm³ e altura 2 cm. Um outro sólido, semelhante ao primeiro, tem volume 8V cm³; então, a altura deste sólido, em cm, é:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

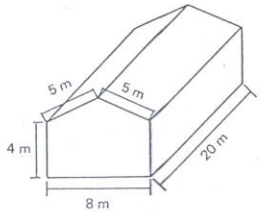
46) (PUC-SP) No paralelepípedo reto-retângulo de dimensões **a**, **b** e **c**, a diagonal BD' é dada pela fórmula:

a) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
b) $\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}$
c) $\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$
d) $\sqrt{a^2 - b^2 + c^2}$
e) $\sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2c^2}$



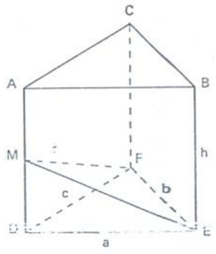
47) (U. FORTALEZA-CE) A figura ao lado representa um galpão com as medidas indicadas. O volume total desse galpão é:

a) 880 m³
b) 920 m³
c) 960 m³
d) 1 020 m³



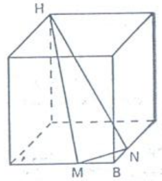
48) (UNIFICADO-RS) A figura representa um prisma reto de altura **h** e cuja base é um triângulo retângulo de medidas **a**, **b** e **c**, com a > b e a > c. Sendo M o ponto médio do segmento AD, o volume do sólido convexo de vértices A, B, C, E, F e M é:

a) $\frac{1}{6}\ b\,c\,h$
b) $\frac{1}{4}\ b\,c\,h$
c) $\frac{1}{3}\ b\,c\,h$
d) $\frac{5}{12}\ b\,c\,h$
e) $\frac{1}{6}\ a\,b\,h$



49) (FATEC-SP) O comprimento da aresta do cubo abaixo representado é 4 cm e $\overline{BM} = \overline{BN} = 1$ cm. Se **h** é a altura do triângulo HMN, relativa ao lado MN, então:

a) $h = \sqrt{123}$ cm
b) $h = \sqrt{39}$ cm
c) $h = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm
d) $h = \sqrt{10}$ cm
e) $h = \frac{\sqrt{190}}{2}$ cm



50) (FESP) Um paralelepípedo retângulo tem $142\ cm^2$ de superfície total e a soma dos comprimentos das arestas vale 60 cm. Considerando que seus lados estão em progressão aritmética, eles medem:

a) 12, 20, 28
b) 3, 5, 7
c) 1, 5, 9
d) 4, 6, 8
e) 2, 5, 8

51) (ITA-SP) Se as dimensões, em centímetro, de um paralelepípedo reto-retangular são dadas pelas raízes da equação

$$24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$$

então o comprimento da diagonal é igual a:

a) 7/12 cm b) 9/24 cm c) $\sqrt{24}/12$ cm d) $\sqrt{61}/12$ cm e) $\sqrt{73}/12$ cm

52) (FATEC-SP) As medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo formam uma PG. Se a menor das arestas mede $\frac{1}{2}$ cm e o volume de tal paralelepípedo é $64\ cm^3$, então a soma das áreas de suas faces é:

a) $292\ cm^2$ b) $298\ cm^2$ c) $296\ cm^2$ d) $294\ cm^2$ e) $290\ cm^2$

53) (PUC-SP) Com uma lata de tinta é possível pintar $50\ m^2$ de parede. Para pintar as paredes de uma sala de 8 m de comprimento, 4 m de largura e 3 m de altura, gasta-se uma lata e mais uma parte da segunda lata. Qual a porcentagem de tinta que resta na segunda lata?

a) 22% b) 30% c) 48% d) 56% e) 72%

54) (F.M. ABC-SP) Sejam **a**, **b**, **c** as dimensões de um paralelepípedo retângulo; **p** a soma das dimensões, **d** a diagonal, k^2 a área total e V o volume. Temos:

a) $p^2 = d^2 + k^2$
b) $d^2 = p^2 + k^2$
c) $k^2 = p^2 + d^2$
d) $V = p\,d\,k$
e) $p^2 = d\,k$

55) (U.F.RS) Uma caixa tem 1 m de comprimento, 2 m de largura e 3 m de altura. Uma segunda caixa de mesmo volume tem comprimento **x** metros maior do que o da anterior, largura **x** metros maior do que a da anterior e altura **x** metros menor do que a da anterior. O valor de **x** é:

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{6}$ e) $\sqrt{7}$

56) (CESESP-PE) Sabe-se que as medidas das arestas de um paralelepípedo retângulo são diretamente proporcionais a 2, 3 e 4 e a soma dessas medidas é 18 m. Então o volume desse paralelepípedo é:

a) $24\ m^3$ b) $96\ m^3$ c) $129\ m^3$ d) $80\ m^3$ e) $192\ m^3$

57) (CESESP-PE) Seja c um cubo de aresta **a** e volume **s**. Seja c' um cubo cuja aresta tem comprimento igual à metade de **a**. Assinale a alternativa que nos dá o volume s' de c'.

a) s' = (1/2) s
b) s' = (1/4) s
c) s' = (1/8) s
d) $s' = (\sqrt[3]{a})\ s$
e) $s' = (1/\sqrt[3]{a})\ s$

58) (MACKENZIE-SP) Uma pirâmide cuja base é um quadrado de lado **2a** tem o mesmo volume que um prisma cuja base é um quadrado de lado **a**. A razão entre as alturas da pirâmide e do prisma, nessa ordem, é:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{a}{3}$ e) 3a

59) (U.F.PA) Uma pirâmide regular, cuja base é um quadrado de diagonal $6\sqrt{6}$ cm, e a altura igual a $\frac{2}{3}$ do lado da base, tem área total igual a:

a) $96\sqrt{3}\ cm^2$ b) $252\ cm^2$ c) $288\ cm^2$ d) $84\sqrt{3}\ cm^2$ e) $576\ cm^2$

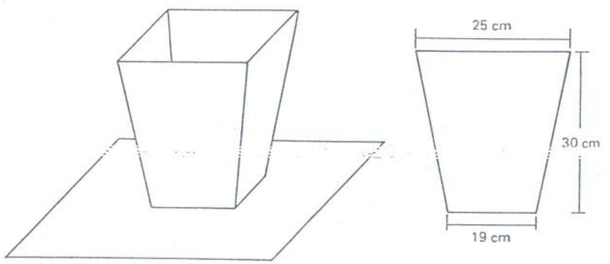
60) (F.M. SANTA CASA-SP) Considere uma pirâmide regular de base quadrada cujo lado é **2a**. Sabendo-se que a área lateral é $\frac{3}{4}$ da área lateral de um prisma reto de base e altura iguais às da pirâmide, então a altura da pirâmide mede:

a) $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$ b) $\frac{3}{4}a$ c) $4\sqrt{5}\,a$ d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}a$ e) $\frac{3}{2}a$

61) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) A área lateral da pirâmide hexagonal regular, cuja altura é $h = \sqrt{33}$ cm e o lado do hexágono da base $\ell_6 = 2$ cm, vale:

a) $36\ cm^2$ b) $40\ cm^2$ c) $20\ cm^2$ d) $60\ cm^2$ e) $70\ cm^2$

62) (CESGRANRIO) Uma cesta de lixo (figura I) tem por faces laterais trapézios isósceles (figura II) e por fundo um quadrado de 19 cm de lado (estamos desprezando a espessura do material de que é feita a cesta). A altura da cesta, em cm, é:



(I) (II)

a) $30 \times \frac{19}{25}$ b) $9\sqrt{11}$ c) $7\sqrt{19}$ d) $8\sqrt{13}$ e) $30\sqrt{\frac{19}{25}}$

63) (U.F.PR) Calculando a distância de um ponto do espaço ao plano de um triângulo eqüilátero de 6 unidades de comprimento de lado, sabendo que o ponto eqüidista 4 unidades dos vértices do triângulo, obtém-se:

a) 6 unidades
b) 5 unidades
c) 4 unidades
d) 3 unidades
e) 2 unidades

64) (U.F.ES) A área lateral e a área total de uma pirâmide quadrangular regular cuja altura é 3 m e a aresta da base é 8 m, medem, respectivamente:

a) $25\ m^2$ e $144\ m^2$
b) $64\ m^2$ e $89\ m^2$
c) $80\ m^2$ e $105\ m^2$
d) $80\ m^2$ e $144\ m^2$
e) $25\ m^2$ e $64\ m^2$

65) (PUC-RS) Se "ℓ" é a medida da aresta de um tetraedro regular, então sua altura é:

a) $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$ b) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\ell\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\ell\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\ell\sqrt{6}}{9}$

66) (U.F.RS) Uma pirâmide de altura 6 e área da base 27 é interceptada por um plano cuja distância ao vértice é 2 e que é paralelo ao plano da base. O volume do tronco de pirâmide assim determinado é:

a) 44 b) 46 c) 48 d) 50 e) 52

67) (U.F.MG) A altura de uma pirâmide é 3 m e sua base é um quadrado de lado 3 m. O volume do tronco obtido pela seção por um plano paralelo à base, distante 1 m desta, é:

a) $\frac{8}{3}\ m^3$ b) $\frac{15}{3}\ m^3$ c) $\frac{19}{3}\ m^3$ d) $7\ m^3$ e) $9\ m^3$

68) (U.C.MG) A área total de uma pirâmide regular, de altura 30 mm e base quadrada de lado 80 mm, mede, em mm^2:

a) 44 000 b) 56 000 c) 60 000 d) 65 000 e) 14 400

69) (F.M. SANTA CASA-SP) Sejam dados um tetraedro regular e um ponto interno qualquer. Sejam x, y, z e t as distâncias desse ponto às quatro faces do tetraedro. Podemos então afirmar que:

a) seu volume $V = \frac{1}{3} S (x + y - z + t)^2$ (com S = área de uma face)
b) sua altura $h = x + y + z + t$
c) sua área total $A = h^2 (x + y - t + z)$
d) a área de uma face

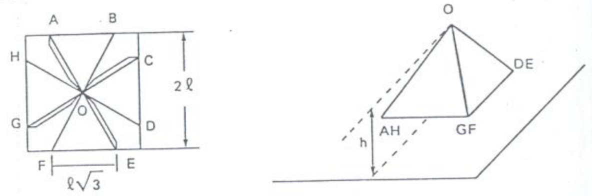
$$S = \frac{1}{3} (x + y) (x - t) + x$$

e) n.d.a.

70) (F.M. SANTOS-SP) Seja um tetraedro regular de aresta **a** e volume V. Então:

a) $2\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{3}$
b) $5V - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}a^3$
c) $12V - \sqrt{2} = a^3\sqrt{2}$
d) $12\sqrt{2}V = 2a^3$
e) n.d.a.

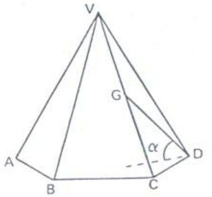
71) (CESGRANRIO) Para fazer o telhado de uma casa de cartolina, um quadrado de centro O e lado 2ℓ é recortado, como mostra a figura I. Os lados $AB = CD = EF = GH$ medem $\ell\sqrt{3}$. Montando o telhado (figura II), sua altura **h** é:



(I) (II)

a) $\frac{\ell}{2}$ b) $\frac{2\ell}{5}$ c) $\frac{3\ell}{10}$ d) $(2 - \sqrt{3})\ell$ e) $\frac{\ell\sqrt{3}}{5}$

72) (CESGRANRIO) Considere uma pirâmide hexagonal regular de altura **h** e lado da base ℓ, como mostrada na figura. Traça-se o segmento GD ligando o vértice D ao ponto G que divide a aresta VC ao meio. Se α é o ângulo agudo formado por GD e sua projeção na base da pirâmide, então $\operatorname{tg}\alpha$ é:

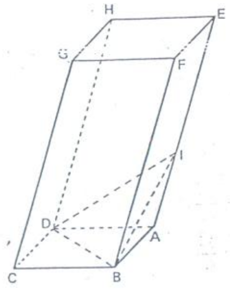


a) $\frac{h\sqrt{3}}{3\ell}$ b) $\frac{h}{2\ell}$ c) $\frac{h\sqrt{2}}{\ell}$ d) $\frac{h\sqrt{3}}{2\ell}$ e) $\frac{h\sqrt{3}}{\ell}$

73) (U.C.MG) Se a área de uma face da pirâmide pentagonal regular é $6\ m^2$ e seu apótema 4 cm, então o perímetro de sua base mede, em cm:

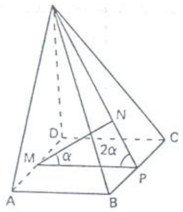
a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

74) (OSEC-SP) São dados: um prisma quadrangular, cuja base ABCD é um quadrado, e uma pirâmide triangular com base ABD e vértice I, situado sobre a aresta do prisma, sendo a aresta AI a quarta parte da aresta AE (ver figura). Se V é o volume da pirâmide, então o volume do prisma será:



a) 6 V
b) 12 V
c) 18 V
d) 24 V
e) 30 V

75) (FATEC-SP) Na figura ao lado, a base da pirâmide é um quadrado com lado de comprimento ℓ; se $\overline{BP} = \overline{PC} = \overline{AM} = \overline{MD}$ e $\alpha = 30°$, então:



a) $\overline{MN} = \dfrac{2\ell}{3}$

b) $\overline{MN} = \dfrac{3\ell}{2}$

c) $\overline{MN} = \ell\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\overline{MN} = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$

e) n.d.a.

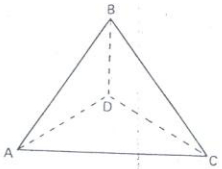
76) (PUC-SP) Os triângulos eqüiláteros ABC e DEF possuem lado igual a 2 e estão em planos paralelos, cuja distância é 2. As retas AD, BE e CF são paralelas entre si. O volume do tetraedro ACDE é:

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ c) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

77) (FASP) Uma pirâmide regular hexagonal tem área da base 100 m² e altura 10 m. A que distância do vértice devemos seccioná-la de modo que a área da seção seja 75 m²?

a) $\sqrt{10}$ m b) $\dfrac{10}{\sqrt{75}}$ m c) $\dfrac{10}{\sqrt{15}}$ m d) $\sqrt{75}$ m

78) (F.M. SANTA CASA-SP) No tetraedro representado na figura ao lado, tem-se $\overline{AD} \perp \overline{BD}$, $\overline{AD} \perp \overline{DC}$, $\measuredangle(B\hat{A}D) = \measuredangle(C\hat{A}D)$. Então, pode-se concluir que:



a) BD = DC

b) AD = DC

c) AB < BC

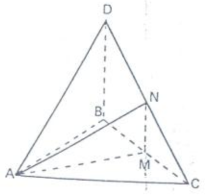
d) AC < BD

e) AD < DB

79) (MACKENZIE-SP) Duas pirâmides têm a mesma altura, 15 m. A primeira tem por base um quadrado de 9 m de lado e a segunda um hexágono regular de mesma área. A área da seção paralela à base, traçada a 10 m de distância do vértice, na segunda pirâmide, vale:

a) 36 b) 27 c) 54 d) 45 e) $10\sqrt{3}$

80) (FATEC-SP) Todas as arestas do tetraedro ABCD, indicado ao lado, medem **a**. Se M é ponto médio de BC e N é ponto médio de CD, então o volume do tetraedro AMCN é:



a) $\dfrac{a^3}{32}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}}{12}a^3$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{48}a^3$

d) $\dfrac{\sqrt{30}}{72}a^3$

e) $\dfrac{3a^3}{32}$

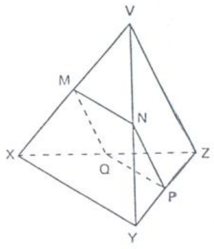
81) (UNESP) É dada uma pirâmide de altura H, H = 9 cm, e volume V, V = 108 cm³. Um plano paralelo à base dessa pirâmide corta-a determinando um tronco de pirâmide de altura **h**, h = 3 cm. O volume do tronco de pirâmide resultante é:

a) 36 cm³ b) 38 cm³ c) 54 cm³ d) 72 cm³ e) 76 cm³

82) (U.F.RS) Uma barraca piramidal é sustentada por seis hastes metálicas de 4 m de comprimento, cujas extremidades são o vértice da pirâmide e os seis vértices da base, respectivamente. A base é um polígono horizontal, inscritível, cujos lados têm todos o mesmo comprimento, 2,4 m. A altura da barraca, em metros, é:

a) 2,2 b) 2,5 c) 2,7 d) 3,0 e) 3,2

83) (CESGRANRIO) Num tetraedro regular VXYZ de aresta 12 cm, M, N, P e Q são os pontos médios das arestas VX, VY, YZ e XZ, respectivamente. A área do quadrilátero MNPQ é:



a) 72 cm²

b) 36 cm²

c) $12\sqrt{3}$ cm²

d) $12\sqrt{2}$ cm²

e) igual à área de uma face do tetraedro

84) (U.F.PR) O volume de um tetraedro regular de altura 10 cm é:

a) $125\sqrt{2}$ cm³ b) $125\sqrt{3}$ cm³ c) $250\sqrt{3}$ cm³ d) $375\sqrt{2}$ cm³ e) $375\sqrt{3}$ cm³

85) (F.M. SANTOS-SP) Sejam um tetraedro regular e um cubo de arestas iguais. Podemos dizer que a relação entre os volumes do tetraedro e do cubo vale:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{3}{4}$ c) $\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ e) n.d.a.

86) (FUVEST-SP) O segmento AB é um diâmetro de uma circunferência e C um ponto dela, distinto de A e de B. A reta VA, V ≠ A, é perpendicular ao plano da circunferência. O número de faces do tetraedro VABC que são triângulos retângulos é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

87) (PUC-SP) O volume de um tronco de pirâmide de bases paralelas e altura **h** é dado por $V = \dfrac{h}{3}(S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$, onde S e S' são as áreas das bases. Se as bases de um tronco de pirâmide são quadrados de lados 3 e 4 e se a altura é 5, então o seu volume é:

a) $\dfrac{175\sqrt{3}}{3}$ b) 73 c) $\sqrt{12}$ d) $25 + \sqrt{3}$ e) $\dfrac{185}{3}$

88) (MACKENZIE-SP) Sabe-se que um poliedro convexo tem oito faces e que o número de vértices é maior que 6 e menor que 14. Então o número A de arestas é tal que:

a) $14 \leq A \leq 20$
b) $14 < A < 20$
c) $13 < A < 19$
d) $13 \leq A \leq 19$
e) $12 \leq A \leq 20$

(Teorema de Euler: $A + 2 = V + F$)

89) (CEUB-DF) O tetraexaedro é um sólido limitado por quatro faces triangulares e seis hexagonais, todas regulares. Calcular o número de faces e de vértices desse poliedro.

a) $F = 10$ e $V = 8$
b) $F = 10$ e $V = 11$
c) $F = 10$ e $V = 16$
d) $F = 10$ e $V = 18$

90) (CESESP-PE) Sabendo-se que num poliedro convexo o número de arestas é igual ao número de vértices somado com 12, assinale a alternativa que nos dá o número de faces deste poliedro:

a) 12 b) 11 c) 14 d) 13 e) 10

91) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) O número de diagonais do icosaedro regular é igual a:

a) 190 b) 40 c) 36 d) 32 e) 102

92) (FATEC-SP) Um poliedro P convexo tem 3 faces com 4 lados, 2 faces com 3 lados e 4 faces com 5 lados. Se V é o número de vértices de P, então:

a) $V = 9$ b) $V = 12$ c) $V = 11$ d) $V = 14$ e) n.d.a.

93) (PUC-SP) Qual é o poliedro regular que tem 12 vértices e 30 arestas?

a) hexaedro
b) octaedro
c) dodecaedro
d) icosaedro
e) tridecaedro

94) (FMU/FIAM-SP) O hexaedro regular é um poliedro com:

a) 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices
b) 3 faces quadradas, 4 arestas e 6 vértices
c) 6 faces triangulares, 12 arestas e 8 vértices
d) 4 faces quadradas, 8 arestas e 8 vértices
e) 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices

95) (FASP) O número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais é:

a) 8 b) 10 c) 12 d) 7

96) (MACKENZIE-SP) Um poliedro convexo tem 15 faces. De dois de seus vértices partem cinco arestas, de quatro outros partem quatro arestas e dos restantes partem três arestas. O número de arestas do poliedro é:

(Teorema de Euler: $A + 2 = V + F$)

a) 75 b) 53 c) 31 d) 45 e) 25

97) (PUC-SP) Quantas diagonais possui um prisma pentagonal?

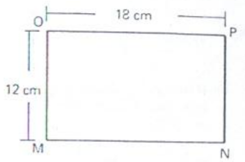
a) 5 b) 10 c) 15 d) 18 e) 24

98) (UNIFICADO-RS) A área total de um cilindro reto de revolução é 128π e sua altura é 12. A área lateral do sólido é:

a) 192π b) 96π c) 64π d) 48π e) 36π

99) (U.F.BA) Considerem-se os cilindros C_1 e C_2, obtidos pela rotação do retângulo OMNP em torno de $\overline{OM}$ e $\overline{OP}$, respectivamente. A razão entre as áreas totais de C_1 e C_2 é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) 3 e) $\frac{3}{2}$



100) (U.F.ES) Um prisma hexagonal regular está inscrito num cilindro eqüilátero. A razão entre as áreas laterais do prisma e do cilindro é:

a) $\frac{7}{\pi}$ b) $\frac{6}{\pi}$ c) $\frac{5}{\pi}$ d) $\frac{4}{\pi}$ e) $\frac{3}{\pi}$

101) (U.F.GO) Para encher de água um reservatório que tem a forma de um cilindro circular reto são necessárias cinco horas. Se o raio da base é 3 m e a altura 10 m, o reservatório recebe água à razão de:

a) 18π m³ por hora
b) 30π m³ por hora
c) 6π m³ por hora
d) 20π m³ por hora
e) 10π m³ por hora

102) (UnB-DF) Um retângulo de papel de altura **h** é transformado num cilindro oco juntando-se dois de seus lados opostos. Sabendo-se que a área deste cilindro é equivalente à área de uma esfera de raio $\frac{h}{\sqrt{4\pi}}$, pode-se afirmar que a base do retângulo vale:

a) 1 b) h c) 2h d) $\frac{h}{\pi}$

103) (PUC-RS) Dois cilindros, um de altura 4 e outro de altura 6, têm para perímetro de suas bases 6 e 4, respectivamente. Se V_1 é o volume do primeiro e V_2 o volume do segundo, então:

a) $V_1 = V_2$ b) $V_1 = 2V_2$ c) $V_1 = 3V_2$ d) $2V_1 = 3V_2$ e) $2V_1 = V_2$

104) (U.C.MG) Um pedaço de cano cilindrico circular reto tem espessura igual a 50 mm. Se o volume interno do cano é igual ao volume do material gasto para construí-lo, então o seu raio interno, em mm, é igual a:

a) $50\sqrt{2}$ b) $50(\sqrt{2} - 1)$ c) $50(2 - \sqrt{2})$ d) $50(1 + \sqrt{3})$ e) $50(\sqrt{2} + 1)$

105) (U. FORTALEZA-CE) O raio de um cilindro circular reto é aumentado de 20% e sua altura é diminuída de 25%. O volume desse cilindro sofrerá um aumento de:

a) 2% b) 4% c) 6% d) 8%

106) (F.M. SANTA CASA-SP) Um cilindro com eixo horizontal de 15 m de comprimento e diâmetro interno de 8 m contém álcool. A superfície livre do álcool determina um retângulo de área 90 m². Qual é o desnível entre essa superfície e a geratriz de apoio do cilindro?

a) 6 m b) $\sqrt{7}$ m c) $4 - \sqrt{7}$ m d) $4 + \sqrt{7}$ m e) $(4 - \sqrt{7})$ m ou $(4 + \sqrt{7})$ m

107) (FATEC-SP) Um cilindro circular reto com raio da base igual a r, $r = \frac{4}{\sqrt{16 - \pi^2}}$ cm e altura 2r, é seccionado por um plano paralelo ao seu eixo e a uma distância x desse eixo. Se a área de seção do plano com o cilindro é igual à área da base do cilindro, então:

a) x = 1 cm b) x = 2 cm c) x = 3 cm d) x = 4 cm e) n.d.a.

108) (FATEC-SP) Um octaedro regular está inscrito num cilindro circular reto de raio $\sqrt{2}$ cm; se um dos vértices do octaedro situa-se no centro da base do cilindro e se V é o volume do cilindro, então:

a) $V = 4\sqrt{2}\,\pi\ cm^3$
b) $V = 8\,\pi\ cm^3$
c) $V = 16\sqrt{2}\,\pi\ cm^3$
d) $V = 4\pi\ cm^3$
e) $2\pi\ cm^3$

109) (MOJI-SP) O raio e a altura de um cilindro circular reto, cujo volume é igual ao volume de um cubo cuja aresta mede a e cuja área da superfície lateral é igual à área da superfície do mesmo cubo, valem respectivamente:

a) $r = \frac{a}{3}$ e $h = 9a\pi$
b) $r = \frac{a}{3}$ e $h = \frac{9a}{\pi}$
c) $r = \frac{a}{3}$ e $h = \frac{9\pi}{a}$
d) $r = 3a$ e $h = 9\pi a$
e) $r = 3a$ e $h = \frac{9a}{\pi}$

110) (MACKENZIE-SP) A razão entre a área total e a área lateral de um cilindro eqüilátero é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) 2 e) 3

111) (PUC-SP) Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados no reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica, sabendo que seu diâmetro é 2 mm e seu comprimento é 12 cm?

a) 0,3768 b) 3,768 c) 0,03768 d) 37,68 e) 0,003768

112) (PUC-SP) As projeções ortogonais de um cilindro sobre dois planos perpendiculares são, respectivamente, um círculo e um quadrado. Se o lado do quadrado é 10, qual é o volume do cilindro?

a) 1 000 π b) 750 π c) 500 π d) 250 π e) 100 π

113) (OSEC-SP) Se a altura de um cilindro circular reto é igual ao diâmetro da base, então a razão entre a área total e a área lateral do cilindro é igual a:

a) 3 b) $\frac{3}{2}$ c) $2\pi r^2$ d) 2 e) 1

114) (U.F.RS) Uma panela cilíndrica de 20 cm de diâmetro está completamente cheia de massa para doce, sem exceder a sua altura de 16 cm. O número de doces em formato de bolinhas de 2 cm de raio que se podem obter com toda a massa é:

a) 300 b) 250 c) 200 d) 150 e) 100

115) (ITA-SP) Considere um ângulo reto AÔB e P um ponto interior deste ângulo que dista de seus lados 3 cm. Passe por P uma reta que intercepte o lado OA num ponto M (M ≠ O) e o lado OB num ponto N; forme o retângulo de lados OM e ON. A razão do volume para a superfície total do sólido gerado pela rotação deste retângulo em torno do lado OA é:

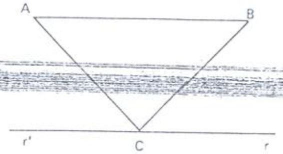
a) $\frac{3}{2}$ b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{4}{3}$

CONES CIRCULARES

116) (MACKENZIE-SP) A área da seção meridiana de um cone reto é igual à área de sua base. Se o raio da base é 1, então a altura do cone é:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) π e) $\sqrt{\pi}$

117) (U.F.SC) O triângulo ABC é retângulo em C e isósceles. O lado AB é paralelo à reta rr' e mede 8 cm. O volume do sólido gerado pela revolução do triângulo ABC em torno da reta rr', em cm³, é:



a) $\frac{64\pi}{3}$
b) $\frac{256\pi}{3}$
c) $\frac{128\pi}{3}$
d) $\frac{512\pi}{3}$
e) $\frac{32\pi}{3}$

118) (U.F.PA) A base de um cilindro de revolução está circunscrita a um hexágono regular de 18 cm de perímetro, e a sua altura é o dobro do raio da base. Então, o volume do cone de revolução inscrito neste cilindro é:

a) 169,56 cm³
b) 5,652 cm³
c) 18,84 cm³
d) 0,5652 cm³
e) 56,52 cm³

119) (U.C.MG) Se um cone tem 10 dm de altura e a circunferência de sua base mede 9π dm, então seu volume, em dm³, é:

a) $67,5\pi$ b) 30π c) $6,75\pi$ d) $675\pi^3$ e) $30\pi^3$

120) (FATEC-SP) Considere um cone circular reto onde a altura é o triplo do diâmetro da base. Se R é o raio da base e V é o volume desse cone, então:

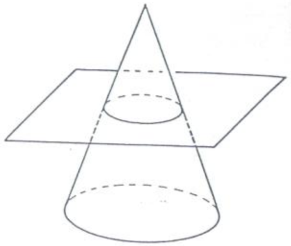
a) $V = 2\pi R^3$ b) $V = \pi R^3$ c) $V = 3\pi R^3$ d) $V = 6\pi R^3$ e) n.d.a.

121) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) Desenvolvendo a superfície lateral de um cone circular reto de raio 4 e altura 3, obtêm-se um setor circular, cujo ângulo central mede:

a) 216° b) 240° c) 270° d) 288° e) 180°

122) (U.F.BA) O cone representado ao lado tem 12 cm de raio e 16 cm de altura, sendo **d** a distância do vértice a um plano α paralelo à base. Para que as duas partes do cone separadas pelo plano α tenham volumes iguais, **d** deve ser igual a:

a) $8\sqrt[3]{4}$ cm
b) $8\sqrt{2}$ cm
c) 8 cm
d) 10 cm
e) 12 cm



123) (U.F.BA) Um cone e um cilindro têm a mesma base; o raio do cone é a metade de sua altura. Sabendo-se que a altura do cilindro mede 18 cm e que os volumes dos sólidos são iguais, a altura do cone é igual a:

a) 6 cm b) 13,5 cm c) 18 cm d) 27 cm e) 54 cm

124) (U.F.ES) Desenvolvendo-se a superfície lateral de um cone reto, obtém-se um setor circular de raio 9 cm e ângulo central 200°. A área lateral deste cone mede:

a) 50π cm² b) 45π cm² c) 31π cm² d) 14π cm² e) 9π cm²

125) (U.F. AL) Um cilindro e um cone são equivalentes e estão colocados de tal maneira que suas bases coincidem. Então, a altura do cone é:

a) o dobro da altura do cilindro
b) a terça parte da altura do cilindro
c) o triplo da altura do cilindro
d) metade da altura do cilindro
e) igual à altura do cilindro

126) (U.F.GO) O volume de um tronco de cone circular reto com base de raio R, cuja altura é a quarta parte da altura **h** do cone correspondente, é:

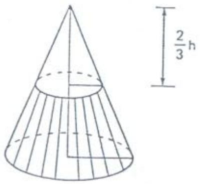
a) $\frac{\pi R^2 h}{4}$ b) $\frac{\pi R^2 h}{12}$ c) $\frac{55\pi R^2 h}{192}$ d) $\frac{37\pi R^2 h}{192}$ e) $\frac{3\pi R^2 h}{4}$

127) (U.F.UBERLÂNDIA-MG) A área da base de um cone reto é igual à área da seção meridiana. Se o raio da base vale R, a altura do cone valerá:

a) πR b) $2\pi R$ c) $\frac{3\pi R}{2}$ d) $\frac{2\pi R}{3}$ e) $\frac{\pi R}{2}$

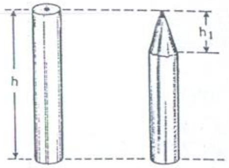
128) (UnB-DF) Um cone circular reto é seccionado por um plano paralelo à sua base a $\frac{2}{3}$ de seu vértice. Se chamarmos V o volume do cone, então o volume do tronco do cone resultante vale:

a) $\frac{8}{27}$ V
b) $\frac{2}{3}$ V
c) $\frac{4}{9}$ V
d) $\frac{19}{27}$ V



129) (UnB-DF) Um lápis novo de altura **h** é apontado. Se a altura h_1 da ponta (veja figura) for igual a $\frac{1}{10}$ da altura do lápis, então a porcentagem de material desperdiçado (raspas de madeira e grafite) é:

a) 4% b) 10% c) 5% d) 6,6%



130) (U.F.PR) A geratriz de um cone mede 13 cm e o diâmetro da sua base 10 cm. O volume do cone é:

a) 100π cm³ b) 200π cm³ c) 400π cm³ d) $\frac{325\pi}{3}$ cm³ e) $\frac{1\,300}{3}\pi$ cm³

131) (PUC-RS) Num cone de revolução, a medida da altura é **h** e a da geratriz é g. Se a altura e a geratriz formam um ângulo de medida α, a relação entre **h** e **g** é:

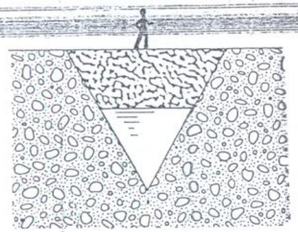
a) $h = g \operatorname{sen} \alpha$ b) $h = g \operatorname{tg} \alpha$ c) $h = g \cos \alpha$ d) $h = \frac{g}{\operatorname{sen} \alpha}$ e) $h = \frac{g}{\cos \alpha}$

132) (U.F.RS) O volume do sólido gerado pela revolução de um triângulo eqüilátero de lado **a** em torno de um de seus lados é:

a) $\frac{1}{4}\pi a^3$ b) $\frac{1}{3}\pi a^3$ c) $\frac{1}{2}\pi a^3$ d) $\frac{3}{4}\pi a^3$ e) $\frac{4}{3}\pi a^3$

133) (PUC-RJ) Um tanque subterrâneo tem a forma de um cone circular reto invertido, de eixo vertical, e está cheio até a boca (nível do solo) com 27 000 litros de água e 37 000 litros de petróleo (o qual é menos denso que a água). Sabendo que a profundidade total do tanque é 8 metros e que os dois líquidos não são miscíveis, a altura da camada de petróleo é:

a) 6 metros
b) 2 metros
c) $\frac{3\sqrt{37}}{\pi}$ metros
d) $\frac{27}{16}$ metros
e) $\frac{37}{16}$ metros



134) (U.F.MG) A altura de um reservatório cônico de volume 9π m³ e raio da base 3 m é:

a) 1 m b) 3 m c) $3\sqrt{2}$ m d) $3\sqrt{3}$ m e) 3π m

135) (U.C.MG) Um cone de papel de 40 cm de altura e raio da base 30 cm é feito de uma folha de papel na forma de um setor circular. O ângulo deste setor circular é igual a:

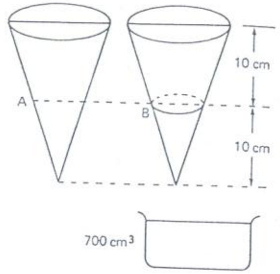
a) 180° b) 216° c) 230° d) 265° e) 304°

136) (PUC-SP) A hipotenusa de um triângulo retângulo mede 2 e um dos ângulos mede 60°. Girando-se o triângulo em torno do cateto menor, obtêm-se um cone cujo volume é igual a:

a) π b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

137) (F. OSWALDO CRUZ-SP) Um funil cônico está cheio de um líquido, conforme a figura A. Deixa-se escoar parte do líquido para um reservatório graduado, conforme mostra a figura B. O volume do líquido no reservatório é 700 cm³. O volume do líquido que resta no funil é, em cm³:

a) 100 b) 200 c) 350 d) 700



138) (MACKENZIE-SP) Um cone e um prisma quadrangular regular retos têm bases de mesma área. O prisma tem altura 12 e volume igual ao dobro do volume do cone. Então, a altura do cone vale:

a) 18 b) $\frac{16\pi}{3}$ c) 36 d) 24 e) 8π

139) (FASP) O raio da base, a altura e o apótema de um cone reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determinar esses elementos sendo 37,68 cm³ o volume do cone (adotar $\pi = 3{,}14$).

a) 1 cm, 2 cm, 3 cm
b) 3 cm, 6 cm, 9 cm
c) 3 cm, 4 cm, 5 cm
d) 2 cm, 4 cm, 6 cm

140) (U.E. LONDRINA-PR) Se o volume de um cone circular reto é 512π cm³ e o raio da base é a terça parte da altura, então a área da base desse cone é, em cm²:

a) 24π b) 36π c) 48π d) 64π e) 128π

141) (F.M. SANTA CASA-SP) Se o raio da base, a altura e a geratriz de um cone circular reto constituem, nessa ordem, uma PA de razão igual a 1, o volume desse cone é, em unidades de volume:

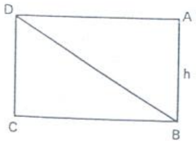
a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $(\sqrt{3} + 1)\pi$ c) 12π d) 16π e) $\frac{80\pi}{3}$

142) (ITA-SP) Qual o volume de um cone circular reto, se a área de sua superfície lateral é de 24π cm² e o raio de sua base é 4 cm?

a) $\frac{16}{3}\sqrt{20}\,\pi$ cm³
b) $\frac{\sqrt{24}}{4}\pi$ cm³
c) $\frac{\sqrt{24}}{3}\pi$ cm³
d) $\frac{8}{3}\sqrt{24}\,\pi$ cm³
e) $\frac{1}{3}\sqrt{20}\,\pi$ cm³

143) (MACKENZIE-SP) Na figura ao lado o retângulo ABCD faz uma rotação completa em torno de $\overline{AB}$. A razão entre os volumes gerados pelos triângulos ABD e BCD é:

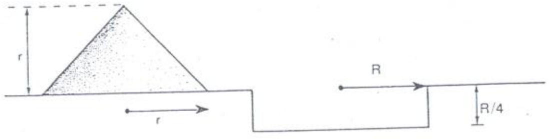
a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 3 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{4}$



144) (OSEC-SP) O volume de um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa igual a 1, em torno de um eixo que contém a hipotenusa, é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{12}$ d) $\frac{\pi}{24}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

145) (CESGRANRIO) Para construir uma piscina cilíndrica, com fundo circular, cava-se num terreno plano um buraco, com raio R e profundidade $\frac{R}{4}$. A terra fofa, retirada do buraco, ocupa um volume 20% maior do que o do buraco cavado e é amontoada na forma de um cone de revolução. Supondo que o raio r da base do cone é igual à sua altura, então a melhor aproximação de $\frac{r}{R}$ é:



a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 1,2 d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\sqrt{3}$

146) (PUC-CAMPINAS-SP) Um triângulo retângulo tem catetos medindo 2 cm e $2\sqrt{3}$ cm. Lembrando que o volume do cone é dado pela fórmula $V = \frac{1}{3} \cdot$ (área da base) $\cdot$ (altura), concluímos que o sólido gerado pela rotação completa desse triângulo em torno de sua hipotenusa tem o volume de:

a) 6π cm³ b) $3\sqrt{2}\,\pi$ cm³ c) 4π cm³ d) $2\sqrt{3}\,\pi$ cm³ e) n.d.a.

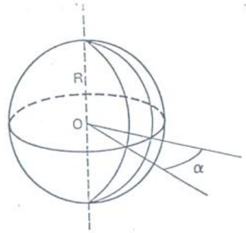
147) (PUC-SP) Um quebra-luz é um cone de geratriz 17 cm e altura 15 cm. Uma lâmpada acesa no vértice do cone projeta no chão um círculo de 2 m de diâmetro. A que altura do chão se encontra a lâmpada?

a) 1,50 m b) 1,87 m c) 1,90 m d) 1,97 m e) 2,00 m

ESFERA

148) (PUC-SP) A área do fuso esférico, com o ângulo α medido em radianos, é:

a) αR^2
b) $3\alpha R^2$
c) $4\alpha R^2$
d) $2\alpha R^2$
e) $\frac{1}{2}\alpha R^2$



149) (PUC-SP) A soma de todas as arestas de um cubo mede 24 m. O volume da esfera inscrita no cubo é:

a) $\frac{2}{3}\pi\ m^3$ b) $\frac{3}{4}\pi\ m^3$ c) $\frac{1}{2}\pi\ m^3$ d) $\frac{3}{2}\pi\ m^3$ e) $\frac{4}{3}\pi\ m^3$

150) (UnB-DF) A superfície de uma esfera de centro O e raio **r** é o conjunto de todos os pontos do espaço que têm distância a O igual a **r**. Dizemos que S é uma superfície esférica (de centro O) quando S é a superfície de alguma esfera (de centro O). Resolva agora o seguinte problema:

Sejam E_1, E_2, E_3 e E_4 quatro pontos não coplanares (isto é, não existe nenhum plano que os contenha ao mesmo tempo). Então:

a) existe uma única superfície esférica contendo E_1, E_2, E_3, E_4
b) existem infinitas superfícies esféricas tendo seus centros sobre uma mesma reta e cada uma delas contém E_1, E_2, E_3, E_4
c) existem infinitas superfícies esféricas cujos centros não precisam estar sobre uma mesma reta e cada uma delas contém E_1, E_2, E_3, E_4
d) n.d.a.

151) (UnB-DF) A área da superfície de uma esfera de raio r é $4\pi r^2$ e o volume da mesma esfera é $\frac{4}{3}\pi r^3$. Se S_1 e S_2 são duas esferas e o volume de S_2 é o dobro do de S_1, então o quociente

$$\frac{\text{área da superfície de } S_2}{\text{área da superfície de } S_1}$$

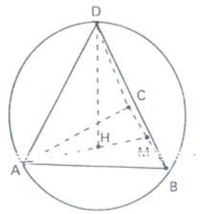
é:

a) 2 b) $\pi\sqrt[3]{4}$ c) $3\sqrt[3]{4}$ d) n.d.a.

152) (UNIFICADO-RS) A razão entre o volume de uma esfera e o volume do cubo nela inscrito é:

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\pi\sqrt[3]{3}}{2}$ c) $4\pi\sqrt{3}$ d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

153) (ITA-SP) Considere o tetraedro regular (figura) inscrito em uma esfera de raio R, onde R mede 3 cm. A soma das medidas de todas as arestas do tetraedro é dada por



a) $16\sqrt{3}$ cm d) $8\sqrt{3}$ cm
b) $13\sqrt{6}$ cm e) $6\sqrt{3}$ cm
c) $12\sqrt{6}$ cm

154) (ITA-SP) Considere o problema anterior, isto é, o tetraedro regular inscrito em uma esfera de raio R, onde R mede 3 cm, sendo HD sua altura (veja a figura). A diferença entre o volume do tetraedro e o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo DHM em torno de HD é dada por:

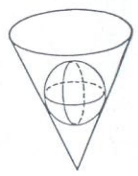
a) $(8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi)\ cm^3$ c) $(4\sqrt{2} - \frac{4}{5}\sqrt{3}\pi)\ cm^3$ e) $(7\sqrt{2} - \frac{\sqrt{5}}{3}\pi)\ cm^3$

b) $(5\sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\pi)\ cm^3$ d) $(3\sqrt{3} - \frac{3}{5}\sqrt{3}\pi)\ cm^3$

155) (MACKENZIE-SP) Vinte e sete esferas maciças de chumbo, de raio 1 metro, devem ser acondicionadas em uma única caixa, após o que, todo o "espaço" restante da caixa deve ser completado com água. Dispondo-se somente de cinco caixas cúbicas distintas, aquela na qual o volume de água adicionada é mínimo é a de capacidade, em metros cúbicos, igual a:

a) 108 b) 27π c) 36π d) 72π e) 81π

156) (U.F.BA) Uma esfera colocada no interior de um vaso cônico com 26 cm de geratriz e 24 cm de altura tangencia-o a 12 cm do vértice. O diâmetro da esfera é igual a:



a) 8 cm d) 13 cm
b) 10 cm e) 20 cm
c) 12 cm

157) (U.F.ES) Sejam duas esferas, uma inscrita e outra circunscrita num cubo de aresta a = 6 cm. O raio destas duas esferas medem, respectivamente:

a) 6 cm e $3\sqrt{2}$ cm c) 3 cm e $3\sqrt{2}$ cm e) 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm
b) 6 cm e $3\sqrt{3}$ cm d) 3 cm e $3\sqrt{3}$ cm

158) (PUC-RS) O volume do cubo inscrito numa esfera de raio 3 é:

a) $24\sqrt{3}$ b) $12\sqrt{3}$ c) $8\sqrt{3}$ d) $6\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

159) (U.F.RS) Um plano secciona uma esfera, determinando um círculo de raio igual à distância do plano ao centro da esfera. Sendo 36π a área do círculo, o volume da esfera é:

a) $192\sqrt{2}\pi$ b) [illegible] c) $576\sqrt{2}\pi$ d) 1296π e) [illegible]

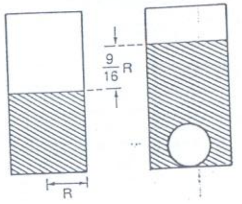
160) (U.F.MG) Uma esfera está inscrita em um cilindro circular reto de altura 6 cm. O volume do sólido entre as duas superfícies é:

a) $36\pi\ cm^3$ c) $9\pi\ cm^3$ e) $4\pi\ cm^3$
b) $18\pi\ cm^3$ d) $6\pi\ cm^3$

161) (F.C. CHAGAS-SP) Seja T um triângulo cujos lados medem 6 m, 8 m e 10 m. Seja C uma circunferência circunscrita a T. A área da superfície esférica que tem C como circunferência máxima é, em metros quadrados:

a) 36π b) 64π c) 100π d) $\frac{500\pi}{3}$ e) 400π

162) (CESGRANRIO) Um tanque cilíndrico com água tem raio R. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível da água sobre $\frac{9}{16}$ R (veja a figura). O raio da esfera é:



a) $\frac{3R}{4}$ d) $\frac{R}{2}$
b) $\frac{9R}{16}$ e) $\frac{2R}{3}$
c) $\frac{3R}{5}$

163) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) A área de uma esfera, a área total do cilindro eqüilátero circunscrito a ela e a área total do cone eqüilátero também circunscrito a essa esfera são proporcionais aos números:

a) 1, 2, 3 b) 4, 6, 9 c) 2, 4, 7 d) 3, 4, 5 e) 1, 2, 4

164) (MOJI-SP) Um plano intercepta uma esfera de raio R, determinando um círculo de raio r ($R \geq r$). A distância do centro do círculo ao centro da esfera é:

a) $x = \sqrt{2R^2 - r^2}$
b) $x = \sqrt{R^2 - 2r^2}$
c) $x = \sqrt{4R^2 - r^2}$
d) $x = \sqrt{R^2 - 4r^2}$
e) $x = \sqrt{R^2 - r^2}$

165) (ITA-SP) Considere uma esfera inscrita num cone circular reto tal que a área da superfície total do cone é n vezes a área da superfície da esfera, $n > 1$. Se o volume da esfera é r cm³ e se a área da base do cone é s cm², o comprimento em centímetros da altura do cone é dado por:

a) $\frac{r}{s}$ b) $\frac{nr}{s}$ c) $\frac{2nr}{s}$ d) $\frac{3nr}{s}$ e) $\frac{4nr}{s}$

166) (FESP) De uma esfera de raio r foi retirada uma cunha de 90°. Qual a área total do sólido restante?

a) $3\pi r^2$ b) $4\pi r^2$ c) $5\pi r^2$ d) $6\pi r^2$ e) n.d.a.

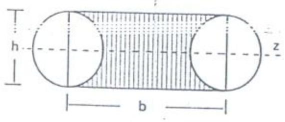
167) (FATEC-SP) Se uma esfera de raio R está inscrita num cilindro circular reto de volume V, então:

a) $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$
b) $R = \sqrt[3]{\frac{2V}{3\pi}}$
c) $R = \sqrt{\frac{V}{3\pi}}$
d) $R = \sqrt{\frac{V}{2\pi}}$
e) n.d.a.

168) (FIUBE-MG) Um sólido S é gerado pela rotação completa de um círculo em torno do seu diâmetro. Se o volume de S é 36π m³, a medida do raio do círculo, em metros, é:

a) 1,5 b) 3 c) 4,5 d) 6 e) 9

169) (ITA-SP) Considere um retângulo de altura h e base b e duas circunferências com diâmetro h e centros nos lados do retângulo, conforme a figura ao lado. Seja z um eixo que passa pelos centros destas circunferências. Calcule a superfície total do sólido gerado pela rotação da área hachurada da figura em torno do eixo z.



a) $\pi h(b - h)$ b) $\pi h(b + h)$ c) $\pi b(b - h)$ d) $\pi b(b + h)$ e) n.d.a.

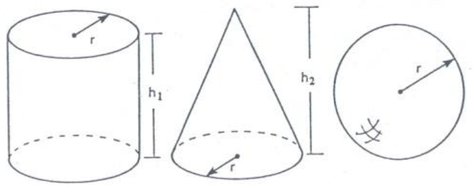
170) (FATEC-SP) Um cubo de aresta $2\sqrt{3}$ é inscrito numa esfera de raio r, então:

a) $r = 3$ b) $r = 2$ c) $r = \frac{5}{2}$ d) $r = 3\sqrt{3}$ e) $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

171) (CESESP-PE) Considere um tanque em forma de um cone invertido de raio da base 6 m e altura 8 m. Deixa-se cair dentro do tanque uma esfera de raio 3 m. Assinale a alternativa correspondente à distância do centro da esfera ao vértice do cone.

a) 4 m b) 2 m c) 5 m d) 10 m e) 6 m

172) (FATEC-SP) Os volumes do cilindro reto, do cone reto e da esfera, abaixo indicados, formam, nesta ordem, uma PG; então:

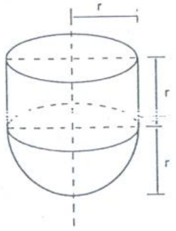


a) $(h_2)^2 = 12rh_1$
b) $h_2 = 4h_1$
c) $h_1 = 12(h_2)^2$
d) $h_1h_2 = 4r$
e) n.d.a.

173) (PUC-SP) Qual é o raio de uma esfera 1 milhão de vezes maior (em volume) que uma esfera de raio 1?

a) 100 000 b) 10 c) 10 000 d) 1 000 e) 100

174) (F. OSWALDO CRUZ-SP) Um reservatório tem a forma de um hemisfério acoplado a um cilindro de raio r e altura r, conforme a figura. O volume de um líquido que o ocupe completamente será:



a) $\frac{5}{3}\pi r^3$ b) $\frac{4}{3}\pi r^3$ c) πr^3 d) $5\pi r^3$

175) (ITA-SP) Seja $\widehat{AB}$ um arco de uma circunferência de raio r e centro O. A área da superfície da calota gerada pela rotação de $\widehat{AB}$ em torno de $\overline{OB}$ é de 7π cm². Qual o comprimento da corda $\overline{AB}$ do arco $\widehat{AB}$?

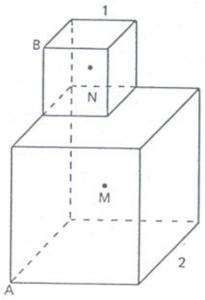
a) $\sqrt{7}$ cm b) $\frac{\sqrt{7}}{2}\pi$ cm c) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm d) $\sqrt{5}$ cm e) $\sqrt{5}\,\pi$ cm

VESTIBULARES — QUESTÕES DISCURSIVAS

PRISMAS — PIRÂMIDES — POLIEDROS CONVEXOS

176) (FEI-SP) O sólido abaixo é composto de dois cubos de arestas 2 cm e 1 cm e centros M e N.

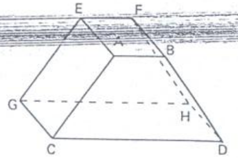
a) Achar a distância AB.
b) Achar a distância MN.



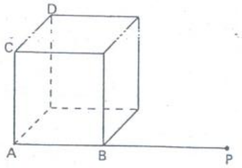
177) (FUVEST-SP) Na figura ao lado:

a) ABCD e EFGH são trapézios de lados 2, 8, 5 e 5;
b) os trapézios estão em planos paralelos cuja distância é 3;
c) as retas AE, BF, CG e DH são paralelas.

Calcule o volume do sólido.

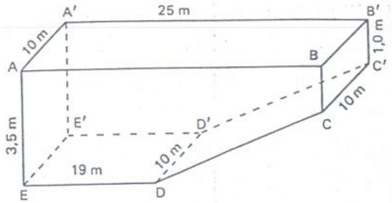


178) (FUVEST-SP) A aresta do cubo abaixo mede 2 e BP = 3. Calcule PC e PD.



179) (CESGRANRIO) Uma piscina tem a forma e as dimensões indicadas na figura. As três arestas que convergem em cada um dos pontos A, B, E, A', B' e E' são mutuamente ortogonais e as arestas AE, BC, B'C' e A'E' são verticais.

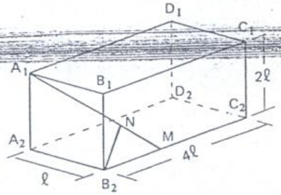
Então solucione e responda:



a) Quantos m^2 tem a área da superfície interna da piscina?
b) Qual a capacidade da piscina em litros? (1 litro $\leftrightarrow 10^{-3}$ m^3)
c) Seja V(x) o volume, em m^3, da água contida na piscina em função da altura **x** (em metros) do nível da água medida a partir do fundo DEE'D'. Determine a expressão analítica de V(x) no intervalo $0 \leq x \leq 2,5$.

180) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) O volume de um cubo é 216 cm^3. O ponto P é o centro de uma face e AB, uma aresta da face oposta. Determinar a área do triângulo APB.

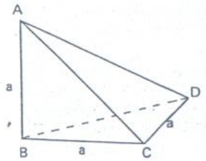
181) (E.E. MAUÁ-SP) No paralelepípedo retângulo ao lado, calcule a distância do vértice B_1 ao segmento A_1M, sendo M o ponto médio de B_2C_2.



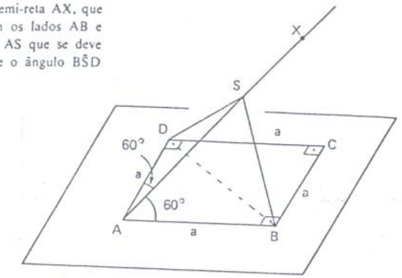
182) (IME-RJ) Dá-se um paralelogramo ABCD num plano π e um outro EFGH num plano π' de modo que se obtém um paralelepípedo (P) de vértices A, B, C, D, E, F, G e H, oblíquo, com todas as arestas de comprimento a. O plano que contém os pontos A, E e F forma com π um ângulo de 60° e $A\hat{E}F = 120°$. Calcular em função de a e do ângulo $F\hat{E}H = \theta$ o volume de (P).

183) (FEI-SP) Sendo a reta AB perpendicular ao plano BCD e a reta BC perpendicular à reta CD; e sendo a medida de cada segmento AB, BC e CD:

a) Achar o volume da pirâmide ABCD.
b) Achar a área total dessa pirâmide.



184) (F.E. FAAP-SP) Em um quadrado ABCD, de lado AB = a, conduz-se por A, fora do plano do quadrado, uma semi-reta AX, que forma ângulos de 60° com os lados AB e AD. Qual o comprimento AS que se deve tomar sobre AX, para que o ângulo BŜD seja reto?



185) (PUC-RJ) Calcule o volume de um tetraedro regular, em função da distância d entre duas arestas opostas.

186) (PUC-RJ) Considere um tetraedro de vértices A, B, C, D. São dados os ângulos, em radianos:

$$A\hat{D}B = \frac{\pi}{3} \quad e \quad C\hat{D}B = A\hat{D}C = \frac{\pi}{2}$$

e os comprimentos de três arestas, em metros:

$$DC = 3 \quad e \quad DA = DB = 4$$

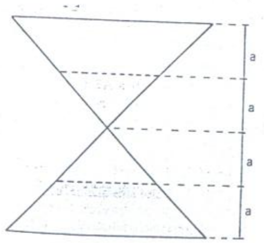
a) Determine o comprimento da aresta AB.
b) Calcule o volume do sólido.

187) (F.E. FAAP-SP) Num poliedro convexo, o número de arestas excede o número de vértices de 6 unidades. Calcular o número de faces.

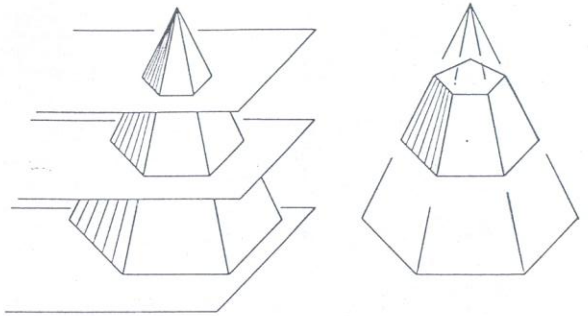
188) (U.F.MG) A área total de uma pirâmide regular, cuja base é um triângulo eqüilátero de lado **a**, é cinco vezes a área da base. Calcular o volume desta pirâmide.

CILINDROS — CONES — ESFERA

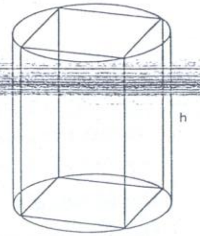
189) (F. OSWALDO CRUZ-SP) **Uma ampulheta é fabricada a partir da junção de dois recipientes de vidro idênticos, ambos com a forma de um cone, comunicando-se através de um orifício de área desprezível, conforme a figura. Em certo instante, a areia fina, que passa do recipiente superior para o inferior, atinge a mesma altura nos dois recipientes, como mostra a figura. O volume de areia no recipiente inferior é quantas vezes maior que no recipiente superior?**



190) (E.E. MAUÁ/LINS-SP) A altura **h** de uma pirâmide é dividida em três partes iguais por dois planos secantes paralelos à base. Sendo **B** a área da base, determinar o volume do tronco limitado pelas duas seções paralelas, em função de **B** e **h**.

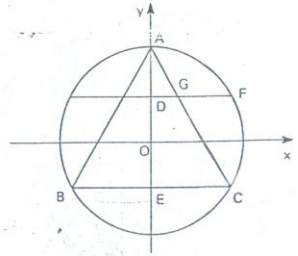


191) (F.E. FAAP-SP) Em um cilindro reto de 4 m de altura e 0,50 m de raio, foi inscrito um prisma quadrangular regular. Qual a relação entre os volumes?



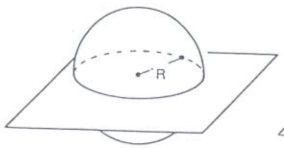
192) (FEI-SP) Na figura ao lado, o triângulo ABC é eqüilátero; os segmentos AD, DO e OE têm a mesma medida. Sabendo que o raio da circunferência é R, calcular:

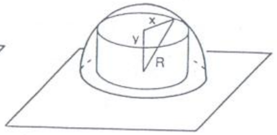
a) o volume do cone gerado pela rotação do triângulo ABC em torno do eixo OY;
b) a área da coroa circular de raios DG e DF gerada pela rotação do segmento GF em torno do eixo OY.



193) (U.F.CE) Considere um cone circular reto cujo raio da base é $r = 2\sqrt{2}$ cm e geratriz $g = 4\sqrt{2}$ cm. Se A e B são pontos diametralmente opostos situados sobre a circunferência da base deste cone, determine, em cm, o comprimento do menor caminho, traçado sobre a superfície lateral do cone, ligando A a B.

194) (E.E. MAUÁ/LINS-SP) Um plano passando pelo centro de uma esfera secciona-a em dois hemisférios. Num deles inscreve-se um cilindro circular reto, com uma base apoiada no plano secante enquanto a outra tem seu contorno apoiado na superfície do hemisfério. Dado o raio R da esfera, determinar o raio x e a altura y do cilindro para que a área de sua superfície lateral seja metade da área da superfície hemisférica.





195) (U.F.CE) Calcule, em cm³, $\frac{2}{3}$ do volume da região compreendida pela interseção de duas esferas de mesmo raio $R = \frac{9}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm, sabendo-se que a distância entre seus centros é $d = \frac{12}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm.

Obs.: O volume V da calota de altura h, obtida de uma esfera de raio r é

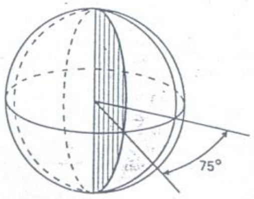
$$V = \pi h^2\left(r - \frac{1}{3}h\right)$$

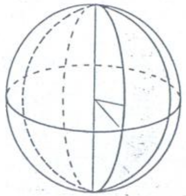
196) (F. ITAJUBÁ-MG) A área S e o volume V de uma superfície esférica de raio r são dados por: $S = 4\pi r^2$ e $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; expressar, simplificando:

a) V como função de S;

b) S como função de V.

197) (E.E. MAUÁ-SP) Uma cunha esférica correspondente a um diedro de 75°, tem volume igual a $V = \frac{15}{2}\pi$ m³. Determine a área do fuso esférico correspondente (superfície da esfera que corresponde à cunha).





198) (F. OSWALDO CRUZ-SP) Calcule o volume do cone circular reto, inscrito numa esfera de raio 1, sabendo que a razão entre sua altura e o raio da base é 2 $\left(\frac{h}{r} = 2\right)$.

199) (FUVEST-SP) Num cubo de aresta a um ponto P se situa numa das arestas e dista $\frac{a}{4}$ de um dos vértices. Qual a distância de P à superfície esférica inscrita no cubo?

200) (U.F.CE) Calcule, em cm³, o volume de um dado fabricado a partir de um cubo de aresta igual a 4 cm, levando em conta que os buracos representativos dos números, presentes em suas faces, são semi-esferas de raio igual a $\frac{1}{\sqrt[3]{7\pi}}$ cm.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE VESTIBULARES

TESTES

1	c	26	c	51	d	76	a	101	a	126	d	151	d
2	e	27	a	52	a	77	d	102	b	127	a	152	a
3	a	28	e	53	d	78	a	103	d	128	d	153	c
4	c	29	b	54	a	79	a	104	e	129	d	154	a
5	a	30	a	55	e	80	c	105	d	130	a	155	d
6	d	31	e	56	e	81	e	106	e	131	c	156	b
7	c	32	d	57	c	82	e	107	a	132	a	157	d
8	c	33	a	58	a	83	b	108	a	133	b	158	a
9	a	34	b	59	c	84	b	109	b	134	b	159	c
10	d	35	c	60	a	85	d	110	c	135	b	160	b
11	e	36	e	61	a	86	e	111	a	136	a	161	c
12	c	37	c	62	b	87	e	112	d	137	a	162	a
13	d	38	c	63	e	88	d	113	b	138	a	163	b
14	[illegible]	39	c	64	d	89	c	114	d	139	c	164	e
15	d	40	a	65	d	90	c	115	a	140	d	165	d
16	a	41	b	66	e	91	c	116	d	141	c	166	b
17	e	42	e	67	c	92	b	117	b	142	a	167	a
18	d	43	a	68	e	93	d	118	e	143	b	168	b
19	c	44	b	69	b	94	e	119	a	144	c	169	b
20	c	45	a	70	d	95	b	120	a	145	b	170	a
21	b	46	a	71	a	96	c	121	a	146	c	171	c
22	d	47	a	72	a	97	b	122	a	147	b	172	a
23	b	48	d	73	b	98	b	123	d	148	d	173	e
24	d	49	c	74	b	99	e	124	b	149	e	174	a
25	d	50	b	75	c	100	e	125	c	150	a	175	a

QUESTÕES DISCURSIVAS

176) a) $AB = \sqrt{10}$ cm b) $MN = \frac{\sqrt{17}}{2}$

177) 60

178) $PC = \sqrt{29}$ e $PD = \sqrt{33}$

179) a) 460 m^2 b) 800 000 ℓ c) $V(x) = 12x^2 + 190x$

180) $9\sqrt{5}$ cm^2

181) $\frac{2\sqrt{5}\,\ell}{3}$

182) $\frac{3a^3 \operatorname{sen} \theta}{4}$

183) a) $\frac{a^3}{6}$ b) $a^2(\sqrt{2} + 1)$

184) AS = a ou AS = o

185) $\frac{d^3}{3}$

186) a) 4 m b) $4\sqrt{3}$ m^3

187) 8

188) $\frac{a^2\sqrt{15}}{24}$

189) 7 vezes

190) $\frac{7Bh}{81}$

191) $V_{cilindro} = \frac{\pi}{2} \cdot V_{prisma}$

192) a) $V = \frac{3\pi R^3}{8}$ b) $\frac{2\pi R^2}{3}$

193) 8 cm

194) $x = y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

195) 96 cm^3

196) a) $S = \sqrt[3]{36\pi V^2}$ b) $V = \frac{S\sqrt{\pi S}}{6\pi}$

197) $\frac{15\pi}{2}$ m^2

198) $\frac{128\pi}{375}$

199) $\frac{a}{4}$

200) 62 cm^3

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.9) a) F b) V c) F d) V e) F f) V

1.10) a) F b) F c) V d) F e) V f) F g) F h) V i) V j) F k) V
l) F m) F n) V o) V p) F q) V r) F s) V t) F u) F v) V

1.11) três retas 1.12) seis retas 1.13) quatro planos

1.14) Como A e B pertencem a α e também a β, é claro que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida em ambos os planos (conforme o P6). Assim, $\overleftrightarrow{AB} \subset \alpha \cap \beta$. Resta provar que os pontos de $\overleftrightarrow{AB}$ são os únicos que pertencem a $\alpha \cap \beta$. De fato, se existisse um ponto C, fora de $\overleftrightarrow{AB}$, tal que $C \in \alpha \cap \beta$, então teríamos $\alpha = pl(ABC)$ e $\beta = pl(ABC)$, o que é um absurdo, pois $\alpha \neq \beta$. Portanto $\overleftrightarrow{AB} = \alpha \cap \beta$.

2.15) a) V b) V c) F

2.16) $\alpha = \beta$

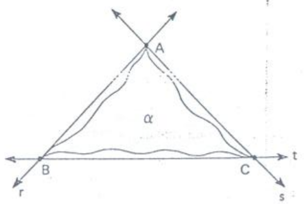
2.17) a) F b) F c) V d) V

2.18) Seja $\alpha = pl(r, A)$. Como $r \parallel s$, existe um único plano $\beta = pl(r, s)$. Mas $A \in s$, logo

$$\beta = pl(r, s) = pl(r, A) = \alpha$$

e, assim, $s \subset \alpha$.

2.19) Indiquemos as retas por r, s, t e as interseções por A, B e C (como a figura indica). É claro que os pontos A, B e C não são colineares (pois em caso contrário as retas coincidiriam). Seja então $\alpha = pl(A, B, C)$. Temos:



$(A \in r,\ B \in r,\ A \neq B) \Rightarrow r \subset \alpha$
$(A \in s,\ C \in s,\ A \neq C) \Rightarrow s \subset \alpha$
$(B \in t,\ C \in t,\ B \neq C) \Rightarrow t \subset \alpha$

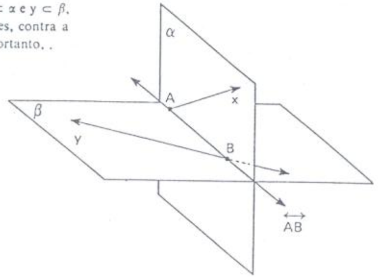
Assim, r, s e t são coplanares.

2.20) a) F b) F c) F d) V e) V f) F g) V h) V i) F j) F k) F l) V m) F

2.21) É claro que $r \neq s$, pois se fosse $r = s$, as retas concorrentes **a** e **b** seriam paralelas a uma mesma reta, contra o postulado P7.
Por outro lado, se fosse $r /\!/ s$, então como $a /\!/ r$, seria também $a /\!/ s$ (veja exercício 2.7) e como $b /\!/ s$ seria $a /\!/ b$ (absurdo).
Logo, **r** e **s** só podem ser concorrentes.

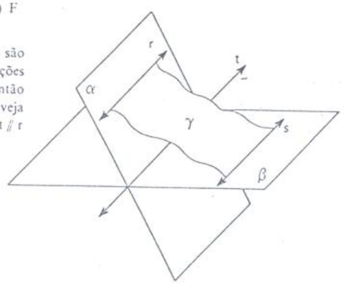
2.22) Se fosse $\alpha = \beta$, então como $x \subset \alpha$ e $y \subset \beta$, as retas **x** e **y** seriam coplanares, contra a hipótese de serem reversas. Portanto, .

$\alpha \neq \beta$



2.23) a) F b) V c) F d) V e) F

2.24) Seja $\gamma = pl(r, s)$. Os planos α, β e γ são secantes dois a dois e as suas interseções são as retas **distintas r, s e t**. Podemos então aplicar o **teorema das três interseções** (veja exercício 2.6). Como $r /\!/ s$, tem-se $t /\!/ r$ e $t /\!/ s$.



3.11) a) F b) F c) F d) V e) V f) F g) F h) F i) F j) F k) V l) V m) F n) F o) F

3.12) paralela ou contida

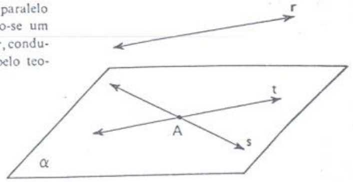
3.13) Basta notar que $r \cap s = \varnothing$

3.14) Aplique duas vezes o teorema T6:

$$\left.\begin{matrix} r \not\subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r /\!/ s \end{matrix}\right\} \Rightarrow r /\!/ \alpha \quad e \quad \left.\begin{matrix} r \not\subset \beta \\ s \subset \beta \\ r /\!/ s \end{matrix}\right\} \Rightarrow r /\!/ \beta$$

3.15) a) V b) F c) F d) F

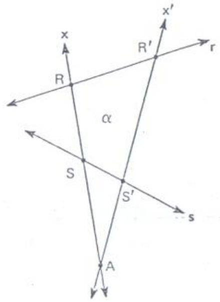
3.16) Seja α o plano que contém **s** e é paralelo a **r** (veja exercício 3.7). Tomando-se um ponto A qualquer de **s**, a reta $t /\!/ r$, conduzida por A, está contida em α (pelo teorema T7).



3.17) Basta considerar por **r** o plano $\alpha /\!/ t$ e por **s** o plano $\beta /\!/ t$. Assim, $x = \alpha \cap \beta$. Se $\alpha \cap \beta = \varnothing$, o problema não tem solução.

3.18) Basta tomar $A \in t$ e aplicar o exercício 3.10.

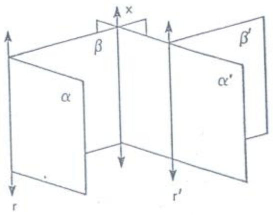
3.19) Observe a figura. Havendo duas retas distintas, **x** e **x'**, ficaria determinado o plano $\alpha = pl(x, x')$. Isto é absurdo, pois α conteria as retas **r** e **s**, que são reversas.



3.27) a) V b) F c) F d) V e) F f) F g) F h) V i) V j) F k) V
l) V m) V n) V o) V

3.28) Se $r \cap \beta = \varnothing$, tem-se $r /\!/ \beta$.
Se $r \cap \beta \neq \varnothing$, então $r \cap \beta = \{A\}$ ou $r \subset \beta$. Mas se fosse $r \cap \beta = \{A\}$, pelo teorema do exercício 3.25, r furaria α, o que é absurdo, pois $r /\!/ \alpha$. Assim, $r \subset \beta$.

3.29) Pelo teorema do exercício 3.26 o plano α' corta β segundo uma reta $x /\!/ r'$ e o plano β corta α' segundo uma reta $x /\!/ r$ (que é a mesma anterior, logicamente). Assim, pelo teorema T5, $r /\!/ r'$.



3.30) Sendo **r** e **s** reversas, considere por **r** o plano $\alpha /\!/ s$ e por **s** o plano $\beta /\!/ r$ (veja exercícios 3.7 e 3.8). Os planos α e β são os únicos nessas condições. Resta provar que $\alpha /\!/ \beta$. Mas supondo $\alpha \cap \beta = x$, como $r /\!/ \beta$ vem $r /\!/ x$ e como $s /\!/ \alpha$ vem $s /\!/ x$ (exercício 3.1). Então tem-se $r /\!/ s$ pelo T5 (absurdo).

3.31) Considere por P o plano $\beta /\!/ \alpha$ e seja $r \cap \beta = \{A\}$. A reta $\overleftrightarrow{AP}$ é a resposta.

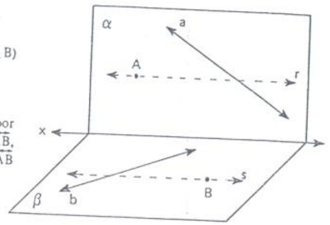
3.32) Situam-se no plano $\beta /\!/ \alpha$ conduzido por A.

3.33) Considere dois casos:

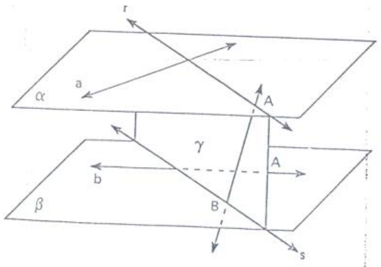
1.°) Os planos $\alpha = pl\,(a, A)$ e $\beta = pl\,(b, B)$ são secantes. Neste caso, sendo

$$x = \alpha \cap \beta$$

basta tomar por A a reta $r /\!/ x$ e por B a reta $s /\!/ x$. Note que se for $x = \overleftrightarrow{AB}$, o problema não terá solução. Se $x \neq \overleftrightarrow{AB}$ tem-se sempre uma solução.



2.°) Se $\alpha /\!/ \beta$, basta considerar um plano γ contendo a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Temos $r = \alpha \cap \gamma$ e $s = \beta \cap \gamma$. O problema neste caso admite infinitas soluções.



4.17) a, d, g, j

4.18) a) V b) F c) F d) F e) V f) F g) V h) F i) V j) F k) V l) F m) F n) V o) F p) F q) V

4.19) Basta notar que $\overleftrightarrow{PB}$ não corta $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{PD}$ não corta $\overleftrightarrow{AC}$. Logo, B e P pertencem ao mesmo semiplano e também D e P pertencem ao mesmo semiplano. Portanto, B e D pertencem ao mesmo semiplano.

4.20) Se $\overleftrightarrow{AB}$ corta **r** em P, então A e B estão em semiplanos opostos em relação a **r**. Quanto a C, ocorre um e somente um dos dois casos seguintes:

1.°) $C \in semipl\,(r, A)$. Neste caso, $\overleftrightarrow{BC}$ corta a reta **r**.
2.°) $C \in semipl\,(r, B)$. Neste caso, $\overleftrightarrow{AC}$ corta a reta **r**.

4.21) $\left.\begin{array}{l} P \in \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow P \in \alpha \\ P \in \overleftrightarrow{A'B'} \Rightarrow P \in \beta \end{array}\right\} \Rightarrow P \in \alpha \cap \beta$

Do mesmo modo, $Q \in \alpha \cap \beta$ e $R \in \alpha \cap \beta$, logo, P, Q e R são colineares.

5.5) $AC = AB + BC = CD + BC = BD$ 5.6) $AB = AC - BC = BD - BC = CD$

5.7) $MN = MB + BN = \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} = AB$ 5.8) 64 5.9) 45

5.10) Seja Q' o ponto médio de $\overline{MN}$ e mostremos que $AQ' = AQ$. Indiquemos $AB = b$ e $AC = c$.
Temos $AM = \frac{b}{2}$ e $AN = \frac{c}{2}$ donde:

$$AQ' = AM + MQ' = AM + \frac{MN}{2} =$$

$$= AM + \frac{AN - AM}{2} = \frac{b}{2} + \frac{\frac{c}{2} - \frac{b}{2}}{2} = \frac{b + c}{4}$$

$$AQ = \frac{AP}{2} = \frac{AB + \frac{BC}{2}}{2} = \frac{AB + \frac{AC - AB}{2}}{2} =$$

$$= \frac{b + \frac{c - b}{2}}{2} = \frac{b + c}{4}$$

5.23) a) $B\hat{A}D$ b) $C\hat{A}E$ c) $B\hat{A}E$ d) $A\hat{D}E$ e) $D\hat{F}C$ ou $E\hat{F}A$ f) $E\hat{F}D$ ou $A\hat{F}C$

5.24) $a = 57$ $b = 28$ $c = 57$ $d = 95$ 5.25) a) 145° b) 28° c) 137° 32'25"

5.26) a) 37° b) 60° 48' c) 51° 17'45"

5.27) Se $\hat{A}'$ e $\hat{B}'$ são os suplementos de $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente, temos $med\,(\hat{A}') = 180° - med\,(\hat{A}) = 180° - med\,(\hat{B}) = med\,(\hat{B}')$, donde $\hat{A}' \equiv \hat{B}'$.

5.28) Se $\hat{A}$ é reto, então $med\,(\hat{A}) = 90°$. Assim, $med\,(\hat{A}) + med\,(\hat{A}) = 90° + 90° = 180°$, isto é, $\hat{A}$ é suplementar a $\hat{A}$.

5.29) Sejam **a** e **b** as medidas dos dois ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ complementares. Temos $a > 0°$ e $b > 0°$. Como $a = 90° - b$, então $90° - b > 0$, donde $0° < b < 90°$, logo $\hat{B}$ é agudo. Analogamente, $\hat{A}$ é agudo.

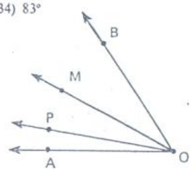
5.30) 21° e 35° 5.31) 67° 30' 5.32) 18° 5.33) 45° 5.34) 83°

5.35) $med\,(P\hat{O}M) = med\,(A\hat{O}M) - med\,(P\hat{O}A) =$

$$= \frac{1}{2}\,med\,(A\hat{O}B) - med\,(P\hat{O}A) =$$

$$= \frac{1}{2}\,[med\,(P\hat{O}B) + med\,(P\hat{O}A)] - med\,(P\hat{O}A) =$$

$$= \frac{1}{2}\,[med\,(P\hat{O}B) - med\,(P\hat{O}A)]$$



5.36) $\text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(C\hat{A}D) + \text{med}(D\hat{A}E) = 180°$
$\text{med}(B\hat{A}C) + 90° + \text{med}(D\hat{A}E) = 180°$
$\text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(D\hat{A}E) = 90°$

5.37) $\begin{cases} \text{med}(C\hat{A}D) + \text{med}(D\hat{A}E) = 90° \\ \text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(C\hat{A}D) = 90° \end{cases}$

Somando:

$$\text{med}(C\hat{A}D) + [\text{med}(B\hat{A}C) + \text{med}(C\hat{A}D) + \text{med}(D\hat{A}E)] = 180°$$

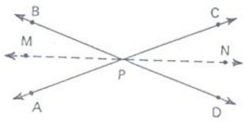
donde

$$\text{med}(C\hat{A}D) + \text{med}(B\hat{A}E) = 180°$$

5.38) $\text{med}(M\hat{O}N) = \text{med}(M\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) + \text{med}(C\hat{O}N) =$
$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C) + \frac{1}{2}\text{med}(C\hat{O}D) =$
$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}B) + \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{O}C) + \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{O}C) + \frac{1}{2}\text{med}(C\hat{O}D) =$
$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{O}B) + \text{med}(B\hat{O}C)] + \frac{1}{2}[\text{med}(B\hat{O}C) + \text{med}(C\hat{O}D)] =$
$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{O}C) + \frac{1}{2}\text{med}(B\hat{O}D) = 45° + 45° = 90°$

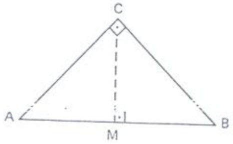
5.39) $\text{med}(B\hat{O}C) = 180° - \text{med}(A\hat{O}C) = 180° - \text{med}(A\hat{O}D) = \text{med}(B\hat{O}D)$

5.40) $\text{med}(M\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C) + \text{med}(C\hat{P}N) =$
$= \frac{1}{2}\text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C) + \frac{1}{2}\text{med}(C\hat{P}D) =$
$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(C\hat{P}D)] + \text{med}(B\hat{P}C) =$
$= \frac{1}{2}[\text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(A\hat{P}B)] + \text{med}(B\hat{P}C) =$
$= \text{med}(A\hat{P}B) + \text{med}(B\hat{P}C) = 180°$



5.41) 120°   5.42) $\text{med}(A\hat{O}B) = 90° - \text{med}(B\hat{O}M) = 90° - \text{med}(M\hat{O}C) = \text{med}(C\hat{O}D)$

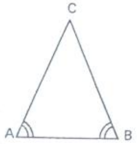
6.22) Basta notar que $\overleftrightarrow{CM}$ é mediatriz de $\overline{AB}$, portanto C é eqüidistante de A e de B.



6.23) Estabelecendo a correspondência $A \leftrightarrow B$, $B \leftrightarrow A$, $C \leftrightarrow C$, resulta que os triângulos ABC e BAC são congruentes, pois (A L A):

$$\text{no } \triangle ABC \begin{Bmatrix} \hat{A} \equiv \hat{B} \\ \overline{AB} \equiv \overline{BA} \\ \hat{B} \equiv \hat{A} \end{Bmatrix} \text{no } \triangle BAC$$

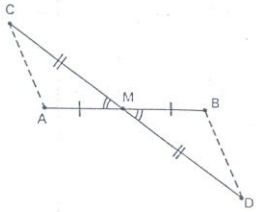
Assim $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$.



6.24) Se $A\hat{C}D \equiv A\hat{D}C$, então $\triangle ACD$ é isósceles, isto é, $\overline{AC} \equiv \overline{AD}$. Então $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ (L A L). Portanto, $A\hat{C}B \equiv A\hat{D}B$.

6.25) Basta mostrar que

$\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ (L A L)

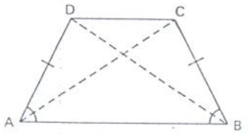


6.26) Pelo L A L temos

$\triangle ABC \equiv \triangle BAD$

donde $\overline{AC} \equiv \overline{BD}$. Então, pelo L L L, temos $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$, donde

$\hat{C} \equiv \hat{D}$

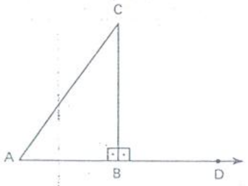


6.27) Basta notar que $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (L L L).

6.28) Se $\hat{B}$ é reto, o ângulo externo $C\hat{B}D$ também é reto. Pelo exercício 6.14, as medidas de $\hat{A}$ e de $\hat{C}$ são menores do que

$\text{med}(C\hat{B}D) = 90°$

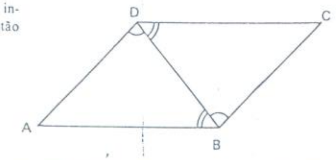
Logo, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são agudos.



6.29) Pelo exercício 6.13, se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os ângulos da base, então $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) < 180°$. Mas $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B})$, logo $2\ \text{med}(\hat{A}) < 180°$ e então

$\text{med}(\hat{A}) < 90°$

6.33) $A\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$ e $A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$ (alternos internos). Logo, $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, e então $\overline{AD} \equiv \overline{CB}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$.



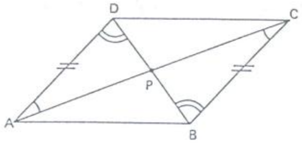
6.34) Com o mesmo raciocínio do exercício anterior, concluímos que $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Analogamente, $\hat{B} \equiv \hat{D}$.

6.35) Basta mostrar que

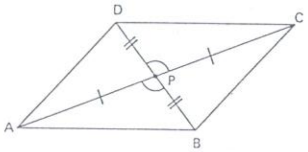
$$\triangle APD \equiv \triangle CPB \ (A\ L\ A)$$

Logo,

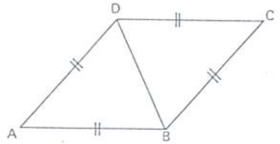
$$\overleftrightarrow{AP} \equiv \overleftrightarrow{CP} \text{ e } \overleftrightarrow{PD} \equiv \overleftrightarrow{PB}$$



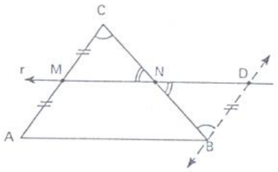
6.36) Tem-se $\triangle ABP \equiv \triangle CDP$ (L A L), logo $P\hat{A}B \equiv P\hat{C}D$ e portanto $\overleftrightarrow{AB} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$ (veja exercício 6.30). Analogamente, $\overleftrightarrow{AD} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$.



6.37) Como $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ (L L L), então $A\hat{B}D \equiv C\hat{B}D$. Como $\triangle ABD$ é isósceles, $A\hat{B}D \equiv A\hat{D}B$. Assim, $A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$, logo $\overleftrightarrow{AD} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$ (veja exercício 6.30). Analogamente, $AB /\!/ CD$.



6.38) Conduza por B a reta $s /\!/ \overleftrightarrow{AC}$, a qual encontra r em D. O quadrilátero ABDM é um paralelogramo, logo $\overleftrightarrow{AM} \equiv \overleftrightarrow{BD}$, donde $\overleftrightarrow{MC} \equiv \overleftrightarrow{BD}$. Além disso, $M\hat{C}N \equiv D\hat{B}N$ (alternos internos). Assim, $\triangle MNC \equiv \triangle DNB$ (A A L), donde $\overleftrightarrow{NC} \equiv \overleftrightarrow{NB}$.

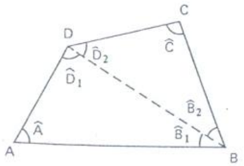


6.39) Como $\triangle MNC \equiv \triangle DNB$, temos $\overleftrightarrow{MN} \equiv \overleftrightarrow{DN}$, logo $MN = \frac{1}{2} MD$, e como $\overleftrightarrow{MD} \equiv \overleftrightarrow{AB}$, vem

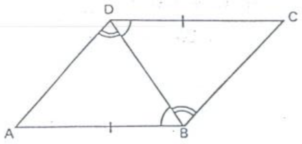
$$MN = \frac{1}{2} AB.$$

6.40) No $\triangle ABD$: $\hat{A} + \hat{B}_1 + \hat{D}_1 = 180^\circ$.
No $\triangle BCD$: $\hat{C} + \hat{B}_2 + \hat{D}_2 = 180^\circ$.
Então:

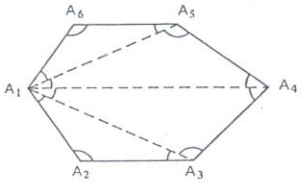
$$\hat{A} + (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) + \hat{C} + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) = \\ = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$



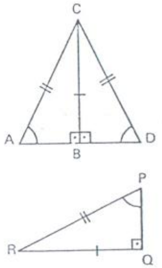
6.41) Sejam $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ os lados que são paralelos e congruentes. Então $A\hat{B}D \equiv C\hat{D}B$ (alternos internos e $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (L A L). Sendo assim, $A\hat{D}B \equiv C\hat{B}D$, logo $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ também são paralelos. Como há dois pares de lados paralelos, o quadrilátero é um paralelogramo.



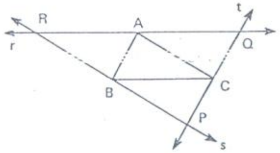
6.42) Ligando-se o vértice A_1 aos demais (com exceção de A_2 e A_n), o polígono fica dividido em $n - 2$ triângulos. A soma das medidas dos ângulos internos do polígono é igual à soma das medidas dos ângulos internos de todos esses triângulos, logo vale $(n - 2) \cdot 180^\circ$.



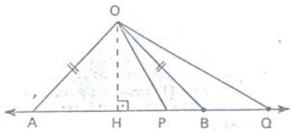
6.43) Construindo-se sobre o lado $\overleftrightarrow{BC}$ um triângulo $\triangle DBC$ congruente ao $\triangle PQR$, obtemos o $\triangle ADC$, isósceles. Logo, $\hat{A} \equiv \hat{D}$, isto é, $\hat{A} \equiv \hat{P}$. Assim, $\triangle ABC \equiv \triangle PQR$ (critério A A L).



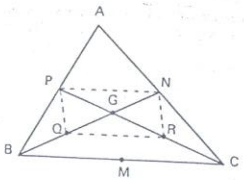
6.44) Como $\overleftrightarrow{AR} /\!/ \overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BR} /\!/ \overleftrightarrow{AC}$, o quadrilátero ARBC é paralelogramo, donde $AR = BC$. Do mesmo modo, ABCQ é paralelogramo, donde $AQ = BC$. Assim, $AR = AQ$. Analogamente provamos que B e C são pontos médios.



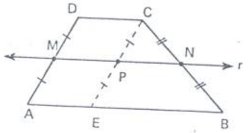
6.45) Sendo $\overleftrightarrow{OH}$ a altura, se $P = H$, é claro que $PO < BO$, pois, no $\triangle OHB$, $\overleftrightarrow{BO}$ é a hipotenusa. Se $P \neq H$, suponhamos que ambos, P e Q, estão na semi-reta $\overrightarrow{HB}$. O ângulo $B\hat{P}O$ é externo ao $\triangle OHP$, logo é obtuso. Assim, no $\triangle OPB$ tem-se $PO < BO$. O ângulo $Q\hat{B}O$ é externo ao $\triangle OHQ$, logo é obtuso. Assim, no $\triangle OBQ$ tem-se $QO > BO$.



6.46) Seja G a interseção das medianas $\overleftrightarrow{BN}$ e $\overleftrightarrow{CP}$. Sejam Q o ponto médio de $\overline{BG}$ e R o ponto médio de $\overline{CG}$. Então $\overline{PN}$ e $\overline{QR}$ são paralelos e congruentes, pois são paralelos a $\overline{BC}$ e $PN = QR = \frac{1}{2}$ BC. Assim, PQRN é paralelogramo, logo QG = GN e RG = GP. Portanto, BG = 2GN e CG = 2GP. A terceira mediana $\overline{AM}$ passa também por G, pois deve cortar a mediana $\overline{BN}$ no ponto que a divide em dois segmentos, um sendo o dobro do outro, o qual só pode ser G (basta fazer o mesmo raciocínio com $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$).

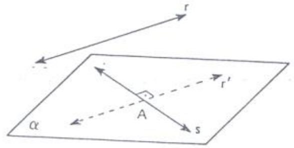


6.47) Se $\overleftrightarrow{CE} /\!/ \overleftrightarrow{AD}$, então AEPM e PCDM são paralelogramos, donde PC = MD e PE = = MA, logo P é ponto médio de $\overline{CE}$. No △ CEB, pelo exercício 6.38, N é ponto médio de $\overline{BC}$.



6.48) Sendo $\overleftrightarrow{CE} /\!/ \overleftrightarrow{AD}$, então $B\hat{A}D \equiv B\hat{E}C$. Como △ CEB é isósceles (pois $\overline{BC} \equiv \overline{CE} \equiv \overline{AD}$), tem-se $A\hat{B}C \equiv B\hat{E}C$, logo $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$.

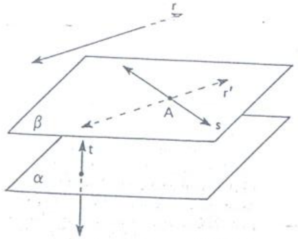
7.10) Por A toma-se r' // r. Pelo teorema T7, r' ⊂ α. (Veja exercício 3.2.) Seja em α a reta s ⊥ r'. Temos s ⊥ r, pela definição de retas ortogonais.



7.11) a) V b) F c) F d) V e) V f) V g) F h) F i) V j) V k) F l) F m) F

7.12) Como $B\hat{A}C$ é reto, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AC}$. Como $\overleftrightarrow{AD} \perp \alpha$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{AD}$. Logo, $\overleftrightarrow{AB} \perp pl(\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{AD}) = pl(A, C, D)$.

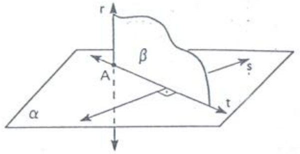
7.13) Seja t uma reta que forma ângulo reto com r e com s. Por A ∈ s tome r' // r e seja β = pl (s, r'). Temos t ⊥ β pois t forma também ângulo reto com r' (veja exercícios 7.1 e 7.2). Além disso, β // α (exercício 3.20). Assim, pelo teorema T17, tem-se t ⊥ α.



7.14) Siga a figura do exercício anterior. Como β // α, pelo T17 tem-se t ⊥ β, donde t forma ângulo reto com s. Mesmo raciocínio para r.

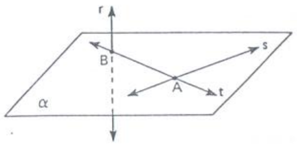
7.15) Como r ⊥ α e α // β (pelo T17) tem-se r ⊥ β. Como r ⊥ β, s ⊥ β e r ≠ s (pelo T18) tem-se r // s.

7.16) Pelo ponto A, interseção de r e α, conduz-se a reta t ⊥ s. O plano β = pl (r, t) é o plano procurado, pois a reta s forma ângulo reto com r e com t. (Veja exercício 7.3.) Pelo teorema T19, esse plano é único.

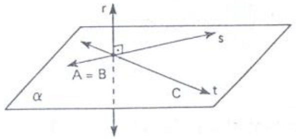


7.17) Seja B a interseção de r e α.

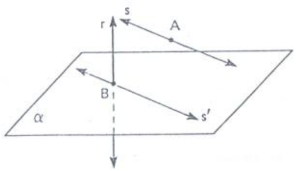
a) Se A ≠ B, seja $t = \overleftrightarrow{AB}$.
Se t = s, é imediato que s ⊂ α. Supondo t ≠ s, então r ⊥ pl (t, s). Mas, pelo T19, esse plano só pode ser o próprio α, logo s ⊂ α.



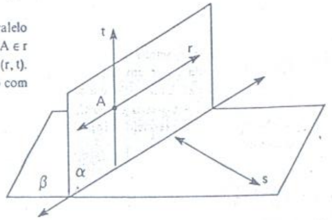
b) Se A = B, seja C ∈ α um ponto distinto de A. Se C ∈ s, é imediato que s ⊂ α. Supondo que C ∉ s, seja $t = \overleftrightarrow{AC}$. Nesse caso, r ⊥ pl (t, s). Mas, pelo T19, esse plano só pode ser o próprio α, logo s ⊂ α.



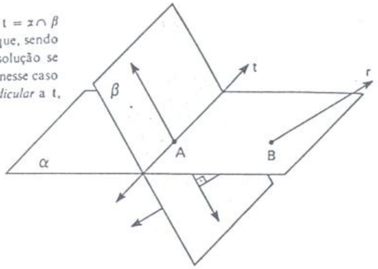
7.18) Seja B a interseção de r e α. Tome por B a reta s' // s. Logo, r ⊥ s' (veja exercícios 7.1 e 7.2). Pelo exercício anterior, s' ⊂ α. Então, pelo teorema T6, s // α.



7.19) Seja β o plano que contém s e é paralelo a r (veja exercícios 3.7 e 3.8). Por A ∈ r tome t ⊥ β (teorema T20). Seja α = pl (r, t). Temos s ⊥ α, pois s forma ângulo reto com r e com t.



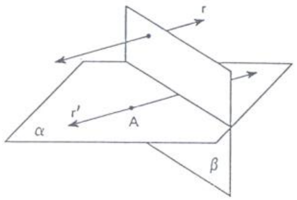
7.20) Tome por A o plano $\beta \perp r$. A reta $t = \alpha \cap \beta$ é a reta procurada: $r \perp t$. Note que, sendo $B = r \cap \alpha$, o problema só tem solução se $\overleftrightarrow{AB}$ não é perpendicular a r, pois nesse caso teríamos $t = \overleftrightarrow{AB}$ e r seria *perpendicular* a t, e não ortogonal.



7.25) Como $t \perp \gamma$ e $a \subset \gamma$, então $t \perp a$. Assim, pelo teorema T21, temos $a \perp \beta$. Como $b \subset \beta$, resulta $a \perp b$.

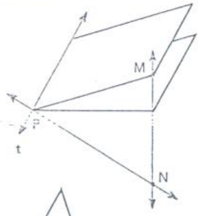
7.26) a) V b) V c) F d) V e) F f) F g) V h) F i) F

7.27) Seja $\beta \perp r$. Por $A \in \alpha$ conduz $r' \parallel r$. Temos $r' \subset \alpha$ (veja exercício 3.2). Pelo teorema T17, $r' \perp \beta$. Logo, α contém uma reta perpendicular a β, isto é, $\alpha \perp \beta$.

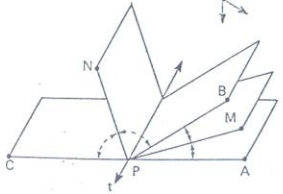


7.28) Basta tomar o plano γ que passa por P e é perpendicular à interseção de α e β. Temos $\alpha \perp \gamma$ e $\beta \perp \gamma$ porque ambos contêm uma reta que é perpendicular a γ.

8.25) Temos $\overleftrightarrow{MN} \perp t$ e $\overleftrightarrow{NP} \perp t$, logo, pelo teorema das três perpendiculares (veja exercício 7.5), resulta que $\overleftrightarrow{MP} \perp t$. Se o diedro fosse reto, a tese seria imediata.

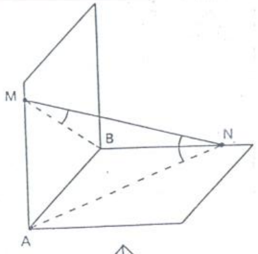


8.26) Basta considerar as semi-retas obtidas cortando-se a aresta t por um plano que lhe seja perpendicular. Como $\overrightarrow{PM}$ é a bissetriz de $A\hat{P}B$ e $\overrightarrow{PN}$ é a bissetriz de $B\hat{P}C$, então $M\hat{P}N$ é reto (veja exercício 5.18). Então, o diedro $M\hat{t}N$ é reto.

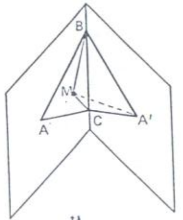


8.27) Sendo t a aresta do diedro $P\hat{t}Q$, como $r \perp pl(t, P)$ e $S \perp pl(t, Q)$, então t forma ângulo reto com r e s, que são retas concorrentes. Então (veja exercício 7.4) $t \perp pl(r, s)$.

8.28) Como $\overleftrightarrow{MA}$ é perpendicular à face $(\overleftrightarrow{AB}, N)$, o $\triangle MAN$ é retângulo em A. Como $\overleftrightarrow{NB}$ é perpendicular à face $(\overleftrightarrow{AB}, M)$, o $\triangle NBM$ é retângulo em B. Como $NB = MA$, tem-se $\triangle MAN \equiv \triangle NBM$ (veja exercício 6.43). Assim, $M\hat{N}A \equiv N\hat{M}B$.

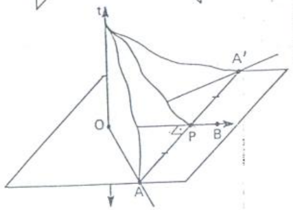


8.29) Os triângulos $\triangle MCB$ e $\triangle MCA'$ são congruentes, pois são ambos retângulos e têm as hipotenusas congruentes e o cateto $\overleftrightarrow{MC}$ em comum (veja exercício 6.43). Então, $A'M = BM$.



8.30) Seja $A\hat{O}A'$ uma seção reta do diedro $A\hat{t}A'$. O $\triangle AOA'$ é isósceles, pois $\overleftrightarrow{OP}$ é altura e mediana. Logo, $\overleftrightarrow{OP}$ é também bissetriz, donde (t, P) é o semiplano bissetor de $A\hat{t}A'$:

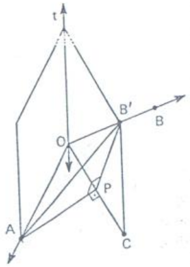
$$\text{med}\,(A\hat{t}A') = 2\,\text{med}\,(A\hat{t}B)$$



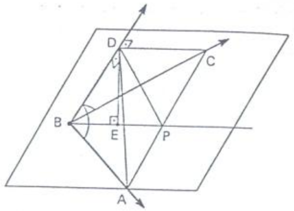
8.31) Seja $A\hat{O}C$ a seção reta do diedro. $\overleftrightarrow{AP}$ é perpendicular a $\overleftrightarrow{OC}$, logo é perpendicular à face (t, C). Seja $B' \in \overrightarrow{OB}$ tal que $OB' = OP$. Como $\triangle AB'P$ é retângulo em P, temos $AB' > AP$. Comparando os triângulos OAB' e OAP, temos que $\overline{OA}$ é comum, $OB' = OP$ e $AB' > AP$, logo

$$\text{med}\,(A\hat{O}B') > \text{med}\,(A\hat{O}P)$$

Como o diedro é agudo, med $(A\hat{O}P)$ é a própria medida do diedro, donde a tese.



8.32) Escolhendo-se os pontos A e C de modo que $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ sejam perpendiculares a $\overleftrightarrow{BD}$, temos que $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ (ALA). O ângulo $A\hat{D}C$ é a seção reta do diedro (A, $\overleftrightarrow{BD}$, C). Temos AD = CD. Como $\overleftrightarrow{DE} \perp$ pl (A, B, C), tem-se $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DE}$. Como $\overleftrightarrow{BD} \perp$ pl (A, D, C), tem-se $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$. Então, $\overleftrightarrow{AC} \perp$ pl (B, E, D), logo $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{DP}$. Isto mostra que $\overleftrightarrow{DP}$ é altura do triângulo isósceles ADC, logo é também bissetriz: $A\hat{D}P \equiv C\hat{D}P$. Assim, o semiplano ($\overleftrightarrow{BD}$, E) é o bissetor do diedro (A, $\overleftrightarrow{BD}$, C).

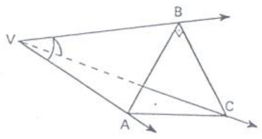


8.33) oito triedros   8.34) b) e c): **sim**; a), d), e), f): **não**

8.35) a) $13° < x < 157°$ b) $27° < x < 163°$ 8.36) $10° < x < 110°$

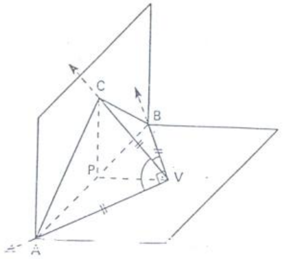
8.37) Seja $A\hat{B}C$ a seção reta do diedro reto. Como $A\hat{V}B$ e $C\hat{V}B$ medem 45°, os triângulos $\triangle AVB$ e $\triangle CVB$ são retângulos isósceles, logo AB = VB = CB e também VA = VC. Mas então o $\triangle ABC$ é também retângulo isósceles e congruente aos dois anteriores. Logo, AC = VA = VC. Como $\triangle AVC$ é eqüilátero, temos

$$\text{med}(A\hat{V}C) = 60°$$



8.38) $\triangle APV \equiv \triangle CPV$, pois são ambos retângulos isósceles, com um cateto comum e hipotenusas congruentes. Assim, AP = CP = PV. Então, $\triangle APC \equiv \triangle APV$, donde AC = AV. Logo, $\triangle ACV$ é eqüilátero e assim

$$\text{med}(C\hat{V}A) = 60°$$

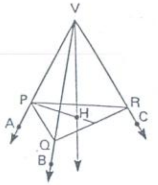


8.39) a) e c): **sim**; b) e d): **não**

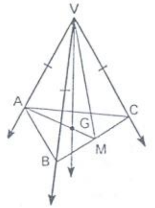
8.40) a) três faces; b) cinco faces; c) sete faces; d) onze faces

9.11) a) Se P pertence à união dos dois planos, P deve pertencer a um dos semiplanos bissetores, logo P é eqüidistante de α e de β.
b) Se P eqüidista de α e de β (e P pertence certamente a um dos quatro diedros), então P pertence ao semiplano bissetor correspondente. Assim, P pertence à união dos dois planos considerados.

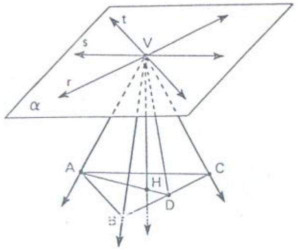
9.12) Os planos que contêm $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$ e são perpendiculares às faces opostas cortam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{VH}$, sendo H um ponto qualquer dessa reta. O $\triangle PQR$ é a interseção do triedro com o plano que passa por H e é perpendicular a $\overleftrightarrow{VH}$. Provemos que H é o ortocentro do $\triangle PQR$. Temos pl(V, P, H) $\perp$ pl(P, Q, R) por construção e também pl(V, P, H) $\perp$ pl(V, Q, R) por hipótese. Logo, a interseção $\overleftrightarrow{QR}$ é também perpendicular ao pl (V, P, H). Assim, $\overleftrightarrow{QR} \perp \overleftrightarrow{PH}$, logo $\overleftrightarrow{PH}$ contém a altura do $\triangle PQR$. Do mesmo modo prova-se que $\overleftrightarrow{QH}$ contém outra altura. Logo, H é o ortocentro. Assim, $\overleftrightarrow{RH}$ contém a terceira altura, o que prova que o plano pl (VRH) é perpendicular a $\overleftrightarrow{PQ}$ e à face $A\hat{V}B$. Assim, os três planos têm em comum a reta $\overleftrightarrow{VH}$.



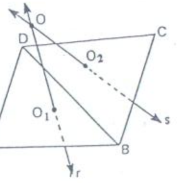
9.13) Pondo VA = VB = VC, como $\triangle VBC$ é isósceles, a bissetriz $\overleftrightarrow{VM}$ é também mediana. Logo, $\overleftrightarrow{AM}$ é mediana do $\triangle ABC$. Portanto o pl (V, A, M) contém a reta $\overleftrightarrow{VG}$ que passa pelo baricentro do $\triangle ABC$. Da mesma forma, os outros dois planos contêm essa reta.



9.14) Os planos que contêm as arestas e são perpendiculares às faces opostas cortam-se segundo a reta $\overleftrightarrow{VH}$ (veja o exerc. 9.12). Seja $\alpha \perp \overleftrightarrow{VH}$, por V, e seja, por H, o plano (A, B, C) paralelo a α. Como os planos (A, B, C) e (V, B, C) são perpendiculares ao plano (V, A, D), a sua interseção $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano (V, A, D). Seja $r = \alpha \cap$ pl (V, B, C). Como $r \parallel \overleftrightarrow{BC}$, tem-se $r \perp$ pl (V, A, D), logo $r \perp \overleftrightarrow{VA}$. Da mesma forma, as retas $s = \alpha \cap$ pl (V, A, C) e $t = \alpha \cap$ pl (V, A, B) são perpendiculares a $\overleftrightarrow{VB}$ e $\overleftrightarrow{VC}$, respectivamente. As três retas r, s, t estão contidas no plano α.

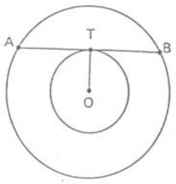


9.15) Sejam O_1 e O_2 os circuncentros dos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$. As retas **r** e **s** passam por O_1 e O_2 e são perpendiculares aos planos desses triângulos. Elas são coplanares, pois estão no plano mediador de $\overline{BD}$ e não são paralelas, pois os pontos A, B, C e D não são coplanares. Assim, elas são concorrentes num ponto O, que é eqüidistante dos pontos A, B, C e D (veja exercício 9.9).



9.27) Basta notar que as duas diagonais desse quadrilátero cortam-se ao meio, no centro da circunferência (veja exercício 6.36).

9.28) Como $\overleftrightarrow{AB}$ tangencia a circunferência menor, então $\overleftrightarrow{OT} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Então, pelo exerc. 9.17, T é o ponto médio de $\overline{AB}$.

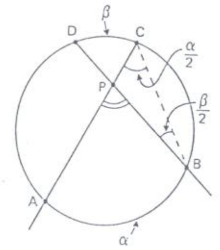


9.29) Como r é tangente, temos $\overleftrightarrow{OT} \perp r$, logo $\overleftrightarrow{OT} /\!/ \overleftrightarrow{BQ}$. Como O é ponto médio de $\overline{AB}$, pelo exerc. 6.47, T é ponto médio de $\overline{PQ}$. Assim, $\overleftrightarrow{OT}$ é mediatriz de $\overline{PQ}$, donde OP = OQ.

9.30) $\alpha = 30°$ 9.31) $\beta = 110°$

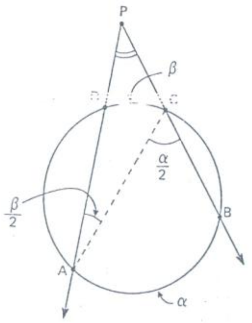
9.32) Como $A\hat{P}B$ é externo ao $\triangle$ BCP,

$$\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(A\hat{C}B) + \text{med}(C\hat{B}D) = $$
$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

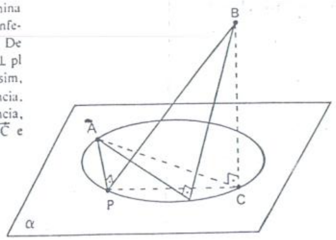


9.33) Como $A\hat{C}B$ é externo ao $\triangle$ ACP,

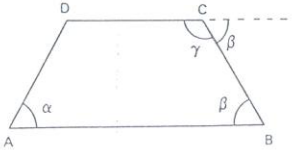
$$\text{med}(A\hat{P}B) = \text{med}(A\hat{C}B) - \text{med}(C\hat{A}P) = $$
$$= \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$$



9.34) A perpendicular a α por B determina C $\neq$ A. O lugar geométrico é a circunferência de diâmetro $\overline{AC}$ contida em α. De fato, se P pertence ao lugar, então $\overleftrightarrow{AP} \perp$ pl (P, B, C) pois $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Assim, $A\hat{P}C$ é reto, donde P está na circunferência. Inversamente, se P está na circunferência, então $\overleftrightarrow{AP}$ $\triangle$ pl (P, B, C) pois $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{PC}$ e $\overleftrightarrow{AP} \perp \overleftrightarrow{BC}$. Assim, $A\hat{P}B$ é reto.



9.35) Temos $\beta + \gamma = 180°$. Se o trapézio é inscritível, então $\alpha + \gamma = 180°$, donde $\alpha = \beta$ e assim o trapézio é isósceles. Inversamente, se o trapézio é isósceles, então $\alpha = \beta$, donde $\alpha + \gamma = 180°$, logo o trapézio é inscritível.



9.36) Se α e β são as medidas de dois ângulos opostos do paralelogramo, temos $\alpha = \beta$ e, como ele é inscritível, temos $\alpha + \beta = 180°$, logo $\alpha = \beta = 90°$.

9.37) Indiquemos med $(\widehat{ACB})$ por 2α, de modo que med $(\widehat{AC})$ = med $(\widehat{CB}) = \alpha$. O ângulo $A\hat{G}E$ é excêntrico interior (veja exercício 9.32). Temos então

$$\text{med}(A\hat{G}E) = \frac{1}{2}[\text{med}(\widehat{ADE}) + \alpha] \quad (1)$$

$$\text{med}(C\hat{D}E) = \frac{1}{2}[\text{med}(\widehat{CBE})] = \frac{1}{2}[\text{med}(\widehat{ABE}) - \alpha] \quad (2)$$

Somando (1) e (2):

$$\text{med}(A\hat{G}E) + \text{med}(C\hat{D}E) = \frac{1}{2}[\text{med}(\widehat{ADE}) + \text{med}(\widehat{ABE})] = $$
$$= \frac{1}{2}[360°] = 180°$$

9.38) O centro da circunferência circunscrita pertence às quatro mediatrizes, por ser eqüidistante dos quatro vértices. Esse é o único ponto comum, pois se houvesse outro, as quatro mediatrizes seriam coincidentes.

9.39) O ponto comum às quatro bissetrizes é interno ao quadrilátero e eqüidistante dos quatro lados. Se por ele tomamos perpendiculares aos lados, obtemos os pontos de tangência.

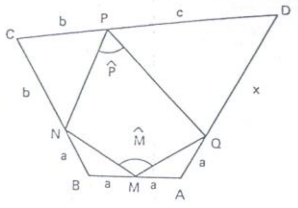
9.40) a) Seja $QD = x$. Temos

$$AB + CD = AD + BC$$

donde

$$(a + a) + (b + c) = (a + x) + (a + b)$$

e daí, $x = c$.



b) $\triangle AMQ$ e $\triangle BMN$ são isósceles. Então

$$\text{med}(Q\hat{M}A) = 90° - \frac{\text{med}(\hat{A})}{2}$$

e

$$\text{med}(N\hat{M}B) = 90° - \frac{\text{med}(\hat{B})}{2}$$

Assim,

$$\text{med}(\hat{M}) = 180° - \text{med}(Q\hat{M}A) - \text{med}(N\hat{M}B) =$$
$$= 180° - \left(90° - \frac{\text{med}(\hat{A})}{2}\right) - \left(90° - \frac{\text{med}(\hat{B})}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}[\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B})]$$

Do mesmo modo,

$$\text{med}(\hat{P}) = \frac{1}{2}[\text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D})]$$

Logo,

$$\text{med}(\hat{M}) + \text{med}(\hat{P}) = \frac{1}{2}[\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) + \text{med}(\hat{D})] =$$
$$= \frac{1}{2}[360°] = 180°$$

Portanto, pelo exercício 9.21, MNPQ é inscritível em uma circunferência.

c) Seja O o centro da circunferência circunscrita ao quadrilátero MNPQ. Então (exercício 9.38) O é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados. Mas essas mediatrizes contêm as bissetrizes internas do quadrilátero ABCD (triângulos isósceles). Logo, pelo exercício 9.39, existe uma circunferência de centro O à qual o quadrilátero ABCD é circunscrito.

9.41) O centro da superfície esférica é eqüidistante dos quatro pontos dados. Pelo exercício 9.15, existe um único ponto nessas condições.

9.42) É o plano mediador do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ (veja exercício 9.2).

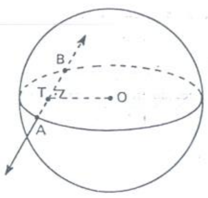
9.43) É a reta perpendicular ao plano do triângulo e que passa pelo circuncentro deste (veja exercício 9.9).

9.44) Se α é o plano perpendicular a r por A, então o lugar geométrico é $\alpha - \{A\}$.

9.45) Se r é a reta perpendicular a α por A, então o lugar geométrico é $r - \{A\}$.

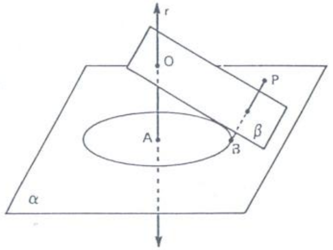
9.46) Se γ e γ' são os planos que contêm os bissetores dos diedros determinados por α e β, então o lugar geométrico é $\gamma \cup \gamma' - r$, sendo r a reta interseção de α e β.

9.47) O plano pl (A, B, O) intercepta a superfície esférica segundo uma circunferência (veja exercício 9.23), na qual o raio perpendicular à corda divide-a ao meio (exercício 9.17).



9.48) α = plano da circunferência
A = centro da circunferência
B = ponto qualquer da circunferência
β = plano bissetor de $\overleftrightarrow{BP}$
O = interseção de r e β

O ponto O é o centro procurado.



9.49) Basta ver que ambos são perpendiculares à reta que contém o diâmetro.

9.50) Se P vê $\overleftrightarrow{AB}$ sob ângulo reto, então P pertence à circunferência de diâmetro $\overleftrightarrow{AB}$ contida no plano pl (A, B, P) (note que se $P \neq A$ e $P \neq B$, P não poderia estar alinhado com A e B). Se O e r são o centro e o raio dessa circunferência, então $PO = r$, logo P pertence à superfície esférica de centro O e raio r.

9.51) Basta notar que os pés dessas perpendiculares são os pontos que vêem AB sob ângulo reto e em seguida usar os exercícios 9.26 e 9.50.

9.52) a) $\left.\begin{array}{l} r \perp \overleftrightarrow{AB} \\ r \perp s \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \text{pl}(A, B, N) \Rightarrow M\hat{A}N$ é reto

b) $\left.\begin{array}{l} s \perp \overleftrightarrow{AB} \\ s \perp r \end{array}\right\} \Rightarrow s \perp \text{pl}(A, B, M) \Rightarrow M\hat{B}N$ é reto

c) $\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{PN} \perp \overleftrightarrow{AP} \\ \overleftrightarrow{PN} \perp r \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{PN} \perp \text{pl}(A, M, P) \Rightarrow M\hat{P}N$ é reto

Assim, A, B e P vêem $\overleftrightarrow{MN}$ sob ângulo reto (veja exercício 9.50).

9.53) Se um plano $\gamma \perp r$ é conduzido por A, então $\gamma \perp \alpha$ e $\gamma \perp \beta$. Seja $s \perp \alpha$ por A ($s \subset \gamma$). Seja $t \perp \beta$ por T ($t \subset \gamma$). As retas s e t cortam-se em O, que é o centro procurado.

9.54) $\overleftrightarrow{RQ} \perp \text{pl}(A, B, P) \Rightarrow \overleftrightarrow{RQ} \perp \overleftrightarrow{BP}$. Como $A\hat{P}B$ é reto, $\overleftrightarrow{BP} \perp \overleftrightarrow{AP}$. Assim, $\overleftrightarrow{BP} \perp \text{pl}(A, R, P)$, logo $\overleftrightarrow{BP} \perp \overleftrightarrow{AR}$. Por outro lado, $A\hat{R}B$ é reto, logo $\overleftrightarrow{AR} \perp \overleftrightarrow{BR}$. Então, $\overleftrightarrow{AR} \perp \text{pl}(R, P, B)$.

10.13) Sendo **a** o lado, temos $d^2 = 2a^2 = 2S$, logo

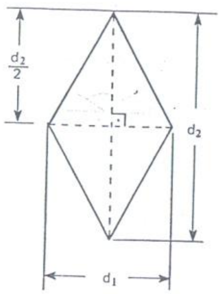
$$S = \frac{d^2}{2}$$

10.14) A área do triângulo sombreado é

$$\frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{4}$$

A área do losango é o dobro desta:

$$S = 2 \cdot \frac{d_1 d_2}{4} = \frac{d_1 d_2}{2}$$



10.15) a) BD = 15 m b) $(BD)^2 + (CD)^2 = 15^2 + 8^2 = 289 = (17)^2 = (BC)^2$ c) 114 m²

10.16) $(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 + (BD)^2 = (AH)^2 + (BH)^2 + (HC)^2$
$(AE)^2 = (AC)^2 + (CE)^2 = (AH)^2 + (HC)^2 + (CE)^2 = (AH)^2 + (HC)^2 + (BH)^2$
Logo, AD = AE.

10.17) a) $DA = DB = DC = 2\sqrt{34}$ b) S = 60 c) h = 10

10.18) a) $BC = 8\sqrt{2}$ b) $AH = 2\sqrt{2}$ c) S = 16

10.19) $40 + 12\sqrt{2}$ 10.20) $3\sqrt{5}$ 10.21) 13

10.22) $PB = PF = 3\sqrt{7}$ cm; $PC = PE = 3\sqrt{19}$ cm; PD = 15 cm

10.23) 24 cm² 10.24) $\frac{1}{3}\sqrt{96^2 - 3a^2}$ 10.25) 10 cm e $\sqrt{73}$ cm

10.26) 12 cm 10.27) 5 m

11.23) $AB = \frac{a(3 + \sqrt{6})}{3}$; $BC = a(2 + \sqrt{6})$ 11.24) 11,25 cm e 29,25 cm

11.25) $x = \frac{ah}{b - a}$; $y = \frac{bh}{a + b}$; $\frac{AP}{PC} = \frac{BP}{PD} = \frac{b}{a}$ 11.26) $h = \sqrt{abk} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)$

11.27) $h = \sqrt{ab}$; $AC = \sqrt{a(a + b)}$; $BD = \sqrt{b(a + b)}$

11.28) Como $\triangle PCD \sim \triangle PAB$, $\frac{AP}{AC} = \frac{BP}{BD}$.

Então, $\frac{EP}{DC} = \frac{AP}{AC} = \frac{BP}{BD} = \frac{PF}{DC}$, donde EP = PF.

11.29) Como $\triangle PBM \sim \triangle PAN$, $\frac{BM}{AN} = \frac{PM}{PN}$.

Como $\triangle QMC \sim \triangle QNA$, $\frac{MC}{NA} = \frac{QM}{QN}$.

Mas BM = MC, logo $\frac{PM}{PN} = \frac{QM}{QN}$

11.30) Têm-se $\frac{BD}{QS} = \frac{DC}{SR} = \frac{BD + DC}{QS + SR} = \frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ}$, e como $\hat{B} = \hat{Q}$, por LAL temos

$$\triangle ABD \sim \triangle PQS$$

Logo, $\frac{AD}{PS} = \frac{AB}{PQ}$.

11.31) $\triangle PED \sim \triangle PCB \Rightarrow \frac{PE}{PC} = \frac{PD}{PB}$.

$\triangle PFC \sim \triangle PDA \Rightarrow \frac{PF}{PC} = \frac{PD}{PA}$.

Dividindo: $\frac{PE}{PF} = \frac{PA}{PB}$, logo $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ (veja exercício 11.2).

11.32) (Veja exercício 6.46.) $PN = \frac{a}{2}$; $SR = \frac{2a}{3}$; $PS = \frac{c}{6}$; $NR = \frac{b}{6}$

11.33) $S = \frac{126a^2}{25}$ 11.34) AD = 4 11.35) AB = 9 m

11.36) MC = 25 cm 11.37) AD = 8 cm 11.38) $x = \frac{ab}{b + c}$; $y = \frac{ac}{b + c}$

11.39) a) $\triangle ABF \sim \triangle DAE$, logo $E\hat{A}M + M\hat{E}A = 90°$ donde $E\hat{M}A = 90°$

b) $\frac{4a^2}{39}$

11.40) (Veja exercício 11.22). Temos

$$\frac{DE}{EB} = \frac{AD}{AB} \text{ e } \frac{AF}{FC} = \frac{AD}{CD}$$

e como AB = CD, tem-se $\frac{DE}{EB} = \frac{AF}{FC}$

donde $\frac{DE + EB}{EB} = \frac{AF + FC}{FC}$

$$\frac{BD}{EB} = \frac{AC}{FC}$$

e dividindo por 2: $\frac{PB}{EB} = \frac{PC}{FC}$.

Portanto, $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ (veja exercício 11.2).

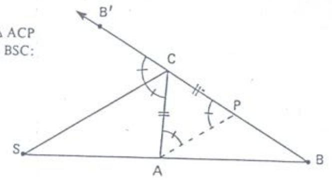
11.41) $\frac{3}{2}$ 11.42) AC = 25

11.43) Tomando $\overleftrightarrow{AP} /\!/ \overleftrightarrow{SC}$, prova-se que o $\triangle$ ACP é isósceles, donde AC = PC. No $\triangle$ BSC:

$$\frac{AS}{SB} = \frac{PC}{BC}$$

logo

$$\frac{AS}{SB} = \frac{AC}{BC}$$



11.50)

	a	b	c	m	n	h
a	25	20	15	16	9	12
b	169	156	65	144	25	60
c	289	255	136	225	64	120
d	625	600	175	576	49	168
e	841	609	580	441	400	420
f	25	20	15	16	9	12
g	169	156	65	144	25	60
h	289	255	136	225	64	120
i	625	600	175	576	49	168
j	841	609	580	441	400	420
k	25	20	15	16	9	12
l	169	156	65	144	25	60
m	289	225	136	225	64	120
n	625	600	175	576	49	168
o	841	609	580	441	400	420
p	65	56	33	48,2	16,8	28,4

11.51) $\frac{b^2}{c^2} = \frac{am}{an} = \frac{m}{n}$ 11.52) 10 cm

11.53) a) $AC = b\sqrt{2}$; $BD = b\sqrt{5}$

b) $AI = \frac{2b\sqrt{2}}{3}$; $BI = \frac{2b\sqrt{5}}{3}$; $CI = \frac{b\sqrt{2}}{2}$; $DI = \frac{b\sqrt{5}}{2}$

11.54) AB = 4 cm; AC = $4\sqrt{3}$ cm; BC = 8 cm   11.55) BS = $9\sqrt{5}$ cm

12.7) $S = \frac{C^2}{4\pi}$ 12.8) $S = \frac{\pi}{2 + \sqrt{\pi}}$ 12.9) $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

12.10) $\frac{a^2}{4}(4 - \pi)$ 12.11) $a^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ 12.12) $a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

12.13) $\frac{\pi r^2}{4}$ 12.14) $\frac{4\pi r^2}{9}$ 12.15) $\frac{a^2}{12}(5\pi + 3\sqrt{3})$

12.16) $\frac{r^2}{24}(9\sqrt{3} - 4\pi)$ 12.17) $\frac{bc}{4} \cdot \left(2 - \frac{\pi bc}{b^2 + c^2}\right)$

12.18) Pondo AC = 2r e CB = 2r', a área vale

$$S = \frac{\pi}{2}(r + r')^2 - \frac{\pi}{2}r^2 - \frac{\pi}{2}(r')^2 = \pi r r'$$

Por outro lado, tem-se $(CD)^2 = (AC) \cdot (CB) = 4rr'$. Assim, o círculo de diâmetro $\overleftrightarrow{CD}$ tem área igual a

$$S' = \pi\left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{\pi (CD)^2}{4} = \frac{\pi \cdot 4rr'}{4} = \pi r r' = S$$

13.7) $(n - 1) \cdot 720°$ 13.8) cinco faces   13.9) sete faces

13.10) onze faces   13.11) 7 920°   13.12) 3 600°

13.13) seis faces   13.14) 3n   13.15) sete faces

13.16) cinco lados   13.17) 1 080°   13.18) $S_t = 222$; $d = \sqrt{178}$

13.19) h = 13; $d = \sqrt{221}$ 13.20) 2, 3 e 4

13.21) $\cos\alpha = \frac{23}{49}$ ou $\frac{31}{49}$ ou $\frac{41}{49}$ 13.22) 6 cm, 8 cm e 24 cm

13.23) Tomando sobre $\overleftrightarrow{OP}$ o ponto M tal que $\overleftrightarrow{OM} = 1$, este segmento $\overleftrightarrow{OM}$ pode ser visto como a diagonal de um paralelepípedo reto-retângulo cujas faces (aquelas que contêm O) estão contidas nas faces do triedro. As dimensões do paralelepípedo são

$OM_1 = a = \cos\alpha$, $OM_2 = b = \cos\beta$

e

$OM_3 = c = \cos\gamma$

e como

$$(OM)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

obtemos

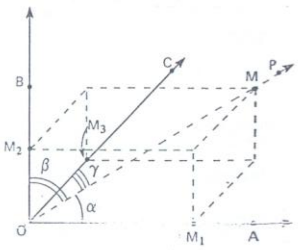
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

donde

$$(1 - \text{sen}^2\alpha) + (1 - \text{sen}^2\beta) + (1 - \text{sen}^2\gamma) = 1$$

e então

$$\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\gamma = 2$$



13.24) $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$ 13.25) 192 cm²   13.26) 2 cm, 6 cm e 10 cm

13.27) três recipientes   13.28) Elas são iguais.   13.29) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

13.30) $6\sqrt{2}$ cm 13.31) 3a 13.32) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$

13.33) $\frac{x\sqrt{2}}{2}$ 13.34) $x\sqrt{2}$ 13.35) $d = \frac{\sqrt{2S}}{2}$

13.36) $a(\sqrt{2} - 1)$ 13.37) $6x(2d + x)$ 13.38) k^2S

13.39) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ 13.40) $\frac{23}{17}$

13.41) a) $d = 7\sqrt{2}$ cm b) $S_t = 158$ cm² c) $V = 120$ cm³

13.42) 4 cm, 6 cm e 9 cm 13.43) $V = 15$ cm³ 13.44) $a^3\sqrt{6}$

13.45) $S_t = 3d^2$; $V = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$ 13.46) $V = 48(3 - \sqrt{3})$ cm³

13.47) a) $d = 5\sqrt{3}$ cm b) $S_b = 25$ cm² c) $S_\ell = 100$ cm² d) $S_t = 150$ cm² e) $V = 125$ cm³

13.48) a) $a = 4\sqrt{3}$ cm b) $S_b = 48$ cm² c) $S_\ell = 192$ cm² d) $S_t = 288$ cm² e) $V = 192\sqrt{3}$ cm³

13.49) $V = 16\sqrt{2}$ cm³ 13.50) $V = 3\sqrt{3}$ cm³ 13.51) $V = \frac{1}{8}$

13.52) a) $a = 6$ cm b) $d = 6\sqrt{3}$ cm c) $S_\ell = 144$ cm² d) $S_b = 36$ cm² e) $V = 216$ cm³

13.53) 2 cm 13.54) $V = 3\sqrt{3}$ cm³ 13.55) $a = 36$

13.56) $d = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm; $S_t = \frac{27}{2}$ cm²; $V = \frac{27}{8}$ cm³

13.57) $d = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$; $S_t = 3\ell^2$; $V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{4}$

13.58) $S_t = 2(d - x\sqrt{3})^2$; $V = \frac{\sqrt{3}}{9}(d - x\sqrt{3})^3$ 13.59) $V = 16\sqrt{2}$ cm³

13.60) $a = 6$ 13.61) $a = 12$ cm

13.62) 1 000 cm³, $\frac{64\,000}{27}$ cm³ e $\frac{125\,000}{27}$ cm³ 13.63) 216 cm²

13.64) 1 000 cm³ 13.65) 1 104 cm² 13.66) 13

13.67) $S_\ell = 150$ 13.68) 6 cm 13.69) $a = \frac{d\sqrt{3}}{2}$

13.70) $a = \frac{d\sqrt{6}}{4}$ 13.71) $10\sqrt{2}$ cm 13.72) $d = 50$ cm

13.73) $d = 29$ cm 13.74) $2a\sqrt{2}$, $\text{tg}\,\alpha = 1$ e $a\sqrt{7}$, $\text{tg}\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

13.75) $\sqrt{m^2 + n^2 + mn}$ e $\sqrt{m^2 + n^2 + 3mn}$ 13.76) $S = (p + q + r)a$

13.77) 4,5 cm 13.78) 2a e $a\sqrt{5}$ 13.79) 20 cm e $12\sqrt{2}$ cm

13.80) $2\sqrt{122}$ e $2\sqrt{197}$ 13.81) a; $\frac{2a^2\sqrt{3}}{3}$; $\frac{a^2\sqrt{39}}{6}$; $\frac{a^2\sqrt{39}}{6}$

13.82) 13 cm e $3\sqrt{97}$ cm 13.83) $a = 6$ cm 13.84) $3a^2\sqrt{2}$

13.85) $a = 16$ cm 13.86) $4a^2\sqrt{2}$ 13.87) $15a^2\sqrt{3}$

13.88) $1\,560\sqrt{3}$ cm² 13.89) $\frac{64R^2\sqrt{3}}{3}$

13.90) (perimetro = 30 e altura = 2) ou
(perimetro = 10 e altura = 6) 13.91) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$

13.92) a) $a = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$ b) $S_\ell = 4S\sqrt{3}$ c) $S_t = 2S(1 + 2\sqrt{3})$ d) $V = \frac{2S\sqrt{S}}{\sqrt[4]{3}}$

13.93) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

13.94) a) $S_b = \frac{h^2\sqrt{3}}{4}$ b) $S_\ell = 3h^2$ c) $S_t = \frac{h^2(6 + \sqrt{3})}{2}$ d) $V = \frac{h^3\sqrt{3}}{4}$

13.95) $h = \frac{13(2 - \sqrt{2})}{7}$ cm; $V = \frac{117(2 - \sqrt{2})}{14}$ cm³ 13.96) $a = \sqrt[3]{6}$

13.97) a) $S_b = 5$ cm² b) $S_\ell = 50$ cm² c) $S_t = 60$ cm² d) $V = 25$ cm³

13.98) a) $S_b = 3a^2$ b) $S_\ell = a^2(5 + \sqrt{5})$ c) $S_t = a^2(11 + \sqrt{5})$ d) $V = 3a^3$

13.99) $S_t = (220 + 72\sqrt{3})$ cm²; $V = 180\sqrt{3}$ cm³ 13.100) $\frac{1}{6}$

13.101) $V = \frac{2h^3}{5}$ 13.102) $V = 5\,760$ cm³ 13.103) $V = 32\sqrt{3}$ cm³

13.104) $V = a^3\sqrt{3}$ 13.105) $V = 4a^3\sqrt{3}$ 13.106) $V = 4\,500$ cm³

13.107) a) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$ b) a^2b c) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{2}$

13.108) 1 625 m³ 13.109) $V = \frac{a^3}{8}$ 13.110) $h = \frac{10\sqrt{3}}{9}$ cm

13.111) $V = 1\,137\,000 \text{ cm}^3$ 13.112) $V = 6\,090 \text{ cm}^3$

13.113) 2 cm, 2 cm, 2 cm, 4 cm 13.114) $2\,520 \text{ cm}^2$

13.115) $V = 1\,440 \text{ cm}^3$ 13.116) $\frac{2V}{S}$

13.117) a) $2a$ e $a\sqrt{5}$ b) $\frac{3a^2\sqrt{7}}{4}$ c) $\frac{a\sqrt{21}}{7}$ e $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$

13.118) $a = 4$ cm; $d_{base} = 4\sqrt{2}$ cm, $d = 4\sqrt{3}$ cm 13.119) $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

13.120) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ 13.121) 144 cm^2 13.122) $2a^2$

13.123) $36\sqrt{2} \text{ m}^2$ 13.124) $V = \frac{S^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{a}$

13.125) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 13.126) 30° 13.127) $\frac{a\sqrt{13}}{2}$

13.128) 120° 13.129) $15\sqrt{2}$ cm; $\frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$

13.130) $\frac{a}{8} \cdot (2\sqrt{17} + 5\sqrt{5} + \sqrt{65})$

13.131) $2\,378 \text{ cm}^2$ 13.132) 150 cm^2 13.133) 3Q 13.134) 16 m^2 e $8\sqrt{3} \text{ m}^2$

13.135) 300 cm^2 13.136) $a^2(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ 13.137) $\frac{4Q\sqrt{3}}{3}$

13.138) 200 cm^2 13.139) $V = 672 \text{ cm}^3$ 13.140) $V = 480 \text{ cm}^3$

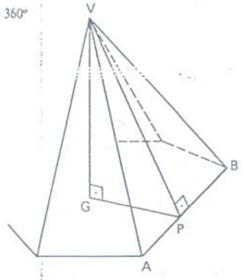
14.9) a) 720° b) 1 080° c) 1 440° d) $(n - 1) \cdot 360°$

14.10) onze lados

14.11) Se $\overleftrightarrow{VG}$ é a altura da pirâmide, então $\overleftrightarrow{VG}$ é perpendicular ao plano da base, logo

$$\overleftrightarrow{VG} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

Por outro lado, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{VP}$, pois $\overleftrightarrow{VP}$ é a altura da face lateral. Assim, $\overleftrightarrow{AB} \perp$ pl (VGP). Portanto, pl (VAB) $\perp$ pl (VGP), pois o pl (VAB) contém uma reta que é perpendicular ao pl (VGP).



14.12) $x = \frac{ah}{a + h}$

14.13) a) aresta lateral $= \frac{\sqrt{9h^2 + 3a^2}}{3}$

altura $= \frac{\sqrt{36h^2 + 3a^2}}{6}$

b) aresta lateral $= \frac{\sqrt{4h^2 + 2a^2}}{2}$

altura $= \frac{\sqrt{4h^2 + a^2}}{2}$

14.14) a) $\frac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$ c) $\sqrt{b^2 - a^2}$

14.15) 20 cm 14.16) 48 cm 14.17) $2\sqrt{3}$

14.18) 6 cm e $4\sqrt{5}$ cm 14.19) 90°

14.20) a) 4 b) 10 c) $n(n - 3)$ 14.21) $9\sqrt{2}$ cm

14.22) $a(\sqrt{6} - 2)$ 14.23) $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ 14.24) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

14.25) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{4}$ 14.26) $\cos(B\hat{A}C) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$

14.27) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ 14.28) $\operatorname{sen} \beta = \frac{c}{b} \operatorname{sen} \alpha$

14.29) $\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$ 14.30) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

14.31) $\frac{a\sqrt{26}}{6}$ 14.32) 6 cm 14.33) $\frac{2\sqrt{6A}}{3\sqrt[4]{3}}$

14.34) 8 cm ou 6 cm 14.35) $S_\ell = (1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$

14.36) $S_\ell = \sqrt{3} \text{ cm}^2$ 14.37) 81 cm^2

14.38) $VB = VC = 17$ cm; $S = 120 \text{ cm}^2$ 14.39) 90 cm^2 e $18\sqrt{34} \text{ cm}^2$

14.40) a) $\frac{9\sqrt{67}}{4}$ b) $3\sqrt{73}$ c) $\frac{9\sqrt{91}}{2}$

14.41) a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ b) $2a^2$ c) $3a^2\sqrt{3}$

14.42) a) $\frac{\sqrt{153}}{3}$ cm e $\frac{\sqrt{141}}{3}$ cm b) $\sqrt{10}$ cm e $2\sqrt{2}$ cm c) $\sqrt{5}$ cm e 1 cm

14.43) a) $\frac{a}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3a}{2}$

14.44) $3a^2$ 14.45) $192\sqrt{3}\text{ cm}^2$ 14.46) 720 cm^2

14.47) 432 cm^2 14.48) $4a^2\sqrt{5}$ 14.49) $\frac{a^2}{2}(2+\sqrt{3})$

14.50) a) $\frac{a^2}{4}(4+\sqrt{7})$ b) $a^2(1+\sqrt{2})$ c) $\frac{a^2}{2}(6+\sqrt{7})$

14.51) $100(2+\sqrt{3})\text{ cm}^2$ 14.52) $\frac{m^2}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{39})$ 14.53) $2a^2$

14.54) $\frac{a}{6}$ 14.55) $\frac{26}{19}$ 14.56) $\frac{a^2\sqrt{39}}{4}$ 14.57) 4 cm 14.58) $\frac{2h}{3}$ 14.59) $a\sqrt{2}$

14.60) $\frac{9h^2}{2}$ 14.61) $\frac{1}{16}$ 14.62) 10 cm 14.63) $\frac{13}{15}$ 14.64) $h\sqrt{\frac{b}{B}}$

14.65) $x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$ (h = altura da pirâmide)

14.66) 7,5 cm ou 1,5 cm 14.67) $\sqrt{3} : (\sqrt{7}-\sqrt{3}) : (2\sqrt{3}-\sqrt{7})$

14.68) a) $S_b = 25\text{ cm}^2$ b) $S_\ell = 5\sqrt{281}\text{ cm}^2$ c) $S_t = (25+5\sqrt{281})\text{ cm}^2$ d) $V = \frac{200}{3}\text{ cm}^3$

14.69) a) $S_b = 8\text{ cm}^2$ b) $S_\ell = (16+8\sqrt{3})\text{ cm}^2$ c) $S_t = (24+8\sqrt{3})\text{ cm}^2$ d) $V = \frac{32}{3}\text{ cm}^3$

14.70) $V = 125\sqrt{3}\text{ cm}^3$

14.71) a) $S_b = 4\sqrt{3}\text{ cm}^2$ b) $S_\ell = 28\sqrt{3}\text{ cm}^2$ c) $S_t = 32\sqrt{3}\text{ cm}^2$ d) $V = \frac{32\sqrt{3}}{3}\text{ cm}^3$

14.72) a) $S_b = 6\text{ cm}^2$ b) $S_\ell = 21\text{ cm}^2$ c) $S_t = 27\text{ cm}^2$ d) $V = 6\text{ cm}^3$

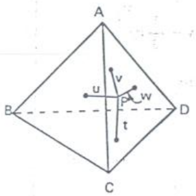
14.73) $V = 16\sqrt{6}\text{ cm}^3$ 14.74) 2 cm 14.75) $V = \frac{125\sqrt{2}}{12}\text{ cm}^3$

14.76) 4,5 cm 14.77) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

14.78) a) $V = \frac{\sqrt{6S}}{3\sqrt[4]{3}}$ b) $V = \frac{S\sqrt{6S}}{36\sqrt[4]{3}}$

14.79) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 14.80) $h = \frac{2\sqrt{2}}{3}\text{ cm}$

14.81) O ponto P divide o tetraedro regular em quatro pirâmides, com vértice em P e bases em cada face do tetraedro. As distâncias **u, v, w e t** de P às faces são as alturas destas pirâmides. A soma dos volumes das quatro pirâmides é igual ao volume do tetraedro. Se S é a área de uma face do tetraedro, temos



$$\frac{1}{3}S\cdot u + \frac{1}{3}S\cdot v + \frac{1}{3}S\cdot w + \frac{1}{3}S\cdot t = \frac{1}{3}S\cdot h$$

onde **h** é a altura do tetraedro. Daí, vem:

$$u + v + w + t = h$$

14.82) $V = \frac{a^3}{3}$ 14.83) $V = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}$ 14.84) $V = \frac{a^3\sqrt{14}}{6}$

14.85) $V = \frac{3a^3}{2}$ 14.86) $V = \frac{3h^3\sqrt{3}}{4}$ 14.87) $V = \frac{3h^3\sqrt{3}}{2}$

14.88) $V = 2h^3$ 14.89) $V = \frac{a^3\sqrt{47}}{24}$ 14.90) $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{6}$

14.91) $V = \frac{a^3\sqrt{39}}{4}$ 14.92) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{72}$ 14.93) $V = \frac{a^3}{6}$

14.94) $V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ 14.95) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{36}$ 14.96) $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

14.97) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ 14.98) $V = \frac{\sqrt{5}}{3}\text{ cm}^3$ 14.99) 12 : 1

14.100) 6 : 1 14.101) 4 : 1 14.102) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

14.103) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ 14.104) a) $\frac{a^3\sqrt{5}}{24}$ b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

14.105) $V = \frac{4S\sqrt{6S}}{9}$ 14.106) $V = \frac{3\sqrt{6}}{2}\text{ cm}^3$ 14.107) $V = 6\text{ cm}^3$

14.108) 6,5 cm 14.109) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{48}$ 14.110) $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

14.111) 864 cm^2 14.112) $V = 2\,560\sqrt{3}\text{ cm}^3$ 14.113) $V = 216\text{ cm}^3$

14.114) $V = \frac{1}{3}\ m^3$

14.115) $V = \frac{\sqrt{6}}{2}\ cm^3$

14.116) $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

14.117) $\frac{100}{9}\ cm^2$

14.118) 3 : 1

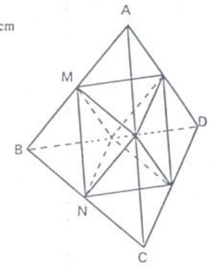
14.119) $V = \frac{4\ell^3\sqrt{15}}{75}$

14.120) $S_\ell = \frac{3\ell^2\sqrt{6}}{5}$; $V = \frac{\ell^3\sqrt{15}}{25}$

14.121) $V = 1\,125\sqrt{2}\ cm^3$

14.122) $a = 2\sqrt[3]{3}\ cm$

14.123) Se MN = a é a aresta do octaedro, então AC = 2MN = 2a é a aresta do tetraedro.
Para o octaedro regular, temos $V_1 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ (veja item 14.3) e para o tetraedro, temos $V_2 = \frac{(2a)^3\sqrt{2}}{12} = \frac{8a^3\sqrt{2}}{12}$ (veja exercício 14.1).
Assim, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$.



14.124) $b = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

14.125) $b = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

14.126) $a(2 - \sqrt{2})$

14.127) $2a^2\sqrt{3}$

14.128) $\sqrt{2}\ m$

14.129) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$

14.130) $\frac{18}{\sqrt[3]{4}}\ cm^2$

14.131) $\frac{1}{26}$

14.132) $\frac{7}{19}$

14.133) 1 : 7 : 19

14.134) $1 : (\sqrt[3]{2} - 1) : (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})$

14.135) $x = \frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ (h = altura da pirâmide)

14.136) $\frac{h}{\sqrt[3]{9}}$

14.137) 2 cm

14.138) $4\sqrt{3}\ cm$ e $20\sqrt{3}\ cm$; $\sqrt{481}\ cm$

14.139) $9\sqrt{3}\ cm$; $6\sqrt{3}\ cm$

14.140) $\sqrt{3}\ cm$; 15 cm

14.141) 10 cm

14.142) $\frac{(a - b)\sqrt{6}}{6}$

14.143) $\frac{(a - b)\sqrt{3}}{2}$; $a - b$; 45°; $\frac{(a - b)\sqrt{2}}{2}$

14.144) $15\sqrt{2}\ cm$; $10\sqrt{5}\ cm$; $5\sqrt{19}\ cm$

14.145) a) $360 + 34\sqrt{3}\ cm^2$ b) $616\ cm^2$ c) $720 + 204\sqrt{3}\ cm^2$

14.146) $1\,260\ cm^2$

14.147) a) $2a^2\sqrt{39}$ b) $8a^2\sqrt{5}$ c) $12a^2\sqrt{7}$

14.148) $3\,480\ cm^2$

14.149) $23\sqrt{3}\ cm^2$

14.150) $180\sqrt{3}\ cm^2$

14.151) $45\sqrt{15}\ cm^2$

14.152) $392\ cm^2$

14.153) $8\sqrt{97}\ cm^2$

14.154) $405\sqrt{7}\ cm^2$

14.155) $\left(8 + \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ cm e $\left(8 - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ cm

14.156) $162\sqrt{7}\ cm^2$

14.157) $\frac{a\sqrt{35}}{10}$

14.158) $70\ cm^2$

14.159) $\frac{ab}{a + b}$

14.160) 6 cm

14.161) 2 cm e 10 cm

14.162) $\frac{56}{9}$ cm

14.163) 2 cm

14.164) $12\ cm^2$

14.165) $\frac{Q - q}{2}$

14.166) $24\ m^2$

14.167) 39 m e 51 m

14.168) $32\ m^2$

14.169) $\frac{3h}{5}$

14.170) 3 cm

14.171) a) $S_1 = 36\ m^2$ e $S_2 = 16\ m^2$ b) $V_T = \frac{380}{3}\ m^3$

14.172) $V = 140\ cm^3$

14.173) $V = 1\,072\ cm^3$

14.174) $V = 436\sqrt{3}\ m^3$

14.175) $V = \frac{35\sqrt{3}}{3}\ cm^3$

14.176) $V = \frac{140}{3}\ cm^3$

14.177) $V = 70\sqrt{3}\ cm^3$

14.178) $V = \frac{152\sqrt{3}}{3}\ cm^3$

14.179) $V = \frac{608}{3}\ cm^3$

14.180) $114\sqrt{3}\ cm^3$

14.181) $V = \frac{112\sqrt{3}}{9}\ cm^3$

14.182) $V = \frac{224\sqrt{2}}{3}\ cm^3$

14.183) $V = 672\ cm^3$

14.184) $V = \frac{38\sqrt{2}}{3}\ m^3$

14.185) $V = \frac{76\sqrt{2}}{3}\ m^3$

14.186) Não existe o tronco.

14.187) $V = 78\sqrt{3}\ cm^3$

14.188) $V = 52\sqrt{30}\ cm^3$

14.189) $V = 468\ cm^3$

14.190) $V = \frac{117\sqrt{3}}{4}\ cm^3$

14.191) $V = \frac{21R^3}{32}$

14.192) $V = 19\ cm^3$

14.193) $V = 2\,688\ cm^3$

14.194) $V = 13\,584\ cm^3$

14.195) 5 cm e 7 cm

14.196) $\frac{832\sqrt{3}}{3}\ cm^2$

14.197) $V = 1\,140\ m^3$

14.198) $V = 216\ m^3$

14.199) $V = 1\,029\ m^3$

14.200) 3 cm e 5 cm; 15 cm

15.3) $A = 15;\ V = 9$

15.4) $A = 21;\ V = 12$

15.5) $V = 20$

15.6) $F = 5$

15.7) $A = 23;\ V = 14$

15.8) $V = 12$

15.9) 14π rad

15.10) triângulo

15.11) pentágono

15.12) hexágono

15.13) $F = 4$

15.14) dez faces triangulares e duas pentagonais

15.15) três faces quadrangulares e cinco hexagonais

15.16) 12π

15.17) $V = 10$

15.18) $V = 5;\ A = 9;\ F = 6$

15.19) Tem se $V = F$, donde $A = V + F - 2 = 2(V - 1)$.

15.20) não

15.21) $V = \frac{a(n-2) + b(m-2) + c(r-2)}{2} + 2$

15.22) cinco quadriláteros e dois pentágonos

15.23) $V = n + 1$

15.24) $A = \frac{n}{2} + 1$

15.25) $V = 21;\ A = 35$

15.26) $V = 19$

15.27) $F = 8$

15.28) $A = 117$

15.29) $F = 23$

15.30) par

15.31) par

15.32) $A = 5;\ V = 4;\ F = 2$

15.33) $A = 10;\ V = 6;\ F = S$

15.34) $A = 28;\ V = 12;\ F = 17$

15.35) $A = 9;\ V = 7;\ F = 3$

15.36) $A = 27;\ V = 19;\ F = 9$

15.37) $h = \frac{3V}{a^2}$

15.38) $\frac{2S}{5a}$

15.39) $\frac{3V}{7a^2}$

15.40) $\frac{4V\sqrt{3}}{7a^2}$

15.41) $a^2\sqrt{3}$

15.42) $6a^2\sqrt{3}$

15.43) $2\sqrt{3}$

15.44) $\frac{a^3}{3}$

15.45) 1 : 1

15.46) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

15.47) 4 : 1

15.48) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

15.49) 6 : 1

15.50) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

15.51) $8\sqrt{3}\ cm^2$

15.52) 18

15.53) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

15.54) $F = 5$

15.55) $6a^2$

15.56) $A = 15$

15.57) $V = 16$

15.58) 5 760°

16.2) a) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$ b) $S_b = \frac{3\pi}{4}\ cm^2$ c) $S_\ell = 4\pi\sqrt{3}\ cm^2$ d) $S_t = \frac{\pi}{2}(3 + 8\sqrt{3})\ cm^2$

16.3) a) $r = \sqrt{10}\ cm$ b) $h = \frac{3}{2}\ cm$ c) $S_\ell = 3\pi\sqrt{10}\ cm^2$ d) $S_t = \pi(20 + 3\sqrt{10})\ cm^2$

16.4) $V = 16\pi\sqrt{2}\ cm^3$

16.5) $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}\ cm \cong 5{,}4\ cm$

16.6) a) $r = \frac{2\sqrt{6}}{3}\ cm$ b) $V = \frac{32\pi\sqrt{6}}{9}\ cm^3$

16.7) a) $V = 5\pi$ b) $V = 6\sqrt{3} + \frac{5\pi}{4}$ c) $V = 6\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$

16.8) $h = 2\ cm$

16.9) $\frac{1}{2}$

16.10) a) $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ b) $S_\ell = \frac{4\pi\sqrt[3]{V^2}}{\sqrt[3]{4\pi^2}}$

16.11) $r = 6\ cm$

16.12) a) $r = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi}}$ b) $V = \frac{A\sqrt{A}}{4\sqrt{\pi}}$

16.13) $\frac{r}{R}$

16.14) $V = 6{,}9\pi\ cm^3$

16.15) a) $r = a\sqrt{\frac{6}{\pi}}$ b) a embalagem cilíndrica

16.16) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$

16.17) $V = \frac{\pi a^3}{4}$

16.18) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

16.19) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

16.20) $V = \frac{PRh}{2}$

16.21) $S = 25\pi\sqrt{3}\ cm^2$

16.22) $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{2}$

16.23) $\frac{\pi S}{4}$

16.24) 8 cm

16.25) $336\ cm^2$

16.26) $2\sqrt{7}\ cm$

16.27) $1\,920\ cm^2$

16.28) $r = 5\sqrt{3}\ cm;\ h = 15\ cm$

16.29) 6 cm

16.30) 1 : 2

16.31) $\frac{a^2}{4\pi}$

16.32) 90°

16.33) $\frac{\ell\sqrt{5}}{2}$

16.34) $20\sqrt{3}\ cm^2$

16.35) $a^2\sqrt{2}$

16.36) $\frac{5\sqrt{3}}{3}\ cm$

16.37) $256\sqrt{3}\ cm^2$

16.38) $\frac{d\sqrt{10}}{4}$

16.39) $640\ cm^2$

16.40) $4\,968\ cm^2$

16.41) $120\ cm^2$

16.42) $9\pi\ cm^2$

16.43) $25\sqrt{2}$ cm   16.44) $a\sqrt{6}$ 16.45) $2a^2\sqrt{6}$

16.46) $2S\sqrt{3}$ 16.47) $180\sqrt{3}$ cm²   16.48) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ cm; $\frac{25}{2}$ cm

16.49) $\pi\ell^2$ 16.50) $\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ 16.51) 4 : 1   16.52) πS 16.53) $\frac{\pi\ell^2\sqrt{3}}{4}$ 16.54) 8 : 1

16.55) $\frac{h}{r} = 4 \pm 2\sqrt{3}$ 16.56) $2\pi : 3$ 16.57) $\frac{3r^2\sqrt{51}}{4}$ 16.58) $\frac{2\pi a^2\sqrt{2}}{3}$

16.59) $\frac{3r}{\pi}$ 16.60) 2 : 1   16.61) $\pi a^2(4 + \sqrt{6})$

16.62) $2\sqrt{2} : \pi$ 16.63) $6 : \pi$ 16.64) 1 : 1

16.65) b : a   16.66) $\frac{2\pi S\sqrt{3}}{3}$ 16.67) $\pi S\sqrt{2}$ 16.68) $\frac{d^2(3 + 2\pi\sqrt{3})}{8\pi}$

16.69) $\frac{2a}{\sqrt{\pi}}$ 16.70) 200π cm²   16.71) $\frac{25(8\pi + 3\sqrt{3})}{3}$ 16.72) $\frac{10}{\pi}$ m²

16.73) $1\,380\pi$ cm²   16.74) $1\,400\pi$ cm² ou $1\,050\pi$ cm²

16.75) $16\pi(4 + 3\sqrt{2})$ cm²   16.76) 1 : 1   16.77) 2 : 9

16.78) 1 : 3   16.79) $V = 500\pi$ cm³   16.80) $V = \frac{\pi S\sqrt{S}}{4}$

16.81) $V = 90\pi$ cm³   16.82) $V = 252\pi$ cm³   16.83) $\frac{15}{\pi}$ cm

16.84) $V = 252\pi$ cm³ ou 294π cm³   16.85) $V = \frac{3\pi\ell^3}{32}$ 16.86) $V = 108\pi$ cm³

16.87) $V = 343\pi$ cm³   16.88) $V = \frac{a^3}{4\pi}$ 16.89) $V = 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}}$

16.90) $\sqrt[3]{\frac{16V^2}{\pi^2}}$ 16.91) $\frac{2a}{\sqrt[3]{2\pi}}$ 16.92) $\sqrt[3]{9\pi}$

16.93) 4 : 1   16.94) 2 : 1   16.95) 4 : 3

16.96) $V = \frac{2V}{\pi}$ 16.97) $V = \frac{4V}{\pi}$ 16.98) $V = \frac{3V\sqrt{3}}{4\pi}$

16.99) $V = \frac{\pi\ell^3\sqrt{3}}{16}$ 16.100) $V = 48\pi\sqrt{3}$ cm³   16.101) $V = \frac{\pi a^3}{2}$

16.102) $V = 375\pi$ cm³   16.103) $V = 6\pi$ cm³   16.104) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

16.105) 54π 16.106) 24π 16.107) $V = 24\pi$ cm³

16.108) $V = \frac{2\pi^2 r^3\sqrt{3}}{3}$ 16.109) $V = 12$ cm³   16.110) $V = \frac{3\pi h^3}{16}$

16.111) $V = \frac{3\pi a^3}{4}$ 16.112) $V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³   16.113) $V = \frac{4a^3\sqrt{6}}{9}$

16.114) $V = 54\pi$ cm³   16.115) $12\pi\sqrt{2} : 1$

17.4) a) $g = 5$ m   b) $S_b = 9\pi$ m²   c) $S_\ell = 15\pi$ m²   d) $S_t = 24\pi$ m²   e) $V = 12\pi$ m³

17.5) a) $r = \sqrt{5}$ cm   b) $h = \sqrt{31}$ cm   c) $S_\ell = 6\pi\sqrt{5}$ cm²   d) $S_t = \pi(5 + 6\sqrt{5})$ cm²
e) $V = \frac{5\pi\sqrt{31}}{3}$ cm³

17.6) a) $r = \frac{7\sqrt{5}}{5}$ cm   b) $h = \frac{14\sqrt{5}}{5}$ cm   c) $S_b = \frac{49\pi}{5}$ cm²   d) $S_\ell = \frac{49\pi\sqrt{5}}{5}$ cm²
e) $S_t = \frac{49\pi}{5}(1 + \sqrt{5})$ cm²   f) $V = \frac{686\pi\sqrt{5}}{75}$ cm³

17.7) $V = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³   17.8) $g = \sqrt{10} \cdot \sqrt[3]{10}$ cm   17.9) $S_t = 108\pi$ cm²

17.10) $h = 3\sqrt{2}$ cm   17.11) $V = \frac{8\pi}{3}(9 - \sqrt{17})$ 17.12) $V = 24\pi$ m³

17.13) $r = \frac{72}{5\pi}$ cm   17.14) $r = 2\sqrt{3}$ cm   17.15) $V = \frac{125\pi}{9}$ cm³

17.16) $h = \pi\sqrt{3}$ cm   17.17) $S_\ell = \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$ cm²   17.18) $V = \frac{8}{3}\pi r^3$

17.22) 36π cm²   17.23) 9π cm²   17.24) 55 m

17.25) a) $S_1 = 36\pi$ cm²; $S_2 = 16\pi$ cm²   b) $V_T = \frac{380\pi}{3}$ cm³   17.26) $V_T = 420\pi$ cm³

17.27) $V_T = 63\pi\sqrt{3}$ cm³   17.28) 6 cm   17.29) $\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{4}}$

17.30) $50\pi\sqrt[3]{2}$ cm²   17.31) $\frac{\pi}{2}$ 17.32) $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{108}$

17.33) $\frac{8}{3}V$ 17.34) $5\sqrt{2}$ cm; 25π cm²   17.35) 30°

17.36) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 17.37) 45° 17.38) $\frac{\ell^2}{2}$ 17.39) $\frac{h^2\sqrt{3}}{3}$ 17.40) 48 cm² 17.41) $\frac{2r^2}{3}$

17.42) 216 m² 17.43) π 17.44) $\sqrt{2}$ 17.45) 12 cm 17.46) 10 cm 17.47) $h\sqrt{2}$

17.48) $2\sqrt{2}$ 17.49) $\frac{a(2+\sqrt{6})}{3}$ 17.50) $\frac{a^2\sqrt{3}(7+4\sqrt{3})}{12}$ 17.51) $\frac{a^2\sqrt{3}(11+4\sqrt{6})}{6}$

17.52) S 17.53) $2r$ 17.54) $\sqrt{\frac{3S}{2\pi}}$ 17.55) 15π cm² 17.56) 120°

17.57) 1 : 1 17.58) 30° 17.59) $\frac{\pi P^2}{4}(\sqrt{2}-1)$ 17.60) $\frac{4\,080\pi}{13}$ cm²

17.61) $\frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{2}$ 17.62) $\frac{2\pi S\sqrt{6}}{3}$ 17.63) 10 cm

17.64) $360° \cdot \frac{r}{g}$ 17.65) $\frac{405\pi}{4}$ cm² 17.66) $\frac{5S}{4}$ 17.67) 60° 17.68) 24 cm²

17.69) $\frac{7+4\sqrt{3}}{6}$ 17.70) $312\pi\sqrt{2}$ cm² 17.71) $\frac{32}{7}$ cm e $\frac{80}{7}$ cm

17.72) $\frac{13\pi\ell^2}{8}$ 17.73) $\frac{3\pi\ell^2}{2}$ 17.74) $\frac{11\pi R^2}{4}$

17.75) 16 cm 17.76) $10\sqrt{15}$ cm 17.77) 260π cm²

17.78) 9 cm 17.79) $\pi\ell^2$ 17.80) $100\pi\sqrt{6}$ cm²

17.81) $36\sqrt{247}$ cm² 17.82) $\frac{H^2}{2}$ 17.83) $\frac{R^2 - r^2}{2}$

17.84) $\frac{r^2\sqrt{7}}{4}$ 17.85) $\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$ 17.86) 500 cm²

17.87) $\frac{2H}{3}$ e $\frac{H}{3}$ 17.88) 4 cm 17.89) $d = \frac{2-\sqrt{2}}{2}h$

17.90) $r_2 = 10\sqrt{3}$ cm 17.91) $V = \frac{2\pi}{3}$ 17.92) $\frac{9}{2}V$

17.93) reduzido à metade 17.94) $V = \frac{dS}{3}$ 17.95) $V = \frac{\ell S}{6}$

17.96) $V = \frac{\ell^2}{24\pi^2} \cdot \sqrt{(2\pi g)^2 - \ell^2}$ 17.97) $V = 16\pi$ cm³ 17.98) $V = 12\pi$ cm³

17.99) $V = 600\pi$ cm³ ou 320π cm³ 17.100) $h = \frac{3r}{\sqrt{r^2 - 9}}$

17.101) $h = \frac{6r^2}{r^2 - 9}$ 17.102) $h = 3$ 17.103) 240°

17.104) 1 : 4 17.105) 144π cm³; 192π cm³

17.106) $\frac{\pi}{72}(2+\sqrt{6})^3$ 17.107) $V = \frac{10\pi h^3}{9}$ 17.108) $\frac{\pi}{12}$ 17.109) $\frac{\pi}{12}$ 17.110) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$

17.111) $V_T = 504\pi$ cm³ 17.112) 24 cm; 25 cm 17.113) 75π m²

17.114) $V_T = \frac{7\pi\ell^3\sqrt{3}}{24}$ 17.115) $V_T = \frac{\pi a^3(3+\sqrt{2})}{12}$ 17.116) 256π cm²

17.117) $V_T = \frac{5\pi\ell^3\sqrt{3}}{48}$ 17.118) $V_T = \frac{37\pi d^3}{72}$ 17.119) $V_T = 1\,480\pi$ cm³

17.120) $V_T = \frac{7\pi R^3}{3}$ 17.121) $V_T = \frac{7\pi a^3\sqrt{2}}{6}$ 17.122) $3r_1 = 2r_2$

17.123) $r_2 = \frac{r_1(\sqrt{5}+1)}{2}$ 17.124) $V_T = \frac{7\pi a^3\sqrt{6}}{27}$ 17.125) 7 cm

17.126) $V = 28\pi r^3$ (r = raio da base menor) 17.127) $\frac{4r}{5}$

17.128) $V = \frac{36\pi r^3}{5}$ 17.129) $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ 17.130) $\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

17.131) $\frac{\pi V\sqrt{3}}{3}$ 17.132) $V_T = \frac{7\pi V\sqrt{3}}{27}$ 17.133) $\frac{(7+\sqrt{6})\pi a^3}{36}$

17.134) $\frac{1\,024\pi}{25}$ cm² ou $\frac{2\,304\pi}{25}$ cm² 17.135) 8 cm

17.136) $\frac{7V}{27}$ 17.137) 1 : 26 ou 8 : 19 17.138) 19 : 37 : 61 17.139) $\frac{R^3 - r^3}{R^3}$

17.140) $\frac{7}{19}$ 17.141) $1 : (2\sqrt{2}-1) : (3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

17.142) a) $2\pi c$ b) πc^2 c) πbc d) $\frac{\pi ac^2}{3}$

17.143) a) $(11+\sqrt{2})\pi a^2$ b) $\frac{11\pi a^3}{3}$

17.144) a) $\frac{3\pi a^2\sqrt{3}}{16}$ b) $\frac{\pi a^2\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$

17.145) a) $4\pi a^2\sqrt{3}$ b) $\frac{3\pi a^3}{2}$

17.146) a) $6(2+\sqrt{2})\pi a^2$ b) $6\pi a^3$

17.147) a) $1\,344\pi$ cm² b) $5\,376\pi$ cm³

17.148) a) $\frac{\pi a^2(3+5\sqrt{3})}{2}$ b) πa^3

17.149) a) $2\pi a^2\sqrt{3}$ b) πa^3

17.150) a) $\pi a^2(6+\sqrt{3})$ ou $\pi a^2(6-\sqrt{3})$ b) $\frac{\pi a^3}{4}(2\sqrt{3}+1)$ ou $\frac{\pi a^3}{4}(2\sqrt{3}-1)$

17.151) a) $6\pi a^2\sqrt{3}$ b) $\frac{9\pi a^3}{2}$ 17.152) a) $6\pi a^2$ b) $\frac{3\pi a^3\sqrt{3}}{4}$

17.153) a) 510π cm² b) 720π cm³

17.154) $V = \frac{4\,800\pi}{13}$ cm³ 17.155) $V = \frac{\ell S}{3}$ 17.156) $V = 3\,525\pi$ cm³

17.157) $V = \frac{4\pi S^2}{3a}$ 17.158) $V = 378\pi$ cm³

18.10) a) $V = \frac{9\pi}{2}$ m³ b) $S = 9\pi$ m² c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m d) $p = \frac{\sqrt{6}}{2}$ m, $p' = \frac{\sqrt{30}}{2}$ m

18.11) a) $r = 3$ cm b) $S = 36\pi$ cm² 18.12) $V = \frac{\pi a^3}{6}$

18.13) a) $r = 2\sqrt{3}$ cm b) $V = 32\pi\sqrt{3}$ cm³ c) $S = 48\pi$ cm²

18.14) $d = 3\sqrt{2}$ cm 18.15) $d = 5$ cm 18.16) $V = \frac{\pi a^3}{6}$

18.17) 1 18.18) $\frac{9}{32}$ 18.19) $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ 18.20) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ 18.21) $\frac{4}{9}$ 18.22) $2\sqrt{2}$

18.23) $\sqrt[3]{4}$ 18.24) 48π 18.25) $d = 14$ cm ou $d = 2$ cm

18.26) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ cm 18.27) 9 cm 18.28) 1 : 2 : 3

18.29) $\frac{3\pi r^2}{4}$ 18.30) $\frac{\pi r^2}{2}$ 18.31) 30°

18.32) 12 cm 18.33) 24 cm 18.34) 33,8 cm

18.35) 12π cm 18.36) $\pi r\sqrt{3}$ 18.37) $\frac{S}{2}$

18.38) 2,4 cm 18.39) 0,25 cm 18.40) 3,5 cm

18.41) $\frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$ 18.42) $V = \frac{8r^3\sqrt{3}}{27}$ 18.43) $V = \frac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}$, $S = \frac{3\pi a^2}{2}$

18.44) $V = \frac{250\sqrt{6}}{9}$ cm³ 18.45) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$ 18.46) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

18.47) $\frac{9}{16}$ 18.48) $\frac{16}{9}$ 18.49) $V = \frac{3\pi r^3}{8}$ 18.50) $\pi h\sqrt{2R(2R-h)}$

18.51) $\frac{4\pi r R^2}{2R-r}$ 18.52) $\frac{4}{21}$ 18.53) $H = 3R$ ou $H = 4R$

18.54) $V = \frac{26\pi R^3}{9}$ 18.55) S 18.56) $\frac{S}{2}$

18.57) S 18.58) 576π cm² 18.59) $\frac{2S}{3}$

18.60) $\sqrt{\frac{\pi S}{3}}$ 18.61) $\frac{100\pi}{3}$ cm² 18.62) $1\,100\pi$ cm² e 400π cm²

18.63) $2\,500\pi$ cm² 18.64) 25% 18.65) $\frac{\pi r^2}{2}(5-2\sqrt{2})$

18.66) $\frac{21\pi S}{4\pi - 3\sqrt{3}}$ 18.67) 60° 18.68) $r(\sqrt{3}-1)$

18.69) V 18.70) 4d 18.71) 36π

18.72) $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ 18.73) $\frac{125}{27}$ cm 18.74) $\frac{512\pi(16-9\sqrt{3})}{3}$

18.75) $\frac{37\,532\pi}{3}$ cm³ e $\frac{11\,968\pi}{3}$ cm³ 18.76) $V = \frac{5\pi r^3}{12}$

18.77) $V = \frac{2\pi R^3(9-4\sqrt{3})}{27}$ 18.78) $\frac{5\pi R^3}{24}$ e $\frac{11\pi R^3}{24}$

18.79) $\frac{5V}{72}$ e $\frac{3V}{8}$ 18.80) $V = 4\,500\pi$ cm³

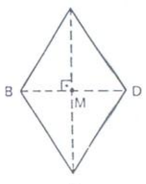
RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) Ela tem dois pontos distintos que pertencem ao plano (postulado P6).
I.2) Mesma justificativa do exercício anterior.
I.3) a) infinitos b) infinitos c) um d) um ou quatro
I.4) um ou quatro ou seis
I.5) a) Se $\overleftrightarrow{AB} \cap r = \{P\}$, então $\alpha \cap \text{pl}(A, B, C) = \overleftrightarrow{CP}$.
b) Se $\overleftrightarrow{AB} /\!/ r$, então $\alpha \cap \text{pl}(A, B, C)$ é a reta por C, paralela à reta r (teorema T4).
I.6) a) Se $r /\!/ \alpha$, então $r \cap \alpha = \varnothing$.
b) Se r fura α, tome $A \in \alpha$. Se $A \in r$, então $r \cap \alpha = \{A\}$. Se $A \notin r$, seja $\beta = \text{pl}(r, A)$. Pelo postulado P8, $\alpha \cap \beta = s$. Seja $r \cap s = \{P\}$. Então, $r \cap \alpha = \{P\}$.
I.7) a) Se $\alpha /\!/ \text{pl}(A, B, C) = \beta$, então $\alpha \cap \beta = \varnothing$.
b) Se α não é paralelo a $\beta = \text{pl}(A, B, C)$, é claro que, das retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, *no máximo uma* poderia ser paralela a α. Assim, duas delas furam α em pontos distintos P e Q. Então, $\alpha \cap \beta = \overleftrightarrow{PQ}$.
I.8) a) Se $\overleftrightarrow{DE} /\!/ \overleftrightarrow{AB}$, então $\overleftrightarrow{DE} \cap \alpha = \varnothing$.
b) Se $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ são concorrentes, $\overleftrightarrow{DE} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{P\}$, então $\overleftrightarrow{DE} \cap \alpha = \{P\}$.
I.9) É a reta $\overleftrightarrow{AB}$.
I.10) Tome o plano β por r e considere a reta $t = \alpha \cap \beta$.
I.11) O plano $\beta = \text{pl}(A, E, F)$ intercepta α segundo uma reta s que passa por A. Se $\overleftrightarrow{EF} /\!/ s$, então $\overleftrightarrow{EF} \cap \alpha = \varnothing$. Se $\overleftrightarrow{EF} \cap s = \{P\}$, então $\overleftrightarrow{EF} \cap \alpha = \{P\}$.
I.12) um, dois ou três planos I.13) reversa ou concorrente I.14) reversa, concorrente, paralela ou coincidente I.15) reversa, concorrente ou paralela I.16) paralela ou coincidente
I.17) reversa ou concorrente I.18) reversa ou concorrente I.19) reversa ou concorrente
I.20) reversa, concorrente ou paralela I.21) reversa, concorrente, paralela ou coincidente
I.22) Se r e s são concorrentes, a reta t, concorrente com ambas, ou passa pela interseção delas, ou está contida em pl (r, s) (veja exercício I.2). O mesmo deverá ocorrer com as outras sete retas
I.23) Se a figura tem menos de quatro pontos, ela é plana. Se há mais de quatro pontos, tomemos os pontos A, B e C. Qualquer outro ponto forma com A, B e C um conjunto coplanar. Assim, todos os pontos da figura pertencem ao plano pl (A, B, C).
I.24) Todas estão contidas no plano paralelo ao plano dado, conduzido pelo ponto dado.
I.25) reversa ou paralela I.26) reversa ou concorrente I.27) reversa, concorrente, paralela ou coincidente I.28) reversa ou concorrente I.29) paralelo ou secante I.30) paralelo, secante ou α contém a reta I.31) paralelo ou α contém a reta
I.32) Se r não está contida em β e é paralela a uma reta de β, então $r /\!/ \beta$, logo $r /\!/ \alpha \cap \beta$. Se $r \subset \beta$, então $r = \alpha \cap \beta$ e, neste caso, $s /\!/ \alpha \cap \beta$. I.33) Basta tomar retas paralelas à interseção.
I.34) É a reta $\alpha \cap \text{pl}(A, r)$.
I.35) Se β é o plano paralelo a α conduzido por A, e P é o ponto onde r fura β, então a reta pedida é $\overleftrightarrow{AP}$. Se $A \in r$, qualquer reta por A, contida em β, satisfaz.

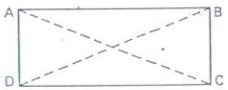
II.1) Se dois lados opostos fossem paralelos, haveria um plano contendo os quatro vértices, o que é absurdo.
II.2) Se as diagonais fossem coplanares, todos os vértices pertenceriam a um mesmo plano.
II.3) a) F b) V c) V d) F e) V
II.4) Temos med $(A\hat{P}B)$ = med $(C\hat{P}D)$, logo
med $(A\hat{P}C)$ = med $(A\hat{P}B)$ + med $(B\hat{P}C)$ =
= med $(C\hat{P}D)$ + med $(B\hat{P}C)$ = med $(B\hat{P}D)$

II.5) med $(A\hat{P}B)$ = med $(A\hat{P}C)$ − med $(B\hat{P}C)$ = 90° − med $(B\hat{P}C)$ e
med $(C\hat{P}D)$ = med $(B\hat{P}D)$ − med $(B\hat{P}C)$ = 90° − med $(B\hat{P}C)$
Assim, med $(A\hat{P}B)$ = med $(C\hat{P}D)$
II.6) med $(B\hat{O}D)$ = med $(B\hat{O}N)$ + med $(N\hat{O}D)$ = med $(B\hat{O}N)$ + med $(C\hat{O}N)$
med $(A\hat{O}C)$ = med $(A\hat{O}M)$ + med $(M\hat{O}C)$ = med $(M\hat{O}B)$ + med $(M\hat{O}C)$
med $(B\hat{O}D)$ + med $(A\hat{O}C)$ = [med $(M\hat{O}B)$ + med $(B\hat{O}N)$] + [med $(M\hat{O}C)$ + med $(C\hat{O}N)$] =
= med $(M\hat{O}N)$ + med $(M\hat{O}N)$ = 2 med $(M\hat{O}N)$ = 180°

II.7) Basta notar que o ponto M, interseção das diagonais, é ponto médio de $\overline{BD}$, logo $\overline{AM}$ é altura e mediana do $\triangle ABD$. Assim, este triângulo é isósceles: $\overline{AB} \equiv \overline{AD}$.



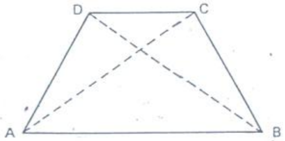
II.8) Se AC = BD, então, pelo L L L, $\triangle ADC \equiv \triangle BCD$, logo $A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$.
Mas med $(A\hat{D}C)$ + med $(B\hat{C}D)$ = 180°,
portanto $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ são retos.



II.9) Veja a figura do exercício II.7. Como ABCD é losango, suas diagonais se cortam ao meio (exercícios 6.37 e 6.35). Assim, no $\triangle ABD$, $\overline{AM}$ é mediana. Como esse triângulo é isósceles, resulta que $\overline{AM}$ é também altura, logo $\overline{AM} \perp \overline{BD}$ (exercício 6.11).

II.10) Veja a figura do exercício II.7. No $\triangle ABD$, $\overline{AM}$ é mediana, logo é também bissetriz interna (veja exercício 6.12).

II.11) Pelo exercício 6.48, $B\hat{A}D \equiv A\hat{B}C$, logo
$\triangle ABD \equiv \triangle BAC$ (L A L). Assim,
$\overline{BD} \equiv \overline{AC}$

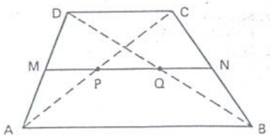


II.12) Veja exercícios 6.38 e 6.39. Temos

$$MP = \frac{1}{2}CD \quad e \quad PN = \frac{1}{2}AB$$

donde

$$MN = MP + PN = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

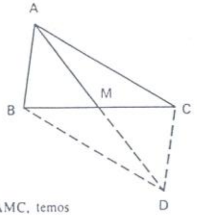


II.13) $\frac{b - a}{2}$

II.14) 24 cm

II.15) Prolongando a mediana até o ponto D tal que MD = AM, obtém-se o paralelogramo ABDC. No △ ABD, temos AD < AB + + BD. Como AD = 2 AM e AC = BD, vem 2 AM < AB + AC e, assim

$$AM < \frac{AB + AC}{2}$$



II.16) Veja a figura anterior. Nos triângulos △ ABM e △ AMC, temos

$$AM + \frac{BC}{2} > AB \quad e \quad AM + \frac{BC}{2} > AC$$

Somando, vem: 2AM + BC > AB + AC, donde

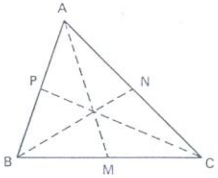
$$AM > \frac{AB + AC - BC}{2}$$

II.17) Aplicando o exercício II.15, temos:

$$AM < \frac{AB + AC}{2}$$

$$BN < \frac{AB + BC}{2}$$

$$CP < \frac{AC + BC}{2}$$



Somando:

$$AM + BN + CP < AB + AC + BC$$

II.18) Aplicando o exercício II.16 (veja a figura anterior) temos:

$$AM > \frac{AB + AC - BC}{2}$$

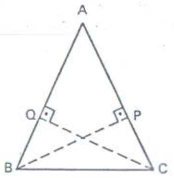
$$BN > \frac{AB + BC - AC}{2}$$

$$CP > \frac{AC + BC - AB}{2}$$

Somando:

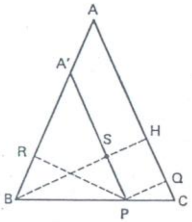
$$AM + BN + CP > \frac{AB + AC + BC}{2}$$

II.19) Se o △ ABC é isósceles, então $\hat{B} \equiv \hat{C}$ e assim, △ BCQ ≡ △ CBP (A.A L). Portanto, BP = CQ.



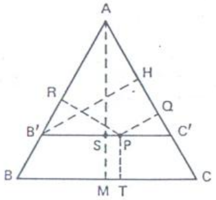
II.20) Sendo $\overleftrightarrow{PA'} \parallel \overleftrightarrow{AC}$, o △ A'BP é isósceles de base $\overline{BP}$. Assim, suas alturas relativas aos vértices da base são congruentes: PR = BS. PSHQ é um retângulo, logo PQ = SH. Assim

$$PR + PQ = BS + SH = BH$$

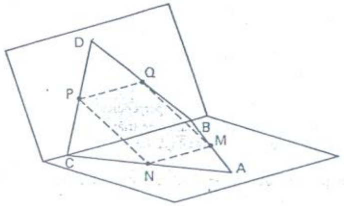


II.21) Sendo $\overleftrightarrow{B'C'} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, podemos aplicar o exercício anterior ao △ AB'C'. Temos PQ + + PR = B'H = AS. Como PT = SM, vem

$$PQ + PR + PT = AS + SM = AM$$



II.22) No △ ABC, temos $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $MN = \frac{1}{2}BC$. No △ BCD, temos $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e $PQ = \frac{1}{2}BC$. Assim, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{NM}$ e PQ = NM, o que significa que MNPQ é um paralelogramo (veja exercício 6.41).



III.1) Considere o plano α que contém A e é perpendicular à reta r. Pelo exercício 7.17, toda reta que passa por A e forma ângulo reto com r está contida em α.

III.2) Se a reta r passa por P e forma ângulo reto com as retas concorrentes s e t, então ela é perpendicular ao plano determinado por s e t. Pelo teorema T20, essa perpendicular existe e é única.

III.3) Tome por A a reta s, $s \perp \alpha$, e a reta t, $t \parallel r$. Se r e α são oblíquos, é claro que s e t são concorrentes. O plano $\beta = pl\,(s, t)$ é perpendicular a α (pois contém s) e paralelo a r (pois contém t).

III.4) $r \subset \alpha$

III.5) A reta r não está contida em α, podendo ser paralela, perpendicular ou oblíqua a α.

III.6) $\overleftrightarrow{BD} \perp pl\,(A, B, C)$; $\overleftrightarrow{BC} \perp pl\,(A, B, D)$

III.7) Se $s \perp \alpha$, $r \subset \alpha$, seja A a interseção de s e α. Tome em α a reta t que passa por A e é perpendicular a r. O plano $\beta = pl\,(s, t)$ contém s e é perpendicular a r.

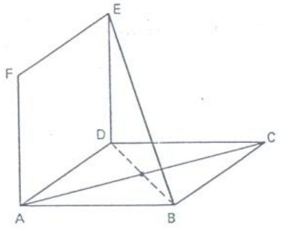
III.8) Como $\overleftrightarrow{BC}$ forma ângulo reto com duas retas concorrentes do pl (r, s), tem-se $\overleftrightarrow{BC} \perp pl\,(r, s)$, logo $\alpha \perp pl\,(r, s)$, pois α contém $\overleftrightarrow{BC}$.

III.9) Sendo M a interseção das diagonais do losango, e sendo isósceles o $\triangle$ BDP, tem-se $\overleftrightarrow{PM} \perp \overleftrightarrow{BD}$. Além disso, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$. Assim, $\overleftrightarrow{BD}$ é perpendicular a duas retas concorrentes do pl (A, C, P): $\overleftrightarrow{BD} \perp pl\,(A, C, P)$.

III.10) Como $\overleftrightarrow{ED} \perp \alpha$ e $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}$, a reta $\overleftrightarrow{AC}$ forma ângulo reto com $\overleftrightarrow{ED}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, logo

$$\overleftrightarrow{AC} \perp pl\,(B, D, E)$$

e assim, $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BE}$.



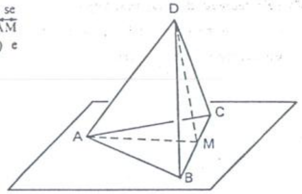
III.11) Como $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{MC}$ e $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{PM}$, então $\overleftrightarrow{BD} \perp pl\,(M, C, P)$. Assim, $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{PC}$.

III.12) Seja β o plano que contém r e é perpendicular a α. Se $t = \alpha \cap \beta$, tome por A a reta $s \perp t$. Como $s \perp \beta$, tem-se que s forma ângulo reto com a reta r.

III.13) Como $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{PM}$ e $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AP}$, então $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular ao plano pl (A, P, M), logo $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$. Assim, $\overleftrightarrow{AM}$ é altura do $\triangle$ ABC e como este triângulo é isósceles, $\overleftrightarrow{AM}$ é mediana. Assim, M é o ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$.

III.14) Se M é o ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$, temos $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CM}$ e $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DM}$, logo $\overleftrightarrow{AB} \perp pl\,(C, D, M)$. Assim, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$.

III.15) Como $\triangle$ABC e $\triangle$BCD são eqüiláteros, se M é o ponto médio de $\overleftrightarrow{BC}$, tem-se $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AM}$ e $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{DM}$, logo $\overleftrightarrow{BC} \perp pl\,(A, M, D)$ e assim, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AD}$.



III.16) $180° - 2\alpha$ III.17) $180° - 2\alpha$ III.18) $360° - 4\alpha$ III.19) $0° < \alpha < 15°$
III.20) $\alpha < x < 360° - 3\alpha$

IV.1) Se o centro da superfície esférica dada é O e o ponto de tangência é A, então o lugar geométrico é $\overleftrightarrow{OA} - \{O, A\}$.

IV.2) Se $\alpha = pl\,(r, s)$, então o lugar geométrico é o plano $\beta \perp \alpha$ e eqüidistante das duas retas dadas.

IV.3) É a união dos dois planos paralelos ao plano dado, e à distância r dele.

IV.4) É a superfície esférica de diâmetro $\overline{AB}$.

IV.5) No plano do trapézio, as mediatrizes dos lados encontram-se num ponto O. O lugar geométrico é a reta por O, perpendicular ao plano do trapézio (o ponto O é o centro da circunferência circunscrita ao trapézio).

IV.6) É a reta perpendicular ao plano do triângulo, passando pelo seu incentro.

IV.7) É uma circunferência contida no plano dado, cujo centro é a projeção ortogonal de P nesse plano.

IV.8) Sejam A, B e C as interseções das três retas com um plano perpendicular a elas. O lugar geométrico é a reta paralela às retas dadas, passando pelo circuncentro do $\triangle$ ABC.

IV.9) É a união dos dois planos paralelos ao plano dado, à distância a dele.

IV.10) 60° IV.11) 160° IV.12) 40°, 80° e 60°

IV.13) É a circunferência de diâmetro $\overline{PO}$.

IV.14) É a interseção do círculo com a circunferência de diâmetro $\overline{PO}$.

IV.15) 105° IV.16) 32 cm² IV.17) $\dfrac{3ad}{4}$ IV.18) 65 cm

IV.19) a) 48 cm² b) 3 cm c) 4 cm

IV.20) 4 cm IV.21) 68 cm, 40 cm e 36 cm IV.22) 576 cm²

IV.23) 336 cm² IV.24) 3 cm IV.25) 6a IV.26) 17 cm IV.27) 3 : 2

IV.28) 5 cm; 19 cm IV.29) a) $\sqrt{ab}$; b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ IV.30) $a = \sqrt{b^2 + bc}$ IV.31) $\dfrac{bc\sqrt{2}}{b + c}$

IV.32) $\dfrac{4}{9}$ IV.33) $\dfrac{bc}{a}$ IV.34) $a\sqrt{2}$ IV.35) $2\sqrt{5}$ cm e $4\sqrt{5}$ cm IV.36) $\dfrac{xy}{z}$ IV.37) 6a

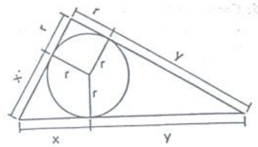
IV.38) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ IV.39) $\dfrac{3r\sqrt{7}}{4}$

IV.40) Pelo teorema de Pitágoras, temos

$$(x + r)^2 + (y + r)^2 = (x + y)^2$$

donde, simplificando, vem

$$r(x + y + r) = xy$$



IV.41) $S = pr = \frac{(2x + 2y + 2r)}{2} \cdot r = r(x + y + r) = xy$ IV.42) $\frac{3\ell}{2}$ IV.43) $3\sqrt{3}$ cm

IV.44) $2\sqrt{2}$ cm IV.45) $\frac{4}{13}$ IV.46) 60° IV.47) $2R^2 \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen}(\hat{A} + \hat{B})$

IV.48) A área é dada por $S = pr = \frac{abc}{4R}$. Assim, $abc = 4pRr$ (veja exercício 12.2).

IV.49) $\frac{441\pi}{20}$ IV.50) $3\pi + \sqrt{6}$ cm²

V.1) 12a, 15a, 16a

V.2) $\left(\text{aresta da base} = \frac{a}{2}, \text{ altura} = \frac{3a}{4}\right)$ ou $\left(\text{aresta da base} = \frac{2a}{3}, \text{ altura} = \frac{5a}{12}\right)$

V.3) (12 cm, 4 cm e 3 cm) ou (5 cm, $7 + \sqrt{23}$ cm e $7 - \sqrt{23}$ cm) V.4) 56 cm²

V.5) 2 cm, $2 + \sqrt{3}$ cm e $2 - \sqrt{3}$ cm V.6) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ V.7) 60 cm V.8) 8 cm³

V.9) 6 cm, 10 cm e 15 cm V.10) 3 cm e 6 cm V.11) k metros V.12) $4(\sqrt{2} + 2\sqrt{10})$ cm

V.13) $\frac{56\sqrt{11}}{3}$ cm² V.14) $\frac{a^2}{2}$ V.15) 240 cm³ V.16) 32 cm² V.17) $4\sqrt{61}$ cm²

V.18) 30 cm² V.19) 250 cm² V.20) 50 cm² V.21) 5 cm V.22) a^2 e $a^2\sqrt{2}$

V.23) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$ V.24) $720\sqrt{3}$ cm² V.25) 540 cm² V.26) 2 cm V.27) 270 cm²

V.28) 240 cm² V.29) $ab(\sqrt{3} + 1)$ V.30) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ V.31) $\frac{S^2}{2a}$ V.32) $\frac{S^2\sqrt{3}}{d}$

V.33) 1 680 cm³ V.34) $\frac{S\sqrt{6S}}{2\sqrt[4]{6}}$ V.35) $\frac{\ell^3\sqrt{2}}{8}$ V.36) 96 cm³ V.37) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$

V.38) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ V.39) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ V.40) $\frac{3h}{2}$ V.41) $\frac{h}{2}$ V.42) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ V.43) $\frac{4a^3}{27}$

V.44) $\frac{132\sqrt{5}}{5}$ cm² V.45) 3 : 1 V.46) $\frac{a^2(\sqrt{7} + 1)}{2}$ V.47) $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ V.48) 400 cm²

V.49) 400 cm² e 100 cm² V.50) $\frac{40}{21}$ cm² V.51) $1 : (\sqrt{2} - 1)$ V.52) $\sqrt{m} : (\sqrt{n} - \sqrt{m})$

V.53) 36 cm V.54) a) $d^2 = a^2 + c^2 - b^2$; b) $x^2 + z^2 - y^2$ V.55) $25\sqrt{2}$ cm²

V.56) $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$ V.57) $24\sqrt{3}$ cm² V.58) 4S V.59) 225 cm³ V.60) 560 cm³

V.61) $\frac{\ell^3}{24}$ V.62) 8 : 19 V.63) $\frac{Hk}{k - 1}$

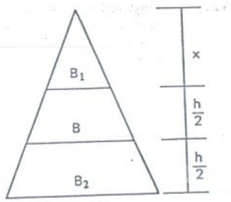
V.64) $\frac{4\sqrt{3} - 5}{2}$ cm e $\frac{4\sqrt{3} + 5}{2}$ cm

V.65) $2(\sqrt{3} - 1)$ m

V.66) $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B_1}} = \frac{x + \frac{h}{2}}{x}$, donde

$$\frac{\sqrt{B} - \sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1}} = \frac{h}{2x}$$

$$\frac{\sqrt{B_2}}{\sqrt{B_1}} = \frac{x + h}{x}, \text{ donde } \frac{\sqrt{B_2} - \sqrt{B_1}}{\sqrt{B_1}} = \frac{h}{x}$$



Assim, $\sqrt{B_2} - \sqrt{B_1} = 2(\sqrt{B} - \sqrt{B_1})$, donde $2\sqrt{B} = \sqrt{B_2} + \sqrt{B_1}$. Elevando ao quadrado:

$$4B = B_1 + B_2 + 2\sqrt{B_1 B_2}$$

donde

$$\sqrt{B_1 B_2} = \frac{4B - B_1 - B_2}{2}$$

Sabemos que o volume do tronco é

$$V = \frac{h}{3}(B_1 + B_2 + \sqrt{B_1 B_2})$$

Assim,

$$V = \frac{h}{3}\left(B_1 + B_2 + \frac{4B - B_1 - B_2}{2}\right) = \frac{h}{6}(B_1 + B_2 + 4B)$$

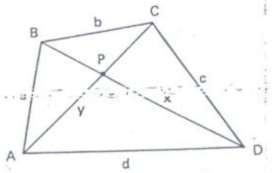
V.67) 8 cm V.68) 22 cm V.69) $75\sqrt{7}$ cm² V.70) 81 cm e 17 cm V.71) $3\sqrt{53}$ cm
V.72) $18\sqrt{118}$ cm² V.73) 17 cm, $4\sqrt{29}$ cm e $\sqrt{689}$ cm V.74) 19,5 m³ V.75) $40\sqrt{6}$ cm²

VI.1) (Veja exercício 2.12.) A reta $\gamma \cap \delta$ passa por O e é paralela ao plano α. Pelo exercício 3.28, $\gamma \cup \delta \subset \beta$.

VI.2) Tome por O o plano $\beta /\!/ \alpha$. A reta r fura β em A (exercício 3.25). A reta procurada é $\overleftrightarrow{OA}$.

VI.3) (Veja exercício II.22.) Os dois segmentos são as diagonais de um paralelogramo.

VI.4) No $\triangle$ ABD: $x < a + d$
No $\triangle$ BCD: $x < b + c$
No $\triangle$ ABC: $y < a + b$
No $\triangle$ ACD: $y < c + d$



Somando:

$$2x + 2y < 2a + 2b + 2c + 2d$$

donde

$$x + y < a + b + c + d$$

VI.5) No $\triangle$ ABP: $a < AP + BP$
No $\triangle$ BCP: $b < BP + CP$
No $\triangle$ CDP: $c < CP + DP$
No $\triangle$ DAP: $d < DP + AP$

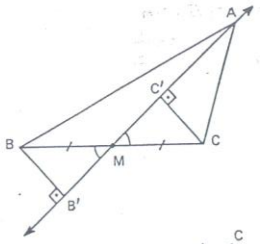
Somando:

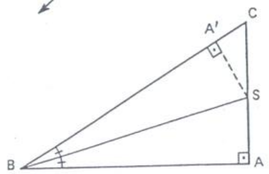
$$a + b + c + d < 2(AP + BP + CP + DP)$$

donde

$$a + b + c + d < 2(x + y)$$

VI.6) Os triângulos BB'M e CC'M são congruentes, pois são retângulos, têm hipotenusas congruentes e um ângulo agudo congruente. Assim, BB' = CC'.



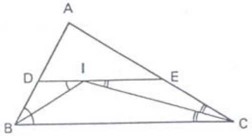


VI.7) Sendo $\overleftrightarrow{SA'} \perp \overleftrightarrow{BC}$, os triângulos ABS e A'BS são congruentes (AAL). Assim, AS = A'S. Mas $\overleftrightarrow{A'S}$ e $\overleftrightarrow{SC}$ são cateto e hipotenusa do △ A'SC, logo A'S < SC e então AS < SC.

VI.8) P é o pé da bissetriz interna relativa ao vértice C.

VI.9) O △ BID é isósceles, pois $B\hat{I}D \equiv I\hat{B}C \equiv I\hat{B}D$. Assim, BD = DI. Da mesma forma, CE = EI. Então,

$$BD + CE = DI + EI = DE$$



VI.10) Basta notar que AE = DF = BF e que ED = FA = CE. Assim,

$$AE + ED + DF + FA = BF + FA + BF + FA = 2(BF + FA) = 2(AB)$$

VI.11) a   VI.12) $90° + \frac{\alpha}{2}$ VI.13) $\frac{\beta - \gamma}{2}$

VI.14) Temos: $e_1 = 180° - i_1$

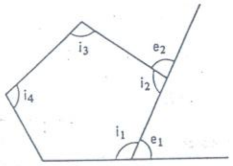
$e_2 = 180° - i_2$

....

$e_n = 180° - i_n$

Somando: $S_e = n \cdot 180° - S_i$.

Como $S_i = (n-2)\,180°$ (veja exercício 6.42), vem $S_e = n \cdot 180° - (n-2)\,180° = 360°$.



VI.15) quadrilátero

VI.16) Tome por A o plano $\beta \perp r$ e a reta $s \parallel \alpha \cap \beta$. A reta s é a reta procurada, pois $s \parallel \alpha$ e forma ângulo reto com r.

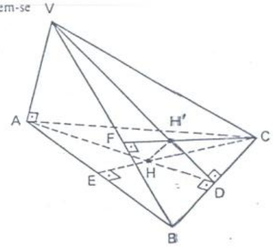
VI.17) Observe a figura. Como $\overleftrightarrow{VA} \perp pl(A, B, C)$, tem-se $\overleftrightarrow{VA} \perp \overleftrightarrow{CE}$.

$$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{VA}\\ \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{VD}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp pl(V, A, D) \Rightarrow \overleftrightarrow{HH'} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

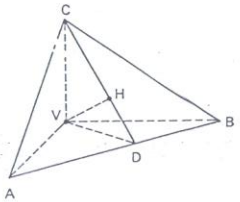
$$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{AB}\\ \overleftrightarrow{CE} \perp \overleftrightarrow{VA}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CE} \perp pl(V, A, B) \Rightarrow \overleftrightarrow{VB} \perp \overleftrightarrow{CE}$$

$$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{VB} \perp \overleftrightarrow{CE}\\ \overleftrightarrow{VB} \perp \overleftrightarrow{CF}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{VB} \perp pl(C, E, F) \Rightarrow \overleftrightarrow{HH'} \perp \overleftrightarrow{VB}$$

$$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{HH'} \perp \overleftrightarrow{BC}\\ \overleftrightarrow{HH'} \perp \overleftrightarrow{VB}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{HH'} \perp pl(V, B, C)$$



VI.18) Como $\overleftrightarrow{VC} \perp pl(V, A, B)$, tem-se $\overleftrightarrow{VC} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Como $\overleftrightarrow{VH} \perp pl(A, B, C)$, tem-se $\overleftrightarrow{VH} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Assim, $\overleftrightarrow{AB} \perp pl(V, C, H)$, logo $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CH}$. Portanto, $\overleftrightarrow{CD}$ é altura do △ ABC. Analogamente, H pertence às outras duas alturas.



VI.19) Seja α o plano que contém $\overleftrightarrow{CD}$ e é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e seja P o traço de $\overleftrightarrow{AB}$ em α. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

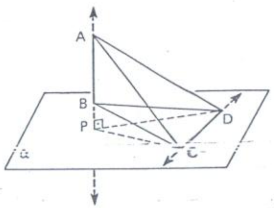
$$(BC)^2 = (BP)^2 + (PC)^2$$
$$(BD)^2 = (BP)^2 + (PD)^2$$

donde

$$(BC)^2 - (BD)^2 = (PC)^2 - (PD)^2$$

Analogamente,

$$(AC)^2 - (AD)^2 = (PC)^2 - (PD)^2$$

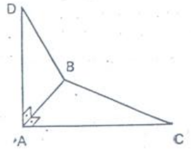


VI.20) $$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD}\\ \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{AB}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AC} \perp pl(A, B, D)$$

Logo, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{matrix}\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AC}\\ \overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{AB}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AD} \perp pl(A, B, C)$$

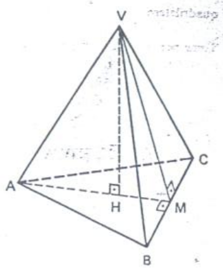
Logo, $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$.



VI.21) H é o centro do $\triangle ABC$ e $\overleftrightarrow{VH}$ é perpendicular ao pl (A, B, C). Assim,

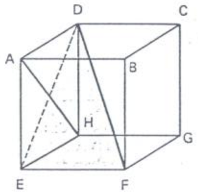
$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{VH} \perp \overleftrightarrow{BC}\\ \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \text{pl}\,(A, M, V)$$

Logo, $\overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AV}$.



VI.22) $\overleftrightarrow{EF} \perp \text{pl}\,(A, D, E) \Rightarrow \overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AH}$

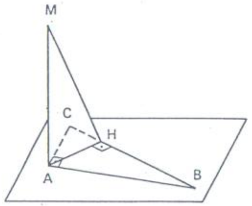
$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{AH}\\ \overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AH} \perp \text{pl}\,(D, E, F) \Rightarrow \overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{DF}$$



VI.23) Sendo $\overleftrightarrow{AH}$ a altura do $\triangle ABC$, a reta procurada é $\overleftrightarrow{MH}$. De fato,

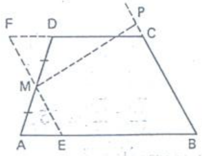
$$\overleftrightarrow{AM} \perp \text{pl}\,(A, B, C) \Rightarrow \overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AM} \perp \overleftrightarrow{BC}\\ \overleftrightarrow{AH} \perp \overleftrightarrow{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \text{pl}\,(A, M, H) \Rightarrow \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{MH}$$



VI.24) Sendo $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, tem-se que $\triangle AEM \equiv \triangle DFM$ (ALA). Assim, a área do trapézio é igual à área do paralelogramo EFCB:

área = (EF) · (MP) = (BC) · (MP)



VI.25) 4 VI.26) $\frac{21}{10}$ VI.27) $\frac{4r^2}{\text{sen}\,\alpha}$ VI.28) $\frac{d}{2}(5 + 3\sqrt{3})$ VI.29) $\frac{845}{12}$ cm²

VI.30) $\frac{(1 + \text{tg}\,\alpha)^2}{1 + \text{tg}^2\,\alpha} = 1 + \text{sen}\,2\alpha$ VI.31) 36 cm² VI.32) $\frac{8\,670}{169}$ cm²

VI.33) $2\sqrt{7}$ cm VI.34) $2\sqrt{13}$ cm ou 4 cm VI.35) $\frac{ab}{2R}$

VI.36) $3\sqrt{2}$ cm e 12 cm VI.37) $a^2\sqrt{2}$ VI.38) $\frac{d^3\sqrt{3}\,\text{sen}\,\alpha\cos^2\alpha}{3}$

VI.39) a VI.40) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ VI.41) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ VI.42) $\cos\beta = \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ VI.43) $\cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$

VI.44) $\text{tg}\,\beta = \sqrt{2}\,\text{tg}\,\alpha$ VI.45) $\text{tg}\,\beta = 2\,\text{tg}\,\alpha$ VI.46) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ VI.47) $\cos\beta = \cos^2\frac{\alpha}{2}$

VI.48) $\frac{b^3\sqrt{23}}{81}$ VI.49) $57a^3\sqrt{7}$ VI.50) $\frac{d\cos\alpha}{2\pi}$ ou $\frac{d\,\text{sen}\,\alpha}{2\pi}$ VI.51) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ VI.52) $\frac{5}{3}$

VI.53) $m^2\,\text{sen}\,2\alpha\,\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ VI.54) $\frac{h\sqrt{2}}{2}$ VI.55) $12d^2$ VI.56) $\frac{\pi h^3}{\text{sen}^2\,2\alpha}$ VI.57) $\sqrt{S}$

VI.58) $4\pi\sqrt{3}$ VI.59) $2\pi^2 r^3$ VI.60) 40π cm³ VI.61) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$ VI.62) $\frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$ cm³

VI.63) $\frac{\pi S\sqrt{2S}}{12}$ VI.64) $2\sqrt[3]{38}$ cm VI.65) $\frac{\pi\ell^3}{2}$ VI.66) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ VI.67) $\frac{3}{2}$

VI.68) $\frac{\sqrt{3S}}{2}$ VI.69) $\frac{2h^2\sqrt{2}}{3}$ VI.70) $\pi\sqrt{2}$ VI.71) $r\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$ VI.72) $\frac{r\sqrt{10}}{5}$

VI.73) $\frac{3\pi r^2}{4}$ VI.74) $\frac{2a}{3}$ VI.75) $\frac{\pi r^3\sqrt{2}}{2}$ VI.76) $\frac{\pi r^3\sqrt{3}}{4}$ VI.77) $\frac{9\pi a^3}{2}$

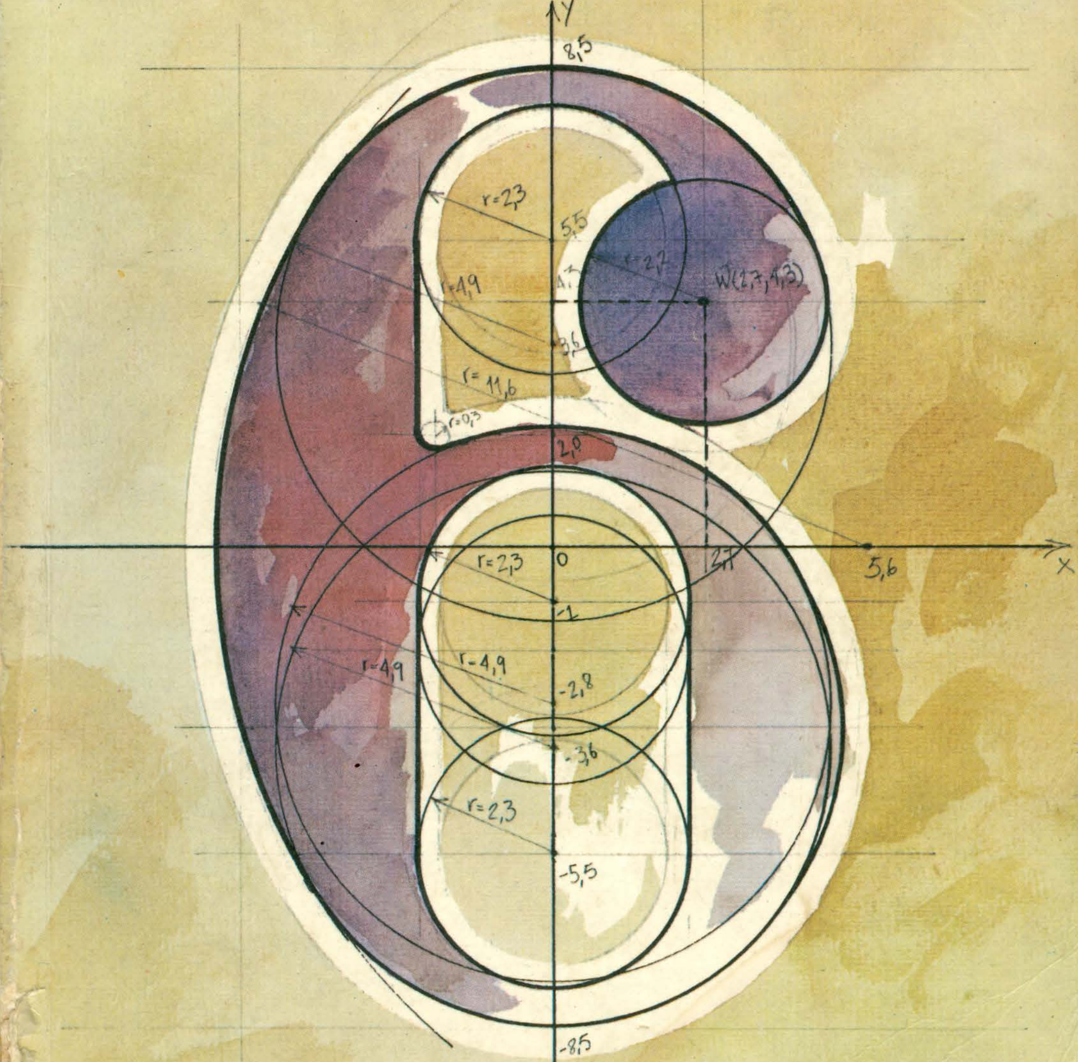
VI.78) $\frac{r^3(2 + \sqrt{2})}{12}$

g°	sen	tg	cotg	cos	
0	0,000 0	0,000		1,000 0	90
1	0,017 5	0,017 5	57,29	0,999 8	89
2	0,034 9	0,034 9	28,64	0,999 4	88
3	0,052 3	0,052 4	19,08	0,998 6	87
4	0,069 8	0,069 9	14,30	0,997 6	86
5	0,087 2	0,087 5	11,43	0,996 2	85
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5	84
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5	83
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3	82
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7	81
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8	80
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6	79
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1	78
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4	77
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3	76
15	0,258 8	0,267 9	3,732	0,965 9	75
16	0,275 6	0,286 7	3,487	0,961 3	74
17	0,292 4	0,305 7	3,271	0,956 3	73
18	0,309 0	0,324 9	3,078	0,951 1	72
19	0,325 6	0,344 3	2,904	0,945 5	71
20	0,342 0	0,364 0	2,747	0,939 7	70
21	0,358 4	0,383 9	2,605	0,933 6	69
22	0,374 6	0,404 0	2,475	0,927 2	68
23	0,390 7	0,424 5	2,356	0,920 5	67
24	0,406 7	0,445 2	2,246	0,913 5	66
25	0,422 6	0,466 3	2,145	0,906 3	65
26	0,438 4	0,487 7	2,050	0,898 8	64
27	0,454 0	0,509 5	1,963	0,891 0	63
28	0,469 5	0,531 7	1,881	0,882 9	62
29	0,484 8	0,554 3	1,804	0,874 6	61
30	0,500 0	0,577 4	1,732	0,866 0	60
31	0,515 0	0,600 9	1,664	0,857 2	59
32	0,529 9	0,624 9	1,600	0,848 0	58
33	0,544 6	0,649 4	1,540	0,838 7	57
34	0,559 2	0,674 5	1,483	0,829 0	56
35	0,573 6	0,700 2	1,428	0,819 2	55
36	0,587 8	0,726 5	1,376	0,809 0	54
37	0,601 8	0,753 6	1,327	0,798 6	53
38	0,615 7	0,781 3	1,280	0,788 0	52
39	0,629 3	0,809 8	1,235	0,777 1	51
40	0,642 8	0,839 1	1,192	0,766 0	50
41	0,656 1	0,869 3	1,150	0,754 7	49
42	0,669 1	0,900 4	1,111	0,743 1	48
43	0,682 0	0,932 5	1,072	0,731 4	47
44	0,694 7	0,965 7	1,036	0,719 3	46
45	0,707 1	1,000 0	1,000	0,707 1	45
	cos	cotg	tg	sen	g°

Impresso em off-set por
GRÁFICA EDITORA HAMBURG LTDA.
Rua Apeninos, 294 — São Paulo — Brasil
Fones: 278-2648 278-1620 279-2765
com filmes fornecidos pelo editor

GEOMETRIA ANALÍTICA

AREF ANTAR NETO
NILTON LAPA
JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO
SIDNEY LUIZ CAVALLANTTE



NOÇÕES DE MATEMÁTICA VOLUME 6

GEOMETRIA ANALÍTICA

Noções de Matemática

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallantte

GEOMETRIA ANALITÍCA

Noções de Matemática

VOLUME 6

SEGUNDO GRAU

1ª Edição

EDITORA MODERNA

Capa:
Ricardo van Steen

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

	Geometria analítica : 2º grau / Aref Antar Neto ...
G298	[et al.]. –– São Paulo : Ed. Moderna, 1980
	(Noções de matemática ; v.6)
	1. Geometria analítica (2º grau) I. Antar Neto, Aref, 1949–
	17. CDD–516
79-1565	18. –516.3

Índice para catálogo sistemático:

1. Geometria analítica 516 (17.) 516.3 (18.)

Todos os direitos reservados
EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tels.: 61-2235 - 240-2637 - 531-1730 - 531-3768
CEP 04511 - São Paulo - SP - Brasil
1980

Impresso no Brasil

2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

Índice

Parte I

Capítulo 1. **Coordenadas na reta** 3

1.1 — Segmento de reta 3
1.2 — Segmento orientado 4
1.3 — Eixo 4
1.4 — Medida algébrica de um segmento orientado 5
1.5 — Sistema de coordenadas abscissas 6
1.6 — Ponto médio 10
1.7 — Razão de seção 12

Capítulo 2. **Coordenadas cartesianas no plano** 19

2.1 — Coordenadas cartesianas ortogonais 19
2.2 — Coordenadas cartesianas não-ortogonais 21
2.3 — Coordenadas polares 22
2.4 — Quadrantes e bissetrizes 23
2.5 — Ponto médio de um segmento 30
2.6 — Distância entre dois pontos 31
2.7 — Razão de seção 39
2.8 — Baricentro de um triângulo 44
Exercícios Suplementares 47

Parte II

Capítulo 3. **Equação geral da reta** 49

3.1 — Condição de alinhamento de três pontos 51
3.2 — Equação de uma reta 57
3.3 — Equação geral da reta 61

Capítulo 4. **Formas da equação da reta** 79

4.1 — Coeficiente angular de uma reta 79
4.2 — Tangente de um ângulo 81
4.3 — Determinação de m conhecidos dois pontos 82

4.4 — Equação reduzida da reta 83
4.5 — Equação da reta conhecidos m e um ponto 89
4.6 — Equação segmentária da reta 94
4.7 — Equações paramétricas da reta 96

Capítulo 5. **Posições relativas de duas retas** 101

5. 1 — Introdução 101
5. 2 — Retas paralelas 102
5. 3 — Retas concorrentes 103
5. 4 — Retas coincidentes 104
5. 5 — Resumo 104
5. 6 — Posições relativas e equação geral 109
5. 7 — Retas paralelas e equação geral 111
5. 8 — Retas perpendiculares 113
5. 9 — Retas perpendiculares e equação geral 115
5.10 — Ângulo de duas retas 127
5.11 — Situação especial 134
5.12 — Feixe de retas concorrentes 140
5.13 — Feixe de retas paralelas 145
Exercícios Suplementares 148

Parte III

Capítulo 6. **Inequações do 1.º grau a duas variáveis** 153

6.1 — Introdução 153
6.2 — Semiplanos determinados por uma reta 154

Capítulo 7. **Transformação de coordenadas** 165

7.1 — Translação de eixos 165
7.2 — Rotação de eixos 168

Capítulo 8. **Distância de ponto a reta** 171

8.1 — Introdução 171
8.2 — Distância da origem a uma reta 174
8.3 — Distância de ponto a reta 175
8.4 — Distância entre retas paralelas 184
8.5 — Bissetrizes 189

Capítulo 9. **Área de polígonos** 203

9.1 — Área do triângulo 203
9.2 — Regra prática 205
9.3 — Área de um polígono 216
Exercícios Suplementares 222

Parte IV

Capítulo 10. **Circunferência** 225

10.1 — Equação da circunferência 225
10.2 — Reconhecimento da equação da circunferência 237
10.3 — Equações paramétricas da circunferência 245
10.4 — Inequações 249

Capítulo 11. **Posições relativas de retas e circunferências** 253

11.1 — Introdução 253
11.2 — Reta e circunferência 253
11.3 — Duas circunferências 274
Exercícios Suplementares 283

PARTE V

Capítulo 12. **Parábola** 287

12.1 — Definição 287
12.2 — Algumas considerações 291
12.3 — Diretriz horizontal e vértice na origem 292
12.4 — Diretriz vertical e vértice na origem 296
12.5 — Equação da parábola de diretriz horizontal 301
12.6 — Equação da parábola de diretriz vertical 309
12.7 — Equações paramétricas 312
12.8 — Reta tangente a parábola 315
12.9 — Inequações 319

Capítulo 13. **Elipse** 323

13.1 — Definição 323
13.2 — Nomenclatura 324
13.3 — Relação entre a, b e c 325
13.4 — Elipse de centro na origem e focos no eixo Ox 329
13.5 — Elipse de centro na origem e focos no eixo Oy 331
13.6 — Equação da elipse com eixo maior horizontal 334
13.7 — Equação da elipse com eixo maior vertical 335
13.8 — Equações paramétricas 338
13.9 — Inequações 341

Capítulo 14. **Hipérbole** 345

14.1 — Definição 345
14.2 — Nomenclatura 346

14.3 — Hipérbole de centro na origem e focos em Ox 352
14.4 — Hipérbole de centro na origem e focos em Oy 354
14.5 — Equação da hipérbole com eixo real horizontal 357
14.6 — Equação da hipérbole com eixo real vertical 358
14.7 — Equações paramétricas 361
14.8 — Inequações 363

Capítulo 15. **Cônicas** 367

15.1 — Introdução 367
15.2 — Equação do segundo grau a duas variáveis 369
15.3 — Excentricidade e reta diretriz 372

Capítulo 16. **Lugares geométricos** 375

16.1 — Introdução 375
16.2 — Descrição de um lugar geométrico 377
Exercícios Suplementares 394

Respostas dos exercícios propostos 397
Respostas dos exercícios suplementares 437
Tabela de razões trigonométricas 445

PARTE I

Capítulo 1 — **Coordenadas na reta**

Capítulo 2 — **Coordenadas cartesianas no plano**

Capítulo 1

Coordenadas na reta

1.1 – SEGMENTO DE RETA

Dados dois pontos A e B, vamos representar o segmento de reta de extremidades A e B por $\overline{AB}$ (ou por $\overline{BA}$).

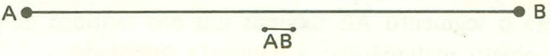
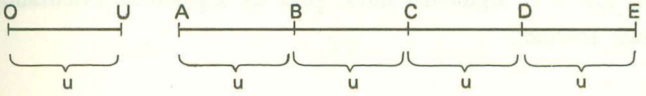


Fig. 1.1

Se adotarmos um segmento unitário $\overline{OU}$, em relação ao qual podemos medir o *comprimento* de outro segmento qualquer, indicaremos o **comprimento do segmento de reta** $\overline{AB}$ por

med. $\overline{AB}$

Exemplos



med. $\overline{AB}$ = 1
med. $\overline{AD}$ = 3
med. $\overline{EC}$ = 2

O símbolo **med.** $\overline{AB}$ pode ser lido:
"medida do segmento $\overline{AB}$"
ou "comprimento do segmento $\overline{AB}$"
ou "módulo do segmento $\overline{AB}$"
ou, ainda, "**distância** entre os pontos A e B".

Esta última leitura é usual na **Geometria Analítica**; para ela também usamos o símbolo:

$$\delta_{AB}$$

Assim, nos exemplos acima podemos escrever:

$$\delta_{AB} = 1 \qquad \delta_{AD} = 3 \qquad \delta_{EC} = 2$$

Segmento nulo – No caso em que os pontos A e B coincidem, o segmento $\overline{AB}$ é chamado **segmento nulo**; adotaremos:

$$\text{med. } \overline{AB} = \delta_{AB} = 0$$

1.2 – SEGMENTO ORIENTADO

Sobre um segmento de reta $\overline{AB}$ podemos fixar dois *sentidos de percurso*: um de A para B e o outro de B para A.

Quando sobre o segmento $\overline{AB}$ fixamos um dos sentidos de percurso, construímos um novo objeto matemático: o **segmento orientado**.

Se o sentido escolhido for o de A para B, o segmento orientado será indicado por

$$\overrightarrow{AB}$$

onde o ponto A é chamado de **origem** do segmento orientado e o ponto B, de **extremidade** do segmento orientado. Por outro lado, $\overrightarrow{BA}$ indicará o segmento orientado de **B para A**: a **origem é B** e a **extremidade é A**. Veja a figura 1.2:

Fig. 1.2

No caso em que $\overline{AB}$ é o **segmento nulo**, para os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ *não definimos sentido*.

1.3 – EIXO

Numa reta temos dois sentidos. Podemos chamar um deles de **positivo** e o outro de **negativo** Chamamos de **reta orientada** ou **eixo** uma reta sobre a qual foi feita a escolha de qual é o sentido positivo. Nos desenhos, o sentido positivo do eixo é indicado por uma flecha.

Fig. 1.3 (sentido positivo)

1.4 – MEDIDA ALGÉBRICA DE UM SEGMENTO ORIENTADO

Consideremos um eixo e e um segmento unitário $\overline{OU}$ através do qual podemos medir o comprimento de segmentos contidos no eixo. Dados dois pontos *distintos* **A** e **B**, a **medida algébrica do segmento orientado** $\overrightarrow{AB}$ é um número real indicado por

$$\overline{AB}$$

e dado por $+\delta_{AB}$ ou $-\delta_{AB}$, conforme o sentido de $\overrightarrow{AB}$ *concordar* ou *discordar* do sentido de e (fig. 1.4).

$\overline{AB} = +\delta_{AB}$ $\qquad$ $\overline{AB} = -\delta_{AB}$

Fig. 1.4

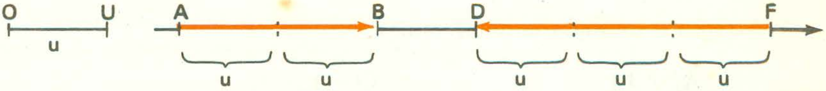
Observações: 1ª) Se A = B, os segmentos nulos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ têm medida algébrica $\overline{AB} = \overline{BA} = 0$.

2ª) É imediato que, em qualquer situação dos pontos A e B:

$$\overline{AB} = -\overline{BA} \quad \text{ou} \quad \overline{AB} + \overline{BA} = 0$$

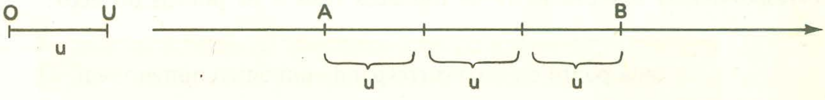
Exemplos

a)



$\overline{AB} = 2$ $\qquad$ $\overline{FD} = -3$

b)



$\overline{AB} = 3$ $\qquad$ $\overline{AB} = -\overline{BA}$

$\overline{BA} = -3$

1.5 – SISTEMA DE COORDENADAS ABSCISSAS

Consideremos sobre um eixo e um ponto **O** e um segmento unitário. Dado um ponto **P** qualquer desse eixo, a **abscissa de P** é um número real indicado por

$$x_P$$

Fig. 1.5

e tal que:

$$x_P = \overline{OP}$$

O ponto **O** será chamado **origem das abscissas** e a abscissa de **O** é igual a zero.

Exemplo

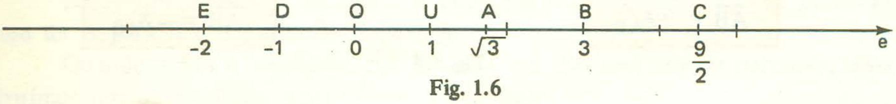


Fig. 1.6

$x_A = \overline{OA} = \sqrt{3}$ $\qquad$ $x_D = \overline{OD} = -1$

$x_B = \overline{OB} = 3$ $\qquad$ $x_E = \overline{OE} = -2$

$x_C = \overline{OC} = \dfrac{9}{2}$ $\qquad$ $x_O = 0$

Para indicar que a abscissa de um ponto P é o número x_P, costuma-se escrever:

$$P(x_P)$$

Assim, no exemplo anterior temos:

$A(\sqrt{3})$ $\qquad$ $C(\frac{9}{2})$

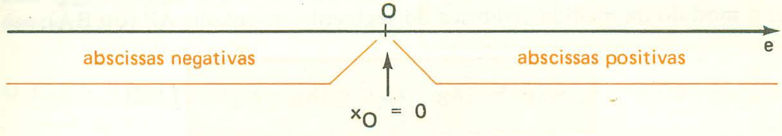
$B(3)$ $\qquad$ $D(-1)$

Com a definição de abscissa de um ponto, o que fizemos foi estabelecer uma *correspondência bijetora* entre os números reais e os pontos do eixo:

> a cada ponto do eixo corresponde um único número real
> e
> a cada número real corresponde um único ponto do eixo

Essa correspondência é chamada **sistema de coordenadas abscissas** ou simplesmente **sistema de abscissas.**

Observe que a abscissa de um ponto **P** determina por completo a posição de **P** sobre **e**. O módulo da abscissa dá a distância do ponto **P** à origem **O**; o sinal da abscissa determina em que "lado" do ponto **O** está situado o ponto **P**; se a abscissa é positiva, o ponto **P** está situado a "caminho" do sentido positivo com respeito a **O**; se a abscissa é negativa, o ponto **P** está situado a "caminho" do sentido negativo com respeito a **O**; se a abscissa é zero, **P** é a origem **O**. De uma forma intuitiva, com relação à figura abaixo:



estão situados "à direita" de **O** os pontos de abscissas positivas; estão situados "à esquerda" de **O** os pontos de abscissas negativas.

É possível, agora, expressar a medida algébrica de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ através das abscissas de sua origem e de sua extremidade: consideremos dois pontos A e B de abscissas x_A e x_B respectivamente. É fácil perceber (fig. 1.7) que:

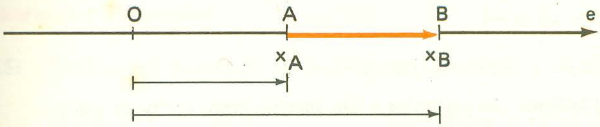


Fig. 1.7

$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

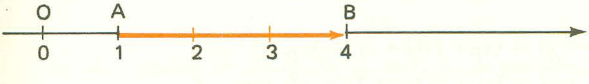
ou seja,

$$\overline{AB} = x_B - x_A \qquad (1.1)$$

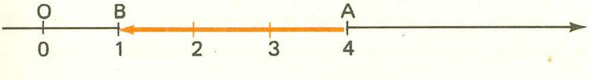
Enunciamos assim que:

> A medida algébrica de um segmento orientado é igual à diferença entre a abscissa da extremidade e a abscissa da origem do segmento.

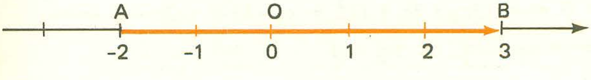
Exemplos



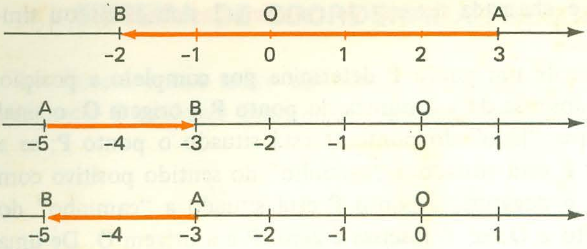
$\overline{AB} = 4 - 1 = 3$



$\overline{AB} = 1 - 4 = -3$



$\overline{AB} = (3) - (-2) = 5$



$\overline{AB} = (-2) - (3) = -5$

$\overline{AB} = (-3) - (-5) = 2$

$\overline{AB} = (-5) - (-3) = -2$

Por outro lado, se quisermos a **distância** entre os pontos A e B, basta calcular o **módulo** da medida algébrica do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ (ou $\overrightarrow{BA}$):

$$\delta_{AB} = |x_B - x_A| = |x_A - x_B| \qquad (1.2)$$

Exercícios Resolvidos

1.1) Determine a abscissa do ponto P, sabendo que $\overline{PM} = -4$ e $x_M = 7$.

Solução

$\overline{PM} = -4 \iff x_M - x_P = -4$

Como $x_M = 7$, temos: $7 - x_P = -4$

Portanto: $x_P = 11$

1.2) Sendo A, B e C pontos quaisquer pertencentes a um mesmo eixo, verifique que:

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0 \qquad \text{(Relação de Chasles)}$$

Solução

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = (x_B - x_A) + (x_C - x_B) + (x_A - x_C) =$

$= -x_A + x_A + x_B - x_B + x_C - x_C = 0$

1.3) Num eixo temos os pontos A(-1), B(2) e C(-3). Calcule a abscissa do ponto P (do mesmo eixo) tal que:

$$\overline{AP} \cdot \overline{AB} + \overline{BP} \cdot \overline{CP} + \overline{AC} = 0$$

Solução

$\overline{AP} \cdot \overline{AB} = (x_P - x_A)(x_B - x_A) = (x_P + 1)(2 + 1) = 3x_P + 3$

$\overline{BP} \cdot \overline{CP} = (x_P - x_B)(x_P - x_C) = (x_P - 2)(x_P + 3) = x_P^2 + x_P - 6$

$\overline{AC} = x_C - x_A = -3 + 1 = -2$

Assim:

$\overline{AP} \cdot \overline{AB} + \overline{BP} \cdot \overline{CP} + \overline{AC} = 0 \iff (3x_P + 3) + (x_P^2 + x_P - 6) + (-2) = 0 \iff$

$\iff x_P^2 + 4x_P - 5 = 0 \iff x_P = -5$ ou $x_P = 1$

1.4) Sejam A(-7) e B(4) pontos de um mesmo eixo. Determine a abscissa do ponto P do mesmo eixo tal que:

a) $\delta_{AP} = 2\delta_{BP}$ b) $\delta_{AP} < 3x_B$

Solução

Temos:

$$\begin{cases} \delta_{AP} = |x_P - x_A| = |x_P + 7| \\ \delta_{BP} = |x_P - x_B| = |x_P - 4| \end{cases}$$

Utilizando as *propriedades do módulo* recordadas no quadro ao lado, podemos escrever:

Sendo x, y, a $\in \mathbb{R}$ e $a \geqslant 0$, temos:

$|x| = a \iff x = a$ ou $x = -a$

$|x| = |y| \iff x = y$ ou $x = -y$

$|x| < a \iff -a < x < a$

$|x| > a \iff x > a$ ou $x < -a$

a) $\delta_{AP} = 2\delta_{BP} \iff |x_P + 7| = 2|x_P - 4| \iff |x_P + 7| = |2x_P - 8| \iff$

$\iff x_P + 7 = 2x_P - 8$ ou $x_P + 7 = -(2x_P - 8) \iff$

$\iff x_P = 15$ ou $x_P = \frac{1}{3}$

b) $\delta_{AP} < 3x_B \iff |x_P + 7| < 3 \cdot 4 \iff -12 < x_P + 7 < 12 \iff$

$\iff -19 < x_P < 5$

Exercícios Propostos

1.5) Sendo A e B pontos de um mesmo eixo, determine a abscissa de A nos seguintes casos:

a) $x_B = 4$ e $\overline{AB} = -1$ b) $x_B = -5$ e $\overline{AB} = \frac{3}{2}$

1.6) Os pontos A(-3), B(2) e C(-1) pertencem a um mesmo eixo. Determine a abscissa do ponto P desse eixo em cada caso:

a) $\overline{AP} + \overline{AC} + \overline{BP} = 0$ b) $\overline{AP} \cdot \overline{PB} = 6$

1.7) Sendo M(-5) e R(3) pontos de um mesmo eixo, determine a abscissa do ponto A tal que:

a) $\delta_{MA} = 4\delta_{AR}$ b) $\delta_{MA} < 2\delta_{MR}$ c) $\delta_{AR} \geqslant \frac{5}{2}\delta_{MR}$

1.8) Se A(a) e B(b) são pontos de um eixo e, para os quais:

$$\overline{AB} = m \cdot \overline{BA},$$

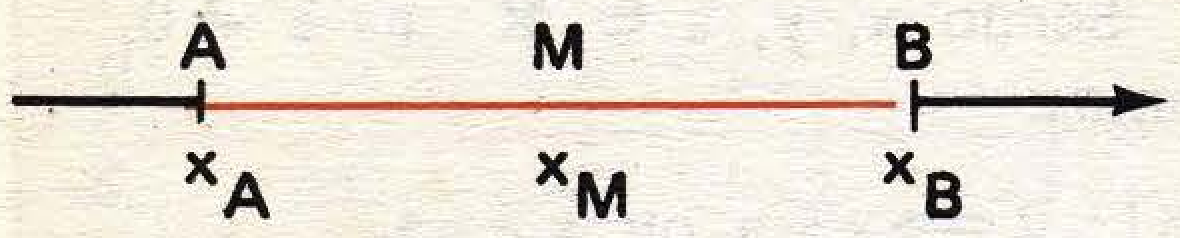
estude, segundo os valores de **m**, **m** $\in \mathbb{R}$, as posições relativas de **A** e **B**.

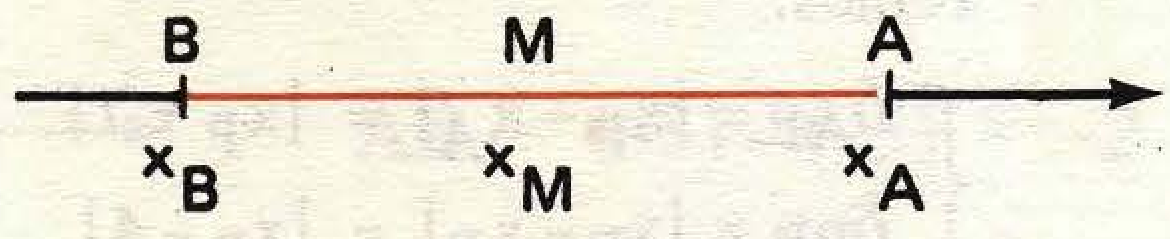
1.9) Dados n pontos, $n \geqslant 2$, de um eixo e: $P_1, P_2, \dots, P_n$, de abscissas $x_1, x_2, \dots, x_n$, respectivamente, determine a abscissa x de um ponto P do mesmo eixo tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{P_iP} = a, \quad a \in \mathbb{R}, \text{ dado.}$$

1.6 — PONTO MÉDIO

Consideremos em um eixo um segmento $\overleftrightarrow{AB}$ cujo ponto médio é M. Supondo conhecidas as abscissas de A e B, vamos calcular a abscissa de M.





Em qualquer caso teremos $\overline{AM} = \overline{MB}$.

Porém:

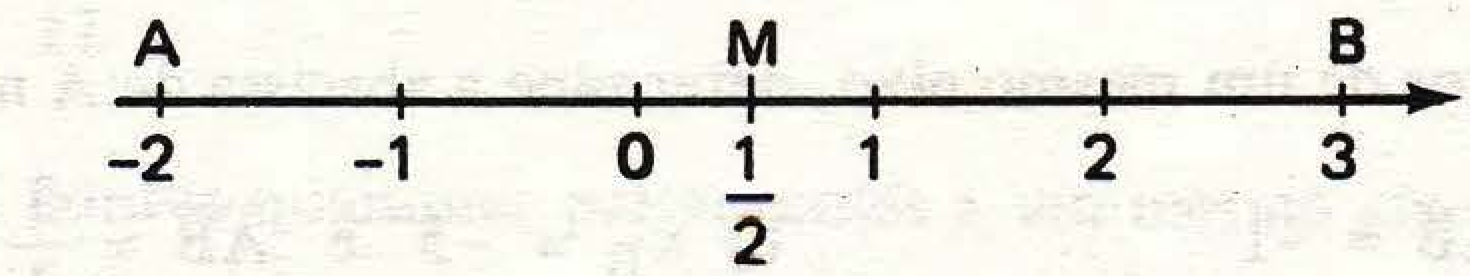
$$\overline{AM} = \overline{MB} \iff x_M - x_A = x_B - x_M \iff 2x_M = x_A + x_B$$

Portanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad (1.3)$$

Exemplo

O ponto médio (M) do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ da figura abaixo, tem abscissa dada por:



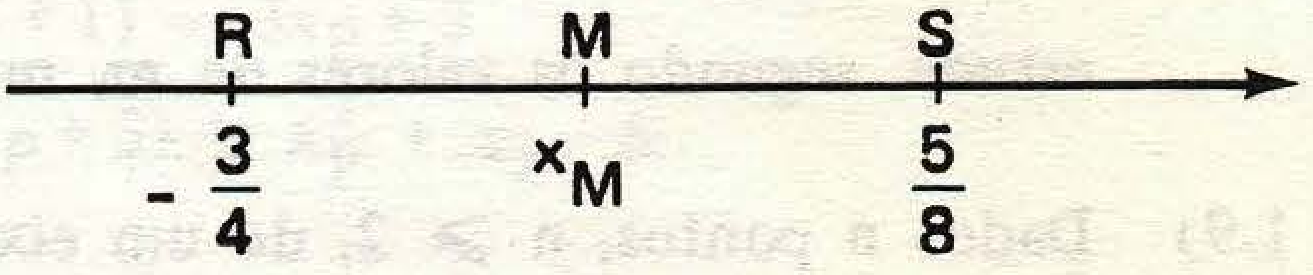
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(-2) + (3)}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercícios Resolvidos

1.10) Sendo $R(-\frac{3}{4})$ e $S(\frac{5}{8})$ pontos de um mesmo eixo, determine a abscissa do ponto médio do segmento $\overleftrightarrow{SR}$.

Solução

Sendo M o ponto médio de $\overleftrightarrow{SR}$ temos:



$$x_M = \frac{x_S + x_R}{2} = \frac{(\frac{5}{8}) + (-\frac{3}{4})}{2} = -\frac{1}{16}$$

1.11) As abscissas das extremidades do segmento $\overleftrightarrow{DE}$ são as raízes da equação $8x^2 - 6x - 5 = 0$. Sendo M o ponto médio de $\overleftrightarrow{DE}$, determine a abscissa de M.

Solução

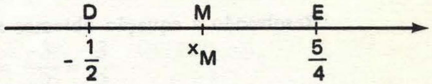
1º modo

Vamos resolver a equação $8x^2 - 6x - 5 = 0$:

$$\begin{cases} \Delta = (-6)^2 - 4(8)(-5) = 196 \\ \sqrt{\Delta} = 14 \\ x = \dfrac{6 \pm 14}{16} \begin{cases} x' = \dfrac{5}{4} \\ x'' = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Supondo $x_E > x_D$ temos:

$x_D = -\frac{1}{2}$ e $x_E = \frac{5}{4}$



Assim:

$$x_M = \frac{x_D + x_E}{2} = \frac{(-\frac{1}{2}) + (\frac{5}{4})}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$$

2º modo

Como sabemos, dada a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

onde a, b e c são reais (com $a \neq 0$), a soma das raízes é dada por:

$$x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

Os números x_D e x_E são as raízes de $8x^2 - 6x - 5 = 0$.

Portanto: $x_D + x_E = \frac{-(-6)}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

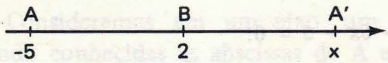
Assim: $x_M = \dfrac{x_D + x_E}{2} = \dfrac{\frac{3}{4}}{2} = \dfrac{3}{8}$

Observação: É óbvio que, resolvendo o problema por este 2º modo, devemos antes verificar se as raízes da equação proposta são reais. Para tanto, calculamos o discriminante (Δ) e desde que $\Delta \geqslant 0$, podemos garantir que as raízes são reais. No caso $\Delta = 0$ as raízes seriam iguais e o segmento $\overline{DE}$ seria o segmento nulo (os pontos D e E seriam coincidentes) e neste caso teríamos:

$$x_M = x_D = x_E$$

1.12) Os pontos A(-5) e B(2) pertencem a um mesmo eixo. Determine a abscissa do ponto simétrico de A em relação a B.

Solução



Seja $A'(x)$ o simétrico de A em relação a B. Neste caso o ponto B é o ponto médio do segmento $\overline{AA'}$ e portanto:

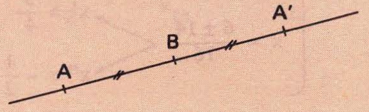
$$x_B = \frac{x_A + x_{A'}}{2}$$

ou: $$2 = \frac{(-5) + x}{2}$$

Resolvendo a equação obtemos $x = 9$.

Dados os pontos A e B, o **simétrico de A em relação a B** é o ponto A' pertencente à reta que passa por A e B, tal que:

$$\overline{AB} = \overline{BA'}$$



Exercícios Propostos

1.13) Determine a abscissa do ponto médio do segmento $\overline{AB}$, tal que $A(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $B(\frac{8}{5})$.

1.14) As abscissas das extremidades do segmento $\overline{RS}$ são as raízes da equação $x^2 - \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{5}}{7} = 0$. Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{RS}$, determine a abscissa de M.

1.15) Se M e N são pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, ambos contidos num eixo de abscissas, prove que:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$$

1.16) O ponto $M(-\frac{4}{5})$ é o ponto médio do segmento $\overline{DE}$. Sabendo que a abscissa de D é $\frac{1}{2}$, calcule a abscissa de E.

1.17) Num sistema de coordenadas abscissas temos os pontos $D(\frac{3}{2})$ e $E(7)$. Determine a abscissa do simétrico de E em relação a D.

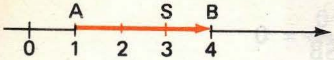
1.7 – RAZÃO DE SEÇÃO

Em um eixo e consideremos um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ (não nulo). Consideremos sobre o mesmo eixo um ponto S tal que $S \neq B$. Dizemos que:

O ponto S divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na **razão de seção r** dada por:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}$$

Exemplos

a) 

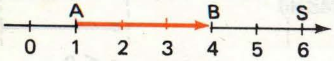
O ponto S divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão de seção r dada por:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{2}{1} = 2$$

b)

O ponto S divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão de seção r tal que:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$$

c) 

O ponto S divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão de seção r tal que:

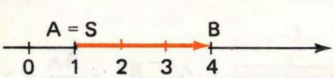
$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$$

(Repare que o ponto divisor pode estar "fora" do segmento orientado)

d)

O ponto T divide o segmento orientado $\overrightarrow{MN}$ na razão de seção r tal que:

$$r = \frac{\overline{MT}}{\overline{TN}} = \frac{-4}{1} = -4$$

e) 

O ponto S divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão de seção r tal que:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{0}{3} = 0$$

Consideremos novamente o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ (não nulo) e um ponto S que divide $\overrightarrow{AB}$ na razão $r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}$. Devemos observar que:

1º) O ponto S não pode coincidir com a extremidade do segmento orientado ($S \neq B$) pois isso faria com que o denominador $\overline{SB}$ fosse igual a zero.

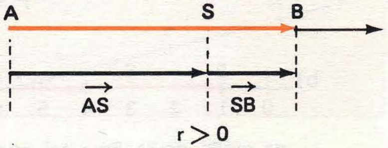
2º) O ponto S pode coincidir com a origem do segmento orientado (S = A) e neste caso teremos:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{0}{\overline{SB}} = 0$$

(Veja o exemplo e, acima.)

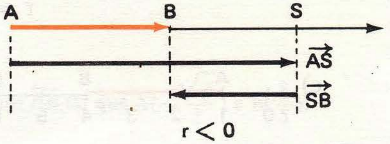
3º) Se o ponto S for interno ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, teremos $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{SB}$ com o mesmo sentido e portanto

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} > 0$$



4º) Se o ponto S for exterior ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, teremos $\overrightarrow{AS}$ e $\overrightarrow{SB}$ com sentidos opostos e portanto:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} < 0$$



5º) Se S for ponto médio de $\overrightarrow{AB}$, teremos $\overline{AS} = \overline{SB}$ e portanto:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = 1$$

6º) O valor de r não depende da orientação do eixo nem da unidade de medida adotada.

7º) Supondo $S \neq B$ temos:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} \iff r = \frac{x_S - x_A}{x_B - x_S} \iff rx_B - rx_S = x_S - x_A \iff (1 + r)x_S = x_A + rx_B$$

Admitindo $1 + r \neq 0$ temos:

$$x_S = \frac{x_A + rx_B}{1 + r} \qquad (1.4)$$

8º) A dedução da fórmula anterior nos sugere que $1 + r \neq 0$, isto é, $r \neq -1$. De fato, se tivéssemos $r = -1$:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} \iff -1 = \frac{x_S - x_A}{x_B - x_S} \iff x_A = x_B \iff A = B$$

Vemos então que para $r = -1$ o segmento $\overrightarrow{AB}$ seria nulo o que contraria a definição. Assim, a razão de seção r pode ser um número real qualquer diferente de -1.

9º) Alguns autores representam r pela notação

$$(ABS)$$

isto é:

$$(ABS) = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}$$

Assim, por exemplo, temos:

$$(MNT) = \frac{\overline{MT}}{\overline{TN}}$$

$$(RSM) = \frac{\overline{RM}}{\overline{MS}}$$

Exercícios Resolvidos

1.18) Dados os pontos $A(-\frac{3}{4})$, $B(\frac{2}{3})$ e $R(4)$, determine a razão de seção em que o ponto R divide:

a) o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$

b) o segmento orientado $\overrightarrow{BA}$

Solução

a) $$r = \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{x_R - x_A}{x_B - x_R} = \frac{4-(\frac{-3}{4})}{\frac{2}{3} - 4} = \frac{-57}{40}$$

b) $$r = \frac{\overline{BR}}{\overline{RA}} = \frac{x_R - x_B}{x_A - x_R} = \frac{4 - \frac{2}{3}}{-\frac{3}{4} - 4} = -\frac{40}{57}$$

1.19) Dados M(−5) e N(4), determine a abscissa do ponto R que divide o segmento orientado $\overrightarrow{NM}$ na razão $r = -\frac{2}{3}$.

Solução

1º modo

De acordo com a definição temos:

$$r = \frac{\overline{NR}}{\overline{RM}} \text{ e portanto:}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{x_R - x_N}{x_M - x_R} \text{ ou ainda:}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{x_R - 4}{-5 - x_R}$$

Resolvendo esta equação obtemos:

$$x_R = 22$$

2º modo

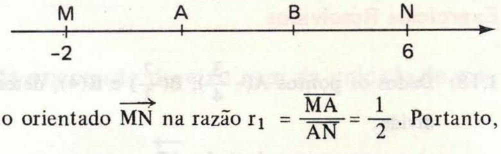
Podemos usar diretamente a equação 1.4:

$$x_R = \frac{x_N + rx_M}{1 + r} = \frac{4 + (-\frac{2}{3})(-5)}{1 + (-\frac{2}{3})} = 22$$

1.20) Sendo M(-2) e N(6) determine as abscissas dos pontos que dividem o segmento $\overline{MN}$ em três partes de mesmo comprimento.

Solução

Sejam A e B os pontos procurados.



O ponto A divide o segmento orientado $\overrightarrow{MN}$ na razão $r_1 = \frac{\overline{MA}}{\overline{AN}} = \frac{1}{2}$. Portanto, de acordo com a fórmula temos:

$$x_A = \frac{x_M + r_1 x_N}{1 + r_1} = \frac{-2 + (\frac{1}{2})(6)}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

O ponto B divide o segmento orientado $\overrightarrow{MN}$ na razão $r_2 = \frac{\overline{MB}}{\overline{BN}} = 2$. Portanto:

$$x_B = \frac{x_M + r_2 x_N}{1 + r_2} = \frac{-2 + (2)(6)}{1 + 2} = \frac{10}{3}$$

O ponto B também pode ser obtido observando-se que ele é o ponto médio de $\overline{AN}$. Assim:

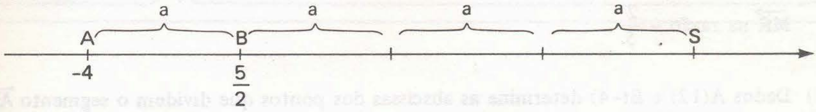
$$x_B = \frac{x_A + x_N}{2} = \frac{\frac{2}{3} + 6}{2} = \frac{10}{3}$$

1.21) Dados A(-4) e $B(\frac{5}{2})$, determine até que ponto o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ deve ser prolongado (no mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$) de modo que seu comprimento fique quadruplicado.

Solução

1º modo

Seja S o ponto procurado.



De acordo com o que pede o problema, devemos ter:

$$\overline{AS} = 4\overline{AB}$$

isto é: $x_S - x_A = 4(x_B - x_A)$

Substituindo os valores conhecidos obtemos a equação

$$x_S - (-4) = 4\left[\frac{5}{2} - (-4)\right]$$

que, resolvida, nos fornece $x_S = 22$

2º modo

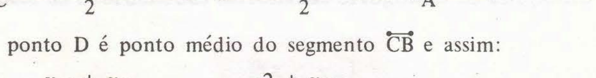
O ponto S divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ na razão $r = \frac{AS}{SB} = \frac{4a}{-3a} = -\frac{4}{3}$.

Portanto, de acordo com a fórmula temos:

$$x_S = \frac{x_A + rx_B}{1 + r} = \frac{-4 + (-\frac{4}{3})(\frac{5}{2})}{1 + (-\frac{4}{3})} = 22$$

1.22) O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é dividido em três partes de comprimentos iguais pelos pontos C(-2) e D(5). Determine as abscissas de A e B.

Solução



O ponto C é ponto médio do segmento $\overline{AD}$ e portanto:

$$x_C = \frac{x_A + x_D}{2} \iff -2 = \frac{x_A + 5}{2} \iff x_A = -9$$

O ponto D é ponto médio do segmento $\overline{CB}$ e assim:

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} \iff 5 = \frac{-2 + x_B}{2} \iff x_B = 12$$

Exercícios Propostos

1.23) Sendo $R(\frac{4}{3})$, $S(-\frac{2}{5})$ e $T(4)$, determine a razão de seção em que o ponto T divide o segmento orientado $\overrightarrow{RS}$.

1.24) Dados $M(\frac{2}{3})$ e $R(-4)$ determine a abscissa do ponto que divide o segmento orientado $\overrightarrow{MR}$ na razão $-\frac{2}{5}$.

1.25) Dados A(12) e B(−4) determine as abscissas dos pontos que dividem o segmento $\overline{AB}$ em 4 partes de mesmo comprimento.

1.26) Sendo $D(\frac{5}{2})$ e $E(-\frac{4}{3})$, até que ponto deve ser prolongado o segmento orientado $\overrightarrow{DE}$ (no mesmo sentido de $\overrightarrow{DE}$) para que seu comprimento fique triplicado?

1.27) O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é dividido em 4 partes de comprimentos iguais, pelos pontos $C(\frac{-5}{2})$, $D(\frac{3}{2})$ e $E(\frac{11}{2})$. Determine as abscissas de A e B.

1.28) Sendo A(4), B(7) e C(12) determine a abscissa do ponto D que divide os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ na mesma razão.

1.29) **Divisão harmônica** – Dados os pontos A, B, C e D, distintos dois a dois, de um eixo e, diz-se que C e D **são conjugados harmônicos** com relação a A e B se:

$$(ABC) = -(ABD)$$

Dados A(a), B(b) e C(c), $a \neq b$, determine o ponto D(x) tal que C e D são conjugados harmônicos em relação a A e B.

1.30) Os quatro pontos $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(\gamma)$ e $D(\delta)$, distintos dois a dois, são tais que α e β são as raízes da equação

$$ax^2 + 2hx + b = 0$$

e γ e δ são as raízes da equação:

$$a'x^2 + 2h'x + b' = 0$$

Mostre que se $ab' + a'b = 2hh'$, então C e D são conjugados harmônicos em relação a A e B.

Capítulo

2 Coordenadas cartesianas no plano

2.1 – COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONAIS

Em um plano α, consideremos dois eixos perpendiculares **x** e **y**, cuja origem é a intersecção O, e que tenham a mesma unidade de medida. Sobre *cada um* desses eixos está estabelecido um *sistema de coordenadas abscissas*. A localização de um ponto P qualquer do plano α pode ser feita através da associação do ponto a *dois números reais* obtidos pelo seguinte processo: conduzimos por P retas paralelas aos eixos; uma delas encontra o eixo x no ponto P_1 de abscissa x_P, e a outra encontra o eixo y no ponto P_2 de abscissa y_P (figura 2.1). Os números x_P e y_P chamam-se coordenadas cartesianas ortogonais de P e diremos que

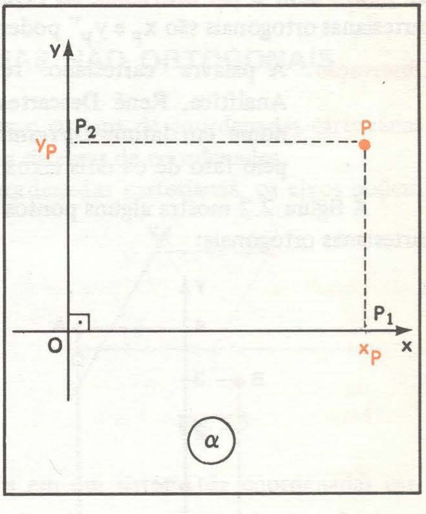


Fig. 2.1

x_P é a abscissa de P
y_P é a ordenada de P

As coordenadas do ponto P são representadas na forma de um **par ordenado**, onde x_P é a primeira componente e y_P é a segunda componente:

$$(x_P, y_P)$$

Para indicar as coordenadas cartesianas ortogonais de um ponto P escrevemos:

$$P(x_P; y_P)$$

Desse modo estabelecemos uma **correspondência bijetora** entre os **pontos do plano** e os **pares ordenados de números reais**:

A cada ponto do plano corresponde um único par ordenado de números reais

e

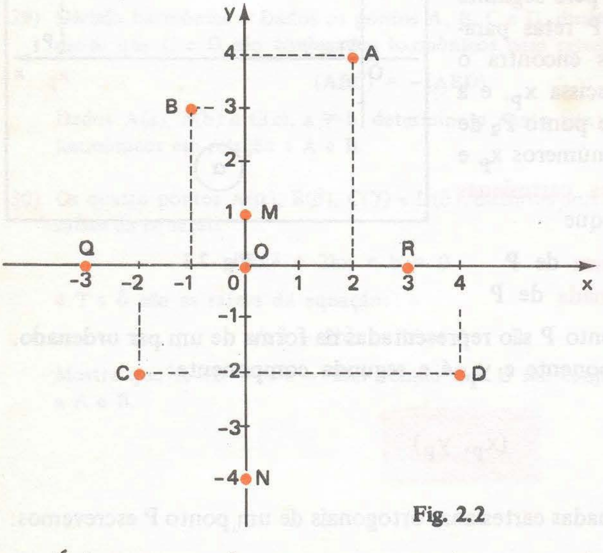
A cada par ordenado de números reais corresponde um único ponto do plano

A essa correspondência damos o nome de sistema de coordenadas cartesianas ortogonais.

O fato de existir essa correspondência justifica que façamos a identificação do ponto com o par ordenado: no lugar de dizermos "o ponto cujas coordenadas cartesianas ortogonais são x_P e y_P" podemos dizer simplesmente "o ponto $(x_P; y_P)$"

Observação: A palavra "cartesiano" refere-se ao nome do criador da Geometria Analítica, **René Descartes**, o qual assinava as obras escrevendo seu nome em latim: *Cartesius*. A palavra "ortogonal" é utilizada aqui pelo fato de os dois eixos formarem *ângulo reto*.

A figura 2.2 mostra alguns pontos do plano com suas respectivas coordenadas cartesianas ortogonais:



A (2; 4)
B (-1; 3)
C (-2; -2)
D (4; -2)
M (0; 1)
N (0; -4)
O (0; 0)
Q (-3; 0)
R (3; 0)

Fig. 2.2

É importante observar que os **pontos que pertencem ao eixo x possuem ordenada y = 0** (é o caso dos pontos **R**, **Q** e **O**), enquanto os **pontos que pertencem ao eixo y possuem abscissa x = 0** (é o caso dos pontos **M**, **N** e **O**).

Então, podemos escrever:

$$P \in x \iff P(x_P; 0)$$
$$P \in y \iff P(0; y_P)$$

O eixo **x** é chamado **eixo das abscissas** e é costume representá-lo também por Ox. O eixo **y** é chamado **eixo das ordenadas** e é costume representá-lo também por Oy.

Ox e Oy são chamados **eixos coordenados**, e o *sistema de coordenadas cartesianas* pode ser representado por Oxy.

A expressão "plano cartesiano" refere-se a um plano sobre o qual foi estabelecido um sistema de coordenadas cartesianas.

2.2 – COORDENADAS CARTESIANAS NÃO-ORTOGONAIS

Ao longo deste livro usaremos apenas o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais; porém, convém mencionar outros sistemas de coordenadas.

Ao estabelecermos um sistema de coordenadas cartesianas, os eixos podem formar um ângulo θ ($0° < \theta < 180°$, $\theta \neq 90°$). Para determinarmos as coordenadas cartesianas de um ponto P qualquer do plano traçamos, por P, paralelas aos eixos, obtendo a abscissa x_P e a ordenada y_P (ver figura 2.3).

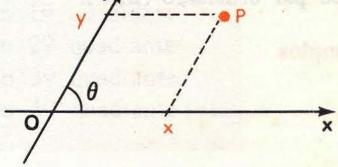


Fig. 2.3

A figura 2.4 representa alguns pontos em um sistema de coordenadas cartesianas não-ortogonais.

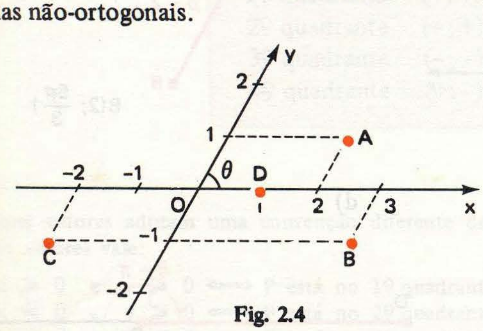


Fig. 2.4

A (2; 1)
B (3; -1)
C (-2; -1)
D (1; 0)
O (0; 0)

Quando os eixos são perpendiculares, costuma-se dizer também que temos um **sistema de coordenadas retangulares**.

2.3 – COORDENADAS POLARES

Fica estabelecido um **sistema de coordenadas polares** em um plano α, quando são escolhidos nesse plano:

1º) um ponto **O** que se chama **pólo**;

2º) um semi-eixo Ox, que é o **eixo polar**.

Dado um ponto **P**, distinto de **O**, conduzamos a reta $\overleftrightarrow{OP}$. Escolhendo uma unidade de medida, podemos calcular a distância do ponto **P** ao pólo **O**; indicamos essa distância com ρ.

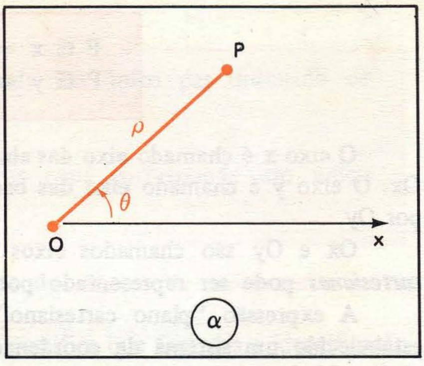


Fig. 2.5

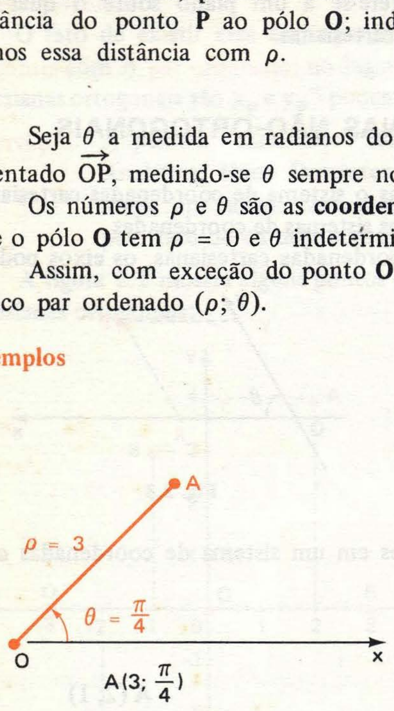
Seja θ a medida em radianos do ângulo formado por Ox e pelo segmento orientado $\overrightarrow{OP}$, medindo-se θ sempre no sentido anti-horário.

Os números ρ e θ são as **coordenadas polares** do ponto **P**. Costuma-se dizer que o pólo **O** tem $\rho = 0$ e θ indeterminado.

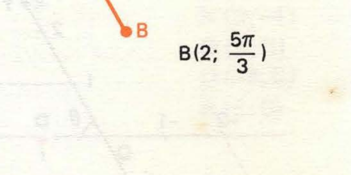
Assim, com exceção do ponto **O**, a cada ponto do plano α corresponde um único par ordenado $(\rho; \theta)$.

Exemplos

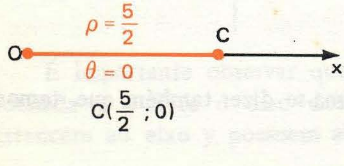
a)



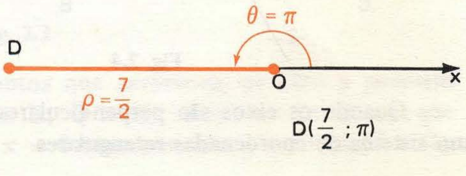
b)



c)



d)



Portanto, percebemos que há vários modos de se estabelecer um sistema de coordenadas em um plano. No entanto, conforme já dissemos, neste livro usaremos apenas o **sistema cartesiano ortogonal**. Assim sendo, daqui por diante, por uma questão de simplicidade, no lugar de dizermos "coordenadas cartesianas ortogonais", diremos apenas "coordenadas".

2.4 – QUADRANTES E BISSETRIZES

Os dois eixos do sistema cartesiano dividem o plano em quatro regiões, chamadas **quadrantes**, numeradas conforme se vê na figura 2.6. Convenciona-se que os pontos situados sobre os eixos não pertencem a nenhum dos quadrantes. É fácil ver que cada quadrante está relacionado com os **sinais das coordenadas**; dado um ponto P(x; y) do plano, temos:

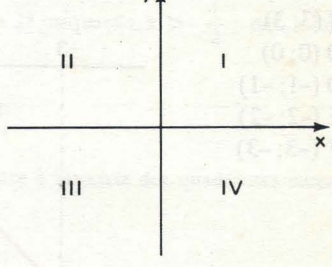


Fig. 2.6

$x > 0$ e $y > 0 \Longleftrightarrow$ P está no 1º quadrante
$x < 0$ e $y > 0 \Longleftrightarrow$ P está no 2º quadrante
$x < 0$ e $y < 0 \Longleftrightarrow$ P está no 3º quadrante
$x > 0$ e $y < 0 \Longleftrightarrow$ P está no 4º quadrante (*)

Resumo

1º quadrante	(+; +)
2º quadrante	(-; +)
3º quadrante	(-; -)
4º quadrante	(+; -)

(*) Alguns autores adotam uma convenção diferente da nossa ao definir quadrantes. Para esses autores vale:

$x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0 \Longleftrightarrow$ P está no 1º quadrante
$x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0 \Longleftrightarrow$ P está no 2º quadrante
$x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0 \Longleftrightarrow$ P está no 3º quadrante
$x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0 \Longleftrightarrow$ P está no 4º quadrante

isto é, os pontos dos eixos também fazem parte dos quadrantes.

Há um certo interesse em chamar a atenção para as **bissetrizes dos quadrantes.**

Na figura 2.7 a reta **r** é chamada bissetriz dos quadrantes ímpares. Cada ponto $P(x_P; y_P)$ dessa reta apresenta a propriedade de ter abscissa igual à ordenada, isto é, $x_P = y_P$. Por exemplo, os pontos:

A (1; 1)
B (2; 2)
C (3; 3)
O (0; 0)
D (-1; -1)
E (-2; -2)
F (-3; -3)

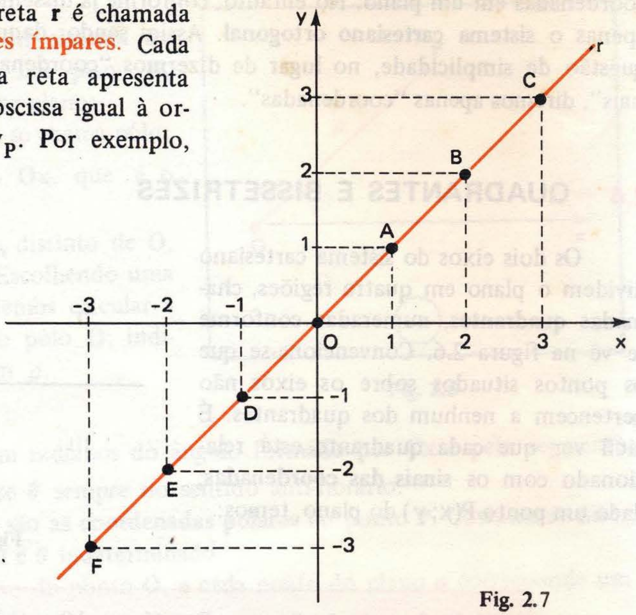


Fig. 2.7

Na figura 2.8, a reta **s** é chamada bissetriz dos quadrantes pares. Se $P(x_P; y_P)$ é um ponto qualquer dessa reta, temos $x_P = -y_P$. Por exemplo, os pontos:

A (-1; 1)
B (-2; 2)
O (0; 0)
C (1; -1)
D (2; -2)

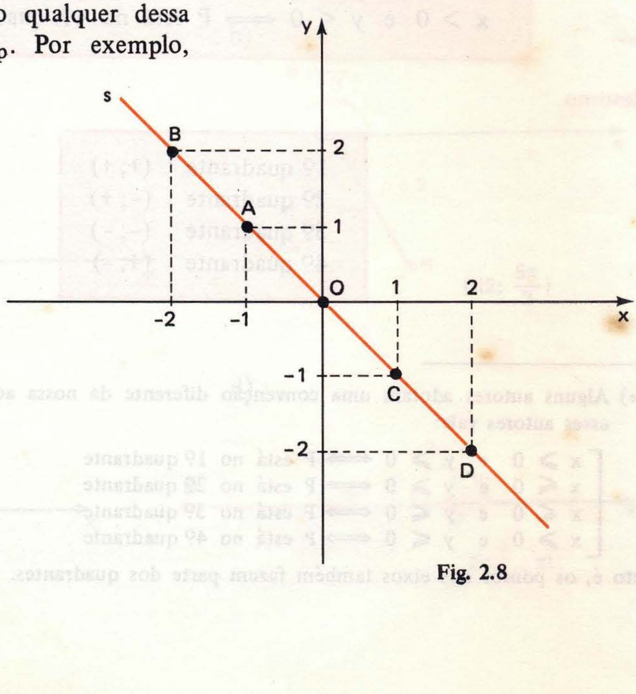


Fig. 2.8

2.1) Determine **k** para que o ponto $B(k^2 - 1; 2k + 1)$ pertença ao *2º quadrante.*

Solução

Para que o ponto **B** pertença ao 2º quadrante deve-se ter $x_B < 0$ e $y_B > 0$:

$$\begin{cases} k^2 - 1 < 0 \\ \text{e} \\ 2k + 1 > 0 \end{cases}$$

A 1ª inequação dá-nos $-1 < k < 1$ e a 2ª inequação, $k > -\frac{1}{2}$; daí, a interseção das duas condições dá-nos a resposta:

$$-\frac{1}{2} < k < 1$$

2.2) Sabe-se que o ponto $A(3k - 1; 2 - k)$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares de um plano cartesiano. Determine o valor de k.

Solução

Conforme vimos, se um ponto $A(x; y)$ pertence à bissetriz dos quadrantes pares, devemos ter $x = -y$. Assim, para que $A(3k - 1; 2 - k)$ pertença à bissetriz dos quadrantes pares:

$$3k - 1 = -(2 - k)$$

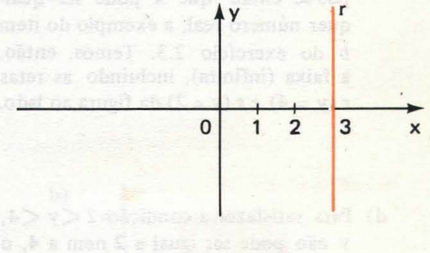
Resolvendo esta equação, obtemos $k = -\frac{1}{2}$

2.3) Represente no plano os pontos $P(x; y)$ tais que:

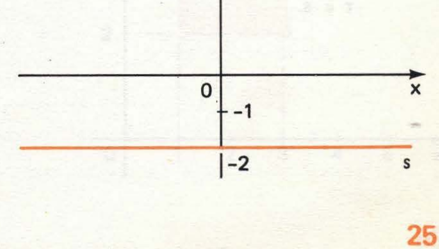
a) $x = 3$ b) $y = -2$

Solução

a) Observe que desejamos todos os pontos da forma $P(3; y)$, de abscissa 3 para qualquer valor da ordenada **y**; os pontos estão sobre a reta **r**, *vertical*, indicada na figura:



b) Os pontos desejados são da forma $P(x; -2)$, de ordenada -2 para qualquer valor da abscissa **x**; os pontos estão sobre a reta **s**, *horizontal*, indicada na figura.



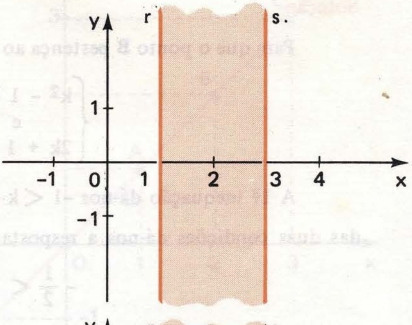
2.4) Represente no plano os pontos (x; y) tais que:

a) $1 \leqslant x \leqslant 3$ c) $2 \leqslant y \leqslant 4$

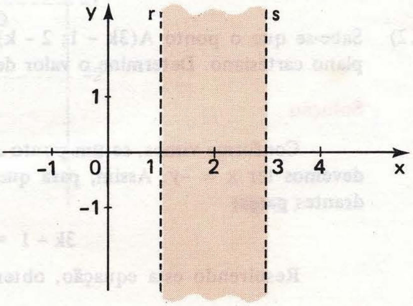
b) $1 < x < 3$ d) $2 < y < 4$

Solução

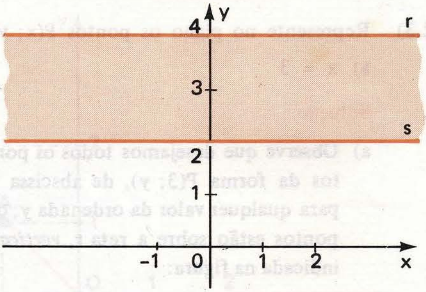
a) Como o problema, a exemplo do que ocorreu no item *a* do exercício anterior, dá-nos apenas a condição para as abscissas dos pontos ($1 \leqslant x \leqslant 3$), consideramos a ordenada y como qualquer número real. Portanto, os pontos (x; y) que satisfazem a condição $1 \leqslant x \leqslant 3$ estão na faixa (infinita) indicada em vermelho no desenho ao lado, incluindo as retas *r* (x = 1) e *s* (x = 3).



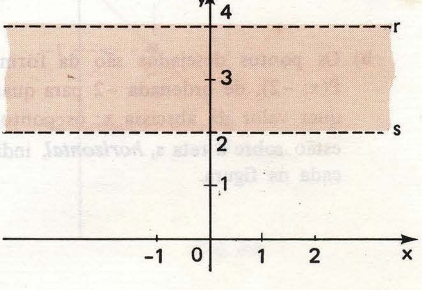
b) Os pontos (x; y) que satisfazem a condição $1 < x < 3$ estão na faixa (infinita) indicada ao lado; porém neste caso, x não pode ser igual a 1 nem a 3, o que é indicado "tracejando" as retas r e s, isto é, as retas r e s não fazem parte da região procurada.



c) Queremos neste caso os pontos (x; y) que satisfazem a condição $2 \leqslant y \leqslant 4$, isto é, não é feita menção a x. Supõe-se então que x pode ser qualquer número real, a exemplo do item *b* do exercício 2.3. Temos, então, a faixa (infinita), incluindo as retas *r* (y = 4) e *s* (y = 2) da figura ao lado.



d) Para satisfazer a condição $2 < y < 4$, y não pode ser igual a 2 nem a 4, o que é indicado tracejando as retas r e s.

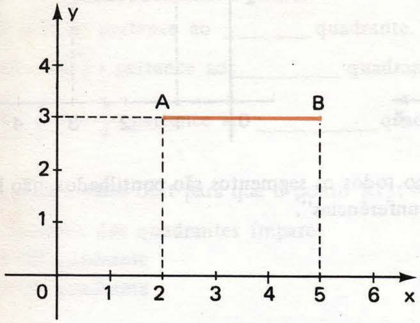


2.5) Represente no plano, os pontos (x; y) tais que:

a) $2 \leqslant x \leqslant 5$ e $y = 3$
b) $2 < x < 5$ e $y = 3$

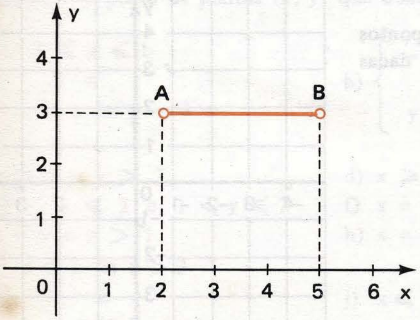
Solução

a)



Os pontos que satisfazem a condição dada, estão sobre o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ marcado em vermelho no desenho.

b)



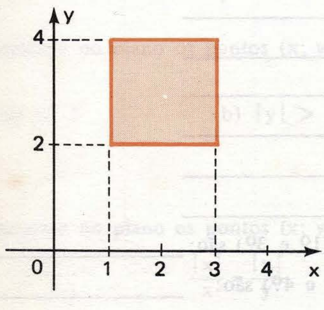
Neste caso queremos $2 < x < 5$, isto é, x não pode ser igual a **2** nem a **5**, o que é indicado colocando nas extremidades do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ "pequenas circunferências". Isto significa que as extremidades A e B não satisfazem a condição dada.

2.6) Represente no plano os pontos (x; y) tais que:

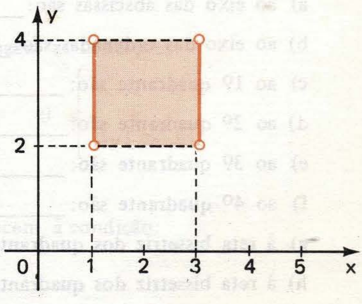
a) $1 \leqslant x \leqslant 3$ e $2 \leqslant y \leqslant 4$
b) $1 \leqslant x \leqslant 3$ e $2 < y < 4$
c) $1 < x < 3$ e $2 < y < 4$
d) $1 \leqslant x \leqslant 3$ e $2 < y \leqslant 4$

Solução

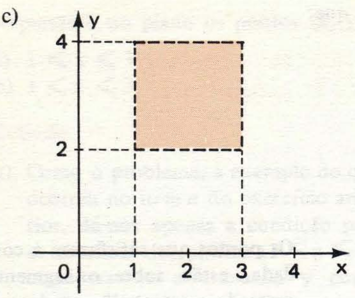
a)



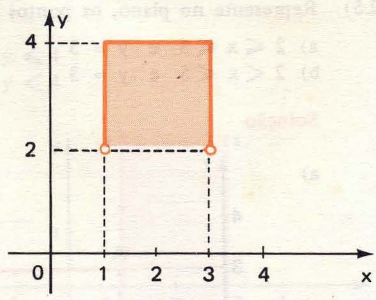
b)



c)



d)

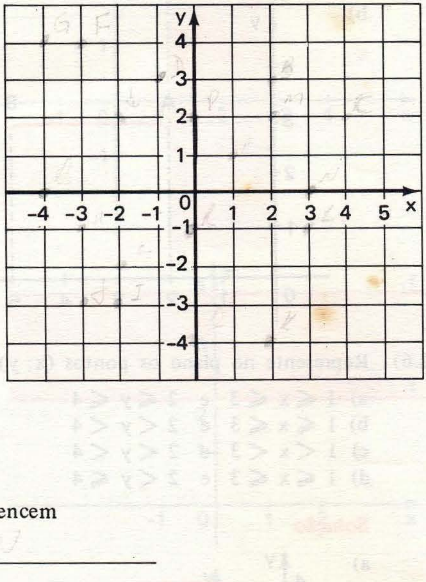


Repare que no caso c, como todos os segmentos são pontilhados, não há necessidade de recorrer às "pequenas circunferências".

Exercícios Propostos

2.7) Assinale no gráfico ao lado os pontos cujas coordenadas cartesianas são dadas a seguir:

A(1; 1)	J(-3; -3)
B(2; 3)	K(2; -4)
C(4; 2)	L(3; -1)
D(-1, 3)	M(2; 2)
E(-2; 2)	N(3; 0)
F(-3; 4)	P(0; 2)
G(-4; 4)	Q(-4; 0)
H(-3; -1)	R(0; -1)
I(-2; -3)	



2.8) No exercício anterior, os pontos que pertencem

a) ao eixo das abscissas são: __________

b) ao eixo das ordenadas são: __________

c) ao 1º quadrante são: __________

d) ao 2º quadrante são: __________

e) ao 3º quadrante são: __________

f) ao 4º quadrante são: __________

g) à reta bissetriz dos quadrantes ímpares (1º e 3º) são: __________

h) à reta bissetriz dos quadrantes pares (2º e 4º) são: __________

2.9) Complete:

a) Todo ponto pertencente ao eixo das abscissas tem ____________ nula.

b) Todo ponto pertencente ao eixo das ordenadas tem ____________ nula.

c) M(-4; 5) pertence ao ________ quadrante.

d) $K(\sqrt{2}; 3)$ pertence ao ________ quadrante.

e) $L(5; -\sqrt{3})$ pertence ao ________ quadrante.

f) $N(-\frac{7}{2}; -\frac{9}{4})$ pertence ao ________ quadrante.

2.10) Determine o valor de **t** para que o ponto R(3t - 2; 8t + 4) pertença:

a) à bissetriz dos quadrantes ímpares

b) ao 3º quadrante

c) ao 2º quadrante

2.11) Represente no plano os pontos (x; y) que obedecem às condições:

a) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 1 \\ \text{e} \\ y = 1 \text{ ou } y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ \text{e} \\ y = 1 \text{ ou } y = 3 \end{cases}$

c) $x \geqslant 1$ e $y \geqslant 2$

d) $x \geqslant 1$ e $y > 2$

e) $-2 < x \leqslant 3$ e $1 < y \leqslant 2$

f) $x = y$

g) $x = y$ e $y > 1$

h) $x = -y$ e $x \leqslant 4$

i) $\begin{cases} x \leqslant 1 \text{ ou } x > 3 \\ \text{e} \\ y > 1 \end{cases}$

j) $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$

2.12) Represente no plano os pontos (x; y) que satisfazem a condição:

$$x \cdot y = 0$$

2.13) Represente no plano os pontos (x; y) que satisfazem a condição:

$$y^2 = x^2$$

2.14) Represente no plano os pontos (x; y) que satisfazem as condições:

a) $|x| < 3$

b) $|y| > 1$

c) $\begin{cases} x < -1 \\ \text{e} \\ |y| > 1 \end{cases}$

2.15) Represente no plano os pontos (x; y) que obedecem à condição:

$$\frac{|x|}{x} = \frac{|y|}{y}$$

2.5 – PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Inicialmente, consideremos um segmento $\overleftrightarrow{AB}$ não paralelo a nenhum dos eixos coordenados, e seja M o ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$ (ver figura 2.9). É fácil concluir que os triângulos AMD e MBE são congruentes e, portanto:

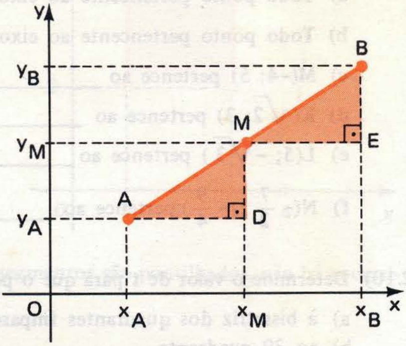


Fig. 2.9

$$\overline{AD} = \overline{ME} \text{ e } \overline{DM} = \overline{EB}$$

$$x_D - x_A = x_E - x_M \text{ e } y_M - y_D = y_B - y_E$$

Mas: $x_D = x_M,\ x_E = x_B,\ y_D = y_A,\ y_E = y_M$

Assim: $x_M - x_A = x_B - x_M$ e $y_M - y_A = y_B - y_M$

Portanto:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \qquad (2.1)$$

É fácil também verificar que estas fórmulas se aplicam aos casos em que o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ é paralelo a um dos eixos (figuras 2.10 e 2.11).

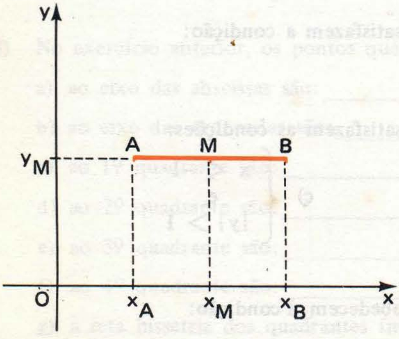


Fig. 2.10

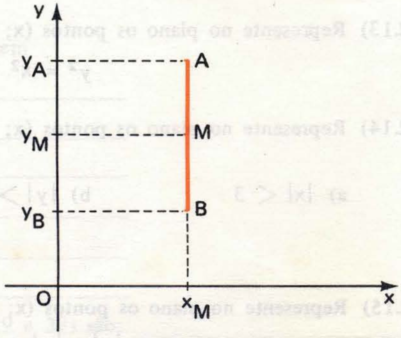


Fig. 2.11

2.6 – DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Consideremos inicialmente dois pontos distintos A e B, tais que o segmento $\overline{AB}$ não seja paralelo a nenhum dos eixos.

A distância entre os pontos A e B, conforme convencionamos no capítulo 1, será indicada por

δ_{AB}

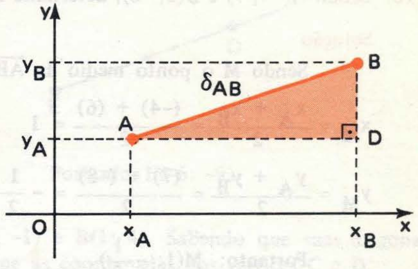


Fig. 2.12

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABD temos:

$$\delta_{AB}^2 = \delta_{AD}^2 + \delta_{DB}^2$$

Porém: $\begin{cases} \delta_{AD} = |x_D - x_A| = |x_B - x_A| \\ \delta_{DB} = |y_B - y_D| = |y_B - y_A| \end{cases}$

Assim: $\delta_{AB}^2 = |x_B - x_A|^2 + |y_B - y_A|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

Finalmente:

$$\delta_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad (2.2)$$

Observe que a fórmula (2.2) também poderia ser escrita:

$$\delta_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

pois $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$ e $(y_B - y_A)^2 = (y_A - y_B)^2$

Para os casos em que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos (figura 2.13), é fácil verificar que a fórmula 2.2 continua válida.

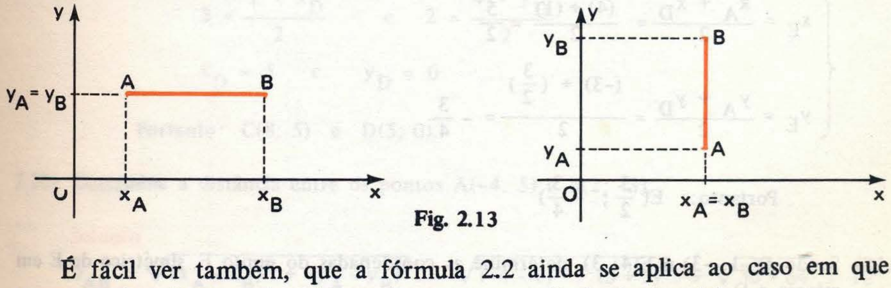


Fig. 2.13

É fácil ver também, que a fórmula 2.2 ainda se aplica ao caso em que os pontos A e B são coincidentes (neste caso a distância é nula).

Exercícios Resolvidos

2.16) Sendo A(-4; 7) e B(6; -8), determine as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Solução

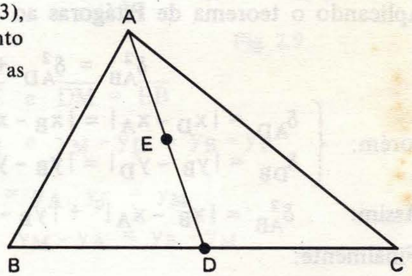
Sendo M o ponto médio de $\overline{AB}$ temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(-4) + (6)}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{(7) + (-8)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Portanto: $M(1; -\frac{1}{2})$.

2.17) Para um triângulo ABC temos A(4; -3), B(7; -1) e C(-5; 4). Sendo E o ponto médio da mediana $\overline{AD}$, determine as coordenadas de E.



Solução

Se $\overline{AD}$ é mediana, o ponto D é ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e, portanto:

$$\begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{(7) + (-5)}{2} = 1 \\ y_D = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{(-1) + (4)}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \qquad D(1; \frac{3}{2})$$

Se E é ponto médio de $\overline{AD}$, temos:

$$\begin{cases} x_E = \dfrac{x_A + x_D}{2} = \dfrac{(4) + (1)}{2} = \dfrac{5}{2} \\ y_E = \dfrac{y_A + y_D}{2} = \dfrac{(-3) + (\frac{3}{2})}{2} = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Portanto: $E(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4})$

2.18) Sendo D(-1; -3) e E(4; 3), determine as coordenadas do ponto F, simétrico de E em relação a D.

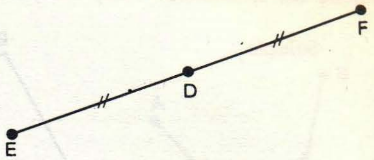
Solução

O ponto D deve ser médio do segmento $\overline{EF}$. Portanto:

$$x_D = \frac{x_E + x_F}{2} \quad e \quad y_D = \frac{y_E + y_F}{2}$$

$$-1 = \frac{4 + x_F}{2} \quad e \quad -3 = \frac{3 + y_F}{2}$$

$$x_F = -6 \quad e \quad y_F = -9$$

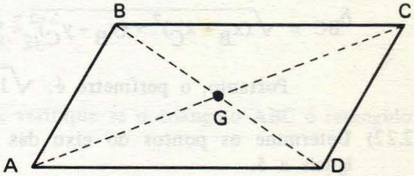


Portanto: F(-6; -9)

2.19) Num paralelogramo ABCD temos A(-2; -1) e B(1; 4). Sabendo que suas diagonais encontram-se no ponto G(3; 2), determine as coordenadas dos vértices C e D.

Solução

Como sabemos, em um paralelogramo as diagonais cortam-se ao meio, isto é, o ponto G deve ser ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.



Se G é ponto médio de $\overline{AC}$ temos:

$$x_G = \frac{x_A + x_C}{2} \quad e \quad y_G = \frac{y_A + y_C}{2}$$

$$3 = \frac{-2 + x_C}{2} \quad e \quad 2 = \frac{-1 + y_C}{2}$$

$$x_C = 8 \quad e \quad y_C = 5$$

Do mesmo modo, se G é ponto médio de $\overline{BD}$ temos:

$$x_G = \frac{x_B + x_D}{2} \quad e \quad y_G = \frac{y_B + y_D}{2}$$

$$3 = \frac{1 + x_D}{2} \quad e \quad 2 = \frac{4 + y_D}{2}$$

$$x_D = 5 \quad e \quad y_D = 0$$

Portanto: C(8; 5) e D(5; 0).

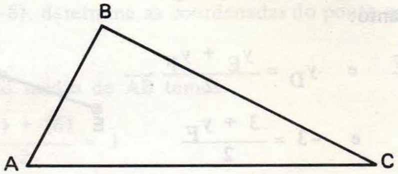
2.20) Determine a distância entre os pontos A(-4, 5) e B(2; -3).

Solução

$$\delta_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (5 + 3)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

2.21) Calcule o perímetro do triângulo ABC, sendo A(2; 2), B(5; 4) e C(3; 6).

Solução



$$\delta_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{13}$$

$$\delta_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{17}$$

$$\delta_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{8}$$

Portanto, o perímetro é: $\sqrt{13} + \sqrt{17} + \sqrt{8}$

2.22) Determine os pontos do eixo das abscissas, cujas distâncias ao ponto A(2; 3) são iguais a 5.

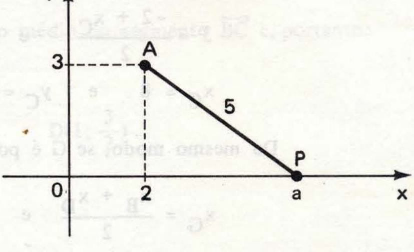
Solução

Seja P(a; b) um ponto genérico cuja distância a A é igual a 5. Se P está no eixo das abscissas, sua ordenada deve ser nula; assim temos b = 0 e podemos escrever P(a; 0).

Como $\delta_{PA} = 5$ temos:

$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = 5$ ou

$\sqrt{(a-2)^2 + (0-3)^2} = 5$



Elevando ao quadrado:

$(a-2)^2 + 9 = 25$

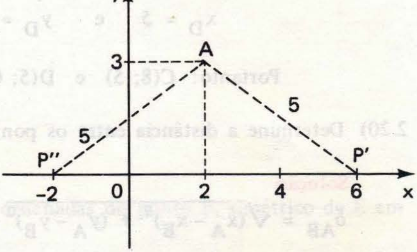
$(a-2)^2 = 16$

Portanto:

$a - 2 = 4$ ou $a - 2 = -4$

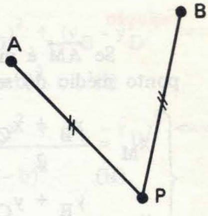
$a = 6$ ou $a = -2$

Assim, temos dois pontos satisfazendo a condição dada: P'(6; 0) e P''(-2; 0).



2.23) Determine o ponto da bissetriz dos quadrantes pares que é eqüidistante dos pontos A(-1; -4) e B(4; 3).

Solução



Seja P o ponto procurado. Se P está na bissetriz dos quadrantes pares, suas coordenadas devem ser simétricas, isto é, devemos ter: P(a; -a).

Por outro lado, P é eqüidistante de A e B, isto é,

$$\delta_{PA} = \delta_{PB}$$

$$\sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2}$$

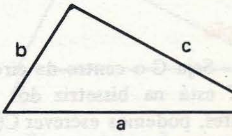
$$(a + 1)^2 + (-a + 4)^2 = (a - 4)^2 + (-a - 3)^2$$

Resolvendo esta equação, obtemos a = -2

Portanto, o ponto procurado é: P(-2; 2).

2.24) Sabendo que A(-1; 2), B(3; 1) e C(6; 4), verifique se o triângulo ABC é retângulo, acutângulo ou obtusângulo.

Solução



Lembremo-nos primeiramente de que, dado um triângulo cujos lados medem a, b e c, supondo que a seja a medida do maior lado vale a propriedade:

$a^2 = b^2 + c^2 \iff$ o triângulo é retângulo

$a^2 < b^2 + c^2 \iff$ o triângulo é acutângulo

$a^2 > b^2 + c^2 \iff$ o triângulo é obtusângulo

Considerando então o triângulo ABC temos:

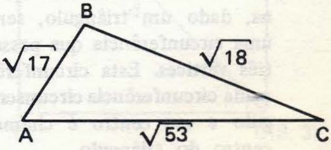
$$\delta^2_{AB} = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (-1 - 3)^2 + (2 - 1)^2 = 17$$

$$\delta^2_{AC} = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = (-1 - 6)^2 + (2 - 4)^2 = 53$$

$$\delta^2_{BC} = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = (3 - 6)^2 + (1 - 4)^2 = 18$$

Observamos que $\overline{AC}$ é o maior lado e que:

$$\delta^2_{AC} > \delta^2_{AB} + \delta^2_{BC}$$

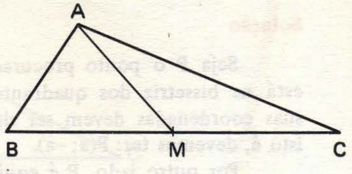


Isto é: 53 > 17 + 18.

Portanto o triângulo é obtusângulo.

2.25) Calcule o comprimento da mediana $\overline{AM}$ de um triângulo cujos vértices são $A(-3; \frac{3}{2})$, $B(1; 5)$ e $C(6; -1)$.

Solução



Se $\overline{AM}$ é mediana, o ponto M é ponto médio do segmento $\overline{BC}$:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{1+6}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$$

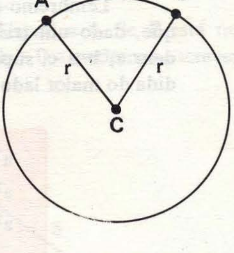
Assim: $M(\frac{7}{2}; 2)$

$$\delta_{AM} = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} = \sqrt{(-3 - \frac{7}{2})^2 + (\frac{3}{2} - 2)^2} = \sqrt{\frac{169}{4} + \frac{1}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{170}{4}} = \frac{\sqrt{170}}{2}$$

2.26) O centro de uma circunferência está sobre a reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Sabendo que a circunferência passa pelos pontos $A(-5; 2)$ e $B(-3; -2)$, determine o seu raio.

Solução



Seja C o centro da circunferência. Se C está na bissetriz dos quadrantes ímpares, podemos escrever C(a; a). Além disso devemos ter $\delta_{AC} = \delta_{BC}$:

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2$$

$$(-5 - a)^2 + (2 - a)^2 = (-3 - a)^2 + (-2 - a)^2$$

Resolvendo esta equação, obtemos: $a = 3$.

Assim: $C(3; 3)$.

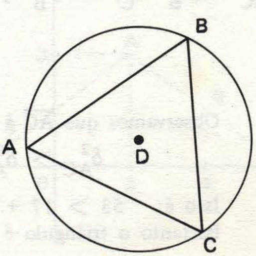
Agora, para obtermos o raio da circunferência, basta calcularmos a distância de um ponto qualquer da circunferência ao seu centro:

$$r = \delta_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-5-3)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{65}$$

2.27) Sendo $A(-2; 1)$, $B(3; 2)$ e $C(1; -4)$, determine o circuncentro do triângulo ABC.

Solução

Como sabemos da Geometria Plana, dado um triângulo, sempre existe uma circunferência que passa pelos seus três vértices. Esta circunferência é chamada **circunferência circunscrita ao triângulo** e seu centro é chamado **circuncentro do triângulo.**



Seja D(a; b) o circuncentro procurado. Devemos ter:

$$\delta_{AD} = \delta_{BD} = \delta_{CD}$$

$$\begin{cases} \delta_{AD} = \delta_{BD} \iff (x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2 = (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 \iff \\ \iff (-2-a)^2 + (1-b)^2 = (3-a)^2 + (2-b)^2 \quad \text{(I)} \\ \delta_{BD} = \delta_{CD} \iff (x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2 = (x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 \iff \\ \iff (3-a)^2 + (2-b)^2 = (1-a)^2 + (-4-b)^2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Simplificando as equações (I) e (II) obtemos:

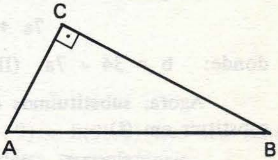
$$\begin{cases} \text{(I)} & 5a + b = 4 \\ \text{(II)} & 4a + 6b = -2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema chega-se a: $a = 1$ e $b = -1$

Assim: D(1; -1).

2.28) Calcule o valor de a de modo que o triângulo ABC, de vértices A(a; 4), B(-7; 2a - 1) e C(0; 0) seja retângulo em C.

Solução



Para que o triângulo seja retângulo em C devemos ter:

$$\delta^2_{AB} = \delta^2_{AC} + \delta^2_{BC}$$

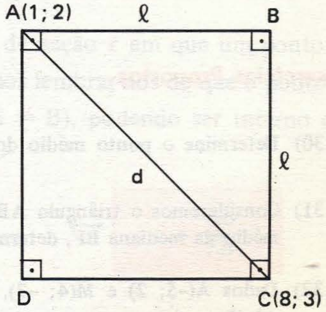
$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2$$

$$(a+7)^2 + (4 - 2a + 1)^2 = (a-0)^2 + (4-0)^2 + (-7-0)^2 + (2a - 1 - 0)^2$$

Resolvendo esta equação obtemos: $a = 4$.

2.29) Num quadrado ABCD, os vértices A(1; 2) e C(8; 3) são extremos de uma das diagonais. Determine os outros dois vértices.

Solução



Sendo d o comprimento da diagonal $\overline{AC}$ temos:

$$d = \delta_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} =$$
$$= \sqrt{(1-8)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{50}$$

Supondo que a medida do lado do quadrado seja ℓ temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

ou $d = \ell\sqrt{2}$

donde: $\ell = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 5$

Assim, devemos ter: $\delta_{BA} = \delta_{BC} = 5$ e $\delta_{DA} = \delta_{DC} = 5$. Como essas condições são iguais para B e D, equacionemos apenas uma vez; seja B(a; b):

$$\begin{cases} \delta_{BA} = 5 \iff \delta_{BA}^2 = 25 \iff (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = 25 \iff \\ \iff (a-1)^2 + (b-2)^2 = 25 \quad \text{(I)} \\ \delta_{BC} = 5 \iff \delta_{BC}^2 = 25 \iff (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 25 \iff \\ \iff (a-8)^2 + (b-3)^2 = 25 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Simplificando as equações (I) e (II):

$$\begin{cases} \text{(I)} \quad a^2 + b^2 - 2a - 4b = 20 \\ \text{(II)} \quad a^2 + b^2 - 16a - 6b = -48 \end{cases}$$

Para resolver este sistema, o modo mais simples é, em primeiro lugar, subtrair "membro a membro" as duas equações:

$$(a^2 + b^2 - 2a - 4b) - (a^2 + b^2 - 16a - 6b) = 20 - (-48)$$

Simplificando esta última vem:

$$7a + b = 34$$

donde: $b = 34 - 7a$ (III)

Agora, substituímos esse valor de **b** em uma das duas equações acima. Vamos substituir em (I):

$$a^2 + b^2 - 2a - 4b = 20$$
$$a^2 + (34 - 7a)^2 - 2a - 4(34 - 7a) = 20$$

Desenvolvendo, chegamos a:

$$a^2 - 9a + 20 = 0$$

cujas raízes são: $a' = 4$ e $a'' = 5$

Substituindo na equação (III) temos:

$$\begin{cases} a = 4 \iff b = 34 - 7(4) = 6 \\ a = 5 \iff b = 34 - 7(5) = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} (4;6) \\ (5;-1) \end{cases}$$

Assim, os outros dois vértices são (4; 6) e (5; –1).

Exercícios Propostos

2.30) Determine o ponto médio do segmento $\overline{EF}$, sendo E(4; –5) e F($\frac{3}{2}$; $\frac{11}{2}$).

2.31) Consideremos o triângulo ABC tal que A(2; 3), B(5; 4) e C(7; –1). Sendo M o ponto médio da mediana $\overline{BF}$, determine as coordenadas de M.

2.32) Dados A(–5; 2) e M(4; –7), determine as coordenadas do ponto simétrico de M em relação a A.

2.33) Num paralelogramo ABCD temos B(5; 5) e C(3; 2). Sabendo que suas diagonais cruzam-se no ponto (1; 3), determine as coordenadas dos vértices A e D.

2.34) Calcule a distância entre os pontos $E(-\frac{3}{2}; 4)$ e $M(\frac{5}{2}; -3)$.

2.35) Num quadrilátero ABCD temos A(-2; 1), B(2; 4), C(7; -8) e D(-1; -2). Determine o perímetro desse quadrilátero.

2.36) Determine o valor de **a** sabendo que a distância entre os pontos (7; 1) e (3; a) é igual a 5.

2.37) Dados A(a; 4), B(-3; -2) e C(5; 2), determine o valor de **a** de modo que o ponto A seja eqüidistante de B e C.

2.38) Calcule o comprimento da mediana $\overline{BM}$ do triângulo cujos vértices são A(4; -3), B(5; 5) e C(10; -5).

2.39) Para cada caso à seguir, verifique se o triângulo ABC é retângulo, acutângulo ou obtusângulo.

a) A(6; 5), B(3; 7), C(2; -1)
b) A(-2; 2), B(7; 5), C(3; -5)
c) A(3; 5), B(-4; 3), C(-7; -2)

2.40) Uma circunferência que passa pelos pontos A(2; -9) e B(9; 8) tem seu centro na bissetriz dos quadrantes pares. Determine o raio dessa circunferência.

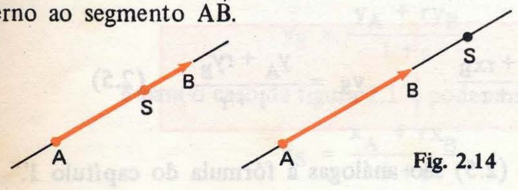
2.41) Dados A(-3; 4), B(5; 5) e C(2; -2), determine o circuncentro do triângulo ABC.

2.42) Sendo A(-5; k - 2), B(-2; -3) e C(6; k), determine o valor de k de modo que o triângulo ABC seja retângulo em B.

2.43) Os pontos A(1; 2) e B(5; -1) são vértices consecutivos de um quadrado. Determine as coordenadas dos outros dois vértices.

2.7 – RAZÃO DE SEÇÃO

No capítulo 1 demos a definição da razão de seção **r** em que um ponto S divide um segmento orientado não-nulo $\overrightarrow{AB}$. Devemos lembrar-nos de que o ponto S deve pertencer à reta que passa por $\overrightarrow{AB}$ (com S ≠ B), podendo ser interno ou externo ao segmento $\overrightarrow{AB}$.



$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}}$$

Fig. 2.14

Vamos agora ampliar nosso estudo para o caso em que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ está contido no plano cartesiano.

Inicialmente vamos supor que $\overrightarrow{AB}$ não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados.

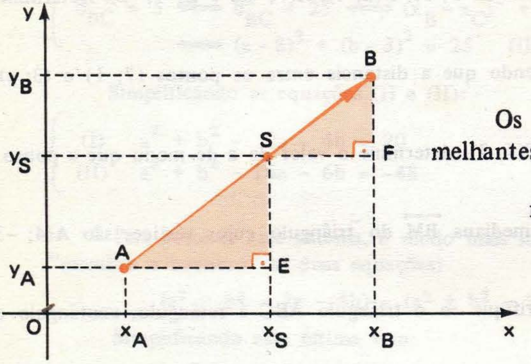


Fig. 2.15

Os triângulos ASE e SBF são semelhantes. Portanto:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{ES}}{\overline{FB}} \quad (2.3)$$

Mas observamos que:

$$\begin{cases} \overline{AE} = x_S - x_A \\ \overline{SF} = x_B - x_S \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \overline{ES} = y_S - y_A \\ \overline{FB} = y_B - y_S \end{cases}$$

Assim, as equações (2.3) transformam-se em:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{x_S - x_A}{x_B - x_S} = \frac{y_S - y_A}{y_B - y_S} \quad (2.4)$$

Desmembrando as equações (2.4) em

$$r = \frac{x_S - x_A}{x_B - x_S} \quad e \quad r = \frac{y_S - y_A}{y_B - y_S}$$

chegamos a:

$$x_S = \frac{x_A + rx_B}{1 + r} \qquad y_S = \frac{y_A + ry_B}{1 + r} \quad (2.5)$$

Repare que as fórmulas (2.5) são análogas à fórmula do capítulo 1.

Consideremos agora os casos em que o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é paralelo a um dos eixos.

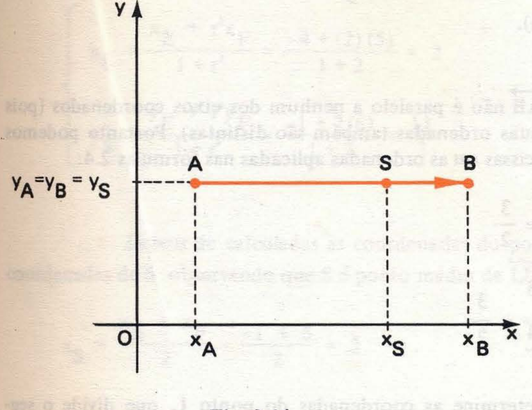


Fig. 2.16

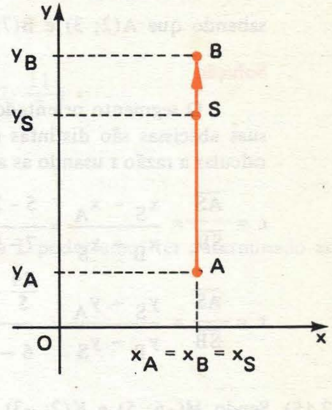


Fig. 2.17

No caso da figura 2.16 escrevemos apenas

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{x_S - x_A}{x_B - x_S}$$ e portanto $$x_S = \frac{x_A + r x_B}{1 + r}$$

Para a figura 2.17 temos:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{y_S - y_A}{y_B - y_S}$$ e $$y_S = \frac{y_A + r y_B}{1 + r}$$

Observações: 1ª) Nas nossas figuras colocamos o ponto S interno ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$. Mas é fácil verificar que as mesmas conclusões seriam obtidas se S fosse externo a $\overrightarrow{AB}$.

2ª) É interessante observar que as **duas** fórmulas 2.5 valem nos casos em que AB é paralelo a um dos eixos, isto é, para o caso da figura 2.16 podemos escrever:

$$y_S = \frac{y_A + r y_B}{1 + r}$$

e para o caso da figura 2.17, podemos escrever:

$$x_S = \frac{x_A + r x_B}{1 + r}$$

Exercícios Resolvidos

2.44) Calcule a razão de seção em que o ponto $S(5;\ \frac{24}{5})$ divide o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, sabendo que A(2; 3) e B(7; 6).

Solução

O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ não é paralelo a nenhum dos eixos coordenados (pois suas abscissas são distintas e suas ordenadas também são distintas). Portanto podemos calcular a razão r usando as abscissas **ou** as ordenadas aplicadas nas fórmulas 2.4:

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{x_S - x_A}{x_B - x_S} = \frac{5-2}{7-5} = \frac{3}{2}$$

$$r = \frac{\overline{AS}}{\overline{SB}} = \frac{y_S - y_A}{y_B - y_S} = \frac{\frac{24}{5} - 3}{6 - \frac{24}{5}} = \frac{3}{2}$$

2.45) Sendo M(-6; 5) e K(2; -3), determine as coordenadas do ponto L, que divide o segmento orientado $\overrightarrow{KM}$ na razão r = -4.

Solução

Usemos as fórmulas 2.5:

$$x_L = \frac{x_K + rx_M}{1+r} = \frac{2 + (-4)(-6)}{1+(-4)} = \frac{26}{-3} = -\frac{26}{3}$$

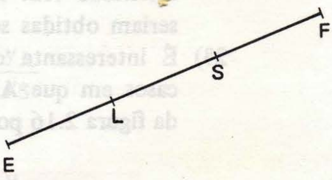
$$y_L = \frac{y_K + ry_M}{1+r} = \frac{-3 + (-4)(5)}{1+(-4)} = \frac{-23}{-3} = \frac{23}{3}$$

Portanto, temos: $L(-\frac{26}{3};\ \frac{23}{3})$

2.46) Sendo E(-4; -1) e F(5; 6), determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento $\overline{EF}$ em três partes de mesmo comprimento.

Solução

Sejam L e S os pontos procurados. O ponto L divide $\overrightarrow{EF}$ na razão de seção $r = \frac{\overline{EL}}{\overline{LF}} = \frac{1}{2}$. Assim:



$$\begin{cases} x_L = \dfrac{x_E + rx_F}{1+r} = \dfrac{-4 + (\frac{1}{2})(5)}{1 + \frac{1}{2}} = -1 \\[2ex] y_L = \dfrac{y_E + ry_F}{1+r} = \dfrac{-1 + (\frac{1}{2})(6)}{1 + \frac{1}{2}} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$L(-1;\ \frac{4}{3})$

O ponto S divide o segmento $\overrightarrow{EF}$ na razão $r' = \frac{\overline{ES}}{\overline{SF}} = \frac{2}{1} = 2$. Portanto:

$$\begin{cases} x_S = \dfrac{x_E + r'x_F}{1 + r'} = \dfrac{-4 + (2)(5)}{1 + 2} = 2 \\ y_S = \dfrac{y_E + r'y_F}{1 + r'} = \dfrac{-1 + 2(6)}{1 + 2} = \dfrac{11}{3} \end{cases} \quad S(2; \tfrac{11}{3})$$

Depois de calculadas as coordenadas do ponto L poderíamos ter determinado as coordenadas de S observando que S é ponto médio de $\overleftrightarrow{LF}$:

$$x_S = \frac{x_L + x_F}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

$$y_S = \frac{y_L + y_F}{2} = \frac{\frac{4}{3} + 6}{2} = \frac{11}{3}$$

Exercícios Propostos

2.47) Determine a razão em que o ponto $B(\frac{32}{3}; \frac{-10}{3})$ divide o segmento orientado $\overrightarrow{LS}$ onde $L(\frac{-2}{3}; 4)$ e $S(5; \frac{1}{3})$.

2.48) Sendo S(-3; -4) e B(2; 8), determine as coordenadas do ponto que divide o segmento orientado $\overrightarrow{BS}$ na razão $r = -\frac{2}{3}$.

2.49) Dados A(2; 3) e L(8; -5), determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento $\overleftrightarrow{AL}$ em quatro partes de mesmo comprimento.

2.50) Sendo C(6; 2) e D(-2; -3), determine até que ponto o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ deve ser prolongado (no mesmo sentido de $\overrightarrow{CD}$) de modo que seu comprimento fique quintuplicado.

2.8 – BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

Conforme sabemos da Geometria Plana, as três medianas de um triângulo passam por um mesmo ponto G, chamado **baricentro** do triângulo. Suponhamos que na figura 2.18 G seja o baricentro do triângulo ABC. A Geometria Plana também nos informa que:

$$\begin{cases} \delta_{AG} = 2\,\delta_{GD} \\ \delta_{BG} = 2\,\delta_{GE} \\ \delta_{CG} = 2\,\delta_{GF} \end{cases}$$

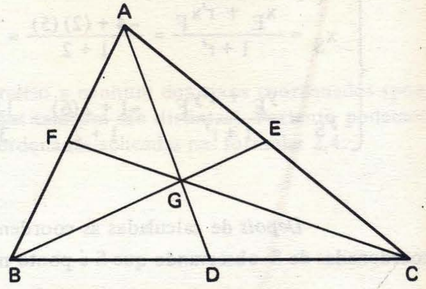


Fig. 2.18

Usando esses fatos, vamos calcular as coordenadas do baricentro G, supondo conhecidas as coordenadas dos vértices A, B e C.

Tomemos, por exemplo, a mediana $\overline{AD}$. O ponto D é ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e portanto:

$$x_D = \frac{x_B + x_C}{2} \quad \text{e} \quad y_D = \frac{y_B + y_C}{2}$$

Como $\delta_{AG} = 2\,\delta_{GD}$, podemos afirmar que o ponto G divide o segmento orientado $\overrightarrow{AD}$, na razão $r = \frac{\overline{AG}}{\overline{GD}} = 2$. Assim, usando as fórmulas (2.5) temos:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + r x_D}{1+r} = \dfrac{x_A + 2\left(\dfrac{x_B + x_C}{2}\right)}{1+2} = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\[2ex] y_G = \dfrac{y_A + r y_D}{1+r} = \dfrac{y_A + 2\left(\dfrac{y_B + y_C}{2}\right)}{1+2} = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$$

Concluímos então que, dado um triângulo de vértices $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$, seu baricentro $G(x_G; y_G)$ é tal que:

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$	$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

(2.6)

Exercícios Resolvidos

2.51) Os pontos A(4; 1), B(−1; 2) e C(3; 7) são vértices de um triângulo. Determine as coordenadas de seu baricentro.

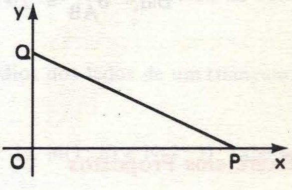
Solução

Sendo $G(x_G; y_G)$ o baricentro pedido, temos:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{(4) + (-1) + (3)}{3} = 2$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{(1) + (2) + (7)}{3} = \frac{10}{3} \qquad G\left(2; \frac{10}{3}\right)$$

2.52) O triângulo OPQ da figura tem por baricentro o ponto G(2; 3). Determine as coordenadas de P e Q.



Solução

Temos: O(0; 0), P(a; 0) e Q(0; b)

$$x_G = \frac{x_O + x_P + x_Q}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_O + y_P + y_Q}{3}$$

$$2 = \frac{0 + a + 0}{3} \quad \text{e} \quad 3 = \frac{0 + 0 + b}{3}$$

$$a = 6 \quad \text{e} \quad b = 9$$

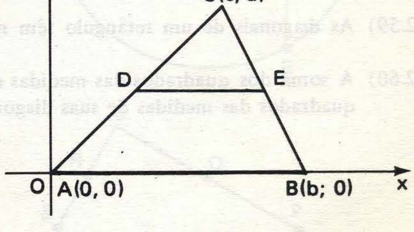
Portanto: P(6; 0) e Q(0; 9)

2.53) Muitas propriedades da Geometria Plana podem ser demonstradas *analiticamente*, isto é, empregando as idéias da Geometria Analítica. O exemplo abaixo esclarece o procedimento:

"Prove que o segmento cujas extremidades são os pontos médios de dois lados de um triângulo tem, para medida, a metade da medida do terceiro lado."

Solução

Para usar os métodos da Geometria Analítica, deve-se escolher um sistema de eixos coordenados. Para fazer com que a determinação dos vértices seja a mais simples possível, "colocamos" a origem do sistema sobre um deles, e a "parte positiva" de um dos eixos sobre um dos lados (veja a figura).



Então um dos vértices é O(0; 0), outro é B(b; 0); o terceiro vértice C é um ponto do plano cujas coordenadas estão determinadas pelo triângulo dado e vamos designá-las com (c; d), isto é, C(c; d).

D e E são, respectivamente, os pontos médios dos segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{BC}$; então:

$$x_D = \frac{0 + c}{2} = \frac{c}{2} \quad e \quad y_D = \frac{0 + d}{2} = \frac{d}{2} \qquad D\left(\frac{c}{2}; \frac{d}{2}\right)$$

$$x_E = \frac{b + c}{2} \quad e \quad y_E = \frac{0 + d}{2} = \frac{d}{2} \qquad E\left(\frac{b + c}{2}; \frac{d}{2}\right)$$

O segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao eixo das abscissas; tem-se:

$$\delta_{DE} = \left| x_E - x_D \right| = \left| \frac{b + c}{2} - \frac{c}{2} \right| = \left| \frac{b}{2} \right| = \frac{|b|}{2}$$

Tem-se também:

$$\delta_{AB} = |x_B - x_A| = |b - 0| = |b|$$

Daí, $\delta_{AB} = 2 \cdot \delta_{DE}$, o que completa a demonstração.

Exercícios Propostos

2.54) Determine as coordenadas do baricentro do triângulo cujos vértices são (-1; 1), (7; -2) e (5; 6).

2.55) Num triângulo ABC são dados o vértice A(4; 1), o baricentro G(-2; 0) e o ponto M(2; -1) que é o ponto médio do lado $\overline{AB}$. Determine as coordenadas do vértice C.

2.56) Os pontos A(3; 2), B(0; -1), C(-3; 2) e D(0; 5) são os vértices do quadrado ABCD. O ponto M é ponto médio do lado $\overline{AD}$ e os pontos P e Q dividem o lado $\overline{AB}$ em três partes de mesmo comprimento. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo MPQ.

2.57) Demonstre, analiticamente, que as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio.

2.58) O ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo eqüidista dos três vértices. Demonstre.

2.59) As diagonais de um retângulo têm mesma medida. Demonstre.

2.60) A soma dos quadrados das medidas dos lados de um paralelogramo é igual à soma dos quadrados das medidas de suas diagonais. Demonstre.

Exercícios Suplementares

I.1) Num sistema de coordenadas abscissas temos os pontos A, B e S(3). Sabendo que o ponto S divide o segmento orientado AB na razão $r = -\frac{1}{2}$ e que $\delta_{AB} = 21$, determine as abscissas de A e B.

I.2) Represente no plano os pontos (x; y) tais que:

a) $|3x - 12| \leqslant 9$ e $y^2 - 3y + 2 \leqslant 0$

b) $|3x - 12| > 9$ e $y^2 - 3y + 2 > 0$

I.3) Uma circunferência que passa pelos pontos (8; 4) e (-6; -10) tem seu centro no eixo das ordenadas. Calcule o raio dessa circunferência.

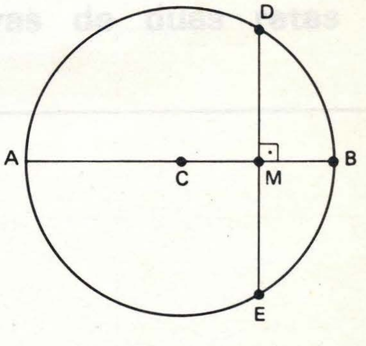
I.4) Os pontos M(4; 6), N(2; 2) e P(-2; 8) são os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

I.5) Consideremos um paralelogramo ABCD e os pontos P(3; 1), M(1; 6) e N(2; 3). Sabe-se que:

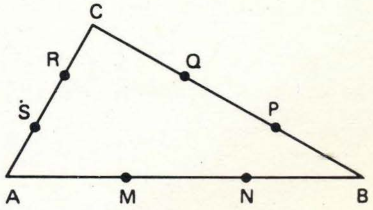
– P é o ponto de encontro das diagonais do paralelogramo
– M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$
– N é o ponto médio do lado $\overline{BC}$

Determine as coordenadas do vértice C.

I.6) Na figura ao lado, C é o centro da circunferência e M é o ponto médio de $\overline{CB}$. Determine a distância entre os pontos D e E sabendo que A(2; 5) e C(-1; 3).



I.7) No triângulo ABC, cada lado é dividido em três partes iguais como a figura indica. Sendo P(8; 3), Q(11; 4) e R(9; 2), determine as coordenadas do ponto M.



I.8) O segmento $\overleftrightarrow{CD}$ é dividido em três partes de comprimentos iguais pelos pontos E(-1; 2) e L(3; 4). Determine as coordenadas de C e D.

I.9) Dados B(1; 4) e F(6; 8), determine as coordenadas do ponto D sabendo que D está na mesma reta que passa por BF e

$$3\,\overline{BD} = -2\,\overline{FD}$$

I.10) Num triângulo ABC são dados o baricentro G(1; 1), o ponto médio M(-2; 5) do lado $\overleftrightarrow{AB}$ e o ponto médio N(0; 3) do lado $\overleftrightarrow{BC}$. Determine as coordenadas dos vértices do triângulo.

PARTE II

Capítulo 3 — **Equação geral da reta**

Capítulo 4 — **Formas da equação da reta**

Capítulo 5 — **Posições relativas de duas retas**

Capítulo

3

Equação geral da reta

3.1 – CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Consideremos os pontos $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$ e o determinante

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

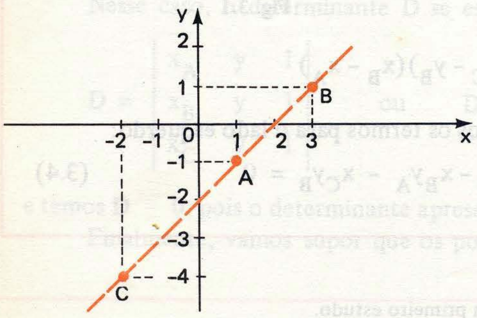
A questão – de extrema importância em Geometria Analítica – de sabermos se os pontos A, B e C estão **alinhados** (isto é, se pertencem a uma mesma reta) é resolvida pela seguinte propriedade:

> Os pontos A, B e C estão alinhados se, e somente se, o determinante D é igual a zero.

Escrevendo de modo mais formal:

$$\text{pontos A, B e C alinhados} \iff D = 0 \qquad (3.1)$$

Tomando, por exemplo, os pontos $A(1; -1)$, $B(3; 1)$ e $C(-2; -4)$, temos:



$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 1 + 2 - 12 + 2 + 4 + 3$$

$$D = 0 \text{ e A, B e C alinhados}$$

Demonstração da propriedade (*)

Lembremo-nos, inicialmente, de que para demonstrar uma propriedade do tipo:

$$p \Longleftrightarrow q$$

devemos, em primeiro lugar, demonstrar que

$$p \Longrightarrow q$$

e, em seguida, que

$$q \Longrightarrow p$$

Assim, devemos dividir a demonstração da propriedade 3.1 em duas partes.

Primeira Parte

A, B e C alinhados $\Rightarrow D = 0$	(3.2)

Vamos, como caso inicial, supor que A, B e C são pontos **distintos** pertencentes a uma reta **r não-paralela** aos eixos cartesianos (fig. 3.1). Então temos:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \qquad (3.3)$$

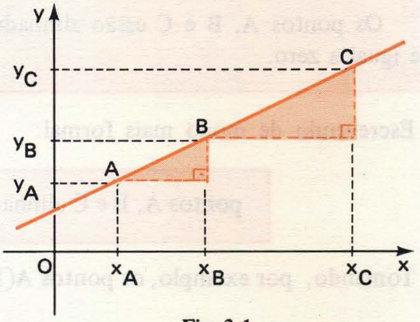


Fig. 3.1

ou ainda: $(y_B - y_A)(x_C - x_B) = (y_C - y_B)(x_B - x_A)$

Desenvolvendo e passando todos os termos para o lado esquerdo:

$$x_Ay_B + x_By_C + x_Cy_A - x_Ay_C - x_By_A - x_Cy_B = 0 \qquad (3.4)$$

(*) Esta demonstração pode ser omitida num primeiro estudo.

O primeiro membro da igualdade (3.4) é igual ao desenvolvimento do determinante D. Portanto, **D = 0**.

Suponhamos, agora, que A, B e C são pontos distintos pertencentes a uma reta paralela a um dos eixos cartesianos (fig. 3.2 e fig. 3.3).

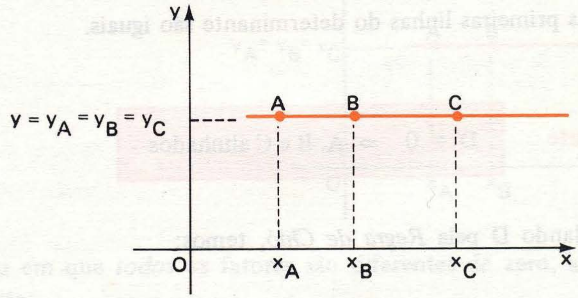


Fig. 3.2

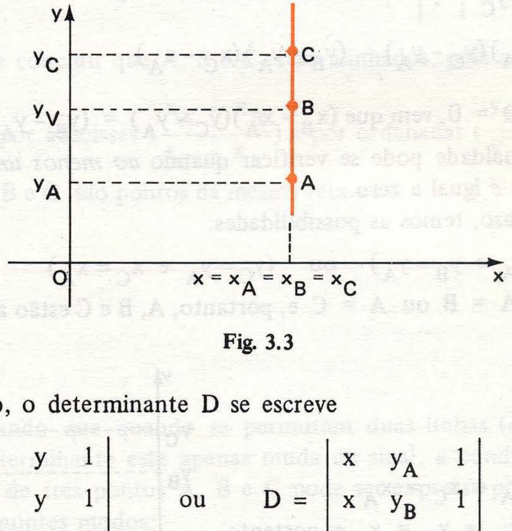


Fig. 3.3

Nesse caso, o determinante D se escreve

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y & 1 \\ x_B & y & 1 \\ x_C & y & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad D = \begin{vmatrix} x & y_A & 1 \\ x & y_B & 1 \\ x & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

e temos **D = 0**, pois o determinante apresenta duas colunas proporcionais.

Finalmente, vamos supor que os pontos A, B e C **não sejam distintos.**

Tomemos, por exemplo, A = B. Nesse caso, temos

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

pois as duas primeiras linhas do determinante são iguais.

Segunda Parte $D = 0 \Rightarrow$ A, B e C alinhados (3.5)

Calculando D pela *Regra de Chió*, temos:

$$D = \left|\begin{array}{cc:c} x_A & y_A & 1 \\ \hdashline x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} =$$

$$= (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)$$

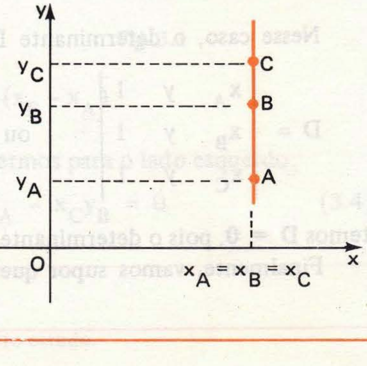
Como $D = 0$, vem que $(x_B - x_A)(y_C - y_A) = (y_B - y_A)(x_C - x_A)$.

Essa igualdade pode se verificar quando *ao menos um dos fatores de cada membro é* **igual a zero**.

Nesse caso, temos as possibilidades:

- $(x_B = x_A$ e $y_B = y_A)$ ou $(y_C = y_A$ e $x_C = x_A)$

  Então A = B ou A = C e, portanto, A, B e C estão alinhados.

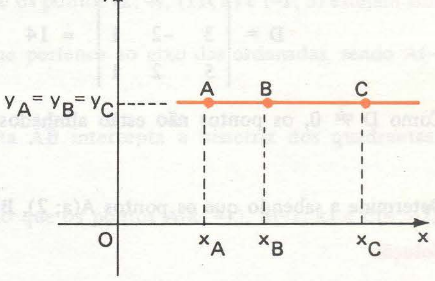


- $x_B = x_A$ e $x_C = x_A$

  Então $x_A = x_B = x_C$ e, portanto, A, B e C estão alinhados.

- $y_C = y_A$ e $y_B = y_A$

Então $y_A = y_B = y_C$ e, portanto, A, B e C estão alinhados.



No caso em que *todos* os fatores são **diferentes de zero**, a igualdade pode ser escrita:

$$\frac{x_A - x_B}{x_C - x_A} = \frac{y_A - y_B}{y_C - y_A}$$

o que nos permite concluir que A, B e C estão alinhados, pois a razão $\frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}$ é igualmente dada por abscissas $\left(\frac{x_A - x_B}{x_C - x_A}\right)$ e por ordenadas $\left(\frac{y_A - y_B}{y_C - y_A}\right)$ somente quando A, B e C são pontos da mesma reta.

Observação: Lembrando que quando se permutam duas linhas (ou colunas) de um determinante este apenas muda de sinal, a condição de alinhamento de três pontos A, B e C pode ser expressa por qualquer um dos seguintes modos:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y_A & x_A & 1 \\ y_C & x_C & 1 \\ y_B & x_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ etc.}$$

Exercícios Resolvidos

3.1) Verifique se os pontos A(1; 1), B(3; -2) e C(5; 2) estão ou não alinhados.

Solução

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 14$$

Como $D \neq 0$, os pontos **não** estão alinhados.

3.2) Determine a sabendo que os pontos A(a; 2), B(3; a) e C(5; 0) estão alinhados.

Solução

Devemos ter:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

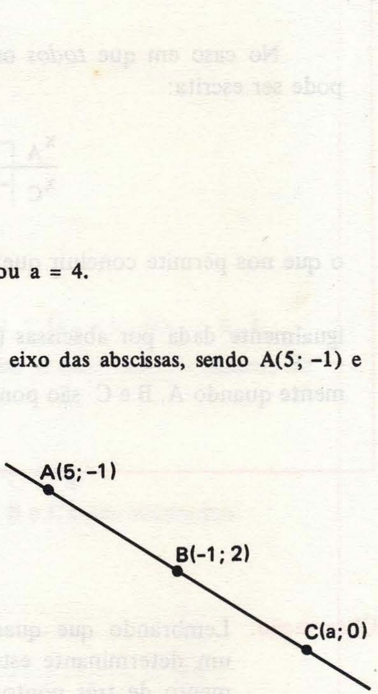
Desenvolvendo o determinante, vem:

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

Resolvendo esta equação obtemos a = 1 ou a = 4.

3.3) Determine o ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que pertence ao eixo das abscissas, sendo A(5; -1) e B(-1; 2).

Solução



Seja C o ponto procurado. Se C pertence ao eixo das abscissas, sua ordenada é nula, isto é, temos C(a; 0).

Para que os pontos estejam alinhados:

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos a equação

$$-3a + 9 = 0$$

cuja raiz é a = 3. Portanto: C(3; 0).

Exercícios Propostos

3.4) Em cada caso abaixo, verifique se os pontos dados estão alinhados:

a) (2; 2); (-1; -3); (1; 1)   b) (1; 3); (4; 5); (-2; 1)

3.5) Determine o valor de **k** de modo que os pontos (k; 4), (11; k) e (-1; 3) estejam alinhados.

3.6) Determine o ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ que pertence ao eixo das ordenadas, sendo A(-1; 0) e B(2; -6).

3.7) Determine o ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes pares, sendo A(0; -8) e B(5; 7).

3.8) Determine os valores de **k** de modo que os pontos A(k; -1), B(-1; k) e C(4; -2) sejam vértices de um triângulo.

3.9) Verifique que os pontos A(a - 1; a), B(-a; 1 - a), C(a - 2; a - 1) estão alinhados $\forall a \in \mathbb{R}$.

3.2 – EQUAÇÃO DE UMA RETA

Consideremos uma reta **r** em um plano cartesiano. Por **equação da reta r** entendemos uma equação nas variáveis **x** e **y** que seja satisfeita por qualquer ponto **P(x; y)** pertencente a **r**. Deve ocorrer, também, que **apenas** os pontos de **r** satisfaçam a equação.

Em alguns casos, a determinação da equação de uma reta é imediata. Vejamos alguns exemplos:

a) **reta paralela ao eixo Ox**

Consideremos por exemplo a reta **r** da figura 3.4. **Todos** os pontos de **r** têm a mesma ordenada y = 2. Portanto, podemos dizer que a **equação de r** é:

$$y = 2$$

ou

$$y - 2 = 0$$

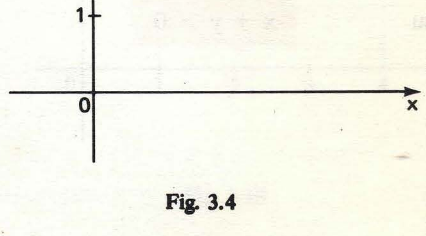


Fig. 3.4

b) reta paralela ao eixo Oy

Na figura 3.5, **todos** os pontos da reta **r** têm a mesma abscissa x = 3. Portanto podemos dizer que a equação de **r** é:

$$x = 3$$

ou $$x - 3 = 0$$

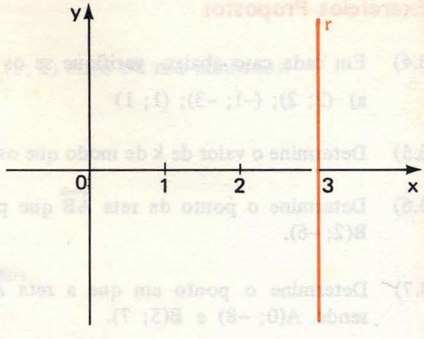


Fig. 3.5

c) reta bissetriz dos quadrantes ímpares

Cada ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares apresenta abscissa igual à ordenada. Portanto podemos afirmar que sua equação é:

$$x = y$$

ou $$x - y = 0$$

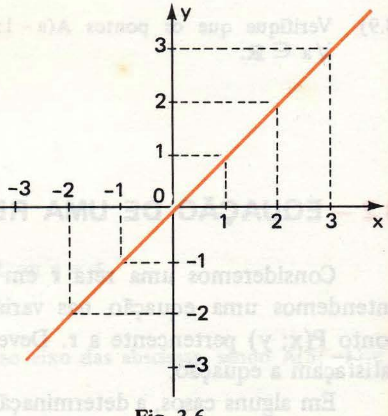


Fig. 3.6

d) reta bissetriz dos quadrantes pares

Cada ponto da bissetriz dos quadrantes pares apresenta abscissa igual à ordenada com o sinal trocado:

$$x = -y$$

ou $$x + y = 0$$

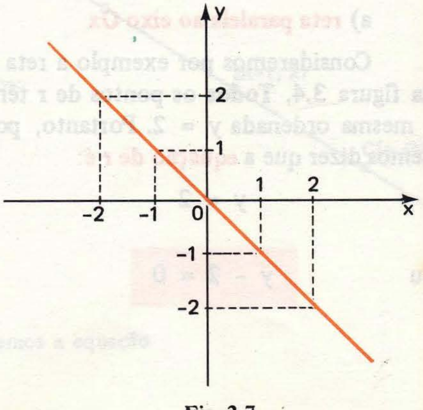


Fig. 3.7

e) eixo Ox

Todos os pontos do eixo Ox apresentam ordenada y = 0. Assim sua equação é:

$$y = 0$$

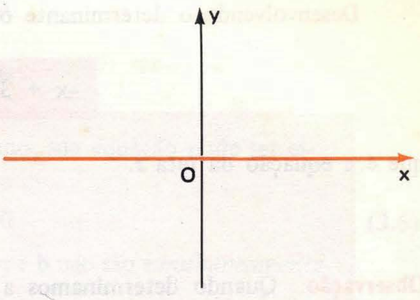


Fig. 3.8

f) eixo Oy

Todos os pontos do eixo Oy têm abscissa x = 0. Portanto sua equação é:

$$x = 0$$

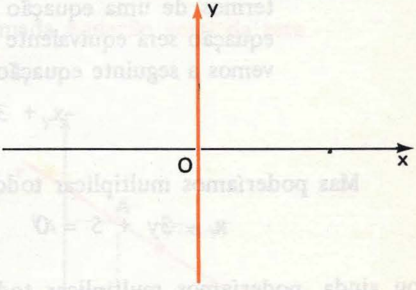


Fig. 3.9

Vejamos agora um exemplo em que a reta ocupa uma posição qualquer no plano.

Exemplo

Vamos determinar a equação da reta r que passa pelos pontos A(1; 2) e B(4; 3).

Seja P(x; y) um ponto qualquer dessa reta. Pela condição de alinhamento de três pontos temos:

$$P \in r \iff D = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

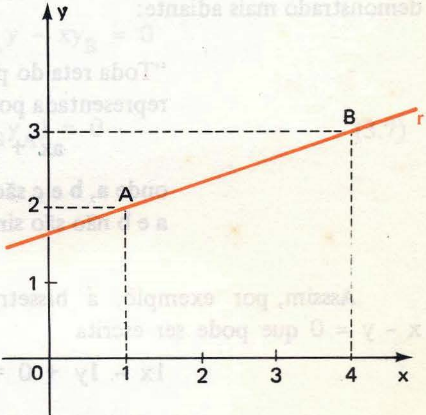


Fig. 3.10

Desenvolvendo o determinante obtemos a equação

$$-x + 3y - 5 = 0$$

que é a equação da reta **r**.

Observação: Quando determinamos a equação de uma reta, essa **não é a única** equação dessa reta, pois sabemos que, se multiplicarmos todos os termos de uma equação por um número diferente de zero, a nova equação será equivalente à primeira. Assim, no exemplo anterior obtivemos a seguinte equação para a reta **r**:

$$-x + 3y - 5 = 0$$

Mas poderíamos multiplicar todos os termos por −1 obtendo

$$x - 3y + 5 = 0$$

ou ainda, poderíamos multiplicar todos os termos por 4 obtendo

$$4x - 12y + 20 = 0$$

e assim por diante.

Com os exemplos anteriores procuramos antecipar ao leitor um fato que será demonstrado mais adiante:

"Toda reta do plano cartesiano pode ser representada por uma equação do tipo

$$ax + by + c = 0$$

onde **a**, **b** e **c** são números reais tais que **a** e **b** não são simultaneamente nulos."

Asssim, por exemplo, a bissetriz dos quadrantes ímpares tem equação $x - y = 0$ que pode ser escrita

$$1x - 1y + 0 = 0$$

No caso do eixo Ox temos a equação $y = 0$, ou:

$$0x + 1y + 0 = 0$$

3.3 – EQUAÇÃO GERAL DA RETA

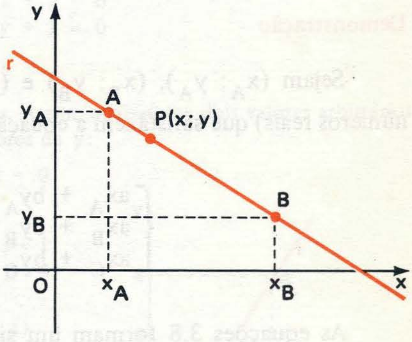
Vamos demonstrar o seguinte teorema:

> Dada uma reta **r** do plano cartesiano, sua equação pode ser escrita na forma
>
> $$ax + by + c = 0 \qquad (3.6)$$
>
> onde **a**, **b** e **c** são números reais tais que **a** e **b** não são *simultaneamente* nulos.

A equação "ax + by + c = 0" é chamada **equação geral da reta.**

Demonstração (∗)

Consideremos sobre **r** dois pontos distintos A e B. Sendo P(x; y) um ponto genérico dessa reta temos, pela condição de alinhamento:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante obtemos:

$$xy_A + x_Ay_B + yx_B - x_By_A - x_Ay - xy_B = 0$$

ou ainda:

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_Ay_B - x_By_A) = 0 \qquad (3.7)$$

Fazendo $\begin{cases} y_A - y_B = a \\ x_B - x_A = b \\ x_Ay_B - x_By_A = c \end{cases}$

a equação (3.7) pode ser escrita:

$$ax + by + c = 0$$

(∗) Esta demonstração pode ser omitida num primeiro estudo.

Observemos que se **a** e **b** fossem simultaneamente nulos teríamos

$$y_A - y_B = 0 \quad e \quad x_B - x_A = 0$$

isto é, os pontos A e B seriam coincidentes, o que contraria a hipótese de que A e B são distintos. Portanto concluímos que **a** e **b** não são simultaneamente nulos.

Vamos agora demonstrar o recíproco do teorema anterior:

Toda equação do tipo

$$ax + by + c = 0$$

onde **a**, **b** e **c** são reais, com **a** e **b** não simultaneamente nulos, é equação de uma reta.

(3.7)

Demonstração

Sejam $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ e $(x_C; y_C)$ três pares ordenados quaisquer (de números reais) que satisfazem a equação $ax + by + c = 0$. Temos então

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \\ ax_C + by_C + c = 0 \end{cases} \qquad (3.8)$$

As equações 3.8 formam um sistema linear homogêneo onde as incógnitas são **a**, **b** e **c**. Como estamos admitindo que **a** e **b** não são simultaneamente nulos, concluímos que o sistema 3.8 admite soluções diferentes da solução trivial $a = b = c = 0$. Assim, o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.9)$$

Porém, a equação 3.9 é exatamente a condição de alinhamento dos pontos $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$. Vemos então que, **qualquer** trinca de pontos cujas coordenadas satisfazem a equação

$$ax + by + c = 0$$

é uma trinca de pontos alinhados e portanto a equação "$ax + by + c = 0$" é equação de uma reta.

Exercícios Resolvidos

3.10) Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos A(5; 3) e B(-2; -1).

Solução

Sendo P(x; y) um ponto qualquer da reta, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante, obtemos:

$$4x - 7y + 1 = 0$$

3.11) Desenhe no plano cartesiano as retas cujas equações são dadas abaixo.

a) $3x - 2y + 2 = 0$

b) $2x + y = 0$

c) $x + 2 = 0$

d) $y + 1 = 0$

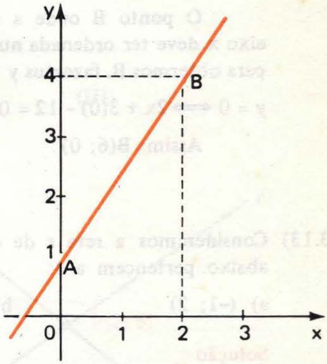
Solução

a) Para obtermos a reta bastam dois pontos. Assim, atribuímos dois valores arbitrários a x e calculamos os correspondentes valores de y:

$$3x - 2y + 2 = 0$$

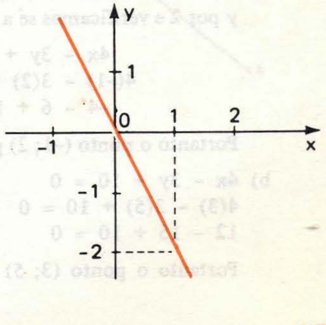
$$\begin{cases} x = 0 \iff 3(0) - 2y + 2 = 0 \iff y = 1 \\ x = 2 \iff 3(2) - 2y + 2 = 0 \iff y = 4 \end{cases}$$

Obtivemos então os pontos A(0; 1) e B(2; 4)

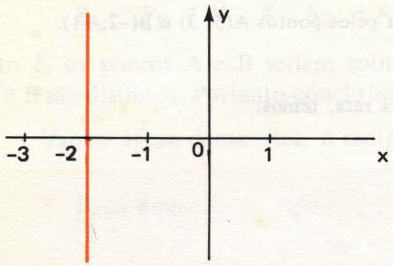


b) $2x + y = 0$

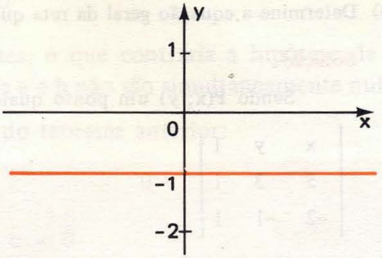
$$\begin{cases} x = 0 \iff 2(0) + y = 0 \iff y = 0 \\ x = 1 \iff 2(1) + y = 0 \iff y = -2 \end{cases}$$



c) $x + 2 = 0 \iff x = -2$

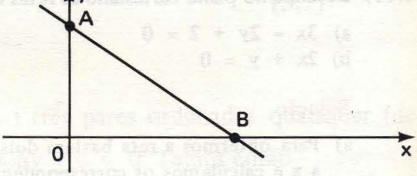


d) $y + 1 = 0 \iff y = -1$



3.12) Determine os pontos onde a reta de equação $2x + 3y - 12 = 0$ intercepta os eixos coordenados.

Solução

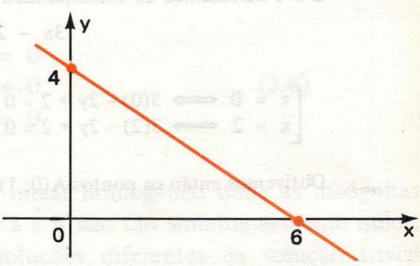


O ponto A onde a reta corta o eixo y deve ter abscissa nula. Portanto, para determinarmos A, fazemos $x = 0$:

$$2x + 3y - 12 = 0$$

$$x = 0 \iff 2(0) + 3y - 12 = 0 \iff y = 4$$

Assim: A(0; 4)



O ponto B onde a reta corta o eixo x deve ter ordenada nula. Portanto, para obtermos B, fazemos $y = 0$:

$$y = 0 \iff 2x + 3(0) - 12 = 0 \iff x = 6$$

Assim: B(6; 0)

3.13) Consideremos a reta **r** de equação $4x - 3y + 10 = 0$. Verifique quais dos pontos abaixo pertencem a **r**:

a) (-1; 2) b) (3; 5) c) (0; 2)

Solução

a) Para verificarmos se (-1; 2) pertence à reta, substituímos, na equação, x por -1 e y por 2 e verificamos se a sentença obtida é verdadeira

$$4x - 3y + 10 = 0$$
$$4(-1) - 3(2) + 10 = 0$$
$$-4 - 6 + 10 = 0 \quad \text{(verdadeiro)}$$

Portanto o ponto (-1; 2) pertence a **r**.

b) $4x - 3y + 10 = 0$
$4(3) - 3(5) + 10 = 0$
$12 - 15 + 10 = 0$ (falso)

Portanto o ponto (3; 5) não pertence a **r**.

c) $4x - 3y + 10 = 0$

$4(0) - 3(2) + 10 = 0$

$-6 + 10 = 0$ (falso)

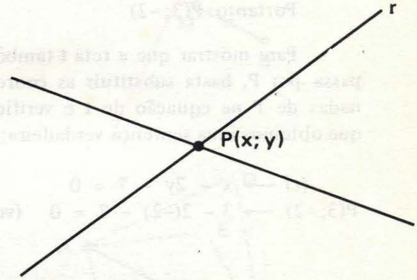
O ponto (0; 2) não pertence a r.

3.14) Uma reta r tem equação $4x - y - 3 = 0$ e uma reta s tem equação $3x + y - 11 = 0$. Determine o ponto de interseção dessas retas.

Solução

Seja P(x; y) o ponto procurado. Portanto o ponto P deve pertencer simultaneamente às retas r e s. Assim, devemos procurar um par (x; y) que satisfaça simultaneamente as equações

$4x - y - 3 = 0$ e $3x + y - 11 = 0$



Isto significa que devemos resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 4x - y - 3 = 0 & \text{(I)} \\ 3x + y - 11 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I) tiramos o valor de y:

$$4x - y - 3 = 0 \iff y = 4x - 3 \quad \text{(III)}$$

Substituindo na equação (II) obtemos:

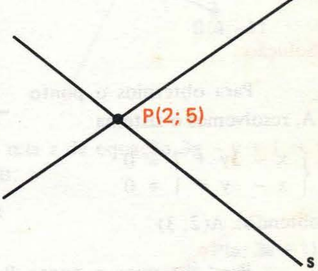
$$3x + (4x - 3) - 11 = 0$$

Resolvendo esta última temos: $x = 2$.

Substituindo em (III) obtemos:

$y = 4(2) - 3 = 5$

Assim: P(2; 5)



3.15) Verifique se as retas r, s e t, de equações:

(r) $3x + 2y - 5 = 0$

(s) $2x - 3y - 12 = 0$

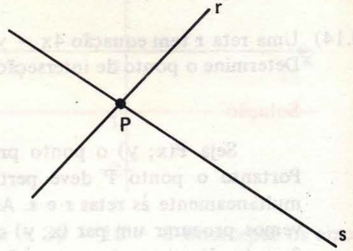
(t) $x - 2y - 7 = 0$

se cortam em um único ponto.

Solução

Determinemos em primeiro lugar o ponto P(x; y) onde as retas **r** e **s** se cortam. Para isso, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ 2x - 3y - 12 = 0 \end{cases}$$



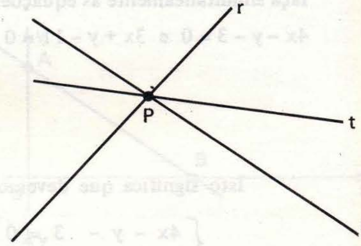
obtendo $x = 3$ e $y = -2$

Portanto: P(3; -2)

Para mostrar que a reta **t** também passa por P, basta substituir as coordenadas de P na equação de **t** e verificar que obtemos uma sentença verdadeira:

(t) $\longrightarrow x - 2y - 7 = 0$

P(3; -2) $\longrightarrow 3 - 2(-2) - 7 = 0$ (verdadeiro)

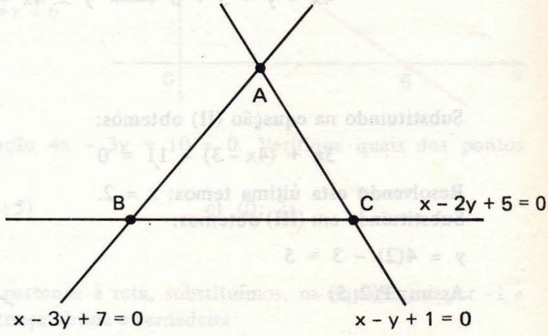


3.16) Determine os vértices do triângulo ABC conhecendo as equações das retas que contêm os lados:

$\overleftrightarrow{AB}$ $x - 3y + 7 = 0$

$\overleftrightarrow{AC}$ $x - y + 1 = 0$

$\overleftrightarrow{BC}$ $x - 2y + 5 = 0$



Solução

Para obtermos o ponto A, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x - 3y + 7 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

obtendo: A(2; 3)

Para obtermos o ponto B, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x - 3y + 7 = 0 \end{cases}$$ obtendo B(-1; 2)

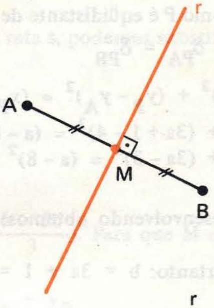
E, finalmente, para obtermos o ponto C, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$ obtendo C(3; 4)

3.17) Sendo A(-2; 3) e B(4; -1) determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Solução

Em primeiro lugar, vamos lembrar-nos de que, em um plano, a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ (não-nulo) é a reta r que é perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo ponto médio de $\overline{AB}$. Lembremo-nos também de que os pontos de r são eqüidistantes de A e B. Assim, por exemplo, no desenho ao lado temos:

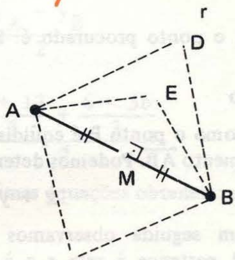


med. $\overline{DA}$ = med. $\overline{DB}$

med. $\overline{EA}$ = med. $\overline{EB}$

med. $\overline{MA}$ = med. $\overline{MB}$

med. $\overline{FA}$ = med. $\overline{FB}$



Assim, para determinarmos a equação da mediatriz de $\overline{AB}$, tomamos um ponto genérico P(x; y) dessa mediatriz e impomos:

$$\delta_{PA} = \delta_{PB}$$

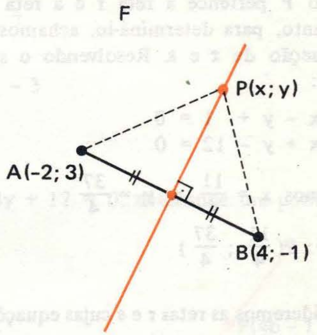
$$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 =$$
$$= (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = (x - 4)^2 + (y + 1)^2$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$12x - 8y - 4 = 0$$

ou $\quad 3x - 2y - 1 = 0$



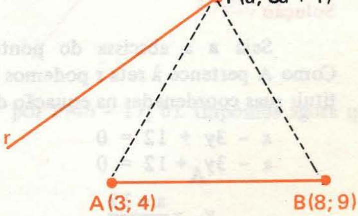
3.18) Consideremos os pontos A(3; 4) e B(8; 9) e a reta r de equação 3x - y + 1 = 0. Determine o ponto de r que é eqüidistante de A e B.

Solução

1º modo

Seja P(a; b) o ponto procurado. Como P pertence a r, vamos substituir suas coordenadas na equação de r:

$$3x - y + 1 = 0$$
$$3a - b + 1 = 0$$
$$b = 3a + 1$$



Assim, podemos representar o ponto P por:

P(a; 3a + 1)

Como P é eqüidistante de A e B, temos:

$$\delta_{PA} = \delta_{PB}$$

$$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2$$

$$(a - 3)^2 + (3a + 1 - 4)^2 = (a - 8)^2 + (3a + 1 - 9)^2$$

$$(a - 3)^2 + (3a - 3)^2 = (a - 8)^2 + (3a - 8)^2$$

Desenvolvendo obtemos: $a = \frac{11}{4}$

Portanto: $b = 3a + 1 = 3\left(\frac{11}{4}\right) + 1 = \frac{37}{4}$

E o ponto procurado é: $P\left(\frac{11}{4} ; \frac{37}{4}\right)$

2º modo

Como o ponto P é eqüidistante de A e B, concluímos que P pertence à mediatriz s do segmento $\overline{AB}$. Podemos determinar a equação de s obtendo

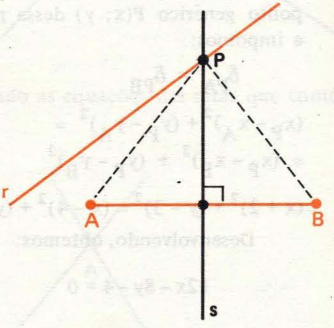
$$x + y - 12 = 0$$

Em seguida observamos que o ponto P pertence à reta r e à reta s. Portanto, para determiná-lo, achamos a interseção de r e s. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 1 = 0 \\ x + y - 12 = 0 \end{cases}$$

obtemos $x = \frac{11}{4}$ e $y = \frac{37}{4}$

isto é: $P\left(\frac{11}{4}; \frac{37}{4}\right)$



3.19) Consideremos as retas r e s cujas equações são, respectivamente:

$$x - 3y + 12 = 0 \quad e \quad 5x + 3y - 6 = 0$$

Consideremos ainda um ponto A da reta r e um ponto B da reta s tais que o ponto M(6; 2) seja o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Determine as coordenadas dos pontos A e B.

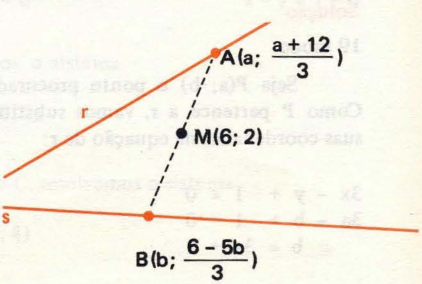
Solução

Seja a a abscissa do ponto A. Como A pertence à reta r podemos substituir suas coordenadas na equação de r:

$$x - 3y + 12 = 0$$

$$a - 3y_A + 12 = 0$$

$$y_A = \frac{a + 12}{3}$$



Assim, podemos representar o ponto A por:

$$A(a; \frac{a + 12}{3})$$

Seja **b** a abscissa de B. Como B pertence à reta s, podemos substituir suas coordenadas na equação de s:

$$5x + 3y - 6 = 0$$
$$5b + 3y_B - 6 = 0$$
$$y_B = \frac{6 - 5b}{3}$$

Assim, podemos representar B por: $B(b; \frac{6 - 5b}{3})$. Para que M seja ponto médio de $\overline{AB}$ devemos ter:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$6 = \frac{a + b}{2} \quad \text{e} \quad 2 = \frac{\frac{a + 12}{3} + \frac{6 - 5b}{3}}{2}$$

Resolvendo o sistema formado por estas duas últimas equações obtemos: a = 9 e b = 3. Assim:

$$\begin{cases} \text{ordenada de A} = \frac{a + 12}{3} = \frac{9 + 12}{3} = 7 \\ \text{ordenada de B} = \frac{6 - 5b}{3} = \frac{6 - 5(3)}{3} = -3 \end{cases}$$

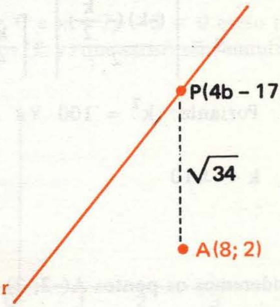
E finalmente: A(9; 7) e B(3; -3).

3.20) Sabendo que a equação da reta **r** é $x - 4y + 17 = 0$, determine um ponto de **r** cuja distância ao ponto A(8; 2) é igual a $\sqrt{34}$.

Solução

Seja P(a; b) o ponto procurado. Como $P \in r$, podemos substituir as coordenadas de P na equação de **r**:

$$x - 4y + 17 = 0$$
$$a - 4b + 17 = 0$$
$$a = 4b - 17 \quad (I)$$



Podemos então representar o ponto P por P(4b - 17; b). Impomos agora que a distância entre P e A é $\sqrt{34}$:

$$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = (\sqrt{34})^2$$
$$(4b - 17 - 8)^2 + (b - 2)^2 = 34$$

Desenvolvendo, obtemos a equação

$$b^2 - 12b + 35 = 0$$

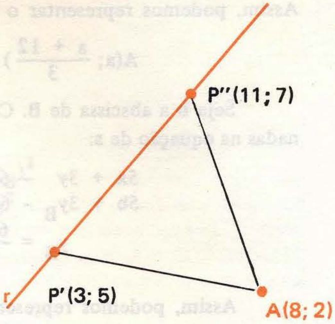
cujas raízes são: $b' = 5$ e $b'' = 7$.

Substituindo em (I) temos:

$$\left[\begin{array}{l} b = 5 \Longrightarrow a = 4(5) - 17 = 3 \\ b = 7 \Longrightarrow a = 4(7) - 17 = 11 \end{array}\right.$$

Temos então duas possibilidades para o ponto P:

P(3; 5) e P(11; 7)



3.21) A reta r de equação $x + 2y + k = 0$ intercepta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B respectivamente. Determine o valor de k de modo que o triângulo OAB tenha área igual a 25.

Solução

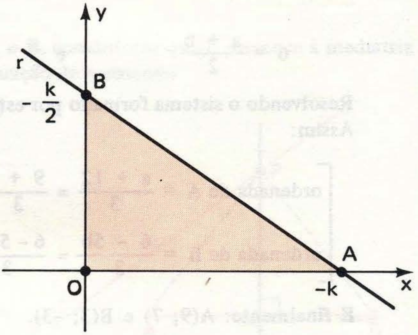
Os pontos $A(x_A; 0)$ e $B(0; y_B)$ pertencem a r; portanto suas coordenadas devem satisfazer a equação

$$x + 2y + k = 0$$

$$x_A + 2(0) + k = 0 \text{ e } 0 + 2y_B + k = 0$$

donde tiramos:

$$x_A = -k \text{ e } y_B = -\frac{k}{2}$$



Sendo S a área do triângulo OAB temos:

$$S = \left| \frac{(-k)\left(-\frac{k}{2}\right)}{2} \right| = \left| \frac{k^2}{4} \right| = \frac{k^2}{4} = 25$$

Portanto: $k^2 = 100$

e $k = \pm 10$

3.22) Consideremos os pontos A(–2; 2), B(2; 4), C(4; 1) e P(1; a).

a) Determine os valores de a de modo que P pertença a um lado do triângulo ABC.
b) Determine os valores de a de modo que P esteja no interior do triângulo ABC.

Solução

a) Para que P pertença a um lado do triângulo ABC, deverá pertencer ao lado $\overline{AB}$ ou, ao lado $\overline{AC}$ (pois P, tendo abscissa 1, deve estar na reta r).

Se P estiver alinhado com os pontos A e B, devemos ter:

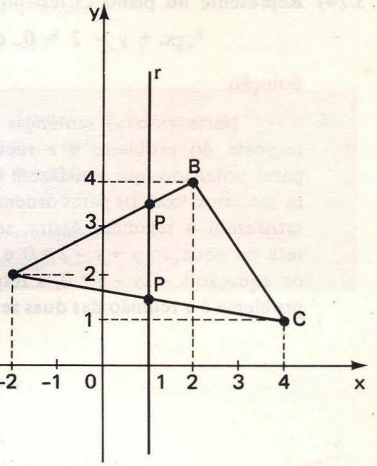
$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

o que nos dá: $a = \frac{7}{2}$

Se P estiver alinhado com os pontos A e C, devemos ter:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

donde tiramos: $a = \frac{3}{2}$



Assim, para que o ponto P pertença a um lado do triângulo ABC, devemos ter $a = \frac{7}{2}$ ou $a = \frac{3}{2}$.

b) Aproveitando o resultado anterior, vemos que, para que P seja interior ao triângulo ABC, devemos ter

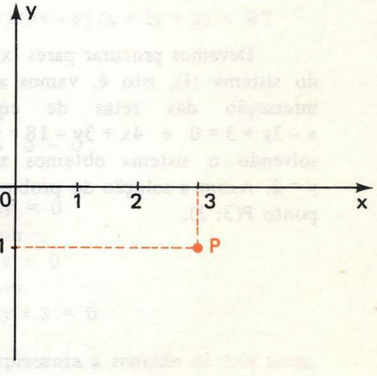
$$\frac{3}{2} < a < \frac{7}{2}$$

3.23) Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) tais que:

$$x + y - 2 = 0 \quad e \quad x - 2y - 5 = 0$$

Solução

Como as sentenças abertas $x + y - 2 = 0$ e $x - 2y - 5 = 0$ estão ligadas pela conjunção e, devemos procurar os pares ordenados (x; y) que satisfazem **simultaneamente** as duas. Portanto, devemos achar a interseção das retas r e s de equações $x + y - 2 = 0$ e $x - 2y - 5 = 0$ respectivamente. Determinando essa interseção obtemos o ponto P(3; –1) que é a solução do problema.

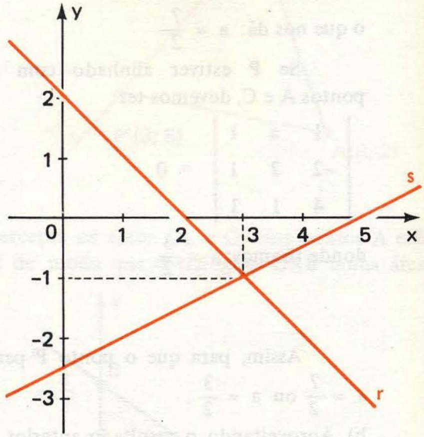


3.24) Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) tais que:

$$x + y - 2 = 0 \text{ ou } x - 2y - 5 = 0$$

Solução

Neste caso as sentenças abertas estão ligadas pela conjunção **ou**. Portanto, a resposta do problema é a **reunião** dos pares ordenados que satisfazem a primeira sentença com os pares ordenados que satisfazem a segunda. Assim, sendo **r** a reta de equação $x + y - 2 = 0$ e **s** a reta de equação $x - 2y - 5 = 0$, a resposta do problema é a reunião das duas retas.



3.25) Represente no plano cartesiano os pontos P(x; y) tais que:

$$(x - 3y + 3)^2 + (4x + 3y - 18)^2 = 0$$

Solução

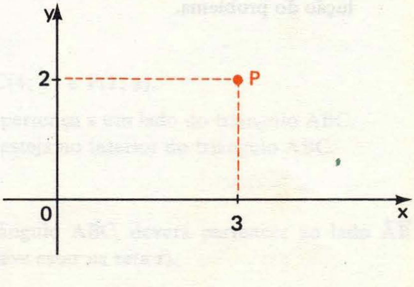
Sendo **a** e **b** números reais, temos:

$$a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 \text{ e } b = 0$$

Portanto:

$$(x - 3y + 3)^2 + (4x + 3y - 18)^2 = 0 \iff \begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ \text{e} \\ 4x + 3y - 18 = 0 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Devemos procurar pares (x; y) que satisfaçam **simultaneamente** as duas equações do sistema (I), isto é, vamos achar a interseção das retas de equações $x - 3y + 3 = 0$ e $4x + 3y - 18 = 0$. Resolvendo o sistema obtemos $x = 3$ e $y = 2$. Assim a solução do problema é o ponto P(3; 2).



3.26) Determine as figuras representadas pelas equações a seguir

a) $(x + 2y)^2 = (3x - y)^2$ b) $(2x + y - 1)^3 = (x - y + 2)^3$

Solução

Sendo **a** e **b** números reais e **n** um número natural não-nulo, temos:

1º) Se **n** é par:
$a^n = b^n \iff a = b$ ou $a = -b$

2º) Se **n** é ímpar:
$a^n = b^n \iff a = b$

a) $(x + 2y)^2 = (3x - y)^2 \iff$

$\iff \underbrace{x + 2y = 3x - y}_{(I)}$

ou:

$\underbrace{x + 2y = -(3x - y)}_{(II)}$

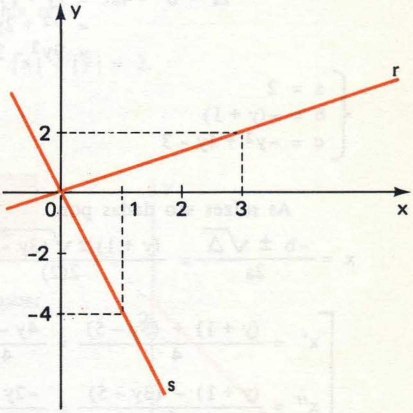
Simplificando as equações (I) e (II), temos:

$(x + 2y)^2 = (3x - y)^2 \iff 2x - 3y = 0$ ou $4x + y = 0$

Concluímos, então, que a equação

$(x + 2y)^2 = (3x - y)^2$

representa a **reunião** das retas **r** e **s**, de equações $2x - 3y = 0$ e $4x + y = 0$, respectivamente.



b) $(2x + y - 1)^3 = (x - y + 2)^3 \iff 2x + y - 1 = x - y + 2 \iff x + 2y - 3 = 0$

Como a equação $x + 2y - 3 = 0$ representa uma reta, concluímos que a equação $(2x + y - 1)^3 = (x - y + 2)^3$ representa **uma** reta.

3.27) Qual a figura representada pela equação $(x + 2y)(3x - y)(x + 2y + 3) = 0$?

Solução

Sabemos que: $a \cdot b = 0 \iff a = 0$ ou $b = 0$

Assim:

$$(x + 2y)(3x - y)(x + 2y + 3) = 0 \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ \text{ou} \\ 3x - y = 0 \\ \text{ou} \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$$

Vemos então que a equação fornecida representa a reunião de três retas.

3.28) Mostre que a equação $2x^2 - xy - x - y^2 + 4y - 3 = 0$ representa a reunião de duas retas.

Solução

Primeiramente vamos lembrar-nos de que, sendo **a**, **b** e **c** números reais (com $a \neq 0$), temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'') \qquad \text{(I)}$$

onde x' e x'' são as raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$.

Vamos usar esse resultado para fatorar a expressão "$2x^2 - xy - x - y^2 + 4y - 3$", interpretando x como variável e y como constante:

$$2x^2 - xy - x - y^2 + 4y - 3 = 2x^2 - (y+1)x + (-y^2 + 4y - 3)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (y+1)^2 - 4(2)(-y^2 + 4y - 3) =$$
$$= y^2 + 2y + 1 + 8y^2 - 32y + 24 =$$
$$= 9y^2 - 30y + 25 = (3y - 5)^2$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -(y+1) \\ c = -y^2 + 4y - 3 \end{cases}$$

As raízes são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(y+1) \pm \sqrt{(3y-5)^2}}{2(2)} = \frac{(y+1) \pm (3y-5)}{4}$$

$$\left[\begin{array}{l} x' = \dfrac{(y+1) + (3y-5)}{4} = \dfrac{4y - 4}{4} = y - 1 \\[2ex] x'' = \dfrac{(y+1) - (3y-5)}{4} = \dfrac{-2y + 6}{4} = -\dfrac{y}{2} + \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Assim, de acordo com a fórmula (I) acima, temos:

$$2x^2 - (y+1)x + (-y^2 + 4y - 3) = 2(x - x')(x - x'') =$$
$$= 2[x - (y-1)]\left[x - \left(-\frac{y}{2} + \frac{3}{2}\right)\right] =$$
$$= 2(x - y + 1)\left(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

Assim, concluímos que:

$$2x^2 - xy - x - y^2 + 4y - 3 = 0 \iff 2(x - y + 1)\left(x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2}\right) = 0 \iff \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{3}{2} = 0 \end{cases}$$

Portanto, a equação fornecida representa a **reunião** das retas de equações $x - y + 1 = 0$ e $x + \frac{y}{2} - \frac{3}{2} = 0$.

3.29) Verifique a figura representada por cada equação:

a) $x^2 - 9y^2 = 0$ b) $4x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$

Solução

a) Como $x^2 - 9y^2 = x^2 - (3y)^2 =$
$= (x + 3y)(x - 3y)$, temos:

$$x^2 - 9y^2 = 0 \iff (x + 3y)(x - 3y) = 0 \iff$$
$$\iff x + 3y = 0 \text{ ou } x - 3y = 0$$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Portanto, a equação $x^2 - 9y^2 = 0$ representa a reunião de duas retas, de equações $x + 3y = 0$ e $x - 3y = 0$.

b) $4x^2 - 24xy + 9y^2 = (2x - 3y)^2$

Assim: $4x^2 - 24xy + 9y^2 = 0 \iff (2x - 3y)^2 = 0 \iff 2x - 3y = 0$

Portanto, a equação dada representa uma reta.

3.30) Verifique que figura representa a equação $|x| + |y| = 2$.

Solução

Inicialmente, lembremo-nos de que:

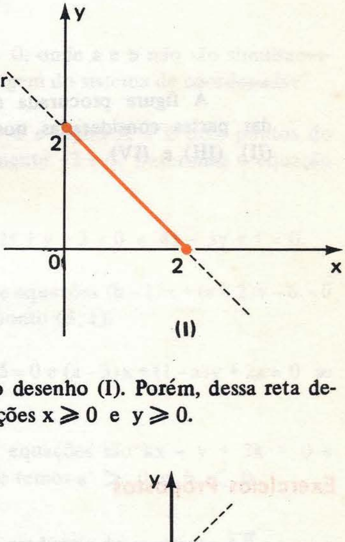
$x \geqslant 0 \iff \lvert x\rvert = x$
$x \leqslant 0 \iff \lvert x\rvert = -x$

Vamos, em seguida, considerar 4 casos:

1º) $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$

Neste caso temos $|x| = x$ e $|y| = y$.
Portanto, a equação $|x| + |y| = 2$ pode ser escrita:

$$x + y = 2$$



(I)

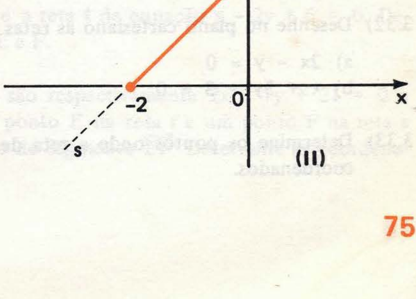
A equação $x + y = 2$ representa a reta r do desenho (I). Porém, dessa reta devemos considerar apenas a parte que satisfaz as condições $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

2º) $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$

Agora podemos escrever: $|x| = -x$ e $|y| = y$. Assim, a equação dada transforma-se em:

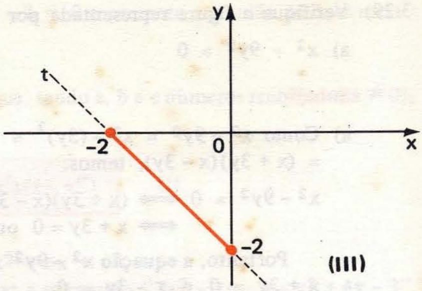
$$-x + y = 2$$

Esta última equação representa a reta s do desenho (II). Porém, dessa reta consideramos apenas a parte que satisfaz as condições $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$.



(II)

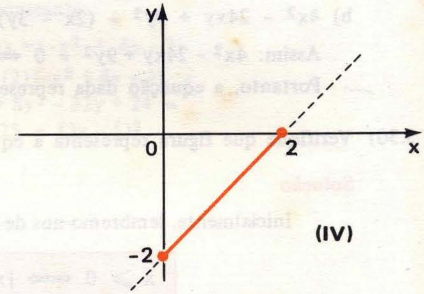
3º) $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0$



$$\begin{cases} |x| = -x \\ |y| = -y \end{cases} \qquad \begin{array}{l} |x| + |y| = 2 \\ -x - y = 2 \end{array}$$

(III)

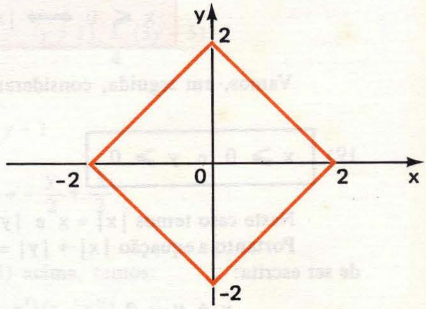
4º) $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$



$$\begin{cases} |x| = x \\ |y| = -y \end{cases} \qquad \begin{array}{l} |x| + |y| = 2 \\ x - y = 2 \end{array}$$

(IV)

A figura procurada é a reunião das partes consideradas nos casos (I), (II), (III) e (IV).



Exercícios Propostos

3.31) Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos $(4; -3)$ e $(-7; \frac{4}{3})$.

3.32) Desenhe no plano cartesiano as retas cujas equações são dadas a seguir:

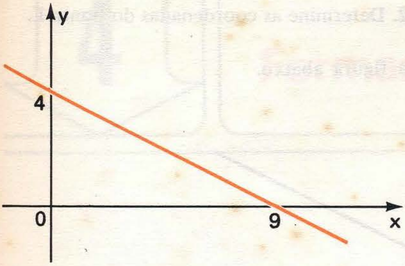
a) $2x - y = 0$ c) $x + 1 = 0$

b) $x + 3y + 3 = 0$ d) $y - 2 = 0$

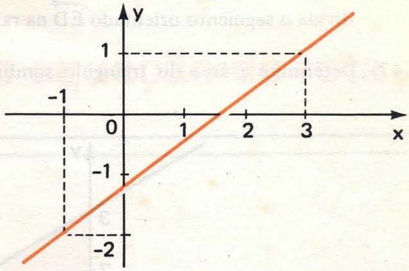
3.33) Determine os pontos onde a reta de equação $4x - 7y + 12 = 0$ intercepta os eixos coordenados.

3.34) Dê as equações das retas cujos desenhos temos a seguir:

a)



b)



3.35) Consideremos o triângulo ABC onde A(-4; 1), B(1; 8) e C(3; -2). Determine a equação da reta que contém a mediana $\overline{BM}$.

3.36) Determine o valor de **k** de modo que o ponto $P(-3; \frac{5}{2})$ pertença à reta de equação

$$(3 - 2k)x + (k - 1)y + \frac{1}{2} = 0.$$

3.37) Consideremos uma reta **r** de equação $ax + by + c = 0$, onde **a** e **b** não são simultaneamente nulos. Qual a condição para que **r** passe pela origem do sistema de coordenadas?

3.38) Consideremos a função dada por $f(x) = x^2 - 2x + 5$ e sejam A e B dois pontos do gráfico dessa função, cujas abscissas são respectivamente −2 e 3. Determine a equação da reta que passa por A e B.

3.39) Determine a interseção das retas cujas equações são $2x + y - 3 = 0$ e $4x - 3y + 1 = 0$.

3.40) Determine os valores de **a** e **b**, de modo que as retas de equações $(b - 1)x + (a - 2)y - 6 = 0$ e $(a - 1)x - (b + 1)y - 9 = 0$ sejam concorrentes no ponto (3; 1).

3.41) Mostre que as retas de equações $x + y - 4 = 0$, $2x + y - 5 = 0$ e $(a - 3)x + (1 - a)y + 2a = 0$ se cortam em um só ponto para qualquer valor de **a**.

3.42) Seja (a; b) o ponto de interseção das retas cujas equações são $kx - y + 3k = 0$ e $x + y - 6 = 0$. Determine os valores de **k** para os quais temos $a > 0$ e $b < 0$.

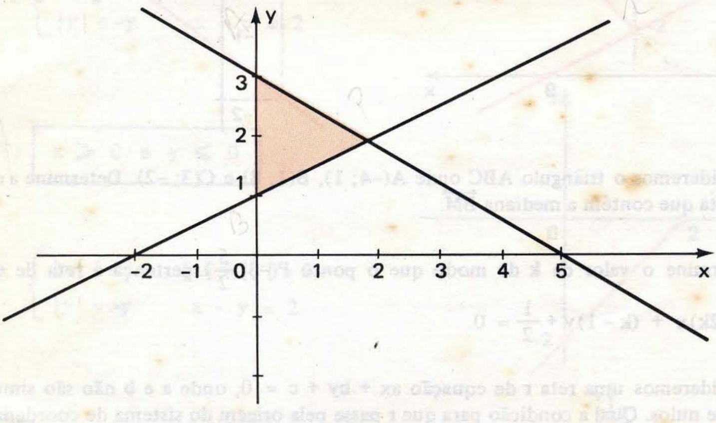
3.43) Sendo $A(-\frac{4}{3}; 2)$ e $B(3; \frac{1}{3})$, determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

3.44) Consideremos os pontos E(2; 7) e F(8; 2) e a reta **t** de equação $x - 2y + 6 = 0$. Determine o ponto de **t** que é eqüidistante de E e F.

3.45) Consideremos as retas **r** e **s** cujas equações são respectivamente $2x - 7y + 21 = 0$ e $2x + 3y - 3 = 0$. Consideremos ainda um ponto E na reta **r** e um ponto F na reta s tais que o ponto M(5; 2) seja o ponto médio do segmento $\overline{EF}$. Determine as coordenadas dos pontos E e F.

3.46) Consideremos o ponto $D(-5; \frac{3}{2})$ e a reta s de equação $2x - y + 4 = 0$. Sejam E um ponto de s e F um ponto da bissetriz dos quadrantes pares, de modo que o ponto F divida o segmento orientado $\overrightarrow{ED}$ na razão $r = 2$. Determine as coordenadas do ponto E.

3.47) Determine a área do triângulo sombreado na figura abaixo.



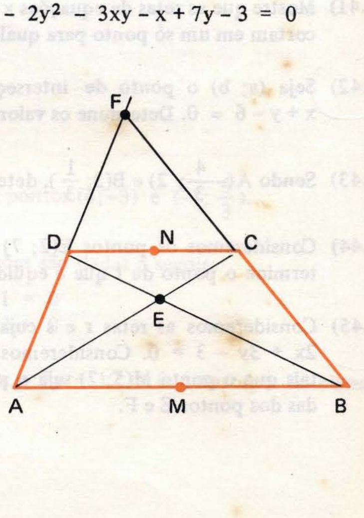
3.48) Desenhe no plano cartesiano as figuras representadas pelas equações:

a) $(x - 2y + 5)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$
b) $(3x - y - 2)^2 = (x + y)^2$
c) $(x - y + 1)^3 = (2x + y)^3$
d) $(x - 2)(y - 1)(x - y - 1)(x + y) = 0$
e) $|x| + 2|y| = 2$
f) $|x - 1| - 2y = 0$
g) $|x - y| = 2$

3.49) Verifique a figura que representa cada equação:

a) $x^2 - y^2 = 0$
b) $x^2 + y^2 = 0$
c) $x^4 - y^4 = 0$
d) $9x^2 - 6xy + y^2 = 0$
e) $2x^2 - 2y^2 - 3xy - x + 7y - 3 = 0$

3.50) Sejam M e N os pontos médios das bases de um trapézio. Sendo E o ponto de encontro das diagonais e F o ponto de encontro dos prolongamentos dos lados não-paralelos, mostre que os pontos M, N, E e F estão alinhados.



Capítulo

4 Formas da equação da reta

4.1 – COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA

Consideremos inicialmente uma reta **r** não-paralela ao eixo Ox e seja P o ponto onde **r** corta o eixo Ox.

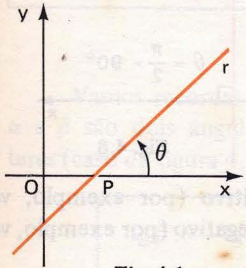


Fig. 4.1

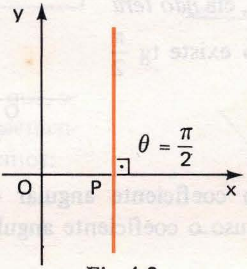


Fig. 4.2

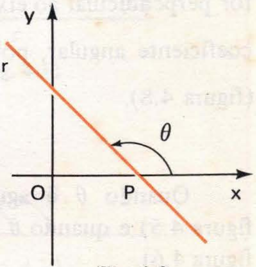


Fig. 4.3

Seja θ a medida em radianos do menor ângulo pelo qual deveríamos "girar" o eixo Ox em torno de P e no sentido anti-horário para coincidir com **r**. A esse ângulo damos o nome de inclinação da reta.

Se a reta **r** for paralela ao eixo Ox diremos que sua inclinação é nula.

Da definição decorre que:

$$0 \leqslant \theta < \pi$$

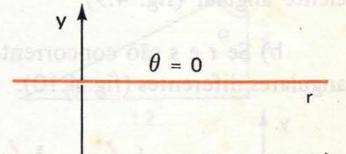


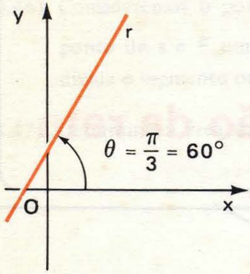
Fig. 4.4

Sendo θ a inclinação de uma reta **r**, damos a seguinte definição:

O coeficiente angular da reta **r** é o número m dado por:

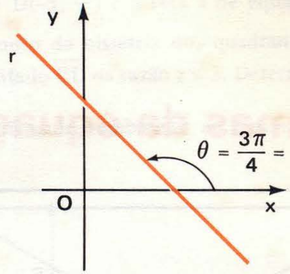
$$m = \text{tg}\,\theta$$

Exemplo



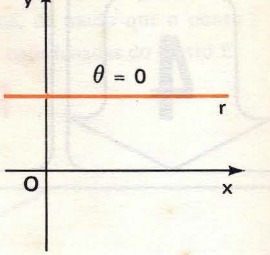
$m = \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Fig. 4.5



$m = \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -1$

Fig. 4.6



$m = \text{tg}\,0 = 0$

Fig. 4.7

Devemos observar que, se a reta **r** for perpendicular ao eixo Ox, ela *não terá* coeficiente angular, pois **não existe** tg $\frac{\pi}{2}$ (figura 4.8).

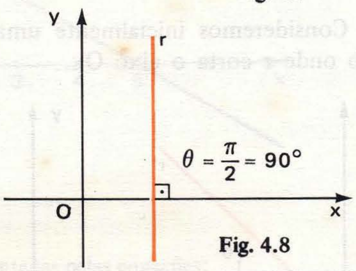


Fig. 4.8

Quando θ é agudo o coeficiente angular é positivo (por exemplo, ver figura 4.5) e quando θ é obtuso o coeficiente angular é negativo (por exemplo, ver figura 4.6).

Consideremos duas retas **r** e s não-perpendiculares ao eixo Ox. Neste caso vale a pena notar que:

a) Se **r** e s são paralelas, devem ter a mesma inclinação e o mesmo coeficiente angular (fig. 4.9).

b) Se **r** e s são concorrentes, devem ter inclinações diferentes e coeficientes angulares diferentes (fig. 4.10).

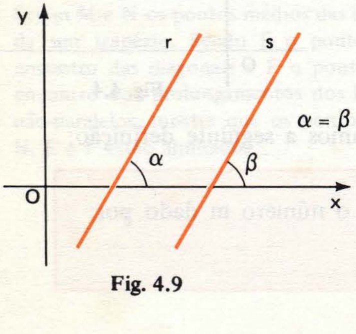


Fig. 4.9

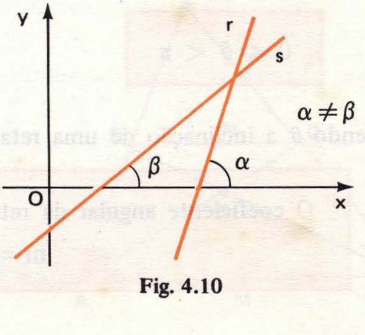


Fig. 4.10

Observações:

1ª) O **coeficiente angular** pode ser chamado também de **declive** ou **declividade**.

2ª) Alguns autores usam a palavra **inclinação** como sinônimo de **coeficiente angular**.

4.2 – TANGENTE DE UM ÂNGULO

Vamos recordar como se calcula a tangente de um ângulo usando o triângulo retângulo.

Considerando o triângulo retângulo da figura 4.11 temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c}$$

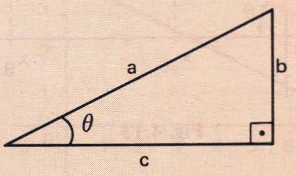


Fig. 4.11

Vamos recordar ainda que, se α e β são dois ângulos suplementares (caso da figura 4.12), temos:

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha$$

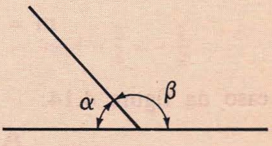
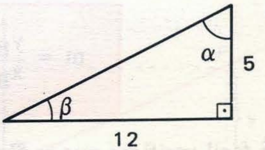


Fig. 4.12

Exemplos

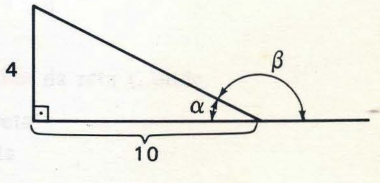
a) Para o caso da figura ao lado temos:



$$\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{12} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{10}$

$$\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{10}$$



4.3 – DETERMINAÇÃO DE m CONHECIDOS DOIS PONTOS

Sejam $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ dois pontos **distintos** pertencentes a uma reta **r**. Suponhamos inicialmente que **r** não seja paralela a nenhum dos eixos coordenados e seja **m** o seu coeficiente angular.

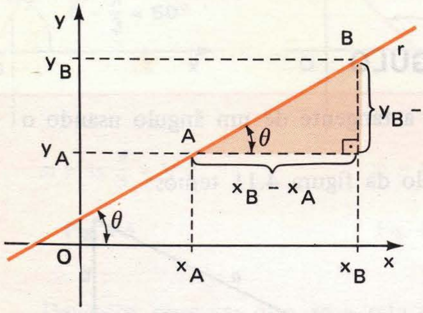


Fig. 4.13

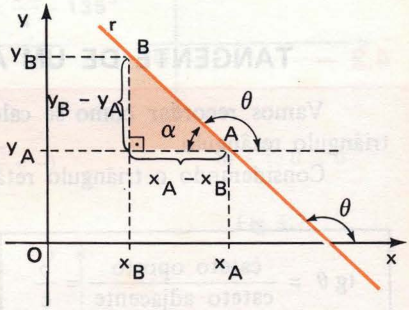


Fig. 4.14

Para o caso da figura 4.13 temos:

$$m = \operatorname{tg} \theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

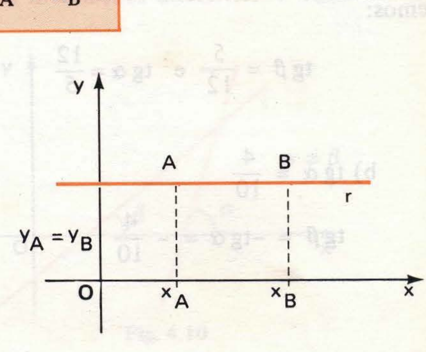
e para o caso da figura 4.14:

$$m = \operatorname{tg} \theta = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Portanto, para os dois casos podemos escrever:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \qquad (4.1)$$

É fácil verificar que as fórmulas 4.1 continuam válidas para o caso em que **r** é paralela ao eixo Ox.

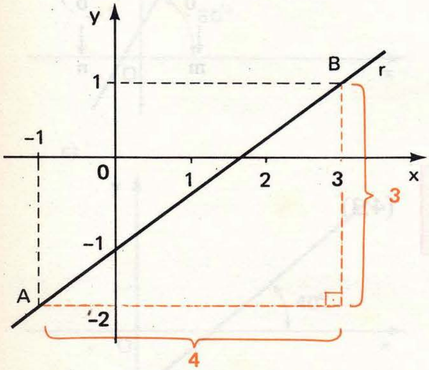


Exemplos

a) Dados A(4; -3) e B(1; -7), o coeficiente angular da reta que passa por A e B é:

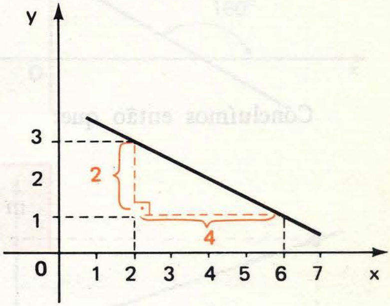
$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{(-3) - (-7)}{(4) - (1)} = \frac{4}{3}$$

b)



$m = \frac{3}{4}$

c)



$m = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

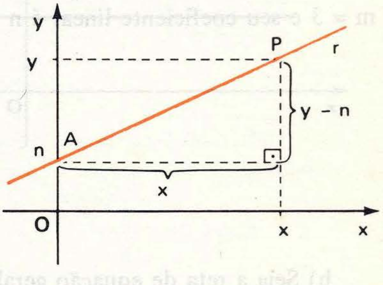
4.4 – EQUAÇÃO REDUZIDA DA RETA

Seja **r** uma reta não-perpendicular ao eixo Ox, cujo coeficiente angular é **m** e cuja interseção com o eixo Oy é o ponto A(0; n). Consideremos um ponto P(x; y) qualquer de **r**, distinto de A.

Temos:

$$m = \frac{y - n}{x}$$

ou $y = mx + n$ (4.2)



A equação 4.2 chama-se **equação reduzida** da reta **r**, onde:

$$\begin{cases} m = \text{coeficiente angular da reta} \\ n = \text{coeficiente linear da reta} \end{cases}$$

Na dedução da equação 4.2 fizemos $P \neq A$. No entanto é fácil verificar que ela vale também para o ponto A.

Devemos observar que retas perpendiculares ao eixo Ox *não possuem* equação reduzida.

Consideremos uma reta **r**, não-perpendicular a Ox, cuja **equação geral** é $ax + by + c = 0$ e cuja equação reduzida é $y = mx + n$. Se **r** não é perpendicular a Ox, temos $b \neq 0$ e, portanto:

$$ax + by + c = 0 \iff by = -ax - c \iff y = \underbrace{\left(-\frac{a}{b}\right)}_{m} x \underbrace{\left(-\frac{c}{b}\right)}_{n}$$

Concluímos então que:

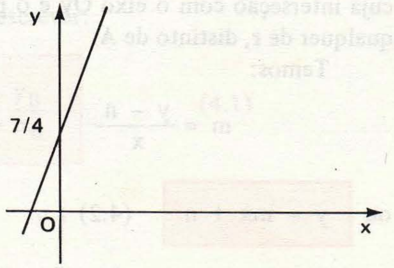
$$m = -\frac{a}{b} \qquad (4.3)$$

Exemplos

a) Consideremos a reta cuja equação geral é $12x - 4y + 7 = 0$. Para obtermos sua equação reduzida, "isolamos" y:

$$12x - 4y + 7 = 0 \iff -4y = -12x - 7 \iff y = \frac{-12}{-4}x - \frac{7}{-4} \iff y = 3x + \frac{7}{4}$$

Portanto a equação reduzida da reta é $y = 3x + \frac{7}{4}$. Seu coeficiente angular é $m = 3$ e seu coeficiente linear é $n = \frac{7}{4}$.



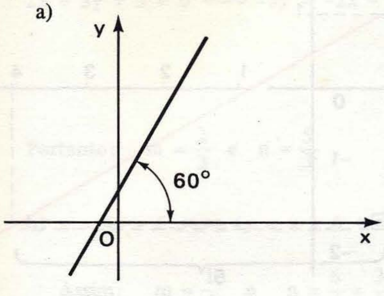
b) Seja a reta de equação geral $5x + 9y - 11 = 0$. De acordo com a fórmula 4.3 temos que o coeficiente angular da reta é:

$$m = -\frac{5}{9}$$

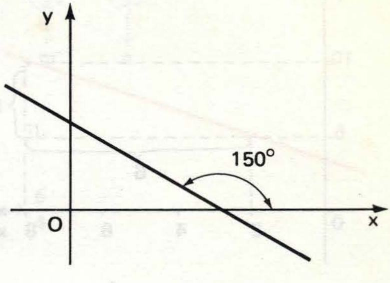
Exercícios Resolvidos

4.1) Dê o coeficiente angular de cada reta abaixo:

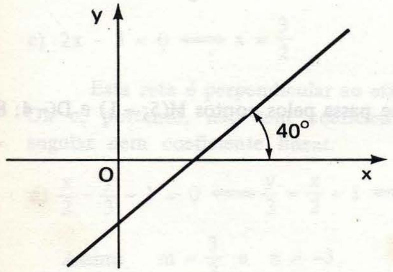
a)



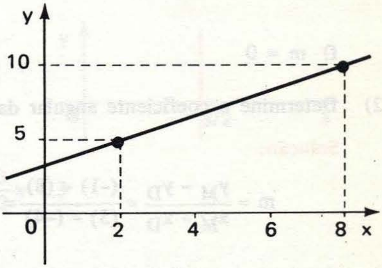
b)



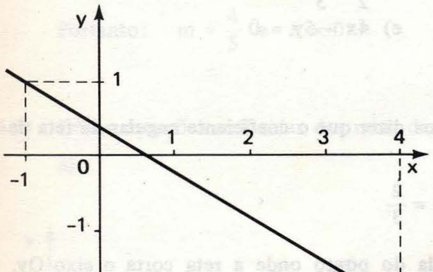
c)



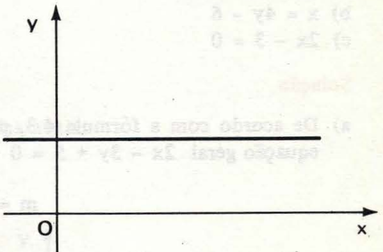
d)



e)



f)



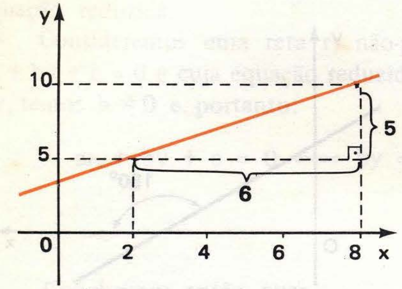
Solução

a) $m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$

b) $m = \text{tg } 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

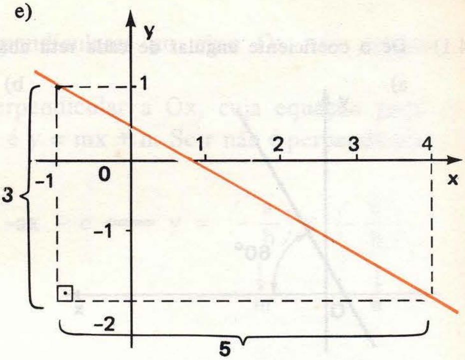
c) Consultando a tabela do final do livro temos: $m = \text{tg } 40° \cong 0{,}8391$

d)



$$m = \frac{5}{6}$$

e)



$$m = -\frac{3}{5}$$

f) $m = 0$

4.2) Determine o coeficiente angular da reta que passa pelos pontos M(5; - 1) e D(- 4; 8).

Solução:

$$m = \frac{y_M - y_D}{x_M - x_D} = \frac{(-1) - (8)}{(5) - (-4)} = \frac{-9}{9} = -1$$

4.3) Determine o coeficiente angular m e o coeficiente linear n das retas cujas equações são dadas abaixo:

a) $2x - 3y + 5 = 0$

b) $x = 4y - 6$

c) $2x - 3 = 0$

d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1 = 0$

e) $4x - 5y = 0$

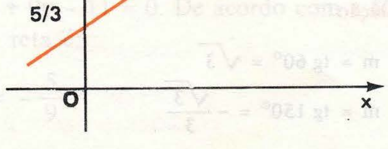
Solução

a) De acordo com a fórmula 4.3, podemos dizer que o coeficiente angular da reta de equação geral $2x - 3y + 5 = 0$ é:

$$m = -\frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

O coeficiente linear n é a ordenada do ponto onde a reta corta o eixo Oy. Fazendo $x = 0$ temos:

$$2x - 3y + 5 = 0$$
$$2(0) - 3y + 5 = 0$$
$$y = \frac{5}{3}$$



Portanto $n = \frac{5}{3}$

Outro modo de resolver o problema é passar da equação geral para a equação reduzida:

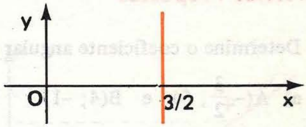
$$2x - 3y + 5 = 0 \iff -3y = -2x - 5 \iff y = \underbrace{\frac{2}{3}}_{m}x + \underbrace{\frac{5}{3}}_{n}$$

Portanto: $m = \frac{2}{3}$ e $n = \frac{5}{3}$

b) $x = 4y - 6 \iff 4y = x + 6 \iff y = \frac{1}{4}x + \frac{6}{4}$

Assim: $m = \frac{1}{4}$ e $n = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

c) $2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$



Esta reta é perpendicular ao eixo Ox e, portanto, não tem coeficiente angular nem coeficiente linear.

d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} - 1 = 0 \iff \frac{y}{3} = \frac{x}{2} - 1 \iff y = \frac{3}{2}x - 3$

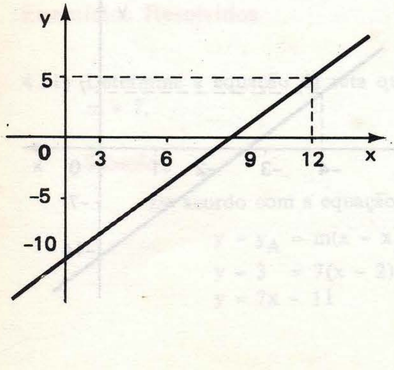
Assim: $m = \frac{3}{2}$ e $n = -3$

e) $4x - 5y = 0 \iff 5y = 4x \iff y = \frac{4}{5}x$

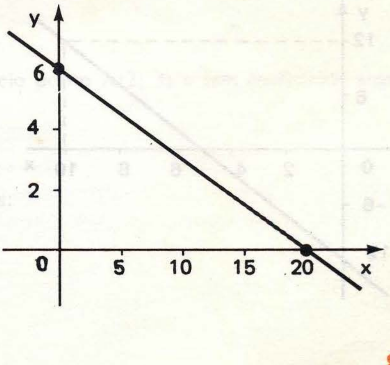
Portanto: $m = \frac{4}{5}$ e $n = 0$

4.4) Dê as equações reduzidas das retas desenhadas abaixo.

a)



b)



Solução

a) A reta corta o eixo Oy no ponto de ordenada igual a -10. Portanto: n = -10. Do desenho tiramos que o coeficiente angular m é:

$$m = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

Assim, a equação reduzida y = mx + n pode ser escrita:

$$y = \frac{5}{4}x - 10$$

b) $n = 6$ e $m = -\frac{6}{20} = -\frac{3}{10}$

Portanto a equação reduzida é: $y = -\frac{3}{10}x + 6$

Exercícios Propostos

4.5) Determine o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ em cada caso:

a) $A(-\frac{3}{2}; 5)$ e $B(4; -1)$ b) $A(0; -\frac{1}{2})$ e $B(\frac{5}{3}; 4)$

4.6) Dê a equação reduzida de cada uma das retas a seguir:

a) $4x - 8y + 21 = 0$ c) $4x + 9 = 0$

b) $\frac{3x}{2} - \frac{4y}{5} - 1 = 0$ d) $8x + 15y = 0$

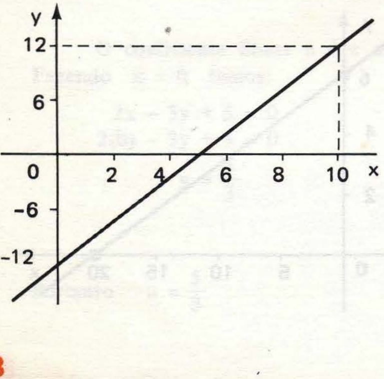
4.7) Determine o coeficiente angular (m) e o coeficiente linear (n) das retas cujas equações são dadas a seguir:

a) $3x = 6 - 7y$ c) $\frac{4x}{21} - y = 6$

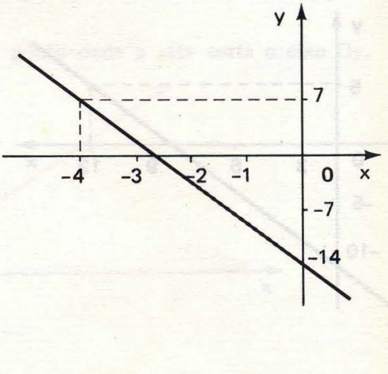
b) $5x + 9y + 1 = 0$ d) $6 = -9x + \frac{4y}{5}$

4.8) Dê as equações reduzidas das retas desenhadas a seguir:

a)



b)



4.9) São dados os pontos A(4; -3) e $B(0; \frac{1}{5})$. Determine os valores de **a** de modo que a reta de equação $(a^2 - 1)x + (a^2 + 1)y - 1 = 0$ tenha o mesmo coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

4.10) A reta **r** tem coeficiente angular igual a 2 e corta o eixo das ordenadas no ponto (0; -5). A reta s tem coeficiente angular igual a 3 e corta o eixo das ordenadas no ponto (0; 4). Determine a interseção de **r** e **s**.

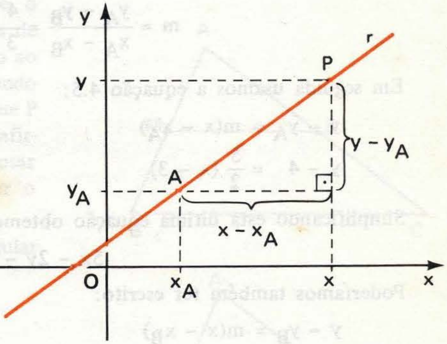
4.5 – EQUAÇÃO DA RETA CONHECIDOS m E UM PONTO

Consideremos uma reta **r** não-perpendicular ao eixo Ox, da qual conhecemos o coeficiente angular **m** e um ponto $A(x_A; y_A)$. Consideremos sobre **r** um ponto qualquer P(x; y), com $P \neq A$. Temos, então:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A} \quad (4.4)$$

ou:

$$y - y_A = m(x - x_A) \quad (4.5)$$



Para podermos escrever a equação 4.4 admitimos $P \neq A$. No entanto, a equação 4.5 vale também para P = A.

Exercícios Resolvidos

4.11) Determine a equação da reta que passa pelo ponto A(2; 3) e tem coeficiente angular m = 7.

Solução

De acordo com a equação 4.5 temos:

$y - y_A = m(x - x_A)$

$y - 3 = 7(x - 2)$

$y = 7x - 11$

4.12) Determine a equação da reta que passa pelos pontos A(3; 4) e B(5; 9).

Solução

1º modo

Podemos resolver este problema como fizemos no capítulo 3, usando a condição de alinhamento:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante obtemos:

$$5x - 2y - 7 = 0$$

2º modo

Uma outra maneira de resolvermos o problema é, em primeiro lugar, calcularmos o coeficiente angular da reta:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4 - 9}{3 - 5} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Em seguida usamos a equação 4.5:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

$$y - 4 = \frac{5}{2}(x - 3)$$

Simplificando esta última equação obtemos:

$$5x - 2y - 7 = 0$$

Poderíamos também ter escrito:

$$y - y_B = m(x - x_B)$$

$$y - 9 = \frac{5}{2}(x - 5)$$

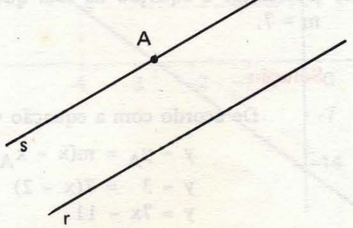
obtendo a mesma equação: $5x - 2y - 7 = 0$

4.13) Consideremos uma reta r de equação $y = 4x - 3$ e um ponto A(6; -1). Determine a equação de uma reta s que passa por A e é paralela à reta r.

Solução:

A reta r, de equação $y = 4x - 3$, tem coeficiente angular $m_r = 4$. Seja m_s o coeficiente angular da reta s. Como s e r são paralelas, devem ter o mesmo coeficiente angular:

$$m_s = m_r = 4$$



Portanto, podemos determinar a equação de s usando a fórmula 4.5:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$
$$y - (-1) = 4(x - 6)$$

Simplificando obtemos: $y = 4x - 25$

4.14) Num triângulo ABC, os pontos M(7; 2), N(8; 6) e P(4; 5) são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ respectivamente. Determine as equações das retas $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$.

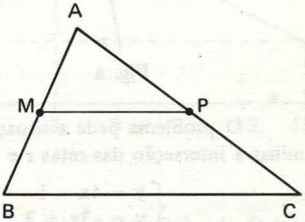
Solução

1º modo

Uma maneira de resolver este problema é, usando as fórmulas do ponto médio, determinarmos as coordenadas de A, B e C (como foi feito no capítulo 2). Em seguida determinamos as equações pedidas.

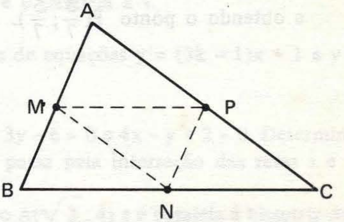
2º modo

Uma outra maneira de encaminharmos a solução é lembrarmo-nos da propriedade da Geometria Plana que nos diz que o segmento que liga os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado. Na figura ao lado, supondo que M seja o ponto médio de $\overline{AB}$ e que P seja o ponto médio de $\overline{AC}$, podemos afirmar que $\overline{MP}$ é paralelo a $\overline{BC}$. Vamos usar então essa propriedade para resolver o nosso problema.



A reta $\overleftrightarrow{MP}$ tem coeficiente angular m dado por:

$$m = \frac{y_M - y_P}{x_M - x_P} = \frac{2-5}{7-4} = \frac{-3}{3} = -1$$



A reta $\overleftrightarrow{BC}$ é paralela à reta $\overleftrightarrow{MP}$ e portanto ambas têm o mesmo coeficiente angular m = -1. Além disso a reta $\overleftrightarrow{BC}$ passa pelo ponto N. Usando a fórmula 4.5 podemos escrever a equação de $\overleftrightarrow{BC}$:

$$y - y_N = m(x - x_N)$$
$$y - 6 = -1(x - 8)$$
$$y = -x + 14$$

Procedendo de modo análogo, podemos obter as equações de $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$ que são, respectivamente:

$$y = 4x - 11 \quad \text{e} \quad y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

4.15) Consideremos as retas r, s e t cujas equações são, respectivamente, $y = 4x - 1$, $y = -3x + 2$ e $y = 5x + (3k - 7)$. Determine k de modo que as retas se cruzem em três pontos distintos.

Solução

Pelos coeficientes angulares percebemos que, entre as retas dadas, *não há* nenhum par de retas paralelas nem coincidentes (os coeficientes angulares são todos distintos). Portanto, para essas três retas, só há duas possibilidades: ou elas passam todas por um mesmo ponto (figura a) ou cortam-se em três pontos distintos (figura b).

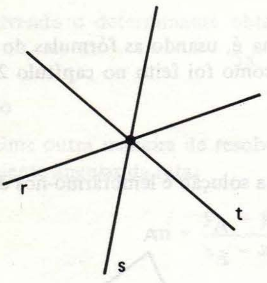


Fig. a

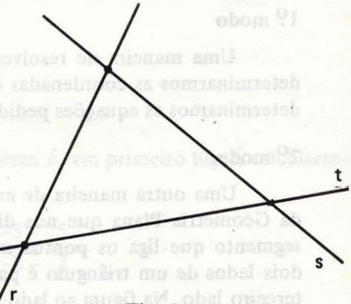
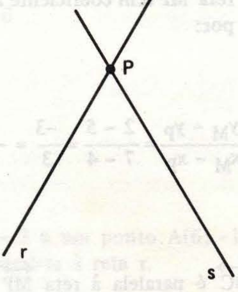


Fig. b

O problema pede a situação da figura b. Vamos então, em primeiro lugar, determinar a interseção das retas r e s, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} y = 4x - 1 \\ y = -3x + 2 \end{cases}$$

e obtendo o ponto $P(\frac{3}{7}; \frac{5}{7})$.



Devemos agora garantir que o ponto P não pertença à reta t, isto é, suas coordenadas não devem satisfazer a equação $y = 5x + (3k - 7)$:

$$y_P \neq 5x_P + (3k - 7)$$

$$\frac{5}{7} \neq 5(\frac{3}{7}) + (3k - 7)$$

Simplificando esta desigualdade obtemos:

$$k \neq \frac{39}{21}$$

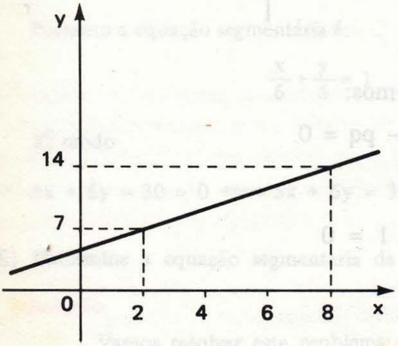
Exercícios Propostos

4.16) Determine a equação da reta que passa pelo ponto A(3; -4) e cujo coeficiente angular é igual a $-\frac{1}{3}$.

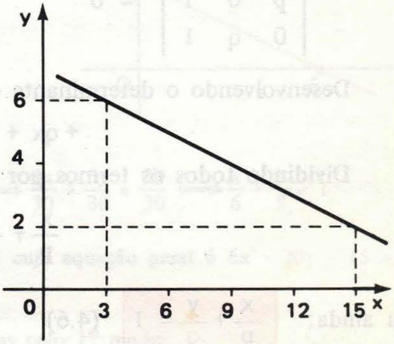
4.17) Determine a equação da reta que passa pelos pontos $M(-\frac{4}{3}; 1)$ e $N(6; -\frac{1}{2})$.

4.18) Determine as equações das retas cujos desenhos são dados a seguir:

a)



b)



4.19) Consideremos uma reta t de equação $2x - 5y + 1 = 0$ e um ponto D(3; -4). Determine a equação da reta s sabendo que ela passa por D e é paralela a t.

4.20) Determine os valores de k de modo que as retas de equações $y = (3k - 1)x + 1$ e $y = (k^2 - 4k + 9)x + 7$ sejam paralelas.

4.21) As retas r, s e t têm equações $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$ e $4x - y + 2 = 0$. Determine a equação da reta que é paralela à reta r e que passa pela interseção das retas s e t.

4.22) Determine a equação da reta que passa pelo ponto $A(\sqrt{3}; 4)$ e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

4.23) Mostre que o quadrilátero ABCD, onde A(-2; -5), B(2; 6), C(4; 7) e D(0; -4) é um paralelogramo.
(Sugestão: Mostre que $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$)

4.24) No paralelogramo ABCD, são dadas as equações das retas que contêm os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$:

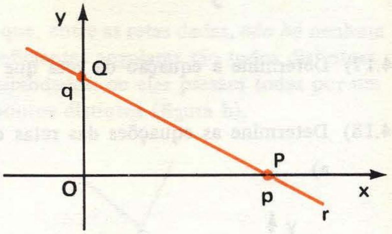
$\overleftrightarrow{AB}$ $5x + y - 2 = 0$

$\overleftrightarrow{BC}$ $3x - 2y - 1 = 0$

Sendo D(-2; 0) determine as coordenadas de A e C.

4.6 – EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DA RETA

Consideremos uma reta **r** que *não passa pela origem* e intercepta os eixos Ox e Oy nos pontos P(p; 0) e Q(0; q) respectivamente (observe que devemos ter $p \neq 0$ e $q \neq 0$). Para obtermos a equação dessa reta podemos recorrer à condição de alinhamento:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante obtemos:

$$+ qx + py - pq = 0$$

Dividindo todos os termos por **pq**:

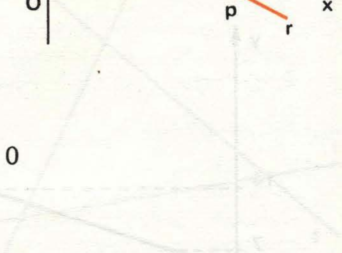
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0$$

ou ainda: $\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$ (4.6)

A equação 4.6 é a **equação segmentária** da reta **r**.

Exemplos

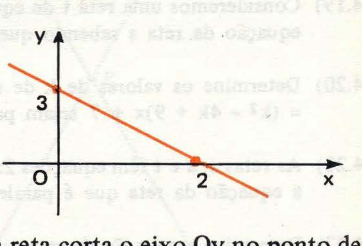
a) Consideremos a reta cuja equação segmentária é $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Como o denominador de **x** é **2** concluímos que a reta corta o eixo Ox no ponto de abscissa 2.



Como o denominador de **y** é **3**, concluímos que a reta corta o eixo Oy no ponto de ordenada **3**.

b) A equação segmentária da reta s é:

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{2} = 1$$



Observemos mais uma vez que uma reta, para ter equação segmentária, deve cortar os dois eixos em pontos distintos, isto é, não pode passar pela origem do sistema de coordenadas e não pode ser paralela a nenhum dos eixos.

Exercícios Resolvidos

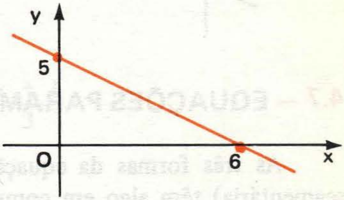
1.25) Determine a **equação segmentária** da reta cuja **equação geral** é $5x + 6y - 30 = 0$.

Solução

1º modo

Vamos determinar os pontos onde a reta corta os eixos.

$$\left[\begin{array}{l} \quad\quad\;\; 5x + 6y \; - 30 = 0 \\ x = 0 \Longleftrightarrow 5(0) + 6y \; - 30 = 0 \Longleftrightarrow y = 5 \\ y = 0 \Longleftrightarrow 5x \; + 6(0) - 30 = 0 \Longleftrightarrow x = 6 \end{array}\right.$$



Portanto a equação segmentária é:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$$

2º modo

$$5x + 6y - 30 = 0 \Longleftrightarrow 5x + 6y = 30 \Longleftrightarrow \frac{5x}{30} + \frac{6y}{30} = \frac{30}{30} \Longleftrightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$$

4.26) Determine a equação segmentaria da reta cuja equação geral é $6x - 20y - 15 = 0$.

Solução

Vamos resolver este problema apenas pelo 2º modo.

$$6x - 20y - 15 = 0 \Longleftrightarrow 6x - 20y = 15 \Longleftrightarrow \frac{6x}{15} - \frac{20y}{15} = \frac{15}{15} \Longleftrightarrow \frac{2x}{5} - \frac{4y}{3} = 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{-\frac{3}{4}} = 1$$

Exercícios Propostos

4.27) Obtenha as equações segmentárias das retas cujas equações são dadas abaixo:

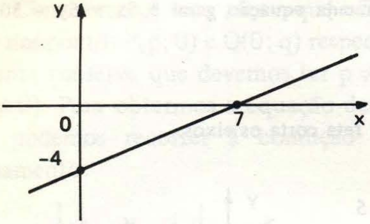
a) $4x + 7y - 28 = 0$
b) $3x - 40y - 4 = 0$
c) $y = 3x - 1$
d) $4x - 9y = 0$

4.28) Dê as equações gerais das retas cujas equações segmentárias são dadas a seguir:

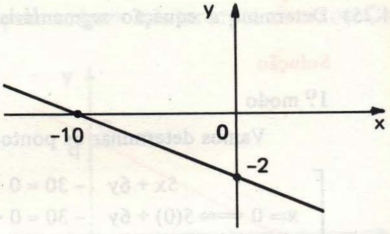
a) $\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1$ b) $\frac{x}{-\frac{4}{5}} - \frac{y}{\frac{2}{3}} = 1$

4.29) Dê as equações segmentárias das retas cujos desenhos são dados a seguir.

a)



b)



4.7 – EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

As três formas da equação da reta que vimos até agora (geral, reduzida e segmentária) têm algo em comum: através de **uma única** equação relacionamos as coordenadas **x** e **y** de um ponto genérico da reta. Porém, em certos casos, pode ser vantajoso expressar as coordenadas **x** e **y** em função de uma **terceira variável** chamada *parâmetro*. Obtemos assim as chamadas **equações paramétricas** da reta.

Exemplos

a) Consideremos a reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \end{cases}$$

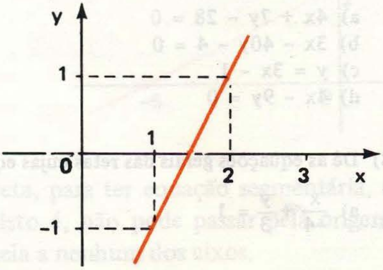
Aqui estamos expressando as coordenadas **x** e **y** de um ponto qualquer da reta, em função do parâmetro **t**. Poderemos (se quisermos) fazer o desenho da reta atribuindo valores **arbitrários** a **t**. Por exemplo, vamos atribuir a **t** os valores **0** e **1**:

$$t = 0 \begin{cases} x = 0 + 1 = 1 \\ y = 2(0) - 1 = -1 \end{cases}$$ Para t = 0 o ponto é (1; -1)

$$t = 1 \begin{cases} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 2(1) - 1 = 1 \end{cases}$$ Para t = 1 o ponto é (2; 1)

Se quisermos, poderemos também obter a equação geral da reta "eliminando" o parâmetro **t**. Para isso vamos isolar o parâmetro **t** em uma das equações e substituí-lo na outra:

$$x = t + 1 \iff t = x - 1$$



Substituindo na equação $y = 2t - 1$ obtemos:

$$y = 2(x - 1) - 1$$

ou: $2x - y - 3 = 0$

b) Consideremos a reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

e vamos obter sua equação geral:

$$x = 3t - 1 \iff t = \frac{x + 1}{3}$$

Substituindo em $y = 2t - 1$ obtemos:

$$y = 2\left(\frac{x + 1}{3}\right) - 1$$

ou: $2x - 3y + 5 = 0$

c) Seja a reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = \frac{8}{3}t + 3 \end{cases}$$

$$x = 4t + 2 \iff t = \frac{x - 2}{4}$$

Substituindo em $y = \frac{8}{3}t + 3$ obtemos:

$$y = \frac{8}{3}\left(\frac{x - 2}{4}\right) + 3$$

ou: $2x - 3y + 5 = 0$

Observemos os exemplos **b** e **c** acima. Reparemos que para **dois pares diferentes** de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = \frac{8}{3}t + 3 \end{cases}$$

obtivemos a **mesma equação geral**, isto é, aqueles dois pares de equações paramétricas representam a **mesma reta**.

Com estes exemplos quisemos mostrar que **uma única reta** admite uma infinidade de pares de equações paramétricas do tipo

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \alpha' t + \beta' \end{cases}$$

onde α, α', β e β' são números reais tais que α e α' não são simultaneamente nulos.

Exercícios Resolvidos

4.30) Obter a equação geral de cada reta a seguir, dadas por suas equações paramétricas.

a) $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -3t + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 8t - 1 \end{cases}$

Solução

a) $x = 2t + 5 \Longleftrightarrow t = \dfrac{x - 5}{2}$

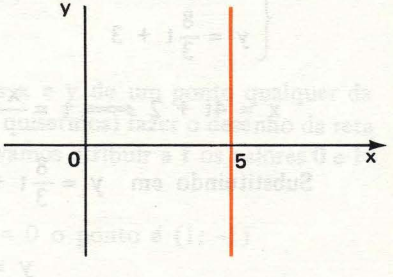
Substituindo na equação $y = -3t + 1$ obtemos:

$$y = -3\left(\frac{x-5}{2}\right) + 1$$

ou: $3x + 2y - 17 = 0$

b) Neste caso temos $x = 5$ para qualquer valor de y. Portanto trata-se da reta paralela ao eixo Oy cuja equação geral é

$$x - 5 = 0$$



4.31) Obtenha um par de equações paramétricas para a reta cuja equação geral é $4x - 3y + 5 = 0$.

Solução

Como já chamamos a atenção, este problema tem infinitas soluções. Para obter uma solução, substituímos a variável x por uma expressão do tipo $\alpha t + \beta$. Façamos, por exemplo:

$$x = 6t + 9$$

Substituindo em $4x - 3y + 5 = 0$ obtemos:

$$4(6t + 9 - 3y + 5 = 0$$

$$24t + 36 - 3y + 5 = 0$$

$$y = 8t + \frac{41}{3}$$

Assim, um par de equações paramétricas da reta dada é:

$$\begin{cases} x = 6t + 9 \\ y = 8t + \dfrac{41}{3} \end{cases}$$

4.32) Consideremos uma reta cujas equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \alpha' t + \beta' \end{cases}$$

Mostre que a reta passa pelo ponto $(\beta; \beta')$.

Solução

Fazendo $t = 0$ nas equações dadas, obtemos:

$$\begin{cases} x = \alpha(0) + \beta = \beta \\ y = \alpha'(0) + \beta' = \beta' \end{cases}$$

Portanto um dos pontos da reta é $(\beta; \beta')$.

4.33) Suponhamos que $\begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \alpha' t + \beta' \end{cases}$ é um par de equações paramétricas de uma reta, tal que $\alpha \neq 0$. Mostre que o coeficiente angular m da reta é $m = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$.

Solução

$$x = \alpha t + \beta \Longleftrightarrow t = \frac{x - \beta}{\alpha}$$

Substituindo em $y = \alpha' t + \beta'$ obtemos:

$$y = \alpha'\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right) + \beta' = \underbrace{\frac{\alpha'}{\alpha}}_{m} x - \frac{\alpha'\beta}{\alpha} + \beta'$$

Portanto $m = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$

4.34) Um dos pares de equações paramétricas de uma reta é

$$\begin{cases} x = 4t + 7 \\ y = 6t - 9 \end{cases}$$

Determine seu coeficiente angular.

Solução

Usando o resultado do exercício anterior temos:

$$m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Exercícios Propostos

4.35) Dadas as equações paramétricas, obtenha a equação geral de cada reta a seguir:

a) $\begin{cases} x = -5t + 2 \\ y = 4t + 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 6t + 9 \\ y = -7 \end{cases}$

4.36) Dada a equação geral, obtenha um par de equações paramétricas, usando a substituição sugerida, em cada caso a seguir.

a) $6x - 5y + 2 = 0$; $x = 2t - 1$

b) $6x - 5y + 2 = 0$; $y = 4t + 10$

c) $10x - y + 1 = 0$; $x = 3t + 2$

4.37) Consideremos uma reta de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -3t + 9 \\ y = 4t - 1 \end{cases}$$

Determine seu coeficiente angular.

4.38) Obtenha a interseção das retas r e s dadas por suas equações paramétricas:

(r) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 3 \end{cases}$ (s) $\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 2t + 1 \end{cases}$

4.39) Mostre que os pontos médios dos lados de um quadrilátero convexo são vértices de um paralelogramo.

Capítulo

5

Posições relativas de duas retas

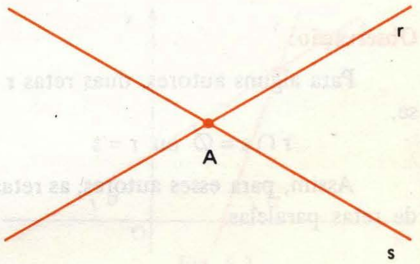
5.1 – INTRODUÇÃO

Sejam r e s duas retas contidas em um mesmo plano. Diremos que:

a) **r** e **s** são concorrentes se, e somente se, elas têm apenas um ponto em comum, isto é,

$r \cap s = \{A\}$

onde **A** é o ponto de interseção.

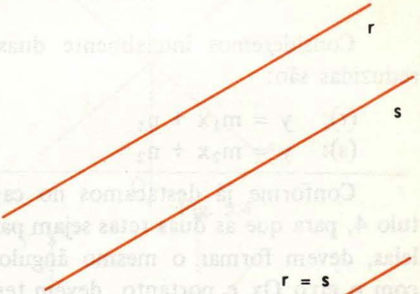


b) **r** e **s** são paralelas se, e somente se, elas não têm **nenhum ponto** em comum, isto é,

$r \cap s = \emptyset$

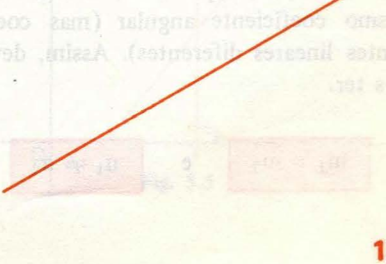
Para indicar que **r** e **s** são paralelas, escreveremos:

$r \parallel s$



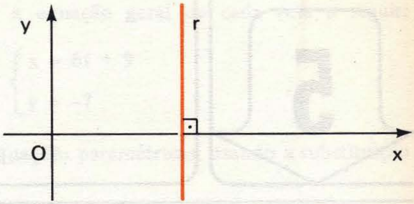
c) **r** e **s** são coincidentes se, e somente se, são a **mesma reta**, isto é:

$r = s$

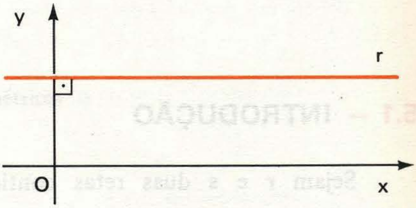


Dada uma reta **r** de um plano cartesiano diremos que:

a) **r** é vertical se, e somente se, **r** é paralela ao eixo Oy (ou perpendicular ao eixo Ox)



b) **r** é horizontal se, e somente se, **r** é paralela ao eixo Ox



Observação:

Para alguns autores, duas retas **r** e **s** de um plano são paralelas se, e somente se,

$$r \cap s = \emptyset \text{ ou } r = s$$

Assim, para esses autores, as retas coincidentes constituem um caso particular de retas paralelas.

5.2 – RETAS PARALELAS

Consideremos inicialmente duas retas **r** e **s** não-verticais, cujas equações reduzidas são:

(r): $y = m_1x + n_1$
(s): $y = m_2x + n_2$

Conforme já destacamos no capítulo 4, para que as duas retas sejam paralelas, devem formar o mesmo ângulo θ com o eixo Ox e, portanto, devem ter o mesmo coeficiente angular (mas coeficientes lineares diferentes). Assim, devemos ter:

$m_1 = m_2$ e $n_1 \neq n_2$

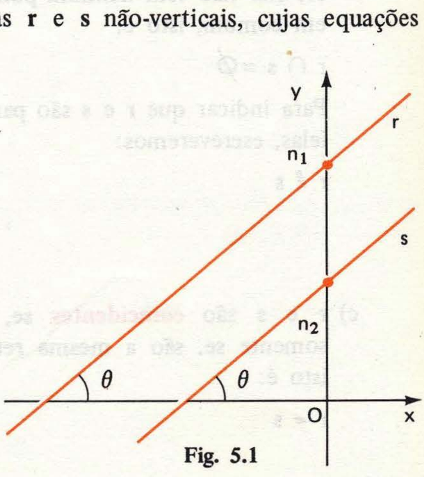


Fig. 5.1

No caso em que as retas **r** e **s** são verticais, são também paralelas e ambas têm equação do tipo

$$x = \text{constante}$$

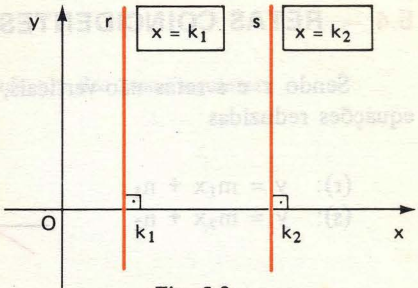


Fig. 5.2

5.3 – RETAS CONCORRENTES

Consideremos agora **r** e **s** retas não-verticais e concorrentes, cujas equações reduzidas são:

(r): $y = m_1x + n_1$
(s): $y = m_2x + n_2$

Neste caso os ângulos formados por **r** e **s** com o eixo Ox devem ser distintos ($\theta \neq \alpha$) e portanto as duas retas devem ter coeficientes angulares distintos

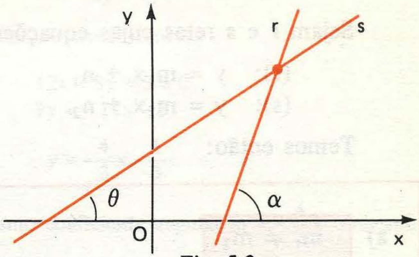


Fig. 5.3

$$m_1 \neq m_2$$

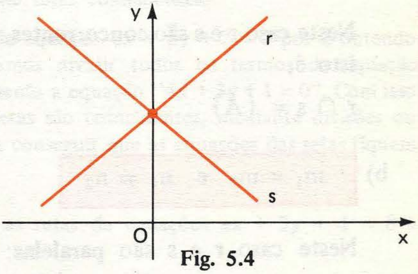


Fig. 5.4

Quanto aos coeficientes lineares, podem ser distintos (como na figura 5.3) ou iguais (como na figura 5.4).

Caso uma das retas seja vertical, para que sejam concorrentes basta que a outra reta **não seja** vertical.

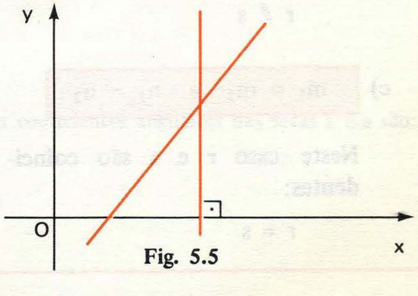


Fig. 5.5

5.4 – RETAS COINCIDENTES

Sendo **r** e **s** retas não-verticais, de equações reduzidas

(r): $y = m_1x + n_1$
(s): $y = m_2x + n_2$

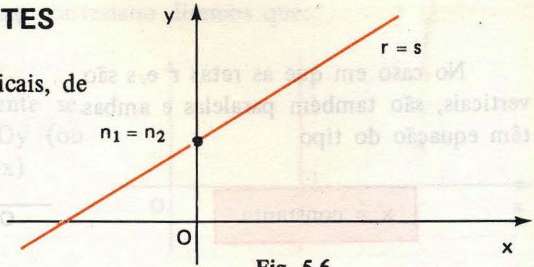


Fig. 5.6

para que sejam coincidentes, devemos ter obviamente:

$m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$

5.5 – RESUMO

Sejam **r** e **s** retas cujas equações reduzidas são:

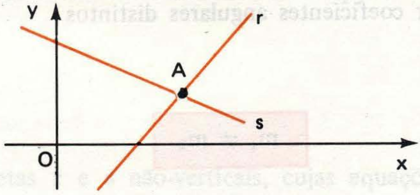
(r): $y = m_1x + n_1$
(s): $y = m_2x + n_2$

Temos então:

a) $m_1 \neq m_2$

Neste caso **r** e **s** são **concorrentes**, isto é,

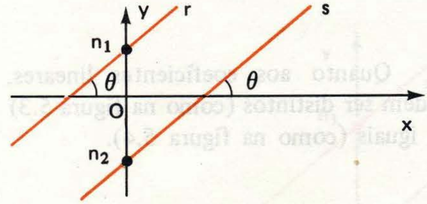
$r \cap s = \{A\}$



b) $m_1 = m_2$ e $n_1 \neq n_2$

Neste caso **r** e **s** são **paralelas**:

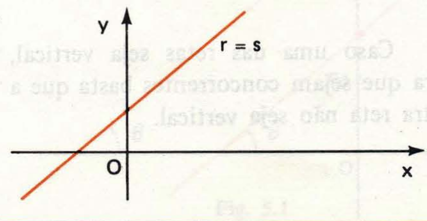
$r \parallel s$



c) $m_1 = m_2$ e $n_1 = n_2$

Neste caso **r** e **s** são **coincidentes**:

$r = s$



5.1) Dê a posição relativa das retas **r** e **s** em cada um dos casos seguintes:

a) $\begin{cases} (r): & y = 4x + 2 \\ (s): & y = 4x - 9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (r): & 2x + 5y - 2 = 0 \\ (s): & 3x - 9y + 7 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (r): & 8x + 6y + 2 = 0 \\ (s): & 12x + 9y + 3 = 0 \end{cases}$

Solução

a) As retas têm o mesmo coeficiente angular ($m = 4$) porém coeficientes lineares distintos (2 e –9). Portanto são retas paralelas.

b) (r): $2x + 5y - 2 = 0$ (s): $3x - 9y + 7 = 0$

$m_r = -\frac{2}{5}$ $m_s = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$

Aqui temos $m_r \neq m_s$ e portanto as retas são concorrentes.

c) (r): $8x + 6y + 2 = 0$ (s): $12x + 9y + 3 = 0$

$6y = -8x - 2$ $9y = -12x - 3$

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ $y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

Como vemos, as retas têm o mesmo coeficiente angular $m = -\frac{4}{3}$ e o mesmo coeficiente linear $n = -\frac{1}{3}$. Portanto, são retas coincidentes.

Vamos dividir todos os termos da equação $8x + 6y + 2 = 0$ por **2** obtendo "$4x + 3y + 1 = 0$". Em seguida vamos dividir todos os termos da equação $12x + 9y + 3 = 0$ por **3** obtendo **novamente** a equação "$4x + 3y + 1 = 0$". Com isso queremos destacar que quando duas retas são coincidentes, mediante divisões ou multiplicações "convenientes", podemos conseguir que as equações das retas fiquem iguais.

5.2) Determine os valores de **a** para os quais as retas de equações $ax + 3y + 1 = 0$ e $12x + ay + 2 = 0$ são paralelas.

Solução

(r): $ax + 3y + 1 = 0$
(s): $12x + ay + 2 = 0$

Suponhamos inicialmente $a \neq 0$. Assim os coeficientes angulares das retas **r** e **s** são:

$m_r = -\frac{a}{3}$ e $m_s = -\frac{12}{a}$

enquanto os coeficientes lineares são:

$n_r = -\frac{1}{3}$ e $n_s = -\frac{2}{a}$

Para que r e s sejam paralelas devemos ter

$$m_r = m_s \quad (I)$$

e $\quad n_r \neq n_s \quad (II)$

A condição (I) nos dá:

$$-\frac{a}{3} = -\frac{12}{a}$$

ou: $a = \pm 6$.

A condição (II) é: $-\frac{1}{3} \neq -\frac{2}{a}$

Para $a = 6$, a condição (II) fica: $-\frac{1}{3} \neq -\frac{2}{6}$ (falso)

Para $a = -6$, a condição (II) fica: $-\frac{1}{3} \neq \frac{-2}{-6}$ (verdadeiro)

Assim, apenas o valor $a = -6$ deve ser aceito.

Finalmente, admitindo $a = 0$, as equações de r e s ficariam:

(r): $3y + 1 = 0$
(s): $12x + 2 = 0$

e obviamente não seriam paralelas. Assim, a resposta do problema é $a = -6$.

5.3) Estude, segundo os valores de a, as posições relativas das retas r e s dadas pelas equações:

(r): $(a + 2)x + 4y + 4 = 0$
(s): $(2a + 1)x + (a + 3)y + 5 = 0$

Solução

Suponhamos inicialmente $a + 3 \neq 0$, isto é, $a \neq -3$. Assim temos:

$$m_r = -\frac{a+2}{4} \qquad m_s = -\frac{2a+1}{a+3}$$

$$n_r = -\frac{4}{4} = -1 \qquad n_s = \frac{-5}{a+3}$$

$$m_r = m_s \iff -\frac{a+2}{4} = -\frac{2a+1}{a+3} \iff a^2 - 3a + 2 = 0 \iff a = 1 \text{ ou } a = 2$$

$$n_r = n_s \iff -1 = \frac{-5}{a+3} \iff a = 2$$

Portanto:

1º) para $a = 1$ temos $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$ e portanto as retas são paralelas.

2º) para $a = 2$ temos $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$ e assim as retas são coincidentes.

3º) para $a \neq 1$ e $a \neq 2$ teremos $m_r \neq m_s$ e as retas são concorrentes.

Finalmente vamos analisar a possibilidade $a + 3 = 0$, isto é, $a = -3$. Substituindo nas equações dadas obtemos:

(r): $-x + 4y + 4 = 0$ $\quad \begin{cases} m_r = \frac{1}{4} \\ n_r = -1 \end{cases}$

(s): $-5x + 5 = 0$ $\quad$ s é vertical

Isto significa que para $a = -3$ as retas serão concorrentes.

Em resumo temos:

$a \neq 1$ e $a \neq 2$ $\Longleftrightarrow$ **r** e **s** são concorrentes
$a = 1$ $\Longleftrightarrow$ **r** e **s** são paralelas
$a = 2$ $\Longleftrightarrow$ **r** e **s** são coincidentes

5.4) Mostre que as retas **r** e **s** de equações
(r): $(2a + 1)x + (a - 1)y + 1 = 0$
(s): $(a + 2)x + (a + 1)y + 3 = 0$
são concorrentes para todo $a \in \mathbb{R}$.

Solução

Suponhamos inicialmente $a - 1 \neq 0$ e $a + 1 \neq 0$, isto é, $a \neq 1$ e $a \neq -1$. Temos então:

$$m_r = -\frac{2a + 1}{a - 1} \quad \text{e} \quad m_s = -\frac{a + 2}{a + 1}$$

Vamos verificar se é possível ocorrer $m_r = m_s$:

$$m_r = m_s \Longleftrightarrow -\frac{2a + 1}{a - 1} = -\frac{a + 2}{a + 1} \Longleftrightarrow a^2 + 2a + 3 = 0$$

Calculando o discriminante desta última equação obtemos:

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(3) = -8$$

Portanto, como $\Delta < 0$, a equação $a^2 + 2a + 3 = 0$ não possui raízes reais; então "$m_r = m_s$" não pode ocorrer. Assim, teremos $m_r \neq m_s$ e as retas serão concorrentes para qualquer **a** (com $a \neq 1$ e $a \neq -1$).

Vamos analisar agora os casos $a = 1$ e $a = -1$. Para $a = 1$ as equações de **r** e **s** ficam:
(r): $3x + 1 = 0$
(s): $3x + 2y + 3 = 0$
e é óbvio que **r** e **s** serão concorrentes. Para $a = -1$, as equações de **r** e **s** ficam:
(r): $-x - 2y + 1 = 0$
(s): $x + 3 = 0$
e é fácil concluir que novamente **r** e **s** serão concorrentes.

Em resumo, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, as retas **r** e **s** serão concorrentes.

5.5) Determine o valor de **k** de modo que a representação gráfica do sistema

$$\begin{cases} 4x - 5y + 1 = 0 & \text{(I)} \\ 3x + ky + 7 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

seja um ponto.

Solução

O que o problema pede equivale a dizer que as retas cujas equações são (I) e (II), devem ser concorrentes.

Suponhamos inicialmente $k \neq 0$. Assim: $m_r = \frac{4}{5}$ e $m_s = -\frac{3}{k}$

Para que as retas sejam concorrentes, impomos $m_r \neq m_s$

$$m_r \neq m_s \iff \frac{4}{5} \neq -\frac{3}{k} \iff k \neq -\frac{15}{4}$$

Analisemos agora o caso $k = 0$. Substituindo nas equações dadas temos:

$$\begin{cases} 4x - 5y + 1 = 0 \\ 3x + 7 = 0 \end{cases}$$

e é fácil verificar que estas equações representam retas concorrentes.

Em resumo, para que a representação gráfica do sistema seja um ponto, basta que $k \neq -\frac{15}{4}$.

5.6) Determine o valor de k de modo que a representação gráfica do sistema

$$\begin{cases} 4x - (k + 2)y + 1 = 0 & \text{(I)} \\ (k + 3)x - 14y + 2 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

seja uma reta.

Solução

Para que o sistema represente apenas uma reta, as retas cujas equações são (I) e (II), devem ser coincidentes. Supondo inicialmente $k + 2 \neq 0$, temos:

$$m_I = \frac{4}{k+2} \qquad n_I = \frac{1}{k+2}$$

$$m_{II} = \frac{k+3}{14} \qquad n_{II} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

Assim, para que as retas sejam coincidentes devemos ter $m_I = m_{II}$ e $n_I = n_{II}$.

$$\begin{cases} m_I = m_{II} \iff \frac{4}{k+2} = \frac{k+3}{14} \iff k = 5 \text{ ou } k = -10 & \text{(III)} \\ n_I = n_{II} \iff \frac{1}{k+2} = \frac{1}{7} \iff k = 5 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Para satisfazer simultaneamente as condições (III) e (IV), devemos ter $k = 5$.

Analisemos agora a possibilidade $k + 2 = 0$, isto é, $k = -2$. Substituindo nas equações (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} 4x + 1 = 0 \\ x - 14y + 2 = 0 \end{cases}$$

Estas duas últimas equações *não* representam retas coincidentes. Portanto, para satisfazer a condição do problema, devemos ter apenas $k = 5$.

5.7) Diga as posições relativas das retas r e s em cada um dos casos abaixo.

a) (r): $5x + y - 2 = 0$ (s): $3x - 2y - 1 = 0$
b) (r): $x - y - 3 = 0$ (s): $2x - 2y + 3 = 0$
c) (r): $ax + y - 1 = 0$ (s): $x - ay + 1 = 0$
d) (r): $ax + 2ay - 5 = 0$ (s): $x + 2y - 5 = 0$

5.8) Para que valores de a as retas de equações $ax + 3y - 6 = 0$ e $12x + ay - 12 = 0$ são paralelas?

5.9) Para que valores de k as retas de equações $kx - 2y + 6 = 0$ e $x + y - 3 = 0$ são concorrentes?

5.10) Estude, segundo os valores de k, as posições relativas das retas r e s de equações:
(r): $(k - 2)x + 3y + 1 = 0$
(s): $kx + (k + 2)y - k = 0$

5.11) Estude, segundo os valores de k, as posições relativas das retas r e s dadas por:
(r): $(k - 1)x + 5y + 2k = 0$
(s): $3x + (k + 1)y + 8 = 0$

5.12) Mostre que, para todo k, as retas de equações
(r): $(k + 1)x + y + k = 0$
(s): $(2k + 1)x + (k + 2)y - 1 = 0$
são concorrentes.

5.6 – POSIÇÕES RELATIVAS E EQUAÇÃO GERAL

Consideremos duas retas r e s cujas equações reduzidas e gerais são:

(r): $y = m_1x + n_1$ (r): $a_1x + b_1y + c_1 = 0$
(s): $y = m_2x + n_2$ (s): $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Suponhamos ainda: $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $c_2 \neq 0$.

Lembrando que $m = -\frac{a}{b}$ e $n = -\frac{c}{b}$ temos:

a) A condição $m_1 = m_2$ pode ser escrita $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ ou, ainda, $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

b) A condição $n_1 = n_2$ pode ser escrita $-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2}$ ou, ainda, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Em resumo:

$$(r):\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$(s):\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

1º) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ **r e s são concorrentes**

2º) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ **r e s são paralelas**

3º) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ **r e s são coincidentes**

Exemplos

a) Consideremos as retas de equações $4x - 3y + 7 = 0$ e $8x - 6y + 1 = 0$. Temos:

$$\frac{4}{8} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{7}{1}$$

Portanto as retas são paralelas

b) Consideremos as retas de equações $2x + 3y + 1 = 0$ e $5x + 7y + 2 = 0$. Temos:

$$\frac{2}{5} \neq \frac{3}{7}$$

Portanto as retas são concorrentes

c) Consideremos o problema 5.2. O problema pede para determinarmos os valores de **a** de modo que as retas de equações $ax + 3y + 1 = 0$ e $12x + ay + 2 = 0$ sejam paralelas. Supondo inicialmente $a \neq 0$, podemos colocar:

$$\frac{a}{12} = \frac{3}{a} \neq \frac{1}{2}$$

A condição $\frac{a}{12} = \frac{3}{a}$ nos dá $a = \pm 6$. Porém a possibilidade $a = 6$ não serve pois teríamos $\frac{6}{12} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Ficamos apenas com $a = -6$.

Analisando agora a possibilidade $a = 0$, fazemos as substituições nas equações dadas obtendo:

$$\begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ 12x + 2 = 0 \end{cases}$$

Estas duas últimas equações *não* representam retas paralelas. Portanto o único valor que nos serve é $a = -6$.

5.7 – RETAS PARALELAS E EQUAÇÃO GERAL

Consideremos duas retas *paralelas* **r** e **s** cujas equações gerais são:

$$(r): a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$(s): a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Suponhamos ainda que: $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$.

Como as retas são paralelas temos: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

A relação $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ significa que, dividindo os termos de uma das equações por uma constante "conveniente" conseguiremos obter o mesmo coeficiente para **x** e o mesmo coeficiente para **y** nas duas equações.

Exemplo

Consideremos as retas **r** e **s**:

$$(r): \quad 12x - 20y + 7 = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$(s): \quad -15x + 25y + 9 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Como $\frac{12}{-15} = \frac{-20}{25} \neq \frac{7}{9}$ concluímos que **r** e **s** são paralelas. Vamos dividir todos os termos da equação (I) por **4** obtendo $3x - 5y + \frac{7}{4} = 0$. Em seguida dividimos todos os termos da equação (II) por **-5** obtendo $3x - 5y - \frac{9}{5} = 0$. Assim as retas **r** e **s** podem ser representadas pelas equações:

$$(r): \quad 3x - 5y + \frac{7}{4} = 0$$
$$(s): \quad 3x - 5y - \frac{9}{5} = 0$$

Conseguimos o mesmo coeficiente para **x** e o mesmo coeficiente para **y** nas duas equações. Apenas os termos independentes são distintos: $\frac{7}{4}$ e $-\frac{9}{5}$.

Exercício Resolvido

5.13) Consideremos uma reta **r** de equação $5x - 2y + 7 = 0$ e um ponto **P**$(1; -4)$. Determine a equação da reta **s** que passa por **P** e é paralela à reta **r**.

Solução

1º modo

De acordo com as observações anteriores, se a equação de **r** é

$5x - 2y + 7 = 0$

a equação da reta **s** (paralela a **r**) pode ser escrita:

$5x - 2y + k = 0 \qquad (I)$

Para obtermos a constante k, partimos do fato de que P(1; -4) pertence a s. Assim, vamos substituir as coordenadas de P na equação (I), obtendo:

$$5(1) - 2(-4) + k = 0$$

donde: $k = -13$

Portanto, a equação de s é: $5x - 2y - 13 = 0$

2º modo

Se a equação de **r** é $5x - 2y + 7 = 0$, seu coeficiente angular é $m = \frac{5}{2}$. A reta s, sendo paralela a **r**, deve ter o mesmo coeficiente angular de **r**. Como s passa por **P**, sua equação pode ser escrita (ver capítulo 4, equação (4.5)):

$$y - y_P = m(x - x_P)$$

$$y - (-4) = \frac{5}{2}(x - 1)$$

ou: $5x - 2y - 13 = 0$

Exercícios Propostos

5.14) Determine a equação de uma reta que passa pelo ponto $(-5; \frac{2}{3})$ e é paralela à reta de equação $-4x + 9y + 1 = 0$.

5.15) Consideremos as retas r e s de equações $4x - y + 2 = 0$ e $3x + 2y - 1 = 0$ respectivamente. Um paralelogramo tem dois de seus lados contidos nas retas r e s. Sabendo que um dos vértices do paralelogramo é P(1; 2), determine as equações das retas que passam pelos outros dois lados.

5.16) Para o paralelogramo do problema anterior, determine as coordenadas dos outros três vértices.

5.8 – RETAS PERPENDICULARES

Consideremos duas retas perpendiculares **r** e **s** (que não sejam paralelas a nenhum dos eixos) tais que suas inclinações sejam respectivamente θ_r e θ_s e seus coeficientes angulares sejam respectivamente m_r e m_s.

Podemos supor, para facilitar o raciocínio, que

$$\theta_s > \theta_r$$

Em relação ao triângulo colorido na figura 5.7, o ângulo θ_s é **externo**; portanto, ele é igual à soma dos **internos não-adjacentes**:

$$\theta_s = \theta_r + \frac{\pi}{2}$$

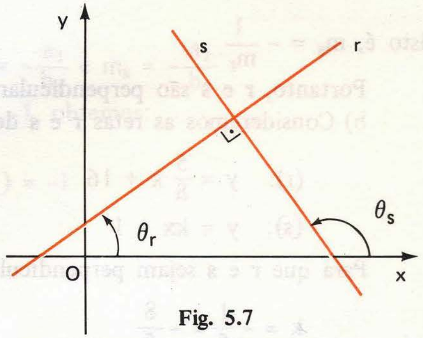


Fig. 5.7

Assim: $\operatorname{tg}\theta_s = \operatorname{tg}(\theta_r + \frac{\pi}{2})$ (I)

Da *trigonometria* sabemos que: $\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotg}\alpha$

Portanto, a relação (I) pode ser escrita:

$$\operatorname{tg}\theta_s = -\operatorname{cotg}\theta_r$$

ou ainda: $\operatorname{tg}\theta_s = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta_r}$ (II)

Como $\operatorname{tg}\theta_s = m_s$ e $\operatorname{tg}\theta_r = m_r$ a relação (II) pode ser escrita:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \quad (5.1)$$

ou:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

ou ainda:

$$m_r \cdot m_s = -1 \quad (5.2)$$

Exemplos

a) Consideremos as retas **r** e **s** cujas equações reduzidas são:

(r): $y = \frac{3}{4}x + 9$

(s): $y = -\frac{4}{3}x + 1$

O coeficiente angular de **r** é $m_r = \frac{3}{4}$ e o coeficiente angular de **s** é $m_s = -\frac{4}{3}$

Reparamos que:

$$-\frac{4}{3} = -\frac{1}{\frac{3}{4}}$$

isto é, $m_s = -\frac{1}{m_r}$

Portanto, **r** e **s** são perpendiculares.

b) Consideremos as retas **r** e **s** de equações

$$(r): \quad y = \frac{5}{8}x + 16$$

$$(s): \quad y = kx + 1$$

Para que **r** e **s** sejam perpendiculares devemos ter

$$k = -\frac{1}{\frac{5}{8}} = -\frac{8}{5}$$

c) Sejam as retas **r** e **s** de equações

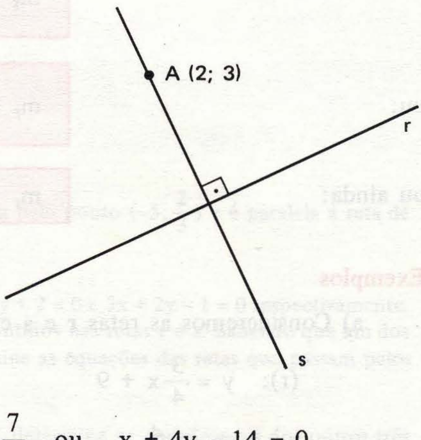
$$(r): \quad y = kx + 1$$

$$(s): \quad y = 7x - 9$$

Para que **r** e **s** sejam perpendiculares, devemos ter

$$k = -\frac{1}{7}$$

d) Consideremos a reta **r** de equação $y = 4x + 10$ e o ponto $A(2; 3)$. Vamos determinar a equação da reta **s** que passa por A e é perpendicular a **r**. O coeficiente angular de **r** é $m_r = 4$. Portanto o coeficiente angular de **s** é $m_s = -\frac{1}{4}$. Sabendo que s passa por A, vamos usar a equação (4.5) do capítulo 4, para obtermos a equação de **s**:



$$y - y_A = m_s(x - x_A)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

Simplificando obtemos: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$ ou $x + 4y - 14 = 0$

5.9 – RETAS PERPENDICULARES E EQUAÇÃO GERAL

Consideremos, inicialmente, duas retas **r** e **s** não-paralelas a nenhum dos eixos, cujas equações gerais são:

$$(r): \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$(s): \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Seus coeficientes angulares são $m_r = -\frac{a_1}{b_1}$ e $m_s = -\frac{a_2}{b_2}$

Introduzindo na relação $m_r \cdot m_s = -1$, obtemos:

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$$

ou: $$a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \qquad (5.3)$$

A relação $m_r \cdot m_s = -1$ vale apenas para retas não-paralelas a nenhum dos eixos; no entanto a relação $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ vale mesmo que a reta **r** (ou **s**) seja paralela a um dos eixos.

Consideremos agora uma reta **r** de equação geral

$$ax + by + c = 0$$

Conforme mostraremos a seguir, a equação de uma reta **s**, perpendicular a **r**, poderá ser escrita do seguinte modo:

$$bx - ay + k = 0$$

De fato, de acordo com a equação (5.3) temos:

$$ab + (b)(-a) = 0$$

e portanto, as retas são perpendiculares.

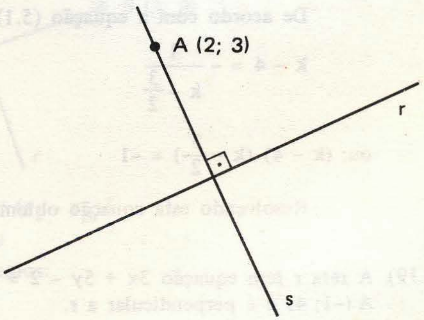
Exemplo

Consideremos novamente o exemplo resolvido no item anterior onde, dada a reta **r** de equação $y = 4x + 10$, queríamos a equação da reta **s** que passa por $A(2; 3)$ e é perpendicular a **r**.

Temos que: $y = 4x + 10 \iff$
$\iff 4x - y + 10 = 0$

Assim a equação geral de **r** é

$$4x - y + 10 = 0$$



Portanto a equação geral de s pode ser escrita do seguinte modo:

$$- x - 4y + k = 0 \quad \text{(I)}$$

A reta s passa por A; portanto podemos substituir as coordenadas de A na equação (I):

$$- 2 - 4(3) + k = 0$$

obtendo: $k = 14$

Concluímos então que a reta s tem equação geral

$$- x - 4y + 14 = 0$$

Exercícios Resolvidos

5.17) Determine o valor de a sabendo que as retas de equações $y = \frac{5}{3}x - 4$ e $y = ax + 6$ são perpendiculares

Solução

De acordo com a equação 5.1 temos:

$$a = -\frac{1}{\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5}$$

5.18) Determine k de modo que as retas r e s sejam perpendiculares

(r): $y = (k - 4)x + 3$

(s): $y = (k - \frac{3}{2})x - 1$

Solução

De acordo com a equação (5.1) devemos ter:

$$k - 4 = -\frac{1}{k - \frac{3}{2}}$$

ou: $(k - 4)(k - \frac{3}{2}) = -1$

Resolvendo esta equação obtemos $k = 2$ ou $k = \frac{7}{2}$

5.19) A reta r tem equação $3x + 5y - 2 = 0$. Determine a equação da reta s que passa por A (-1; 4) e é perpendicular a r.

Solução

1º modo

O coeficiente angular de r é $m_r = -\frac{3}{5}$. Portanto o coeficiente angular de s é $m_s = \frac{5}{3}$. Como a reta s passa por A, sua equação pode ser escrita:

$$y - y_A = m_s(x - x_A)$$

$$y - 4 = \frac{5}{3}(x + 1)$$

ou: $5x - 3y + 17 = 0$

2º modo

Se a equação de r é $3x + 5y - 2 = 0$, a equação de s pode ser escrita do seguinte modo:

$$5x - 3y + k = 0 \quad (I)$$

Como s passa por A, podemos substituir as coordenadas de A na equação (I):

$$5(-1) - 3(4) + k = 0$$

obtendo: $k = 17$

Assim, a equação de s é: $5x - 3y + 17 = 0$

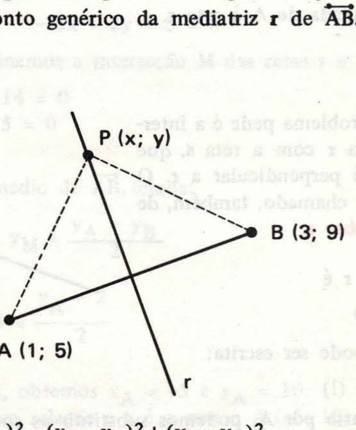
5.20) Sendo A (1; 5) e B (3; 9), determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$

Solução

1º modo

Vamos resolver este problema pelo mesmo processo já utilizado no capítulo 3. Seja P(x; y) um ponto genérico da mediatriz r de $\overline{AB}$. Devemos ter, então:

$$\delta_{PA} = \delta_{PB}$$



isto é:

$$(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 = (x_P - x_B)^2 + (y_P - y_B)^2$$

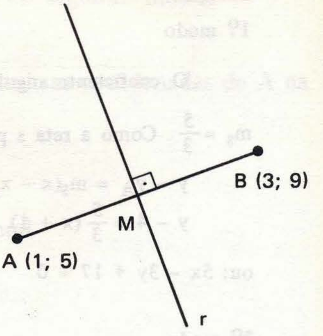
$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = (x - 3)^2 + (y - 9)^2$$

Desenvolvendo e simplificando, obtemos:

$$x + 2y - 16 = 0$$

2º modo

Podemos lembrar-nos que de a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ deve passar pelo seu ponto médio M e deve ser perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$.



Usando a fórmula do ponto médio:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5+9}{2} = 7 \end{cases} \qquad M(2;\ 7)$$

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ tem coeficiente angular **m** dado por:

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5-9}{1-3} = 2$$

Portanto a reta **r** tem coeficiente angular $m' = -\dfrac{1}{2}$.

Como a reta **r** passa por M, sua equação pode ser escrita:

$$y - y_M = m'(x - x_M)$$

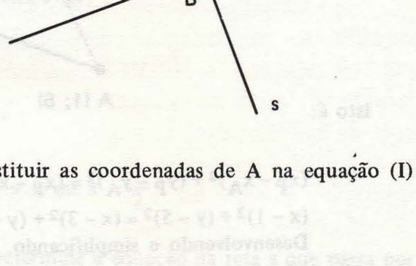
$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

Simplificando, obtemos: $x + 2y - 16 = 0$

5.21) Consideremos a reta **r** de equação $2x + 3y + 1 = 0$ e o ponto A (4; 5). Determine o pé da perpendicular baixada de A à reta **r**.

Solução

O que o problema pede é a interseção (B) da reta **r** com a reta **s**, que passa por A e é perpendicular a **r**. O ponto B pode ser chamado, também, de **projeção de A sobre r.**



Se a equação de **r** é

$2x + 3y + 1 = 0$

a equação de **s** pode ser escrita:

$3x - 2y + k = 0$ (!)

Como **s** passa por A, podemos substituir as coordenadas de A na equação (I):

$$3(4) - 2(5) + k = 0$$

obtendo: $k = -2$

Assim a equação de **s** é: $3x - 2y - 2 = 0$.

Para determinarmos a interseção de r e s, resolvemos o sistema

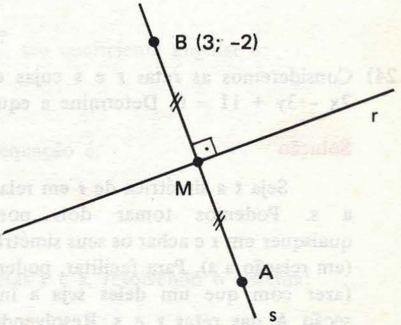
$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

obtendo: $x = \frac{4}{13}$ e $y = -\frac{7}{13}$

Assim: $B(\frac{4}{13}; -\frac{7}{13})$

5.22) Dê as coordenadas do ponto A, simétrico de B (3; -2) em relação à reta r de equação $2x - 3y + 14 = 0$.

Solução



O simétrico de B em relação a r é o ponto A que está na reta s (perpendicular a r) que passa por B e M (onde M é a interseção de r e s), tal que

$$\delta_{BM} = \delta_{MA}$$

Assim, em primeiro lugar determinamos a equação de s (como nos exercícios anteriores) obtendo

$$-3x - 2y + 5 = 0$$

Em seguida determinamos a interseção M das retas r e s, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + 14 = 0 \\ -3x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

obtendo M(-1; 4)

Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, temos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad e \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

ou: $-1 = \frac{x_A + 3}{2}$ e $4 = \frac{y_A - 2}{2}$

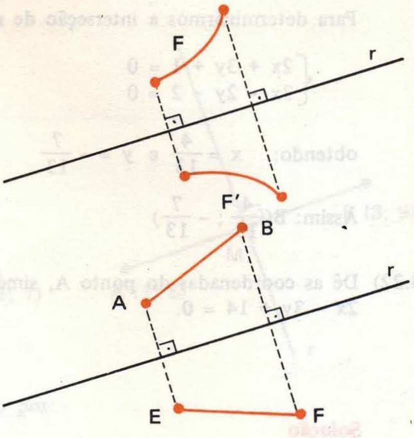
Resolvendo estas equações, obtemos $x_A = -5$ e $y_A = 10$.
Assim, o simétrico de B em relação a r é o ponto A (-5; 10).

5.23) Consideremos a reta r de equação $x - 2y + 1 = 0$ e o segmento $\overline{AB}$ com A (2; 3) e B (4; 7). Determine os pontos E e F tais que o segmento $\overline{EF}$ seja simétrico de $\overline{AB}$ em relação a r.

Solução

De modo geral, dada uma figura F, a simétrica de F em relação a r é uma figura F' cujos pontos são os simétricos dos pontos de F em relação a r.

Assim, seguindo o procedimento do problema anterior determinamos os simétricos de A e B em relação a r obtendo

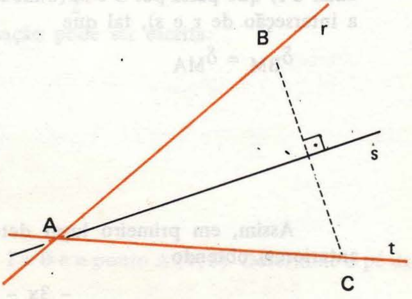


$$E\left(\frac{16}{5}; \frac{3}{5}\right) \quad e \quad F\left(\frac{38}{5}; -\frac{1}{5}\right)$$

5.24) Consideremos as retas r e s cujas equações são respectivamente $5x - y + 8 = 0$ e $2x - 3y + 11 = 0$. Determine a equação da reta que é simétrica de r em relação a s.

Solução

Seja t a simétrica de r em relação a s. Podemos tomar dois pontos quaisquer em r e achar os seus simétricos (em relação a s). Para facilitar, podemos fazer com que um deles seja a interseção A das retas r e s. Resolvendo o sistema:



$$\begin{cases} 5x - y + 8 = 0 \\ 2x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$$

obtemos A (-1; 3).

Em seguida tomamos outro ponto qualquer sobre r. Por exemplo o ponto B (0; 8). Determinamos o simétrico de B em relação a s obtendo C (4; 2).

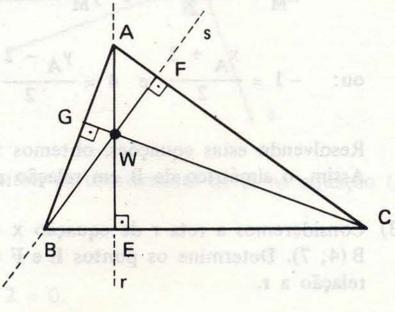
A reta t é a que passa pelos pontos A e C. Podemos determiná-la, obtendo:

$$x + 5y - 14 = 0$$

5.25) Sendo A (1; 2), B (3; 7) e C (6; 3), determine as coordenadas do ortocentro do triângulo ABC

Solução

Como sabemos, as três alturas (ou os seus prolongamentos) de um triângulo interceptam-se em um ponto chamado ortocentro do triângulo. Seja W esse ponto. Para determiná-lo basta obtermos a interseção das retas-suportes de duas de suas alturas. Tomemos por exemplo as retas r e s, suportes das alturas $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{BF}$ respectivamente.



A reta $\overleftrightarrow{BC}$ tem coeficiente angular m_1 dado por: $m_1 = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{7-3}{3-6} = -\frac{4}{3}$.

A reta r, sendo perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$, tem coeficiente angular

$$m_r = -\frac{1}{m_1} = \frac{3}{4}$$

Como r passa por A, sua equação pode ser escrita:

$$y - y_A = m_r(x - x_A)$$

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 1)$$

ou: $3x - 4y + 5 = 0$

A reta $\overleftrightarrow{AC}$ tem coeficiente angular m_2 dado por:

$$m_2 = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{2-3}{1-6} = \frac{1}{5}$$

Como a reta s é perpendicular a $\overleftrightarrow{AC}$, seu coeficiente angular é:

$$m_s = -\frac{1}{m_2} = -5$$

A reta s passa por B; portanto sua equação é:

$$y - y_B = m_s(x - x_B)$$

$$y - 7 = -5(x - 3)$$

ou: $5x + y - 22 = 0$

Determinamos a interseção W das retas r e s, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0 \\ 5x + y - 22 = 0 \end{cases}$$

obtendo: $W\left(\frac{83}{23}; \frac{91}{23}\right)$

5.26) Para o triângulo do exercício anterior, determine o comprimento da altura $\overline{AE}$.

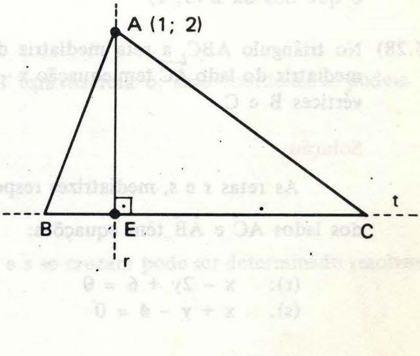
Solução

Como no problema anterior, obtemos a equação de r:

$$3x - 4y + 5 = 0$$

Em seguida determinamos a equação da reta t que passa pelos pontos B(3; 7) e C(6; 3):

$$4x + 3y - 33 = 0$$



O ponto E é a interseção das retas t e r. Para obtê-lo resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5 = 0 \\ 4x + 3y - 33 = 0 \end{cases}$$

obtendo $E\left(\frac{117}{25}; \frac{119}{25}\right)$

O comprimento da altura $\overline{AE}$ é a distância entre os pontos A e E:

$$\delta_{AE} = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} = \sqrt{(1 - \frac{117}{25})^2 + (2 - \frac{119}{25})^2} =$$

$$= \sqrt{(-\frac{92}{25})^2 + (-\frac{69}{25})^2} = \frac{\sqrt{(-92)^2 + (-69)^2}}{25} = \frac{\sqrt{8464 + 4761}}{25} =$$

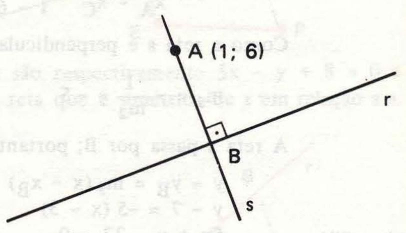
$$= \frac{\sqrt{13225}}{25} = \frac{115}{25} = \frac{23}{5}$$

Nos capítulos 8 e 9 veremos outros modos de resolver este problema.

5.27) Consideremos um ponto A (1; 6) e uma reta r de equação x – y – 3 = 0. Determine um ponto B de r, tal que a distância entre A e B seja mínima.

Solução

Para que a distância entre A e B seja mínima, B deve ser a projeção de A sobre r. Temos então um problema semelhante ao problema 5.21.



O coeficiente angular da reta r é $m_r = -\frac{1}{-1} = 1$; portanto, o coeficiente angular de s é $m_s = -1$. Assim a equação da reta s que é perpendicular a r e passa por A é:

$$y - y_A = m_s (x - x_A)$$
$$y - 6 = -1 (x - 1)$$

ou: $x + y - 7 = 0$

O ponto B é a interseção de r e s. Para obtê-lo resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

o que nos dá B (5; 2)

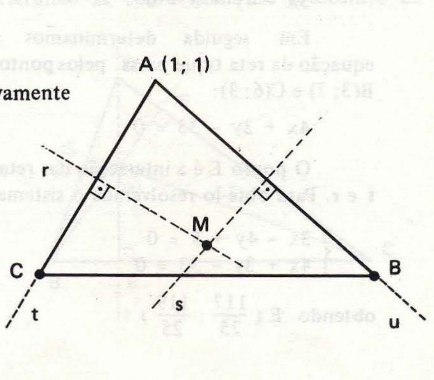
5.28) No triângulo ABC, a reta mediatriz do lado $\overline{AB}$ tem equação x + y – 4 = 0 e a reta mediatriz do lado $\overline{AC}$ tem equação x – 2y + 6 = 0. Sendo A (1; 1), dê as coordenadas dos vértices B e C.

Solução

As retas r e s, mediatrizes respectivamente dos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ têm equações:

(r): $x - 2y + 6 = 0$

(s). $x + y - 4 = 0$



Os coeficientes angulares das retas **r** e **s** são

$$m_r = \frac{1}{2} \text{ e } m_s = -1.$$

A reta **t** que contém o lado $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a **r** e assim, seu coeficiente angular é

$$m_t = -\frac{1}{m_r} = -2$$

Como a reta **t** passa por **A**, sua equação é:

$$y - y_A = m_t(x - x_A)$$
$$y - 1 = -2(x - 1)$$

ou: $2x + y - 3 = 0$

A reta **u** que contém o lado $\overleftrightarrow{AB}$ é perpendicular a **s** e portanto seu coeficiente angular é

$$m_u = -\frac{1}{m_s} = 1$$

Como a reta **u** passa pelo ponto **A**, sua equação é:

$$y - y_A = m_u(x - x_A)$$
$$y - 1 = 1(x - 1)$$

ou: $x - y = 0$

Assim, já temos as equações de **t** e **u**:

$$(t): \quad 2x + y - 3 = 0$$
$$(u): \quad x - y = 0$$

Seja **a** a abscissa do ponto C. Como C está na reta **t**, podemos substituir suas coordenadas na equação de **t**:

$$2x_C + y_C - 3 = 0$$
$$2a + y_C - 3 = 0$$
$$y_C = 3 - 2a$$

Portanto temos: C (a; 3 - 2a)

Seja **b** a abscissa de B. Como B está na reta **u**, suas coordenadas podem ser substituídas na equação de **u**:

$$x_B - y_B = 0$$
$$b - y_B = 0$$
$$y_B = b$$

Portanto: B (b; b)

O ponto M onde as mediatrizes **r** e **s** se cruzam pode ser determinado resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

donde: $M(\frac{2}{3}; \frac{10}{3})$

O ponto M, sendo a interseção das mediatrizes dos lados dos triângulos, é eqüidistante dos três vértices (é o centro da circunferência circunscrita). Assim, temos:

$$\delta_{MA} = \delta_{MB} = \delta_{MC}$$

Mas:

$$\delta^2_{MA} = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2 = (\frac{2}{3} - 1)^2 + (\frac{10}{3} - 1)^2 = \frac{50}{9}$$

Façamos agora $\delta^2_{MB} = \delta^2_{MA}$:

$$(x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2 = \frac{50}{9}$$

$$(\frac{2}{3} - b)^2 + (\frac{10}{3} - b)^2 = \frac{50}{9}$$

Resolvendo esta equação obtemos b = 1 ou b = 3. Porém, como é fácil perceber, a solução b = 1 corresponde ao ponto A (A e B estão na reta **u** e assim ambos podem ser representados pelo par ordenado (b; b)). Assim, ficamos com b = 3 e portanto:

$$B = (3;\ 3)$$

Em seguida impomos $\delta^2_{MC} = \delta^2_{MA}$:

$$(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2 = \frac{50}{9}$$

$$(\frac{2}{3} - a)^2 + (\frac{10}{3} - 3 + 2a)^2 = \frac{50}{9}$$

Resolvendo esta equação obtemos a = 1 ou a = –1. Porém a solução a = 1 corresponde ao ponto A. Assim ficamos com a = –1 e temos:

$$C\ (-1;\ 5)$$

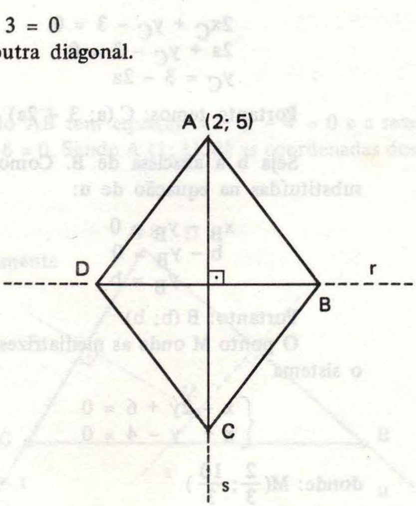
5.29) Num losango ABCD conhecemos o vértice A (2; 5) e a equação da reta **r** que contém a diagonal $\overleftrightarrow{BD}$:

$$2x - y + 3 = 0$$

Determine a equação da reta suporte da outra diagonal.

Solução

Como sabemos, as diagonais de um losango são perpendiculares. A reta **r**, de equação 2x – y + 3 = 0 tem coeficiente angular $m_r = 2$. Portanto, a reta s que contém a diagonal $\overleftrightarrow{AC}$, sendo perpendicular a r, tem coeficiente angular $m_s = -\frac{1}{2}$. Como **s** passa por A, sua equação é:



$$y - y_A = m_s (x - x_A)$$

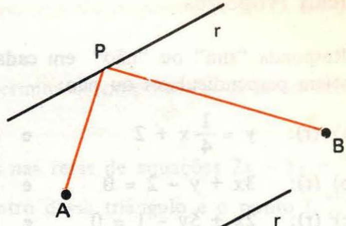
$$y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

ou: $x + 2y - 12 = 0$

5.30) A reta r de equação $3x - 4y + 12 = 0$ divide o plano cartesiano em dois semiplanos. Num desses semiplanos temos os pontos A (2; 3) e B (7; 2). Determine um ponto P da reta r tal que a soma

$$\delta_{AP} + \delta_{PB}$$

seja mínima.



Solução

Este problema pode ser resolvido com o auxílio das "derivadas". Porém aqui usaremos um artifício. Sabe-se que, a luz, quando vai de um ponto A para um ponto B, percorre sempre o **caminho mais curto**. Vamos imaginar então um raio de luz que sai do ponto A, reflete-se em P e atinge B. Como se sabe, devemos ter $\alpha = \beta$ (fig. a).

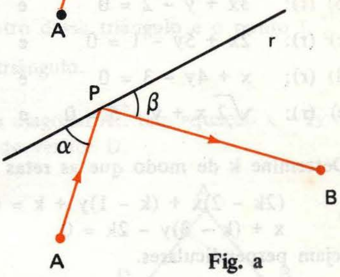


Fig. a

Seja s a reta que passa por A e P e seja t a reta que passa por B e é perpendicular a r. Os ângulos θ e α são opostos pelo vértice. Portanto temos

$$\alpha = \theta = \beta$$

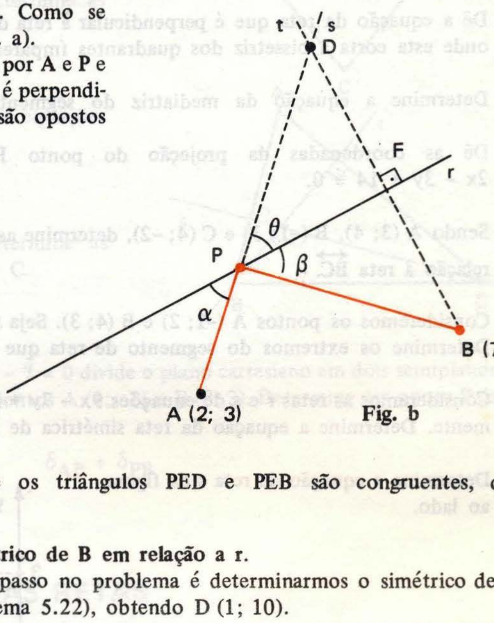


Fig. b

Daí concluímos que os triângulos PED e PEB são congruentes, donde:

$$\delta_{DF} = \delta_{FB}$$

isto é, o ponto D é o **simétrico de B em relação a r**.

Portanto, o primeiro passo no problema é determinarmos o simétrico de B em relação a r (como no problema 5.22), obtendo D (1; 10).

Em seguida determinamos a equação da reta s que passa pelos pontos A (2; 3) e D (1; 10) obtendo $7x + y - 17 = 0$.

Por fim, o ponto P (que é interseção das retas r e s) é determinado resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 12 = 0 \\ 7x + y - 17 = 0 \end{cases}$$

o que nos dá: $P(\frac{56}{31}; \frac{275}{31})$.

5.31) Responda "sim" ou "não" em cada um dos casos seguintes, conforme as retas r e s sejam perpendiculares ou não:

a) (r): $y = \frac{1}{4}x + 2$ e (s): $y = -4x + 3$

b) (r): $3x + y - 2 = 0$ e (s): $x - 3y + 5 = 0$

c) (r): $2x + 5y - 1 = 0$ e (s): $5x + 2y + 3 = 0$

d) (r): $x + 4y - 3 = 0$ e (s): $x - 4y - 1 = 0$

e) (r): $\sqrt{2}\,x + y - 5 = 0$ e (s): $\sqrt{2}\,x - 2y + 1 = 0$

5.32) Determine k de modo que as retas de equações

$(2k - 2)x + (k - 1)y + k = 0$
e
$x + (k - 3)y - 2k = 0$

sejam perpendiculares.

5.33) Dê a equação da reta que é perpendicular à reta de equação $x - 3y + 2 = 0$ no ponto onde esta corta a bissetriz dos quadrantes ímpares.

5.34) Determine a equação da mediatriz do segmento de extremos (-3; 1) e (5; 7).

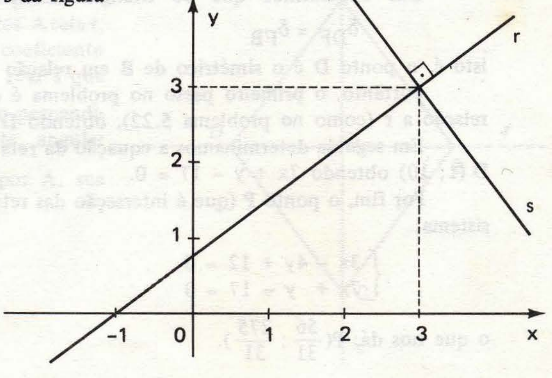
5.35) Dê as coordenadas da projeção do ponto P (3; -2) sobre a reta de equação $2x - 3y + 14 = 0$.

5.36) Sendo A (3; 4), B (-1; 3) e C (4; -2), determine as coordenadas do simétrico de A em relação à reta $\overleftrightarrow{BC}$.

5.37) Consideremos os pontos A (-1; 2) e B (4; 3). Seja r a reta de equação $2x + y + 4 = 0$. Determine os extremos do segmento de reta que é simétrico de $\overline{AB}$ em relação a r.

5.38) Consideremos as retas r e s de equações $9x - 7y + 20 = 0$ e $2x - 3y + 3 = 0$ respectivamente. Determine a equação da reta simétrica de r em relação a s.

5.39) Determine a equação da reta s da figura ao lado.



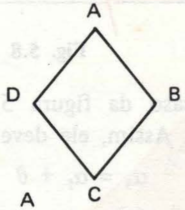
5.40) Determine o ortocentro do triângulo cujos vértices são os pontos A (3; 2), B (-1; 14) e C (-7; 2).

5.41) Para o triângulo do exercício anterior, determine o comprimento da altura relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$.

5.42) Dois lados de um triângulo estão contidos nas retas de equações 2x - 3y + 7 = 0 e 4x + 3y - 13 = 0. Sabendo que o ortocentro desse triângulo é o ponto ($\frac{10}{9}$; $\frac{10}{3}$), determine as coordenadas dos vértices do triângulo.

5.43) Num quadrado ABCD, a reta que contém a diagonal $\overleftrightarrow{AC}$ tem equação x - 2y + 1 = 0. Sendo B (0; 3), determine as coordenadas do vértice D.

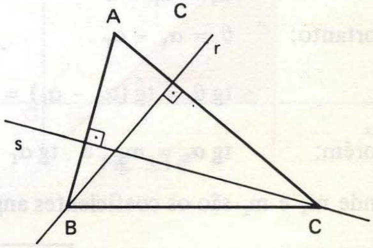
5.44) Num losango ABCD temos A (11; 4) e B (4; -2). Sabendo que o ponto E (7; 2) pertence à diagonal $\overleftrightarrow{AC}$, determine as coordenadas de C e D.



5.45) Na figura ao lado são dadas as equações das retas r e s:

(r): x + y - 4 = 0
(s): 3x - 4y - 3 = 0

Sabendo que A (2; 1), determine as coordenadas dos pontos B e C.



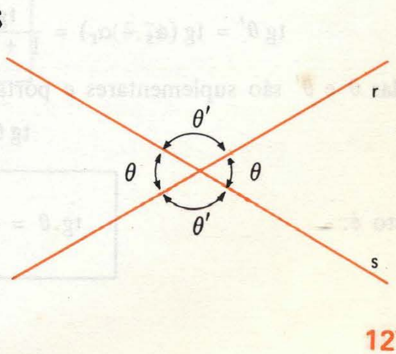
5.46) A reta r de equação 5x - 2y - 7 = 0 divide o plano cartesiano em dois semiplanos. Num desses semiplanos temos os pontos A (4; -1) e B (8; 2). Determine um ponto P da reta r tal que a soma

$$\delta_{AP} + \delta_{PB}$$

seja mínima.

5.10 — ÂNGULO DE DUAS RETAS

Consideremos as retas r e s não-paralelas e não-perpendiculares. Desse modo, tais retas formam os ângulos θ e θ', sendo θ agudo e θ' obtuso. Vamos obter fórmulas que permitam calcular o ângulo agudo θ. Como θ e θ' são suplementares, ao calcular θ teremos automaticamente θ'.



Vamos considerar dois casos:

1º caso	Nenhuma das retas é vertical.

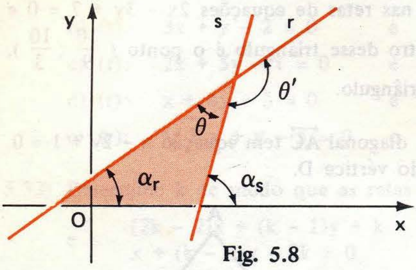


Fig. 5.8

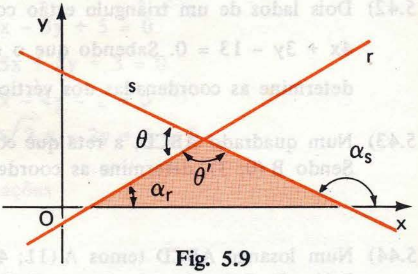


Fig. 5.9

No caso da figura 5.8, o ângulo α_s é externo em relação ao triângulo sombreado. Assim, ele deve ser igual à soma dos internos não-adjacentes:

$$\alpha_s = \alpha_r + \theta$$

Portanto: $\theta = \alpha_s - \alpha_r$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_s - \alpha_r) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_s - \operatorname{tg}\alpha_r}{1 + \operatorname{tg}\alpha_s \cdot \operatorname{tg}\alpha_r}$$

Porém: $\operatorname{tg}\alpha_s = m_s$ e $\operatorname{tg}\alpha_r = m_r$

onde m_s e m_r são os coeficientes angulares das retas r e s. Assim, podemos escrever:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \qquad (5.4)$$

No caso da figura 5.9 temos:

$$\alpha_s = \alpha_r + \theta'$$

ou: $\theta' = \alpha_s - \alpha_r$

$$\operatorname{tg}\theta' = \operatorname{tg}(\alpha_s - \alpha_r) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_s - \operatorname{tg}\alpha_r}{1 + \operatorname{tg}\alpha_s \cdot \operatorname{tg}\alpha_r} = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

Mas θ e θ' são suplementares e portanto

$$\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}\theta'$$

isto é:

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \qquad (5.5)$$

As fórmulas 5.4 e 5.5 podem ser resumidas numa só. Basta observar que, sendo θ um ângulo agudo, devemos ter $\operatorname{tg}\theta > 0$. Assim:

$$\operatorname{tg}\theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right| \qquad (5.6)$$

ou:

$$\operatorname{tg}\theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

2º caso — **Uma das retas é vertical.**

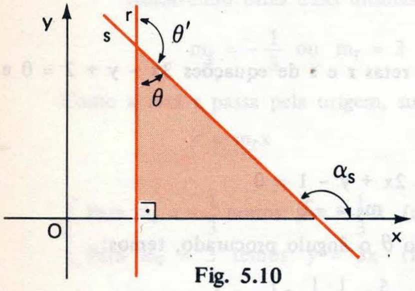


Fig. 5.10

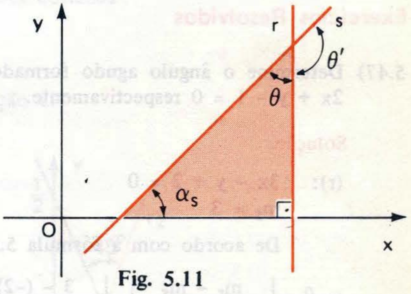


Fig. 5.11

No caso da figura 5.10 temos:

$$\alpha_s = \theta + \frac{\pi}{2}$$

ou:

$$\theta = \alpha_s - \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha_s - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cotg}\alpha_s = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_s} = -\frac{1}{m_s}$$

$$\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{m_s} \qquad (5.7)$$

No caso da figura 5.11 temos:

$$\theta + \alpha_s = \frac{\pi}{2}$$

ou:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha_s$$

Assim: $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_s\right) = \operatorname{cotg}\alpha_s = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_s} = \frac{1}{m_s}$

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{m_s}} \qquad (5.8)$$

As fórmulas 5.7 e 5.8 podem ser resumidas numa só:

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_s}\right|} \qquad (5.9)$$

Exercícios Resolvidos

5.47) Determine o ângulo agudo formado pelas retas r e s de equações $3x - y + 2 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$ respectivamente.

Solução

(r): $3x - y + 2 = 0$ (s): $2x + y - 1 = 0$

$m_r = 3$ $m_s = -2$

De acordo com a fórmula 5.6, sendo θ o ângulo procurado, temos:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right| = \left|\frac{3 - (-2)}{1 + (3)(-2)}\right| = \left|\frac{5}{1 - 6}\right| = \left|-1\right| = +1$$

Se $\operatorname{tg}\theta = +1$, concluímos que $\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$.

É óbvio que poderíamos também ter escrito:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

5.48) Determine o ângulo agudo formado pelas retas r e s de equações:

(r): $5x + 3y - 1 = 0$

(s): $x + 3 = 0$

Solução

A reta r tem coeficiente angular $m_r = -\frac{5}{3}$ e a reta s não tem coeficiente angular, isto é, a reta s é vertical. Assim, aplicaremos a fórmula 5.9:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{1}{m_r}\right| = \left|\frac{1}{-\frac{5}{3}}\right| = \left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

Consultando a tabela no final deste livro, obtemos o valor *aproximado* de θ:

$$\theta \cong 31°$$

5.49) Determine as equações das retas que passam pela origem O(0; 0) e que formam um ângulo $\theta = 45°$ com a reta **s** de equação $4x + 2y - 1 = 0$

Solução

Seja **r** a reta procurada. Devemos ter

$$\text{tg}\ \theta = \text{tg}\ 45° = 1$$

Observando que $m_s = -2$, vamos usar a fórmula 5.6:

$$\text{tg}\ \theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right|$$

$$1 = \left| \frac{m_r - (-2)}{1 + m_r(-2)} \right| = \left| \frac{m_r + 2}{1 - 2m_r} \right|$$

isto é: $\dfrac{m_r + 2}{1 - 2m_r} = 1$ ou $\dfrac{m_r + 2}{1 - 2m_r} = -1$

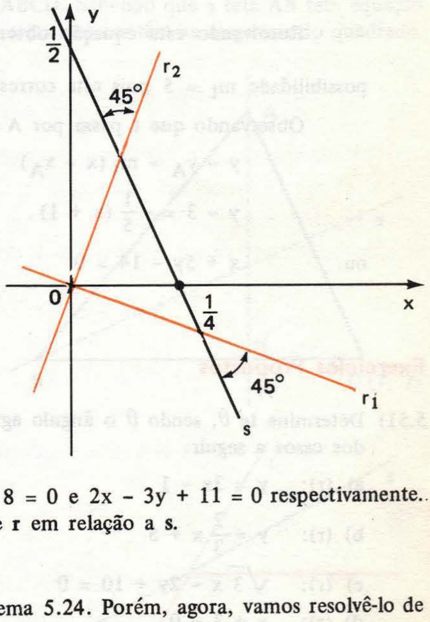
Resolvendo estas duas últimas equações obtemos

$$m_r = -\frac{1}{3} \text{ ou } m_r = 3$$

Como a reta **r** passa pela origem, sua equação é:

$$y = m_r x$$

$$\begin{cases} \text{Para } m_r = -\frac{1}{3} \text{ temos: } y = -\frac{1}{3}x \quad (r_1) \\ \text{Para } m_r = 3 \text{ temos: } y = 3x \quad (r_2) \end{cases}$$



Portanto, temos duas retas (r_1 e r_2) satisfazendo as condições do problema.

5.50) Sejam **r** e **s** retas de equações $5x - y + 8 = 0$ e $2x - 3y + 11 = 0$ respectivamente. Determine a equação da reta simétrica de **r** em relação a **s**.

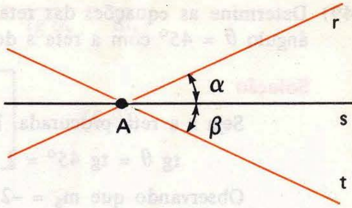
Solução

Este problema é idêntico ao problema 5.24. Porém, agora, vamos resolvê-lo de outro modo.

(r): $5x - y + 8 = 0$ (s). $2x - 3y + 11 = 0$

$m_r = 5$ $m_s = \dfrac{2}{3}$

Sendo t a reta procurada, sejam α e β os ângulos agudos formados entre r e s e entre s e t. Devemos ter $\alpha = \beta$. Podemos determinar a interseção das retas r e s obtendo A (–1; 3).



Pela fórmula 5.6 temos:

$$tg\ \alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \right| = \left| \frac{5 - \frac{2}{3}}{1 + 5\left(\frac{2}{3}\right)} \right| = 1$$

e

$$tg\ \beta = \left| \frac{m_s - m_t}{1 + m_s \cdot m_t} \right| = \left| \frac{\frac{2}{3} - m_t}{1 + \frac{2}{3} m_t} \right| = \left| \frac{2 - 3m_t}{3 + 2m_t} \right|$$

Como $\alpha = \beta$, temos: $\left| \frac{2 - 3m_t}{3 + 2m_t} \right| = 1$

Resolvendo esta equação obtemos $m_t = -\frac{1}{5}$ ou $m_t = 5$ não consideramos a possibilidade $m_t = 5$ pois esta corresponde à reta r. Ficamos então com $m_t = -\frac{1}{5}$.

Observando que t passa por A (–1; 3), sua equação é:

$$y - y_A = m_t(x - x_A)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x + 1)$$

ou: $$x + 5y - 14 = 0$$

Exercícios Propostos

5.51) Determine tg θ, sendo θ o ângulo agudo formado pelas retas r e s, dadas em cada um dos casos a seguir:

a) (r): $y = 3x - 1$ e (s): $y = x + 3$

b) (r): $y = \frac{2}{3}x + 5$ e (s): $y = 5x - 2$

c) (r): $\sqrt{3}\,x - 2y + 10 = 0$ e (s): $5\sqrt{3}\,x - 3y - 3 = 0$

d) (r): $x + 3 = 0$. e (s): $2y + 5x - 3 = 0$

e) (r): $x + 2y - 1 = 0$ e (s): $y - 2 = 0$

5.52) Consideremos a reta r de equação $y = 2x + 1$ e o ponto P (3; 2). Determine as equações das retas que passam pelo ponto P e que formam com r um ângulo de 60°.

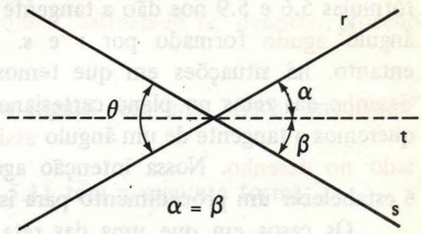
5.53) Determine as equações das retas que passam por P (3; 1) e que formam um ângulo θ com a reta de equação $x - 5y - 1 = 0$, com $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{3}$.

5.54) Consideremos as retas r e s de equações $9x - 7y + 20 = 0$ e $2x - 3y + 3 = 0$ respectivamente. Determine a equação da reta simétrica de r em relação a s.

5.55) Consideremos o ponto P (3; 2) e as retas r e s de equações $y = x + 1$ e $y = -\frac{4}{3}x + 8$ respectivamente. Determine as equações das retas que passam por P e formam ângulos iguais com as retas r e s.

5.56) Seja θ o ângulo agudo formado pelas retas r e s. Consideremos a reta t, bissetriz de θ. Determine a equação da reta s, conhecidas as equações de r e t:

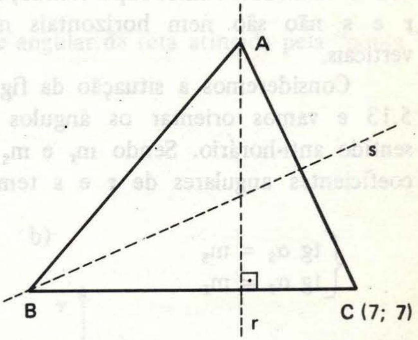
(r): $3x - 2y + 2 = 0$
(t): $x - 2y + 6 = 0$



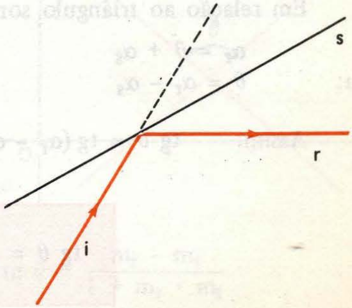
5.57) Seja E (−2; 3) o centro de um quadrado ABCD. Sabendo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ tem equação $x - 2y + 3 = 0$, determine as equações das retas que contêm as diagonais do quadrado.

5.58) Em relação ao triângulo ABC da figura ao lado, a reta s é bissetriz do ângulo interno $\hat{B}$. Determine as coordenadas dos vértices A e B conhecendo as equações das retas r e s:

(r): $3x + y - 20 = 0$
(s): $x - y + 4 = 0$



5.59) Consideremos as retas i e s de equações $y = 2 + 3x$ e $y = x + 4$ respectivamente. Imaginemos um espelho plano, perpendicular ao plano cartesiano, cuja interseção com o plano cartesiano é a reta s. Um raio de luz "caminha" ao longo da reta i, reflete-se em s e, após a reflexão, "caminha" ao longo da reta r. Determine a equação de r.



5.60) Consideremos o triângulo ABC onde A (–1; 4), B (–3; –4) e C (12; 2). Seja θ o ângulo agudo entre a altura e a mediana relativas ao lado $\overline{BC}$.

a) Calcule tg θ.

b) Usando a tabela do final do livro, calcule o valor aproximado do ângulo θ.

5.11 — SITUAÇÃO ESPECIAL

Consideremos duas retas concorrentes **r** e **s**, não-perpendiculares. As fórmulas 5.6 e 5.9 nos dão a tangente do ângulo agudo formado por **r** e **s**. No entanto, há situações em que temos o desenho das retas no plano cartesiano, e queremos a tangente de um ângulo assinalado no desenho. Nossa intenção agora é estabelecer um procedimento para isso.

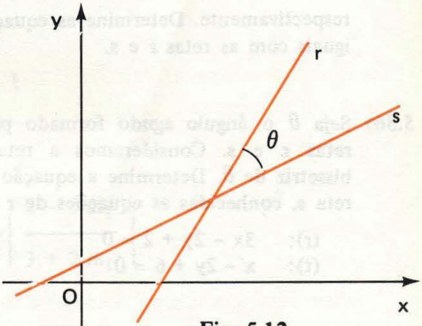


Fig. 5.12

Os casos em que uma das retas é horizontal ou vertical são imediatos e vamos deixar para considerá-los nos exercícios resolvidos. Vamos supor, então, que **r** e **s** não são nem horizontais nem verticais.

Consideremos a situação da figura 5.13 e vamos orientar os ângulos no sentido anti-horário. Sendo m_r e m_s os coeficientes angulares de **r** e **s** temos:

$$\begin{cases} tg\ \alpha_s = m_s \\ tg\ \alpha_r = m_r \end{cases}$$

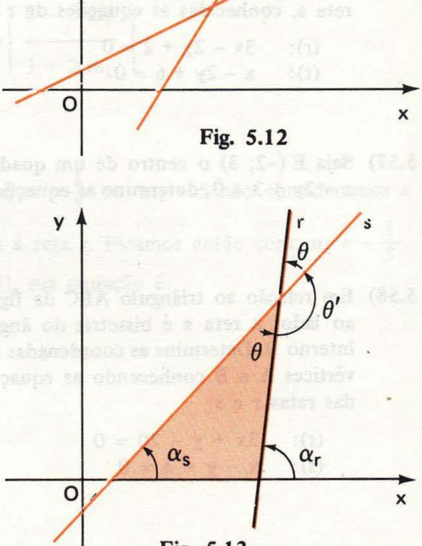


Fig. 5.13

Em relação ao triângulo sombreado, α_r é externo. Portanto

$$\alpha_r = \theta + \alpha_s$$

ou: $$\theta = \alpha_r - \alpha_s$$

Assim: $$tg\ \theta = tg\ (\alpha_r - \alpha_s) = \frac{tg\ \alpha_r - tg\ \alpha_s}{1 + tg\ \alpha_r \cdot tg\ \alpha_s} = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}$$

$$tg\ \theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \qquad (5.10)$$

Como θ e θ' são suplementares vem:

$$\text{tg}\,\theta' = -\text{tg}\,\theta$$

ou:

$$\text{tg}\,\theta' = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r \cdot m_s} \qquad (5.11)$$

Comparando a figura 5.13 com as equações 5.10 e 5.11, concluímos que, para determinarmos a tangente de um ângulo θ, assinalado no desenho, procederemos do seguinte modo:

1º) Em primeiro lugar, marcamos o ângulo com uma "flecha encurvada" no sentido anti-horário

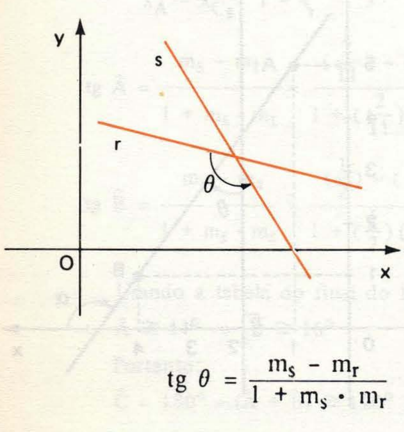
2º) Tanto a fórmula 5.10 como a 5.11 têm a seguinte forma:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}$$

Consideramos como m_1, o coeficiente angular da reta atingida pela "ponta" da flecha.

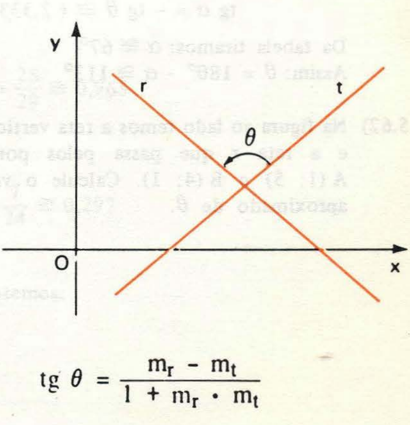
Exemplos

a)



$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}$$

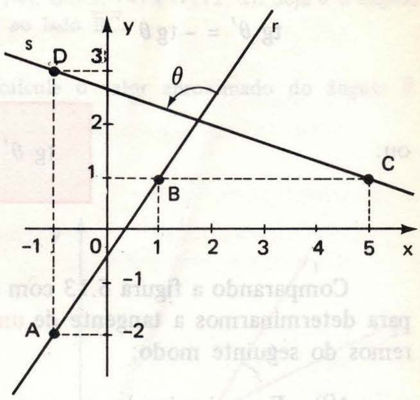
b)



$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t}$$

Exercícios Resolvidos

5.61) Na figura ao lado temos a reta r que passa por A (-1; -2) e B (1; 1) e a reta s que passa por C (5; 1) e D (-1; 3). Determine o valor aproximado do ângulo θ.



Solução

Calculemos em primeiro lugar os coeficientes angulares de r e s:

$$m_r = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{(-2) - (1)}{(-1) - (1)} = \frac{3}{2}$$

$$m_s = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{1 - 3}{5 - (-1)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} = \frac{(-\frac{1}{3}) - (\frac{3}{2})}{1 + (-\frac{1}{3})(\frac{3}{2})} = -\frac{7}{3} \cong -2{,}333$$

Como tg $\theta < 0$, concluímos que θ é obtuso e a tabela do final do livro não nos dá tangentes de ângulos obtusos. Vamos considerar então um ângulo agudo α tal que

$$\alpha + \theta = 180°$$

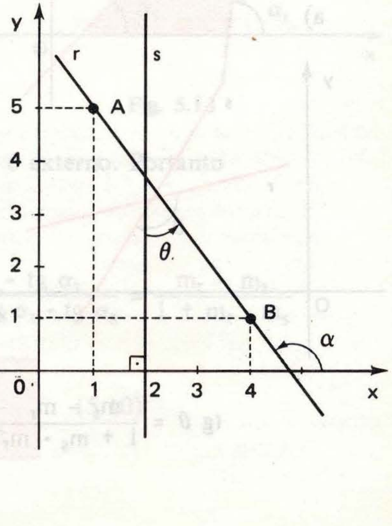
Nesse caso teremos:

$$\text{tg}\,\alpha = -\,\text{tg}\,\theta \cong +2{,}333$$

Da tabela tiramos: $\alpha \cong 67°$

Assim: $\theta = 180° - \alpha \cong 113°$

5.62) Na figura ao lado temos a reta vertical s e a reta r que passa pelos pontos A (1; 5) e B (4; 1). Calcule o valor aproximado de θ.



Solução

Sendo m o coeficiente angular de r temos:

$$\text{tg}\ \alpha = m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5-1}{1-4} = -\frac{4}{3} \cong -1{,}333$$

Usando a tabela do final do livro de modo semelhante ao do problema anterior, obtemos

$$\alpha \cong 127°$$

Da figura tiramos: $\theta = \alpha - 90°$
Portanto: $\theta \cong 37°$

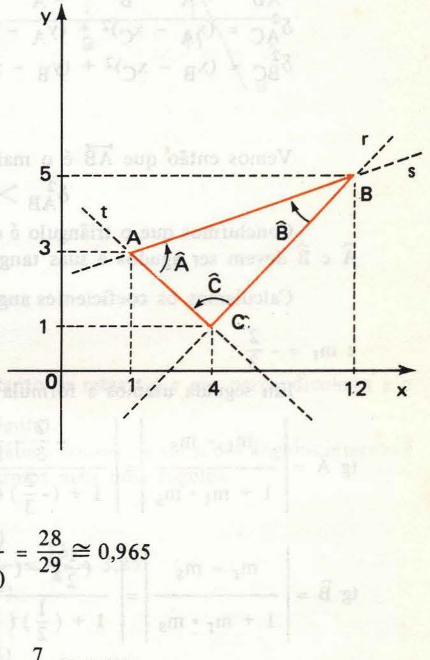
5.63) Consideremos o triângulo ABC tal que A (1; 3), B (12; 5) e C (4; 1). Determine os valores aproximados dos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

Solução

1º modo

Primeiramente, lembremo-nos de que, em qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos vale 180°. Assim, basta determinarmos dois ângulos internos.

Vamos fazer o desenho do triângulo no plano cartesiano (não há necessidade de se usar uma escala rigorosa) e em seguida marcar os ângulos internos com flechas no sentido anti-horário. Sejam **r**, **s** e **t** as retas que passam pelos lados $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente. Temos:



$$m_r = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{5-1}{12-4} = \frac{1}{2}$$

$$m_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-3}{12-1} = \frac{2}{11}$$

$$m_t = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{3-1}{1-4} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{tg}\ \hat{A} = \frac{m_s - m_t}{1 + m_s \cdot m_t} = \frac{\left(\frac{2}{11}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right)}{1 + \left(\frac{2}{11}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{28}{29} \cong 0{,}965$$

$$\text{tg}\ \hat{B} = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{2}{11}\right)}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{11}\right)} = \frac{7}{24} \cong 0{,}292$$

Usando a tabela do final do livro, obtemos:

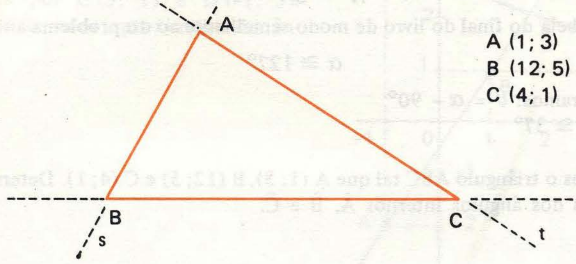
$\hat{A} \cong 44°$ e $\hat{B} \cong 16°$

Portanto:

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \cong 120°$

2º modo

Vamos desenhar um triângulo qualquer e calcular as medidas dos lados elevadas ao quadrado:



$$\delta^2_{AB} = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 125$$
$$\delta^2_{AC} = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = 13$$
$$\delta^2_{BC} = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = 80$$

Vemos então que $\overline{AB}$ é o maior lado e que:

$$\delta^2_{AB} > \delta^2_{AC} + \delta^2_{BC}$$

Concluímos que o triângulo é **obtusângulo** e que o ângulo obtuso é $\widehat{C}$. Portanto, $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ devem ser **agudos** e suas tangentes são **positivas**.

Calculamos os coeficientes angulares das retas **r**, **s** e **t** obtendo $m_r = \frac{1}{2}$, $m_s = \frac{2}{11}$ e $m_t = -\frac{2}{3}$

Em seguida usamos a fórmula 5.6:

$$\text{tg}\ \widehat{A} = \left|\frac{m_t - m_s}{1 + m_t \cdot m_s}\right| = \left|\frac{-\frac{2}{3} - \frac{2}{11}}{1 + (-\frac{2}{3})(\frac{2}{11})}\right| = \left|\frac{-28}{29}\right| = \frac{28}{29} \cong 0{,}965$$

$$\text{tg}\ \widehat{B} = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right| = \left|\frac{(\frac{1}{2}) - (\frac{2}{11})}{1 + (\frac{1}{2})(\frac{2}{11})}\right| = \left|\frac{7}{24}\right| = \frac{7}{24} \cong 0{,}292$$

Consultamos a tabela e obtemos: $\widehat{A} \cong 44°$ e $\widehat{B} \cong 16°$

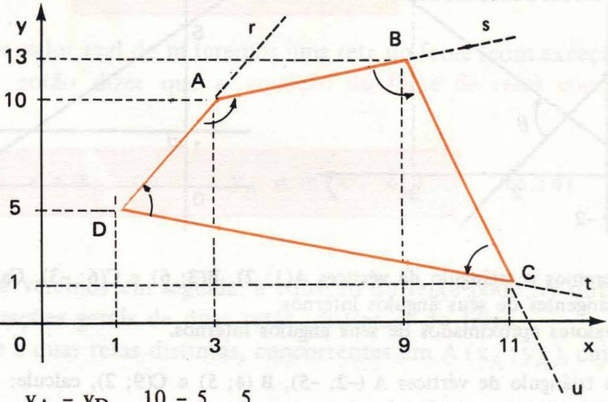
Assim: $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) \cong 120°$

Observação: Poderíamos, também, ter resolvido este problema usando a "lei dos cossenos" e a "lei dos senos". Porém não é vantajoso pois daria mais trabalho.

5.64) Consideremos um quadrilátero convexo ABCD onde A (3; 10), B (9; 13), C (11; 1) e D (1; 5). Calcule os valores aproximados dos ângulos internos.

Solução

Desenhamos o quadrilátero no plano cartesiano, sem preocupações com a escala e orientamos os ângulos internos no sentido anti-horário. Sejam **r**, **s**, **t** e **u** as retas-suportes dos lados (como mostra a figura). Seus coeficientes angulares são:



$$m_r = \frac{y_A - y_D}{x_A - x_D} = \frac{10 - 5}{3 - 1} = \frac{5}{2}$$

$$m_s = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{10 - 13}{3 - 9} = \frac{1}{2}$$

$$m_t = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{5 - 1}{1 - 11} = -\frac{2}{5}$$

$$m_u = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{13 - 1}{9 - 11} = -6$$

Observemos que $m_t = -\frac{1}{m_r}$. Portanto as retas **t** e **r** são perpendiculares e o ângulo $\hat{D}$ é reto (embora não pareça na figura).

Lembrando que em qualquer quadrilátero convexo a soma dos ângulos internos é igual a 360°, só há necessidade de calcularmos mais dois ângulos.

$$\text{tg}\ \hat{B} = \frac{m_u - m_s}{1 + m_u \cdot m_s} = \frac{(-6) - (\frac{1}{2})}{1 + (-6)(\frac{1}{2})} = \frac{13}{4} = 3{,}25$$

$$\text{tg}\ \hat{C} = \frac{m_t - m_u}{1 + m_t \cdot m_u} = \frac{(-\frac{2}{5}) - (-6)}{1 + (-\frac{2}{5})(-6)} = \frac{28}{17} \cong 1{,}647$$

Consultando a tabela obtemos:

$\hat{B} \cong 73°$ e $\hat{C} \cong 59°$

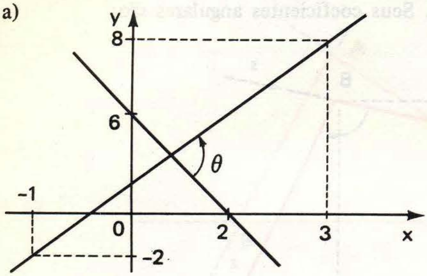
Assim:

$\hat{A} = 360° - (\hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) \cong 138°$

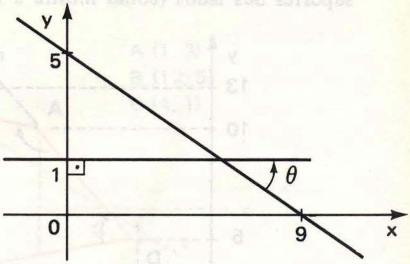
Exercícios Propostos

5.65) Calcule o valor **aproximado** do ângulo θ em cada uma das figuras abaixo:

a)



b)



5.66) Consideremos o triângulo de vértices A(1; 2), B(3; 6) e C(6; –3). Calcule:
a) as tangentes de seus ângulos internos;
b) os valores aproximados de seus ângulos internos.

5.67) Dado o triângulo de vértices A (–2; –5), B (4; 5) e C(9; 2), calcule:
a) as tangentes de seus ângulos internos;
b) os valores dos ângulos internos.

5.68) Seja o quadrilátero convexo ABCD de vértices A (0; 1), B (3; 6), C (9; 3) e D (4;0). Calcule:
a) as tangentes de seus ângulos internos;
b) os valores dos ângulos internos.

5.12 — FEIXE DE RETAS CONCORRENTES

Dado um ponto $A(x_A; y_A)$, o conjunto de todas as retas do plano cartesiano que passam por A recebe o nome de feixe de retas concorrentes em A.

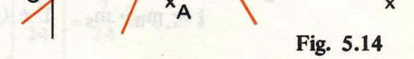


Fig. 5.14

Podemos dar a equação do feixe lembrando que, das infinitas retas que passam por A, uma delas (a reta **r** da figura 5.15) é perpendicular ao eixo Ox e sua equação é

$$x = x_A \quad (5.12)$$

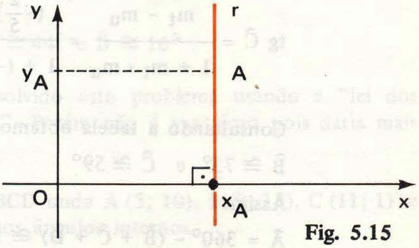


Fig. 5.15

As outras retas que passam por A possuem coeficiente angular e podem ser expressas na forma

$$y - y_A = m(x - x_A) \qquad (5.13)$$

onde, para cada valor real de m teremos uma reta do feixe (com exceção da reta r).

Podemos então dizer que a equação do feixe de retas concorrentes em $A(x_A; y_A)$ é:

$$x = x_A \quad \text{ou} \quad y - y_A = m(x - x_A) \qquad (5.14)$$

onde $m \in \mathbb{R}$.

Conforme veremos em seguida, a equação do feixe pode ser obtida também através das **equações gerais** de duas retas (distintas) do feixe.

Sejam r e s duas retas distintas, concorrentes em $A(x_A; y_A)$, cujas equações são

$$(r): \; a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$(s): \; a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Sendo α e β números reais quaisquer, porém não simultaneamente nulos, consideremos a equação

$$\alpha(a_1x + b_1y + c_1) + \beta(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \qquad (5.15)$$

A equação 5.15 pode ser escrita do seguinte modo:

$$(\alpha a_1 + \beta a_2)x + (\alpha b_1 + \beta b_2)y + (\alpha c_1 + \beta c_2) = 0 \qquad (5.16)$$

e, portanto, para cada par de valores atribuídos a α e β (desde que não tenhamos simultaneamente $\alpha = 0$ e $\beta = 0$) a equação 5.16 é equação de uma reta, o mesmo acontecendo com a equação 5.15. Por outro lado, o ponto A pertence a qualquer reta dada por 5.15. De fato, substituindo as coordenadas de A em 5.15 temos:

$$\alpha(a_1x_A + b_1y_A + c_1) + \beta(a_2x_A + b_2y_A + c_2) = 0 \qquad (5.17)$$

Porém, sabemos que $A \in r$ e $A \in s$. Assim:

$$a_1x_A + b_1y_A + c_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2x_A + b_2y_A + c_2 = 0$$

Portanto 5.17 torna-se

$$\alpha(0) + \beta(0) = 0$$

que é uma sentença sempre verdadeira.

5.69) Sendo α e β números reais quaisquer, não simultaneamente nulos, o que representa a equação

$$\alpha(3x + 2y - 1) + \beta(4x - y + 9) = 0 \ ?$$

Solução

Como é fácil verificar, as equações

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad e \quad 4x - y + 9 = 0$$

representam duas retas concorrentes no ponto $A(-\frac{17}{11}; \frac{31}{11})$. Assim, a equação dada representa o feixe de retas concorrentes em A.

5.70) Sejam r e s duas retas concorrentes, de equações:

(r): $4x - y - 2 = 0$
(s): $3x - y - 1 = 0$

Sendo k um número real qualquer, o que representa a equação

$$(4x - y - 2) + k(3x - y - 1) = 0 \ ?$$

Solução

Consideremos inicialmente a equação

$$\alpha(4x - y - 2) + \beta(3x - y - 1) = 0 \quad (I)$$

Como é fácil concluir, as retas r e s são concorrentes no ponto A(1; 2). Portanto, a equação (I) representa o **feixe de retas concorrentes em A**.

Suponhamos agora $\alpha \neq 0$. A equação (I) poderá ser escrita então:

$$\frac{\alpha}{\alpha}(4x - y - 2) + \frac{\beta}{\alpha}(3x - y - 1) = 0$$

ou: $$(4x - y - 2) + \frac{\beta}{\alpha}(3x - y - 1) = 0 \quad (II)$$

Se fizermos $\frac{\beta}{\alpha} = k$, a equação (II) pode ser escrita:

$$(4x - y - 2) + k(3x - y - 1) = 0 \quad (III)$$

que é a equação dada no enunciado do problema. Porém a equação (III) foi obtida supondo $\alpha \neq 0$, isto é, ela representa o feixe de retas concorrentes em A, com exceção da reta de equação $3x - y - 1 = 0$, que é a reta s. Podemos dizer também que a equação (III) é um conjunto de retas concorrentes em A(1; 2) ou, ainda, uma família de retas concorrentes em A.

5.71) As retas r e s têm equações:

(r): $5x + 2y - 4 = 0$
(s): $3x + y - 2 = 0$

Sendo k um número real qualquer, o que representa a equação

$$k(5x + 2y - 4) + (3x + y - 2) = 0 ?$$

Solução

As retas r e s são concorrentes no ponto A (0; 2). Portanto, usando o mesmo raciocínio do exercício anterior, concluímos que a equação dada representa o feixe de retas concorrentes em A (0; 2) com exceção da reta r de equação

$$5x + 2y - 4 = 0$$

5.72) Determine o centro do feixe de retas concorrentes cuja equação é

$$k(3x + y - 11) + t(x + y - 7) = 0$$

onde k e t são números reais, com $k \neq 0$ ou $t \neq 0$.

Solução

O centro do feixe é o ponto pelo qual passam todas as retas do feixe. Portanto, para determiná-lo, basta procurarmos a interseção de duas retas quaisquer do feixe. Por exemplo

$$\begin{cases} 3x + y - 11 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos o ponto (2; 5), que é o centro do feixe.

5.73) Sendo k um número real qualquer, o que representa a equação

$$(2k + 3)x - (k + 1)y + (5k + 5) = 0 ?$$

Solução

A equação dada pode ser escrita:

$$2kx + 3x - ky - y + 5k + 5 = 0$$

Colocando k em evidência temos:

$$k(2x - y + 5) + (3x - y + 5) = 0 \qquad \text{(I)}$$

O sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

tem como solução o par (0; 5).

Portanto, a equação dada (que é equivalente à equação (I)) representa um feixe de retas concorrentes em (0; 5), com exceção da reta de equação

$$2x - y + 5 = 0$$

5.74) Mostre que a equação

$$(3k + 2)x + (1 - k)y - (13k + 7) = 0$$

representa um conjunto de retas que passam por um mesmo ponto.

Solução

Poderíamos resolver este problema do mesmo modo que o anterior. Vamos, porém, usar um outro processo: substituir k por dois valores quaisquer. Por exemplo, k = 0 e k = 1. Para k = 0, a equação dada fica:

$$2x + y - 7 = 0 \quad (I)$$

e para k = 1 a equação dada fica:

$$5x - 20 = 0 \quad (II)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (I) e (II) obtemos (4; -1). Se substituirmos esse par ordenado na equação dada obtemos

$$(3k + 2)(4) + (1 - k)(-1) - (13k + 7) = 0 \quad (III)$$

É fácil concluir que a equação (III) é válida para qualquer $k \in \mathbb{R}$ e, portanto, que o ponto (4; -1) pertence a todas as retas dadas pela equação:

$$(3k + 2)x + (1 - k)y - (13k + 7) = 0$$

5.75) Consideremos os dois feixes de retas concorrentes dados pelas equações:

$$\alpha(4x - y - 2) + \beta(5x - y - 3) = 0 \quad (I)$$

e

$$k(4x + y - 13) + t(3x + y - 11) = 0 \quad (II)$$

Determine a equação da reta comum aos dois feixes.

Solução

Para obtermos o centro do feixe (I) resolvemos o sistema

$$\begin{cases} 4x - y - 2 = 0 \\ 5x - y - 3 = 0 \end{cases}$$

obtendo A (1; 2).

Para obtermos o centro do feixe (II) resolvemos o sistema

$$\begin{cases} 4x + y - 13 = 0 \\ 3x + y - 11 = 0 \end{cases}$$

obtendo B (2; 5).

A reta comum aos feixes é aquela que passa por A e B. Determinamos a equação dessa reta que é:

$$3x - y - 1 = 0$$

5.76) Consideremos a família de retas dada pela equação

$$k(2x - y + 5) + (3x - 4y + 1) = 0$$

Determine a equação da reta dessa família que passa pelo ponto (1; 6).

Solução

Substituindo o par (1; 6) na equação dada temos: $k(2 - 6 + 5) + (3 - 24 + 1) = 0$ o que nos dá: k = 20

Fazendo k = 20 na equação dada obtemos:

$$20(2x - y + 5) + (3x - 4y + 1) = 0$$

ou: $43x - 24y + 101 = 0$

Exercícios Propostos

5.77) Determine o centro do feixe de retas concorrentes definido pela equação

$$\alpha(24x - 4y - 15) + \beta(12x + 4y - 9) = 0$$

5.78) Consideremos um conjunto de retas concorrentes cuja equação é

$$k(x + y + 1) + (x - y - 3) = 0$$

Determine a equação de uma reta desse conjunto que passa pelo ponto $(5; \frac{1}{2})$.

5.79) Consideremos um feixe de retas concorrentes, dado pela equação

$$\alpha(5x + 2y - 4) + \beta(3x + y - 2) = 0$$

Determine a reta desse feixe que passa pelo ponto A (1; 3).

5.80) Sendo **k** um número real qualquer, o que representa a equação

$$k(6x - y + 4 - 6\sqrt{2}) + (\sqrt{2}x - y + 2) = 0?$$

5.13 – FEIXE DE RETAS PARALELAS

Consideremos uma reta qualquer **r** do plano cartesiano.

O conjunto formado pela reta **r** e por todas as retas do plano cartesiano que são paralelas a **r** constitui um feixe de retas paralelas.

Conforme vimos no item 5.7 deste capítulo, se uma reta **r** tem equação

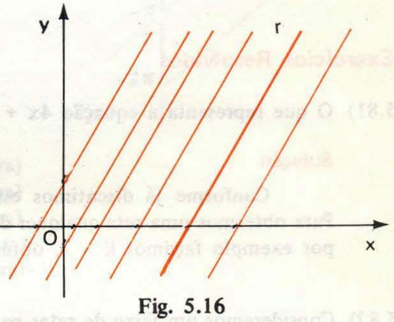


Fig. 5.16

$$ax + by + c_1 = 0$$

uma reta qualquer, paralela a **r**, tem equação que pode ser escrita

$$ax + by + c_2 = 0$$

Portanto, dada uma reta **r** de equação

$$ax + by + c = 0$$

a equação do feixe de retas paralelas a **r** é

$$\boxed{ax + by + k = 0} \qquad (5.18)$$

onde **k** é um número real qualquer, isto é, para cada número real **k** teremos uma reta do feixe.

Se a reta r não for vertical, sua equação poderá ser colocada na forma reduzida

$$y = mx + n$$

e portanto, uma outra reta paralela a r terá equação

$$y = mx + n'$$

Portanto neste caso o feixe de retas paralelas a r também pode ser representado por:

$$\boxed{y = mx + k} \quad (5.19)$$

onde **k** é um número real qualquer.

Exercícios Resolvidos

5.81) O que representa a equação $4x + 3y + k = 0$, onde $k \in \mathbb{R}$?

Solução

Conforme já discutimos essa equação representa um feixe de retas paralelas. Para obtermos uma reta qualquer do feixe, substituímos k por um número real qualquer; por exemplo façamos $k = 1$, obtendo $4x + 3y + 1 = 0$.

5.82) Consideremos um feixe de retas paralelas de equação $y = 7x + k$. Determine a reta desse feixe que passa pelo ponto $(4; \frac{5}{2})$.

Solução

Substituindo o par $(4; \frac{5}{2})$ na equação do feixe temos:

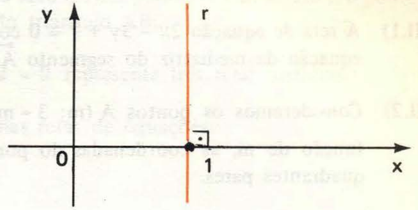
$$\frac{5}{2} = 7(4) + k$$

ou: $$k = -\frac{51}{2}$$

Portanto, a reta procurada tem equação $y = 7x - \frac{51}{2}$.

5.83) Sendo $k \in \mathbb{R}$, o que representa a equação $4x + k = 0$?

Solução



Atribuindo um valor arbitrário a k, por exemplo -4, temos:

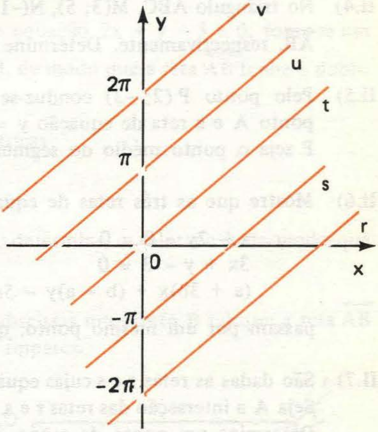
$4x - 4 = 0$

ou $x = 1$

Podemos dizer então que a equação dada é a equação do feixe de retas paralelas à reta r de equação $x = 1$.

5.84) O que representa a equação $\text{sen}(x - y) = 0$?

Solução



Conforme sabemos da Trigonometria, temos:

$\text{sen}(x - y) = 0 \iff x - y = k\pi \iff y = x - k\pi$

onde k é um número inteiro qualquer. Neste caso, como k não pode ser qualquer número real, mas apenas inteiro, a equação $y = x - k\pi$ não representa um feixe de retas paralelas. Mas podemos dizer que a equação $y = x - k\pi$ representa um conjunto (ou uma família) de retas paralelas. Para cada número inteiro k obtemos uma reta do conjunto. Vejamos alguns exemplos:

$k = 2$ $y = x - 2\pi$ (é a reta r da figura)
$k = 1$ $y = x - \pi$ (é a reta s da figura)
$k = 0$ $y = x$ (é a reta t da figura)
$k = -1$ $y = x + \pi$ (é a reta u da figura)
$k = -2$ $y = x + 2\pi$ (é a reta v da figura)

Exercícios Propostos

5.85) Dê uma equação para o feixe de retas paralelas à reta de equação $5x - 12y + 7 = 0$.

5.86) O que representa a equação $\cos(y - x) = 1$?

5.87) Uma reta r é dada por suas equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

a) Dê uma equação para o feixe de retas paralelas a r.
b) Determine a reta do feixe que passa pelo ponto $(-1; -10)$.

II.1) A reta de equação $2x - 3y + 7 = 0$ corta os eixos coordenados nos pontos A e B. Dê a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

II.2) Consideremos os pontos A (m; 3 - m) e B (0; 3 - 3 m), com $m \neq 0$. Determine, em função de **m**, as coordenadas do ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ intercepta a bissetriz dos quadrantes pares.

II.3) Determine a equação da reta que passa pelo ponto A (4; -3) e pelo ponto de interseção das retas **r** e **s** cujas equações são, respectivamente, $2x - 3y + 13 = 0$ e $4x + y - 9 = 0$.

II.4) No triângulo ABC, M(3; 5), N(-1; 2) e P(-5; 0) são os pontos médios dos lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Determine a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$.

II.5) Pelo ponto P (2; -3) conduz-se uma reta **r** que intercepta o eixo das abscissas no ponto **A** e a reta de equação $y = 2x$ no ponto B. Dê a equação da reta **r** de modo que P seja o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

II.6) Mostre que as três retas de equações

$$x - 2y - 8 = 0$$
$$3x + y - 3 = 0$$
$$(a + 3b)x + (b - a)y - 5a - 3b = 0$$

passam por um mesmo ponto, quaisquer que sejam os números reais **a** e **b**.

II.7) São dadas as retas **r** e **s** cujas equações são respectivamente $x + y - 3 = 0$ e $4x - y - 7 = 0$. Seja **A** a interseção das retas **r** e **s**. Sobre a reta **r** toma-se o ponto B de abscissa igual a -1. Determine um ponto de **s** que é eqüidistante de A e B.

II.8) Dê o ponto de interseção das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ sendo A (0; 6), B (-2; 0), C (-5; 2) e D (3; 4).

II.9) As retas cujas equações são

$$x - y + 3 = 0$$
$$x + y - 5 = 0$$
$$3x - y - 3 = 0$$

interceptam-se, duas a duas, nos pontos A, B e C. Determine o baricentro do triângulo ABC.

II.10) Determine os valores de **a** e **b** de modo que a reta de equação $(3b + 4a)x + y + \frac{b}{2} = 0$ seja paralela ao eixo Ox e intercepte a bissetriz dos quadrantes pares no ponto de abscissa igual a - 4.

II.11) Consideremos as retas de equações:

$$x - 2y + 1 = 0$$
$$3x + y + 2 = 0$$
$$x + y + k = 0$$

Determine o valor de **k** de modo que as três retas passem por um mesmo ponto.

II.12) Consideremos as retas r e s cujas equações são $7x + 3y - 14 = 0$ e $7x + 6y - 35 = 0$ respectivamente. As retas r e s interceptam o eixo Ox nos pontos A e B. Sendo C o ponto de interseção de r e s, determine a área do triângulo ABC.

II.13) Mostre que a equação $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ representa três retas distintas.

II.14) Os lados de um triângulo estão contidos nas retas de equações

$$x = 0$$
$$y = 0$$
$$x + 2y + k = 0$$

Determine o valor de k sabendo que a área do triângulo é igual a $\frac{32}{9}$.

II.15) É dado o ponto A (2; -3) e, sobre a reta r, de equação $2x + y - 3 = 0$, toma-se um segundo ponto B. Determine as coordenadas de B, de modo que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ tenha o dobro do coeficiente angular da reta r.

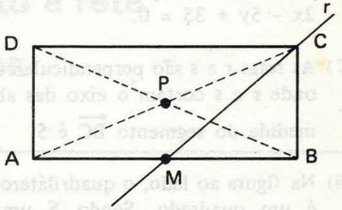
II.16) Uma reta r é dada pelas suas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 4 + (k + 1)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Dada uma reta s de equação $x - 9y + 12 = 0$, determine o valor de k de modo que as retas r e s sejam paralelas.

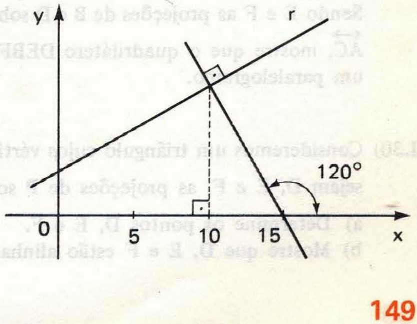
II.17) Seja A $(0; 2\sqrt{3})$. Determine sobre o eixo das abscissas um ponto B tal que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ forme 60° com a reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

II.18) O quadrilátero ABCD da figura é um retângulo e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Sabendo que A (0; 0), B (4; 4) e C (-3; 11), determine a equação da reta que passa por P e é perpendicular à reta r.

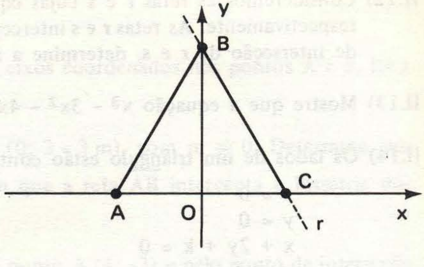


II.19) As retas cujas equações são $3x - 2y + 5 = 0$, $x + y - 1 = 0$ e $2x + 3y - 21 = 0$ interceptam-se duas a duas em três pontos A, B e C. Verifique se o triângulo ABC é acutângulo, retângulo ou obtusângulo.

II.20) Determine a equação da reta r da figura ao lado.



II.21) Na figura ao lado, o triângulo ABC é eqüilátero de lado $\ell = 10$. Determine a equação da reta r.



II.22) Consideremos um ponto P (2; 3) e uma reta r de equação $2x + y - a = 0$. Seja Q a projeção de P sobre r. Determine o valor de a de modo que os pontos A (2; 0), B (0; 3) e Q estejam alinhados.

II.23) A equação $(x - y)^2 = 16$ representa duas retas. Verifique a posição relativa delas.

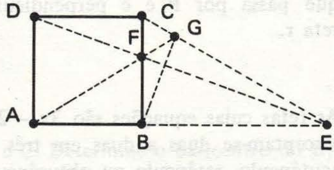
II.24) Consideremos um triângulo retângulo ABC onde A (3; 2) e B (9; 5) são os extremos da hipotenusa. Sabendo que a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular à reta de equação $4x + 3y - 10 = 0$, determine as coordenadas do vértice C.

II.25) A equação $12x^2 + y^2 - 7xy + 2x - y - 2 = 0$ representa duas retas. Sendo θ o ângulo agudo formado entre elas, determine o valor de tg θ.

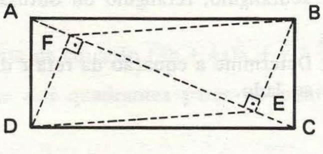
II.26) Seja O a origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Uma reta r corta os eixos coordenados em pontos A e B de modo que o triângulo AOB tem área igual a 20. Determine a equação de r sabendo que ela é perpendicular à reta de equação $2x - 5y + 35 = 0$.

II.27) As retas r e s são perpendiculares e passam pelo ponto A (3; 2). Sendo B e C os pontos onde r e s cortam o eixo das abscissas, determine as equações de r e s sabendo que a medida do segmento $\overline{BC}$ é 5.

II.28) Na figura ao lado, o quadrilátero ABCD é um quadrado. Sendo E um ponto qualquer do prolongamento do lado $\overline{AB}$, mostre que $\overline{BG}$ é perpendicular a $\overline{DE}$.



II.29) Na figura ao lado, ABCD é um retângulo. Sendo E e F as projeções de B e D sobre $\overleftrightarrow{AC}$, mostre que o quadrilátero DEBF é um paralelogramo.



II.30) Consideremos um triângulo cujos vértices são A (0; 6), B (8; 0) e C (9; 3). Dado P (7; 7), sejam D, E e F, as projeções de P sobre $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ respectivamente.

a) Determine os pontos D, E e F.
b) Mostre que D, E e F estão alinhados.

PARTE III

Capítulo 6 — **Inequações do 1º grau a duas variáveis**

Capítulo 7 — **Transformação de coordenadas**

Capítulo 8 — **Distância de ponto a reta**

Capítulo 9 — **Área de polígonos**

Capítulo

6

Inequações do 1º grau a duas variáveis

6.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é estudar graficamente inequações do tipo

$$ax + by + c > 0$$

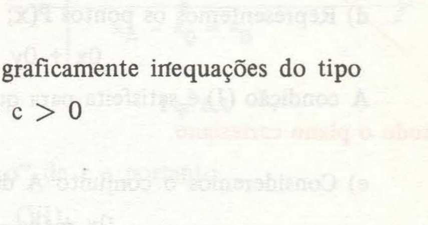
onde $\begin{cases} a, b \text{ e } c & \text{são números reais} \\ x \text{ e } y & \text{são variáveis reais} \end{cases}$

Os casos em que a = 0 ou b = 0 são mais fáceis de serem analisados (já fizemos exercícios desses tipos no capítulo 2). Vamos ver alguns exemplos:

a) Consideremos os pontos P(x; y) tais que $4x - 8 > 0$. Temos:

$$4x - 8 > 0 \iff x > 2$$

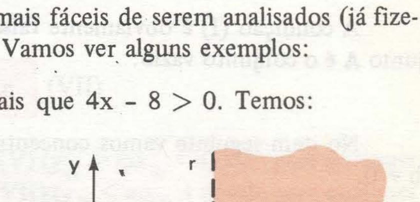
Portanto, os pontos P são aqueles situados à **direita** da reta **r** de equação x = 2. (Podemos dizer que essa região é um **semiplano aberto**.)



b) Consideremos os pontos P(x; y) tais que $4x - 8 \geqslant 0$

$$4x - 8 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$$

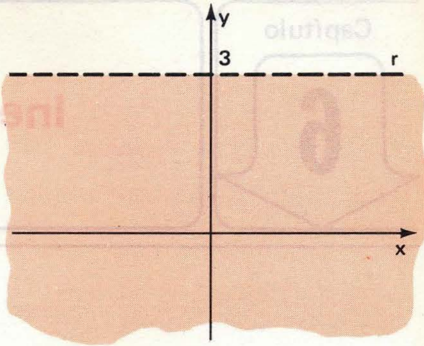
Neste caso, os pontos P(x; y) que satisfazem a condição $4x - 8 \geqslant 0$ são aqueles que estão à **direita** da reta **r** de equação x = 2, reunidos com os pontos da reta **r**. (Neste caso temos um **semiplano fechado**.)



c) Seja a inequação $-6y + 18 > 0$.

$$-6y + 18 > 0 \iff y < 3$$

Os pontos P(x; y) que satisfazem a condição $-6y + 18 > 0$ estão **abaixo** da reta **r** de equação $y = 3$. (Neste caso, os pontos P constituem um semiplano aberto.)



d) Representemos os pontos P(x; y) do plano tais que

$$0x + 0y + 3 > 0 \quad \text{(I)}$$

A condição (I) é satisfeita para qualquer par (x; y); portanto, ela representa todo o plano cartesiano.

e) Consideremos o conjunto **A** de pontos do plano tais que

$$0x + 0y - 4 > 0 \quad \text{(I)}$$

A condição (I) é obviamente **falsa** para qualquer par (x; y). Portanto, o conjunto **A** é o conjunto vazio:

$$A = \emptyset$$

No item seguinte vamos concentrar nossa atenção nos casos em que $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

6.2 – SEMIPLANOS DETERMINADOS POR UMA RETA

Consideremos a expressão $F(x; y) = ax + by + c$, onde $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Nestas condições, podemos dizer que a equação

$$\boxed{ax + by + c = 0} \quad \text{(I)}$$

representa uma reta **r** não-paralela a nenhum dos eixos e portanto possui equação reduzida:

$$\boxed{y = mx + n} \quad \text{(II)}$$

Sendo $P(x_0; y_0)$ um ponto de **r** temos:

$$y_0 = mx_0 + n \quad \text{(III)}$$

O ponto A da figura 6.1 está "acima" de **r** e portanto

$$y_A > y_0 \quad \text{(IV)}$$

De (IV) e (III) tiramos:

$$y_A > mx_A + n \quad \text{(V)}$$

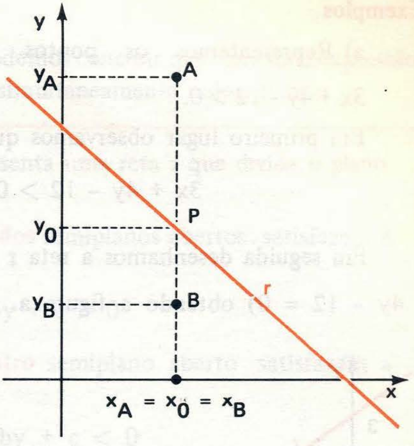


Fig. 6.1

O ponto B da figura 6.1 está "abaixo" de **r** e portanto

$$y_B < y_0 \quad \text{(VI)}$$

De (VI) e (III) tiramos:

$$y_B < mx_B + n \quad \text{(VII)}$$

Podemos então concluir que a relação (V) ($y_A > mx_A + n$) vale para qualquer ponto A situado "acima" de **r**, e a relação (VII) ($y_B < mx_B + n$) vale para qualquer ponto B situado "abaixo" de **r**.

Em resumo:

Dada uma reta **r** de equação reduzida

$$y = mx + n$$

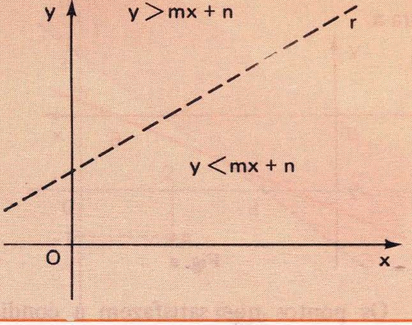
temos:

a) Todos os pontos situados **acima** de **r** satisfazem a condição

$$y > mx + n$$

b) Todos os pontos situados **abaixo** de **r** satisfazem a condição

$$y < mx + n$$



Exemplos

a) Representemos os pontos do plano que satisfazem a condição: $3x + 4y - 12 > 0$.

Em primeiro lugar observamos que

$$3x + 4y - 12 > 0 \iff y > -\frac{3}{4}x + 3$$

Em seguida desenhamos a reta **r** de equação $y = -\frac{3}{4}x + 3$ (ou $3x + 4y - 12 = 0$) obtendo a figura **a**.

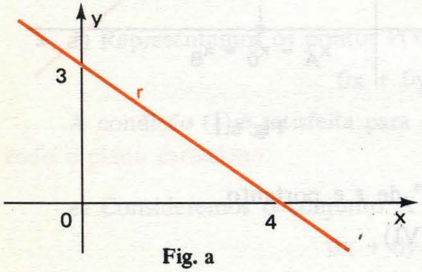


Fig. a

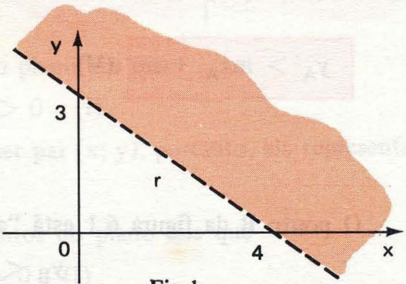


Fig. b

Os pontos que satisfazem a condição

$$y > -\frac{3}{4}x + 3$$

são aqueles situados "acima" de **r** (figura b).

b) Vamos representar os pontos que satisfazem a inequação $2x - 5y - 10 > 0$.

Temos:

$$2x - 5y - 10 > 0 \iff y < \frac{2}{5}x - 2$$

Desenhamos a reta **r** de equação $y = \frac{2}{5}x - 2$ (ou $2x - 5y - 10 = 0$) obtendo a figura **a**.

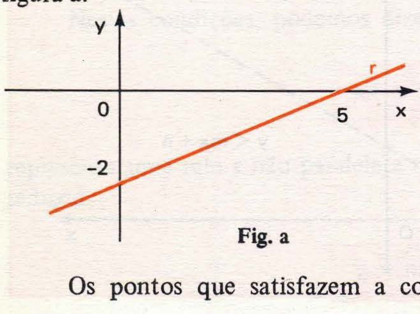


Fig. a

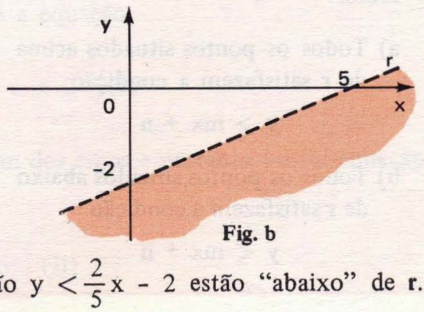


Fig. b

Os pontos que satisfazem a condição $y < \frac{2}{5}x - 2$ estão "abaixo" de **r**.

Caso geral

Juntando as discussões feitas acima, podemos concluir que dada uma expressão $F(x; y) = ax + by + c$, onde **a** e **b** não são simultaneamente nulos, temos:

1º) A equação $ax + by + c = 0$ representa uma reta **r** que divide o plano em dois semiplanos abertos.

2º) Todos os pontos situados em um dos semiplanos abertos satisfazem a condição

$$F(x; y) = ax + by + c > 0$$

3º) Todos os pontos situados no outro semiplano aberto satisfazem a condição

$$F(x; y) = ax + by + c < 0$$

Exemplo

Vamos retomar o exemplo **a** resolvido anteriormente.

Queremos representar os pontos do plano que satisfazem a condição $3x + 4y - 12 > 0$. Em primeiro lugar desenhamos a reta **r** de equação $3x + 4y - 12 = 0$ (fig. a).

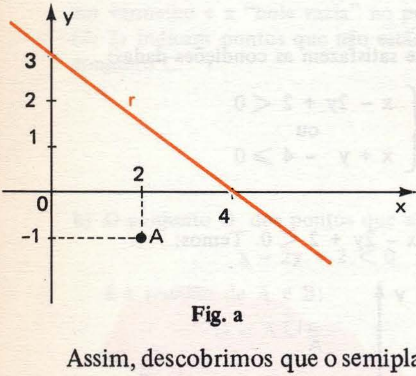


Fig. a

A solução da inequação dada é certamente um dos semiplanos abertos determinados pela reta **r**. Para saber **qual deles** é a resposta, basta *testar* em $F(x; y) = 3x + 4y - 12$ um ponto **qualquer que não pertença a r**. Por exemplo, tomando o ponto $A(2; -1)$ temos:

$$F(2; -1) = 3(2) + (4)(-1) - 12 = -10 < 0$$

Assim, descobrimos que o semiplano correto é aquele que *não contém* A, ou seja, aquele colorido na figura **b**. Ao invés de A, poderíamos ter usado a própria origem $O(0; 0)$, o que em geral facilita os cálculos:

$$F(0; 0) = 3(0) + 4(0) - 12 = -12 < 0$$

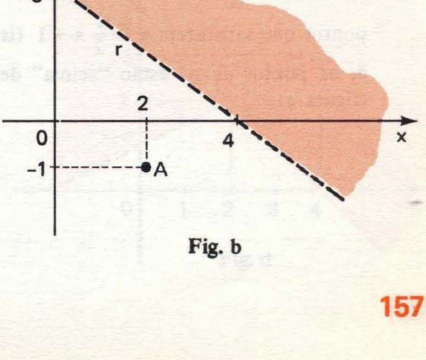


Fig. b

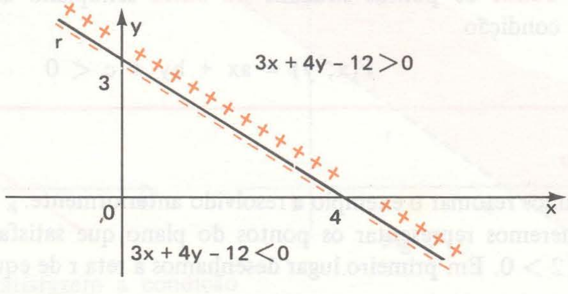
Observação: Na resolução de certos problemas, pode ser útil assinalar com sinal + o semiplano correspondente a

$$ax + by + c > 0$$

e assinalar com sinal - o semiplano correspondente a

$$ax + by + c < 0$$

Assim, no exemplo anterior, temos a expressão $F(x; y) = 3x + 4y - 12$. Sendo **r** a reta de equação $3x + 4y - 12 = 0$, vimos que "acima" de **r** vale $3x + 4y - 12 > 0$ e "abaixo" de **r** vale $3x + 4y - 12 < 0$. Indicamos isso com os sinais + e - na figura abaixo.



Exercícios Resolvidos

6.1) Represente graficamente os pontos (x; y) que satisfazem as condições dadas:

a) $\begin{cases} x - 2y + 2 < 0 \\ \text{e} \\ x + y - 4 \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 2y + 2 < 0 \\ \text{ou} \\ x + y - 4 \geq 0 \end{cases}$

Solução

a) Seja A o conjunto dos pontos tais que $x - 2y + 2 < 0$. Temos:

$x - 2y + 2 < 0 \iff y > \frac{1}{2}x + 1$

Sendo r a reta de equação $y = \frac{1}{2}x + 1$, os pontos que satisfazem $y > \frac{1}{2}x + 1$ (isto é, os pontos de A) estão "acima" de r (figura a)

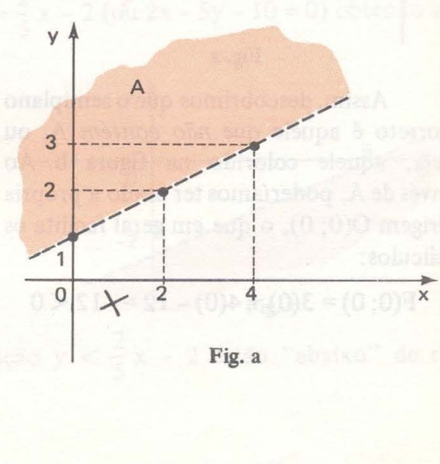


Fig. a

Seja B o conjunto dos pontos tais que $x + y - 4 \geqslant 0$. Temos:

$$x + y - 4 \geqslant 0 \iff y \geqslant -x + 4$$

Sendo s a reta de equação $y = -x + 4$, os pontos que satisfazem $y \geqslant -x + 4$ (isto é, os pontos de B), estão "acima" de s e sobre s, (é um semiplano fechado) conforme vemos na figura b.

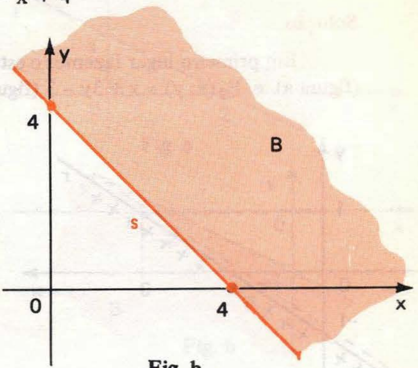


Fig. b

O conjunto C dos pontos que satisfazem

$$x - 2y + 2 < 0 \quad e \quad x + y - 4 \geqslant 0$$

é a **interseção** de A e B:

$$C = A \cap B$$

O conjunto C está representado em vermelho na figura c. Os pontilhados em vermelho e a "bola vazia" no ponto (2; 2) indicam pontos que não estão no conjunto C.

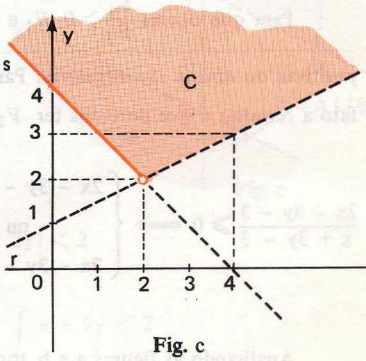


Fig. c

b) O conjunto D dos pontos que satisfazem

$$x - 2y + 2 < 0 \quad ou \quad x + y - 4 \geqslant 0$$

é a **reunião** de A e B:

$$D = A \cup B$$

Os pontos do conjunto D estão indicados em vermelho na figura d. Os pontilhados em vermelho indicam pontos que não pertencem a D. Repare que neste caso o ponto (2; 2) faz parte de D.

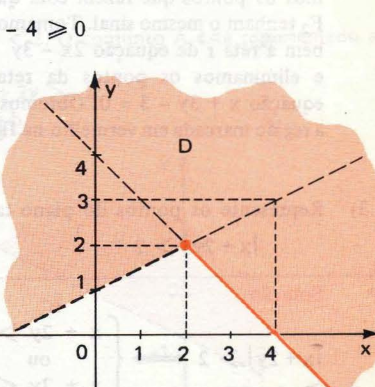


Fig. d

6.2) Represente os pontos (x; y) tais que $\dfrac{2x - 3y - 3}{x + 3y - 3} \geqslant 0$

Solução

Em primeiro lugar fazemos o estudo dos sinais das expressões $F_1(x; y) = 2x - 3y - 3$ (figura **a**) e $F_2(x; y) = x + 3y - 3$ (figura **b**).

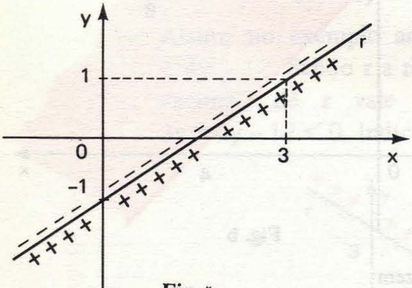


Fig. a

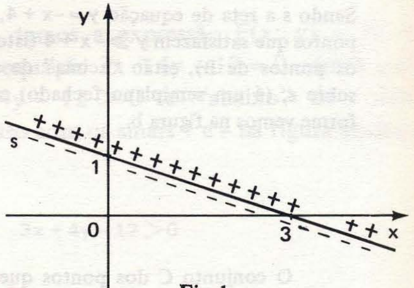
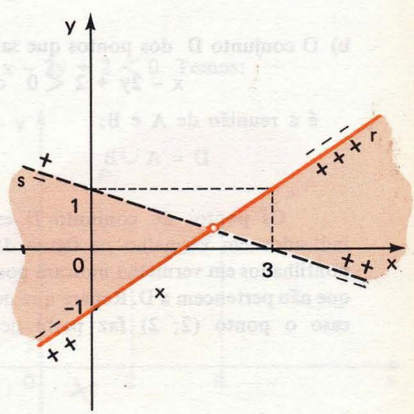


Fig. b

Para que ocorra $\dfrac{F_1}{F_2} > 0$, F_1 e F_2 devem ter o mesmo sinal, isto é, ou ambas são positivas ou ambas são negativas. Para que ocorra $\dfrac{F_1}{F_2} = 0$ devemos ter $F_1 = 0$. Outro fato a ressaltar é que devemos ter $F_2 \neq 0$. Portanto:

$$\frac{2x - 3y - 3}{x + 3y - 3} \geqslant 0 \iff \begin{cases} 2x - 3y - 3 \quad \text{e} \quad x + 3y - 3 \quad \text{com o mesmo sinal} \\ \text{ou} \\ 2x - 3y - 3 = 0 \quad \text{e} \quad x + 3y - 3 \neq 0 \end{cases}$$

Analisando as figuras **a** e **b**, tomamos os pontos que fazem com que F_1 e F_2 tenham o mesmo sinal. Tomamos também a reta **r** de equação $2x - 3y - 3 = 0$ e eliminamos os pontos da reta **s** de equação $x + 3y - 3 = 0$. Obtemos então a região marcada em vermelho na figura c.



6.3) Represente os pontos do plano tais que

$|x + 2y| > 2$

Solução

$$|x + 2y| > 2 \iff \begin{cases} x + 2y > 2 \\ \text{ou} \\ x + 2y < -2 \end{cases}$$

Seja A o conjunto dos pontos do plano tais que $x + 2y > 2$.
Temos:

$$x + 2y > 2 \iff y > -\frac{1}{2}x + 1$$

Sendo r a reta de equação $y = -\frac{1}{2}x + 1$, os pontos de A estão representados na figura a.

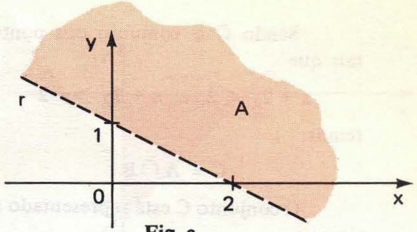


Fig. a

Seja B o conjunto de pontos do plano tais que $x + 2y < -2$.

$$x + 2y < -2 \iff y < -\frac{1}{2}x - 1$$

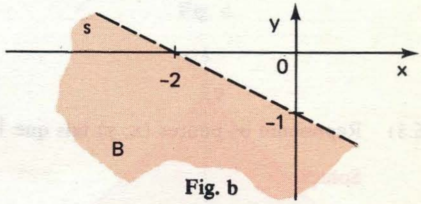


Fig. b

Sendo s a reta de equação $y = -\frac{1}{2}x - 1$, os pontos de B estão representados na figura b.

Sendo C o conjunto de pontos tais que $|x + 2y| > 2$, devemos ter

$$C = A \cup B$$

O conjunto C está representado na figura c.

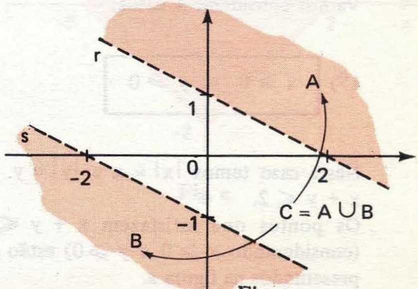


Fig. c

6.4) Represente os pontos que satisfazem $|x + 2y| < 2$

Solução

$$|x + 2y| < 2 \iff -2 < x + 2y < 2 \iff \begin{cases} x + 2y < 2 \\ \text{e} \\ x + 2y > -2 \end{cases}$$

Seja A o conjunto dos pontos tais que $x + 2y < 2$. O conjunto A está representado na figura a.

Seja B o conjunto dos pontos tais que $x + 2y > -2$
O conjunto B está representado na figura b.

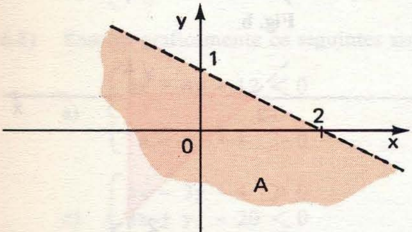


Fig. a

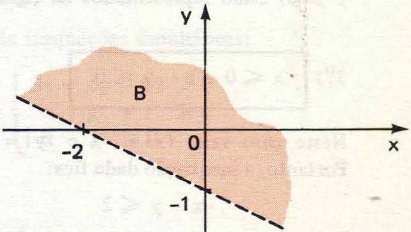


Fig. b

Sendo C o conjunto dos pontos tais que

$$x + 2y < 2 \quad e \quad x + 2y > -2$$

temos:

$$C = A \cap B$$

O conjunto C está representado na figura c.

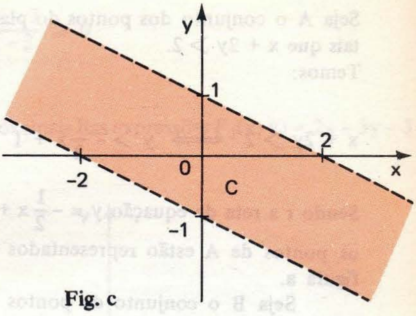


Fig. c

6.5) Represente os pontos (x; y) tais que $|x| + |y| \leqslant 2$

Solução

Vamos considerar 4 casos:

$x \geqslant 0 \iff |x| = x$
$x \leqslant 0 \iff |x| = -x$

1º) $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$

Neste caso temos $|x| = x$ e $|y| = y$. Assim, a condição $|x| + |y| \leqslant 2$ pode ser escrita: $x + y \leqslant 2$.

Os pontos que satisfazem $x + y \leqslant 2$ (considerando $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$) estão representados na figura a.

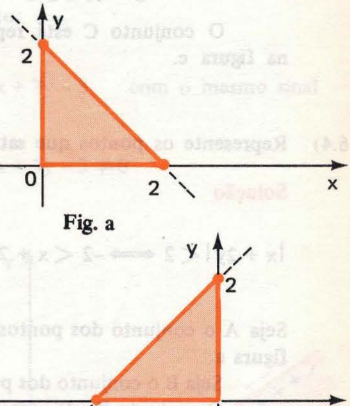


Fig. a

2º) $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$

Agora temos: $|x| = -x$ e $|y| = y$. Com isso a inequação dada pode ser escrita:

$$-x + y \leqslant 2$$

Os pontos que satisfazem esta última inequação (com a condição $x \leqslant 0$ e $y \geqslant 0$) estão representados na figura b

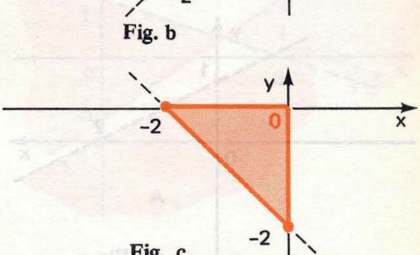


Fig. b

3º) $x \leqslant 0$ e $y \leqslant 0$

Neste caso vale: $|x| = -x$ e $|y| = -y$. Portanto, a inequação dada fica:

$$-x - y \leqslant 2$$

e sua representação está na figura c.

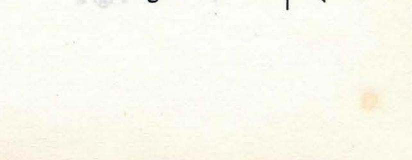


Fig. c

4º) $x \geqslant 0$ e $y \leqslant 0$

$$|x| = x \quad e \quad |y| = -y$$

A inequação dada fica:

$$x - y \leqslant 2$$

e sua representação está na figura d.

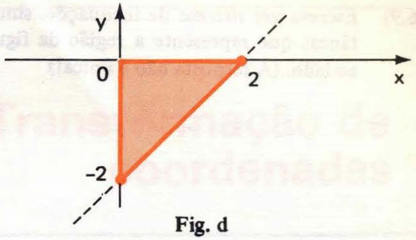


Fig. d

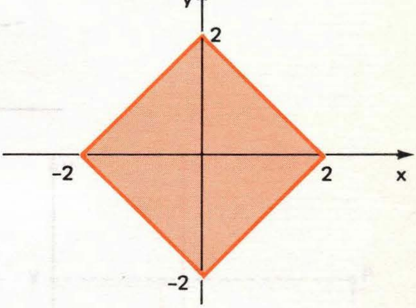


Fig. e

Os pontos que satisfazem a condição $|x| + |y| \leqslant 2$, são obtidos, reunindo os pontos das quatro figuras anteriores. Obtemos então a figura e.

Exercícios Propostos

6.6) Represente os pontos do plano tais que:

a) $x + y - 3 < 0$

b) $2x - 3y \leqslant 0$

c) $x - 2 > 0$

d) $|y| \leqslant 2$

6.7) Represente no plano os pontos tais que:

a) $\begin{cases} x + y - 3 < 0 \\ \text{ou} \\ 2x - 3y \leqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - 3 < 0 \\ \text{e} \\ 2x - 3y \leqslant 0 \end{cases}$

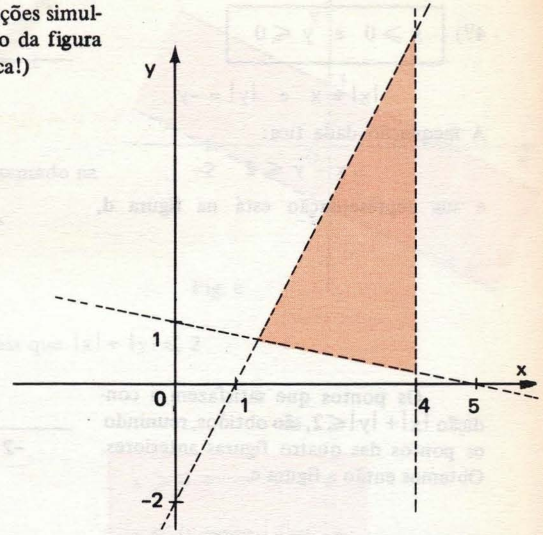
6.8) Resolva graficamente os seguintes sistemas de inequações simultâneas:

a) $\begin{cases} 3x + 4y - 12 < 0 \\ x - y + 1 > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 4y - 12 > 0 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \\ x - 2 \geqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 3y - 4 > 0 \\ 4x + y - 20 < 0 \\ 2x + 3y - 12 > 0 \end{cases}$

6.9) Escreva *um sistema* de inequações simultâneas que represente a região da figura ao lado. (A resposta não é única!)



6.10) Represente os pontos (x; y) tais que:

a) $|x| < 2$ e $|y| \leqslant 3$
b) $|x| < 2$ e $x - y + 1 > 0$
c) $x + |y| > 2$
d) $|x| + |y| \leqslant 3$
e) $|x| + |y| > 3$

6.11) Represente os pontos do plano tais que:

a) $(2x - y + 5)(x + 2y) \leqslant 0$

b) $\dfrac{2x - y + 5}{x + 2y} \leqslant 0$

c) $\dfrac{x + 3}{y + 2} < 3$

6.12) Situe no plano cartesiano os pontos P(x; y) para os quais a equação em a:

$$(x + 2y)a^2 - 3a + (2x - y + 5) = 0$$

admite raízes de sinais contrários.

Capítulo 7

Transformação de coordenadas

7.1 – TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Consideremos em um plano dois sistemas de coordenadas cartesianas ortogonais xOy e x'O'y' tais que o eixo O'x' tem o mesmo sentido de Ox e o eixo O'y' tem o mesmo sentido de Oy. Dizemos então que um dos sistemas pode ser obtido do outro, através de uma **translação** dos eixos.

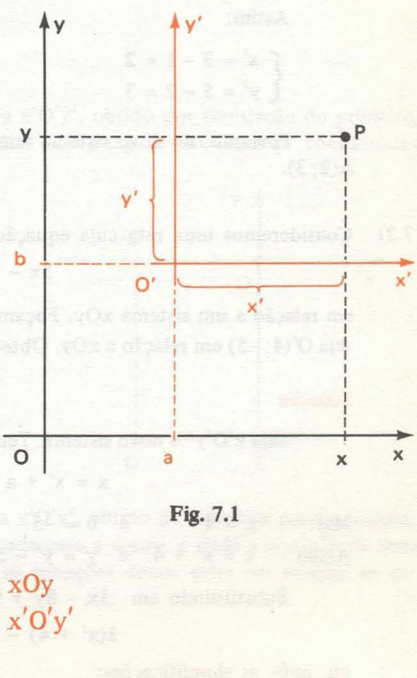


Fig. 7.1

Sendo **a** e **b** as coordenadas de O' em relação ao sistema xOy, consideremos um ponto P qualquer do plano tal que suas coordenadas são:

x e y em relação ao sistema xOy
x' e y' em relação ao sistema x'O'y'

Observando a figura 7.1, tiramos facilmente as seguintes relações:

$$x = x' + a \qquad y = y' + b \qquad (7.1)$$

que são as fórmulas de transformação de coordenadas para o caso de translação de eixos.

Exercícios Resolvidos

7.1) Consideremos o ponto A(3; 5) em relação a um sistema de coordenadas xOy. Façamos uma translação nos eixos tal que a nova origem O′ é dada por O′ (1; 2) em relação a xOy. Obtenha as coordenadas de A no novo sistema.

Solução

Seja x′O′y′ o novo sistema.

Temos:

$$x = x' + a \quad \text{e} \quad y = y' + b$$

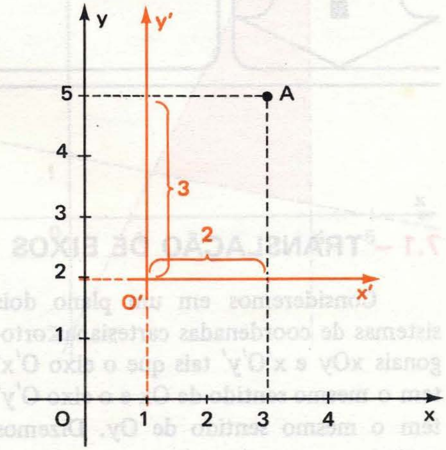
ou $x' = x - a$ e $y' = y - b$

onde: $\begin{cases} a = 1 \text{ e } b = 2 \\ x = 3 \text{ e } y = 5 \end{cases}$

Assim:

$$\begin{cases} x' = 3 - 1 = 2 \\ y' = 5 - 2 = 3 \end{cases}$$

Portanto, no novo sistema temos: A(2; 3).



7.2) Consideremos uma reta cuja equação é

$$3x - 8y + 9 = 0$$

em relação a um sistema xOy. Façamos uma translação nos eixos tal que a nova origem seja O′(4; −5) em relação a xOy. Obtenha a equação da reta no novo sistema.

Solução

Seja x′O′y′ o novo sistema. Temos:

$$x = x' + a \quad \text{e} \quad y = y' + b$$

Mas: $a = 4$ e $b = -5$

Assim: $x = x' + 4$ e $y = y' - 5$

Substituindo em $3x - 8y + 9 = 0$ obtemos:

$$3(x' + 4) - 8(y' - 5) + 9 = 0$$

ou, após as simplificações:

$$3x' - 8y' + 61 = 0$$

7.3) Em relação a um sistema xOy, uma *curva* (L) tem equação:

$$x^2 + 2x + 4y - 3 = 0.$$

Faz-se uma translação de eixos e, em relação ao novo sistema XOY, a equação de (L) não possui termo em X, nem termo independente. Determine a origem do sistema XOY em relação ao sistema xOy.

Solução

Seja (a; b) a origem do novo sistema, em relação ao sistema xOy. Temos:

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

Então, $(X + a)^2 + 2(X + a) + 4(Y + b) - 3 = 0$

e daí: $X^2 + (2a + 2)X + 4Y + a^2 + 2a + 4b - 3 = 0$

Devemos ter:

$$\begin{cases} 2a + 2 = 0 \\ \quad e \\ a^2 + 2a + 4b - 3 = 0 \end{cases}$$

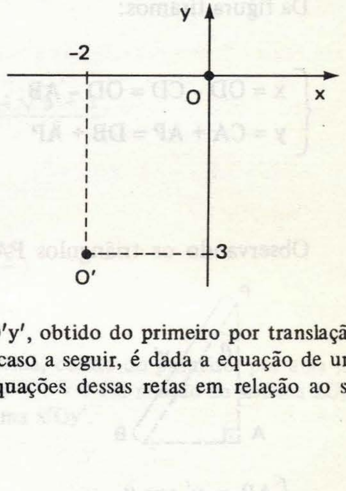
e então: $a = -1$ e $b = 1$

A *nova* origem é o ponto (–1; 1) em relação ao sistema xOy.

Exercícios Propostos

7.4) Consideremos um sistema xOy e um sistema x'O'y', obtido por translação do primeiro, tal que O'(–2; +3) em relação a xOy. Em cada caso a seguir, são dadas as coordenadas de um ponto em relação ao sistema xOy.
Obtenha as coordenadas desses pontos em relação ao sistema x'O'y'.

a) (7; –1)
b) (3; 0)
c) (–9; –1)
d) (–2; 6)



7.5) Consideremos um sistema xOy e um sistema x'O'y', obtido do primeiro por translação, tal que O'(4; –8) em relação a xOy. Em cada caso a seguir, é dada a equação de uma reta em relação ao sistema xOy. Obtenha as equações dessas retas em relação ao sistema x'O'y'.

a) $6x + 2y - 1 = 0$
b) $\frac{3}{2}x - y - 10 = 0$
c) $x + 3 = 0$
d) $y - 7 = 0$

7.6) Em relação a um sistema xOy, uma curva (L) tem equação:

$$y^2 - 2x^2 + y + 3x + 1 = 0.$$

Faz-se uma translação de eixos e, em relação ao novo sistema x'O'y', a equação de (L) não possui termos do 1º grau. Determine O' em relação ao sistema xOy.

7.2 – ROTAÇÃO DE EIXOS

Consideremos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy (figura 7.2). Mantendo a origem **O** fixa, vamos girar os eixos Ox e Oy no sentido anti-horário, do mesmo ângulo θ (figura 7.3). Obtemos assim o sistema x'Oy'.

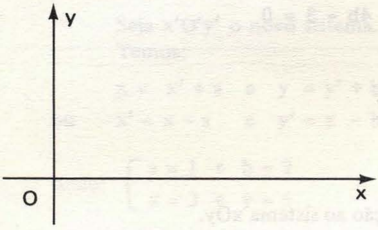


Fig. 7.2

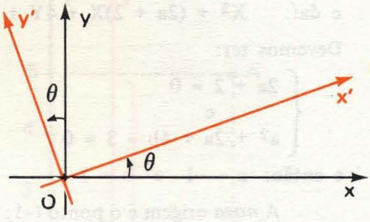


Fig. 7.3

Seja P um ponto que tem coordenadas x e y em relação ao sistema xOy e coordenadas x' e y' em relação ao sistema x'Oy' (figura 7.4).

Da figura tiramos:

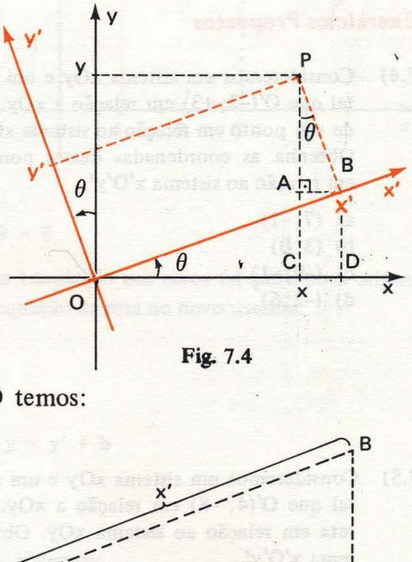
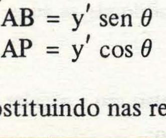
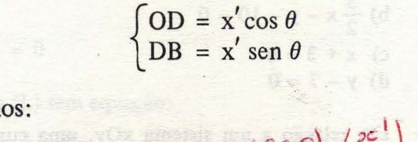


Fig. 7.4

$$\begin{cases} x = OD - CD = OD - AB \\ y = CA + AP = DB + AP \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Observando os triângulos PAB e OBD temos:





$$\begin{cases} AB = y' \operatorname{sen} \theta \\ AP = y' \cos \theta \end{cases} \qquad \begin{cases} OD = x' \cos \theta \\ DB = x' \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Substituindo nas relações (I), obtemos:

$$\begin{cases} x = x' \cos \theta - y' \operatorname{sen} \theta \\ y = x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta \end{cases} \quad (7.2)$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Exercícios Resolvidos

7.7) Consideremos o ponto P(4; 3) em relação a um sistema de coordenadas xOy. Determine as coordenadas de P em relação a um sistema x'Oy', obtido por rotação de xOy, no sentido anti-horário, de um ângulo $\theta = 60°$.

Solução

Aqui temos:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Usando as fórmulas 7.2:

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

$$\text{ou:} \quad 4 = x'\left(\frac{1}{2}\right) - y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{e} \quad 3 = x'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y'\left(\frac{1}{2}\right)$$

Simplificando, ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} x' - \sqrt{3}\,y' = 8 \\ \sqrt{3}x' + y' = 6 \end{cases}$$

que, resolvido, nos dá:

$$x' = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad y' = \frac{-4\sqrt{3} + 3}{2}$$

Assim, em relação ao sistema x'Oy' temos:

$$P\left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}; \frac{-4\sqrt{3} + 3}{2}\right)$$

7.8) Dado um sistema xOy, seja x'Oy' um outro sistema, obtido do primeiro por uma rotação de $\theta = 60°$. Uma reta tem equação $2x - 4y + 1 = 0$ em relação ao sistema xOy. Obtenha a equação dessa reta em relação ao sistema x'Oy'.

Solução

Aqui temos: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$.

As fórmulas (7.2) ficam:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta = x' \cdot \dfrac{1}{2} - y' \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta = x' \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + y' \cdot \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Substituindo em $2x - 4y + 1 = 0$ obtemos:

$$2\left(x' \cdot \frac{1}{2} - y' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(x' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y' \cdot \frac{1}{2}\right) + 1 = 0$$

que, após as simplificações, transforma-se em:

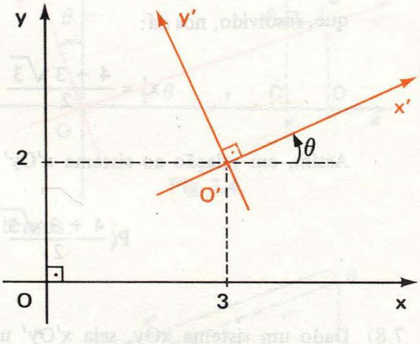
$$(1 - 2\sqrt{3})x - (2 + \sqrt{3})y' + 1 = 0$$

Exercícios Propostos

7.9) Seja o ponto $A(-5; 2)$ em relação a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy. Consideremos um sistema $x'Oy'$ obtido a partir de xOy por rotação de um ângulo θ no sentido anti-horário. Sabendo que $\operatorname{sen}\theta = 0{,}6$ e $\cos\theta = 0{,}8$, obtenha as coordenadas de A em relação ao sistema $x'Oy'$.

7.10) Uma reta tem equação $8x + 6y + 3 = 0$ em relação a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Obtenha a equação dessa reta em relação a um outro sistema, obtido do primeiro por uma rotação de 30°.

7.11) Uma reta tem equação $26x + 52y + 3 = 0$ em relação ao sistema xOy representado na figura. Obtenha a equação dessa reta em relação ao sistema $x'O'y'$ sabendo que $\operatorname{sen}\theta = \frac{5}{13}$ e $\cos\theta = \frac{12}{13}$



Capítulo

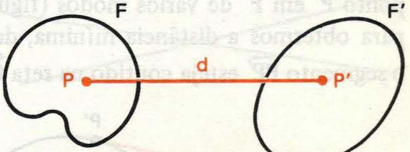
8

Distância de ponto a reta

8.1 – INTRODUÇÃO

Dadas duas figuras F e F', seja **d** a distância entre um ponto P de F e um ponto P' de F'.

Ao menor valor possível para d, damos o nome de distância entre as figuras F e F'.



Exemplos

a) Consideremos o caso em que uma das figuras é uma reta **r** e a outra é um ponto A fora de **r**. Podemos considerar vários pontos em **r** e calcular suas distâncias ao ponto A (figura a). Porém, em Geometria Plana, demonstra-se que a menor distância é aquela entre o ponto A e a projeção de A sobre **r** (figura b).

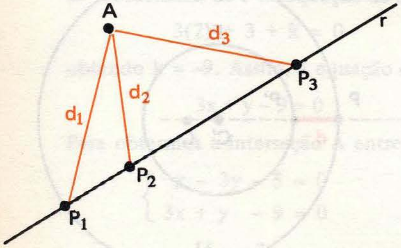


Fig. a

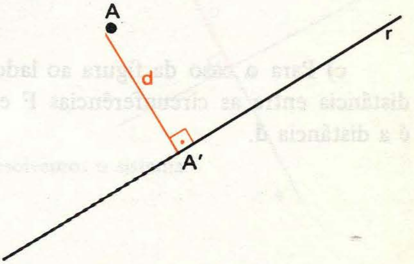


Fig. b

Portanto, para obtermos a distância **d** entre um ponto **A** e uma reta **r**, traçamos por A uma reta s perpendicular a **r**. Determinamos a interseção A′ entre **r** e s. Por fim, determinamos a distância **d** de **A** a **A′**. Devemos observar que quando o ponto **A** está em **r** (figura c) a distância entre **A** e **r** é **nula**.

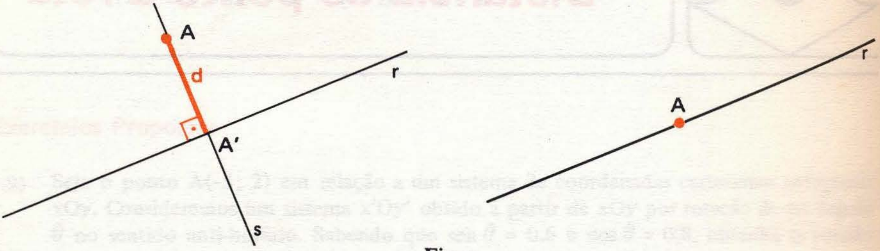


Fig. c

b) Consideremos duas circunferências F e F′, de centros C e C′, que não se interceptem, como mostra a figura a. Podemos tomar um ponto **P** em F e um ponto **P′** em F′ de vários modos (figura a). Em Geometria Plana demonstra-se que, para obtermos a distância mínima, devemos tomar os pontos **P** e **P′** de modo que o segmento $\overline{PP'}$ esteja contido na reta $\overleftrightarrow{CC'}$ (figura b).

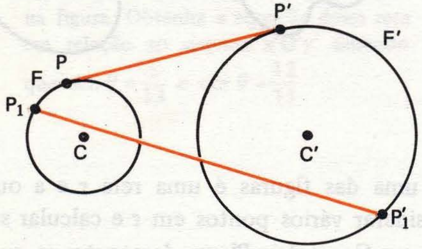


Fig. a

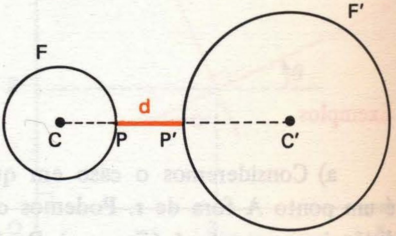
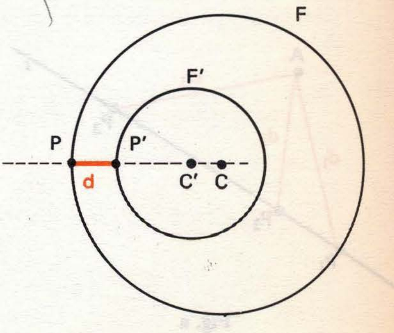
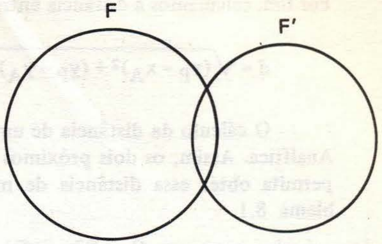


Fig. b

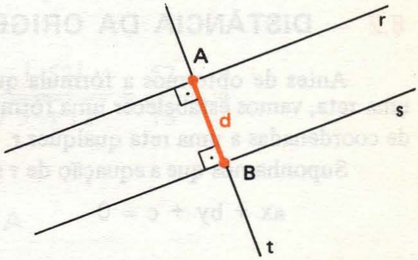
c) Para o caso da figura ao lado, a distância entre as circunferências F e F′ é a distância **d**.



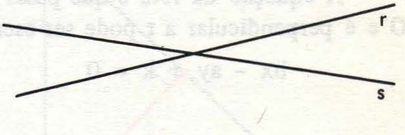
d) Quando as circunferências têm ponto em comum, a distância entre elas é **nula.**



e) Para obtermos a distância **d** entre duas retas paralelas **r** e **s**, traçamos uma reta **t** que seja perpendicular a **r** e **s**. Em seguida determinamos as interseções de **t** com **r** e **s**, obtendo os pontos **A** e **B**. A distância entre os pontos **A** e **B** é a distância procurada.



f) Quando duas retas são concorrentes, a distância entre elas é **nula.**



Exercício Resolvido

8.1) Determine a distância **d** do ponto P(2; 3) à reta **r** de equação $x - 3y - 5 = 0$.

Solução

A reta **r** tem equação $x - 3y - 5 = 0$. Portanto a equação da reta s, perpendicular a **r**, pode ser colocada na forma:

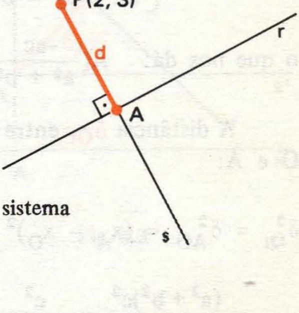
$$3x + y + k = 0$$

Como s passa por P, podemos substituir as coordenadas de P na equação de s:

$$3(2) + 3 + k = 0$$

obtendo $k = -9$. Assim, a equação de s é

$$3x + y - 9 = 0$$



Para obtermos a interseção **A** entre **r** e **s**, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x - 3y - 5 = 0 \\ 3x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

donde: $A(\frac{16}{5}; \frac{-3}{5})$

Por fim, calculamos a distância entre P e A:

$$d = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2} = \sqrt{(2 - \frac{16}{5})^2 + (3 + \frac{3}{5})^2} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

O cálculo da distância de um ponto a uma reta é muito importante em Geometria Analítica. Assim, os dois próximos itens são dedicados à obtenção de uma fórmula que permita obter essa distância de modo mais rápido do que aquele aplicado no problema 8.1.

8.2 – DISTÂNCIA DA ORIGEM A UMA RETA

Antes de obtermos a fórmula que nos dá a distância de um **ponto qualquer** a uma reta, vamos estabelecer uma fórmula que dá a distância da **origem O** do sistema de coordenadas a uma reta qualquer **r**.

Suponhamos que a equação de **r** seja

$$ax + by + c = 0$$

A equação da reta **s** que passa por **O** e é perpendicular a **r** pode ser escrita:

$$bx - ay + k = 0$$

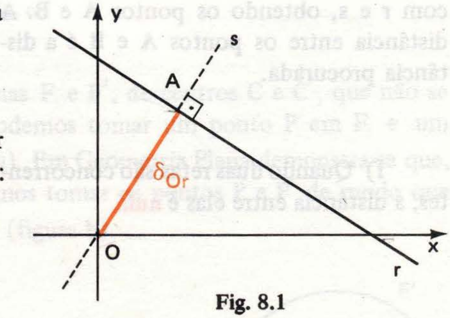


Fig. 8.1

Como **s** passa pela origem, devemos ter k = 0 e portanto a equação de **s** é:

$$bx - ay = 0$$

Em seguida podemos determinar a interseção **A** das retas **r** e **s**, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ bx - ay = 0 \end{cases}$$

o que nos dá: $A\left(\frac{-ac}{a^2 + b^2} ; \frac{-bc}{a^2 + b^2}\right)$

A distância δ_{Or} entre o ponto **O** e a reta **r** é igual à distância entre os pontos **O** e **A**:

$$\delta^2_{Or} = \delta^2_{AO} = (x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2 = x^2_A + y^2_A = \frac{a^2c^2}{(a^2 + b^2)^2} + \frac{b^2c^2}{(a^2 + b^2)^2} =$$

$$= \frac{(a^2 + b^2)c^2}{(a^2 + b^2)^2} = \frac{c^2}{a^2 + b^2}$$

Portanto:

$$\delta_{Or} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (8.1)$$

Exemplo

Consideremos a reta **r** de equação 5x + 12y - 52 = 0, e vamos calcular a distância da origem **O** à reta **r**. Temos:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = 12 \\ c = -52 \end{cases} \qquad \delta_{Or} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-52|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{52}{13} = 4$$

8.3 – DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

Vamos agora calcular a distância δ_{Ar} de um ponto qualquer $A(x_A; y_A)$ a uma reta qualquer **r**.

Para tanto, vamos considerar os eixos Ay' e Ax' paralelos a Oy e Ox respectivamente (figura 8.3).

Suponhamos que a equação de **r** em relação ao sistema xOy seja

$$ax + by + c = 0 \quad \text{(I)}$$

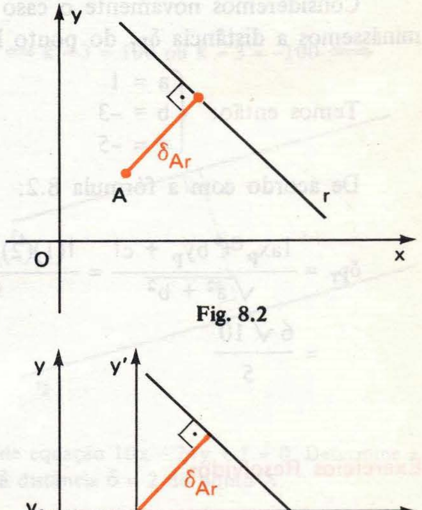


Fig. 8.2

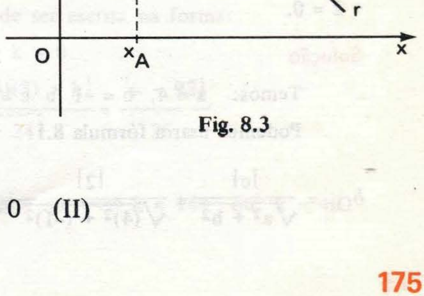


Fig. 8.3

Como $\begin{cases} x = x' + x_A \\ y = y' + y_A \end{cases}$

a equação I pode ser escrita:

$$a(x' + x_A) + b(y' + y_A) + c = 0$$

ou: $$ax' + by' + (ax_A + by_A + c) = 0 \quad \text{(II)}$$

A equação II é a equação da reta **r** em relação ao sistema $x'Ay'$. Repare que o termo independente dessa equação é:

$$k = ax_A + by_A + c$$

Portanto, de acordo com a equação 8.1, a distância da **origem** A à reta **r** é:

$$\delta_{Ar} = \frac{|k|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Em resumo, a distância de um ponto $A(x_A ; y_A)$ a uma reta **r** de equação $ax + by + c = 0$ é:

$$\delta_{Ar} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (8.2)$$

Exemplo

Consideremos novamente o caso do exercício 8.1. Lá era pedido que determinássemos a distância δ_{Pr} do ponto P(2; 3) à reta **r** de equação $x - 3y - 5 = 0$.

Temos então: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -5 \end{cases}$

De acordo com a fórmula 8.2:

$$\delta_{Pr} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(1)(2) + (-3)(3) + (-5)|}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-12|}{\sqrt{10}} = \frac{12\sqrt{10}}{10} =$$

$$= \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

Exercícios Resolvidos

8.2) Calcule a distância da origem do sistema de coordenadas à reta **r** de equação $4x - y + 2 = 0$.

Solução

Temos: $a = 4$, $b = -1$ e $c = 2$.

Podemos usar a fórmula 8.1:

$$\delta_{Or} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{(4)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$$

Podemos também usar a fórmula 8.2:

$$\delta_{Or} = \frac{|ax_O + by_O + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(0) + (-1)(0) + 2|}{\sqrt{(4)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$$

8.3) Calcule a distância do ponto A(-2; 5) à reta r de equação $8x - 15y + 11 = 0$.

Solução

Pela fórmula 8.2 temos:

$$\begin{cases} a = 8 \\ b = -15 \\ c = 11 \end{cases} \quad \delta_{Ar} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8(-2) + (-15)(5) + 11|}{\sqrt{8^2 + (-15)^2}} = \frac{|-80|}{\sqrt{289}} = \frac{80}{17}$$

8.4) Determine o valor de k, de modo que a distância do ponto B(-1; 3) à reta r de equação $24x + 7y + k = 0$ seja igual a 4.

Solução

$$\delta_{Br} = \frac{|ax_B + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|24(-1) + (7)(3) + k|}{\sqrt{24^2 + 7^2}} = \frac{|k - 3|}{\sqrt{625}} = \frac{|k - 3|}{25}$$

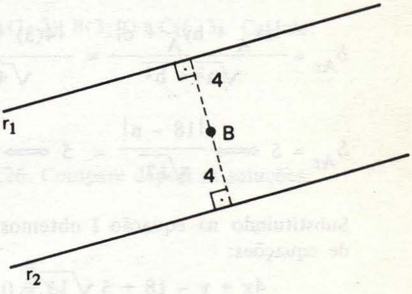
$$\delta_{Br} = 4 \iff \frac{|k - 3|}{25} = 4 \iff |k - 3| = 100 \iff k - 3 = 100 \text{ ou } k - 3 = -100 \iff$$

$$\iff k = 103 \text{ ou } k = -97$$

Portanto, podemos ter k = 103 ou k = -97, isto é, há duas retas de equação do tipo $24x + 7y + k = 0$ que estão à distância de quatro unidades do ponto B:

(r_1): $24x + 7y + 103 = 0$

(r_2): $24x + 7y - 97 = 0$



8.5) Consideremos o ponto A(-2; 3) e a reta r de equação $10x - 24y + 1 = 0$. Determine a equação da reta s que é paralela a r e está à distância $\delta = 2$ do ponto A.

Solução

Se s é paralela a r, sua equação pode ser escrita na forma:

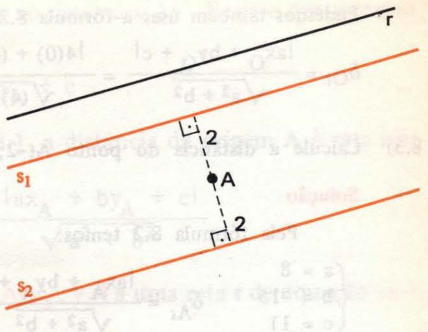
$$10x - 24y + k = 0$$

$$\delta_{As} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|10(-2) + (-24)(3) + k|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} = \frac{|k - 92|}{26}$$

$$\delta_{As} = 2 \iff \frac{|k - 92|}{26} = 2 \iff |k - 92| = 52 \iff k = 144 \text{ ou } k = 40$$

Portanto, o problema admite duas soluções, isto é, há duas retas que são paralelas a r e estão à distância de duas unidades do ponto A:

(s_1): $10x - 24y + 144 = 0$
(s_2): $10x - 24y + 40 = 0$



8.6) Uma reta r de coeficiente angular m = −4 está à distância δ = 5 do ponto A(3; 6). Determine a equação dessa reta.

Solução

Se o coeficiente angular de r é m = −4, sua equação pode ser escrita na forma reduzida:

$$y = -4x + n$$

Porém, para aplicarmos a equação 8.2, a equação da reta deve estar na forma geral. Assim:

$$y = -4x + n \iff 4x + y - n = 0 \quad \text{(I)}$$

$$\delta_{Ar} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(3) + (1)(6) - n|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{|18 - n|}{\sqrt{17}}$$

$$\delta_{Ar} = 5 \iff \frac{|18 - n|}{\sqrt{17}} = 5 \iff n = 18 - 5\sqrt{17} \text{ ou } n = 18 + 5\sqrt{17}$$

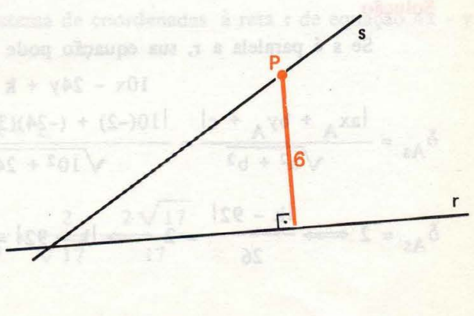
Substituindo na equação I obtemos duas soluções para o problema, que são as retas de equações:

$$4x + y - 18 + 5\sqrt{17} = 0 \quad \text{e} \quad 4x + y - 18 - 5\sqrt{17} = 0$$

8.7) Consideremos a reta r de equação $3x - 4y + 3 = 0$ e a reta s de equação $y = 2x + 2$. Determine um ponto P da reta s que diste 6 unidades da reta r.

Solução

Temos: $\begin{cases} (r): & 3x - 4y + 3 = 0 \\ (s): & y = 2x + 2 \end{cases}$



Seja **k** a abscissa do ponto P. Como P pertence a s vem:

$$y_P = 2x_P + 2 = 2k + 2$$

Portanto, podemos representar o ponto P por

$$P(k;\ 2k + 2)$$

Vamos agora calcular a distância de P a r:

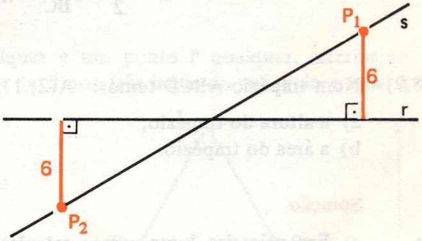
$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -4 \\ c = 3 \end{cases} \quad \delta_{Pr} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(3)(k) + (-4)(2k + 2) + 3|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-5k - 5|}{5} =$$

$$= |-k - 1|$$

$$\delta_{Pr} = 6 \iff |-k - 1| = 6 \iff k = -7 \text{ ou } k = 5$$

O problema admite, como vemos, duas soluções:

$$\begin{cases} \text{para } k = 5 \text{ temos: } P_1(5;\ 12) \\ \text{para } k = -7 \text{ temos: } P_2(-7;\ -12) \end{cases}$$



8.8) Consideremos o triângulo cujos vértices são A(1; 2), B(3; 7) e C(6; 3). Calcule:

a) a altura relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$;

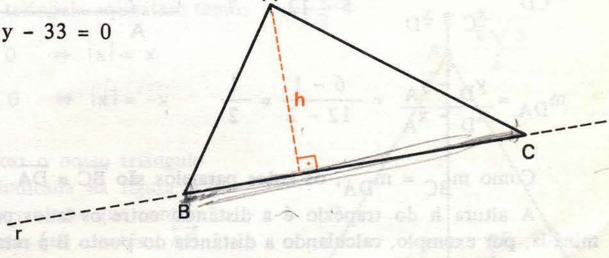
b) a área do triângulo.

Solução

a) Este problema é idêntico ao problema 5.26. Compare depois as soluções.

Em primeiro lugar determinamos a equação da reta **r** que contém o lado $\overleftrightarrow{BC}$, obtendo:

$$(r):\ 4x + 3y - 33 = 0$$

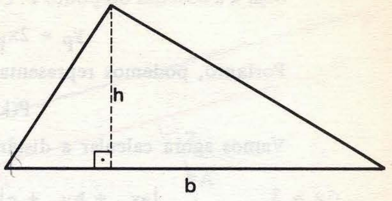


A altura **h** pedida é a distância do vértice A à reta **r**:

$$h = \delta_{Ar} = \frac{|4(1) + 3(2) - 33|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-23|}{5} = \frac{23}{5}$$

b) Conforme sabemos, sendo **b** a medida da base e **h** a altura de um triângulo, sua área S é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$



No nosso caso, podemos considerar como base o lado $\overleftrightarrow{BC}$:

$$\delta_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3 - 6)^2 + (7 - 3)^2} = 5$$

Portanto, a área S do nosso triângulo é:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \delta_{BC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (5)(\frac{23}{5}) = \frac{23}{2}$$

8.9) Num trapézio ABCD temos: A(2; 1), B(3; 4), C(5; 5) e D(12; 6). Determine:

a) a altura do trapézio;
b) a área do trapézio.

Solução

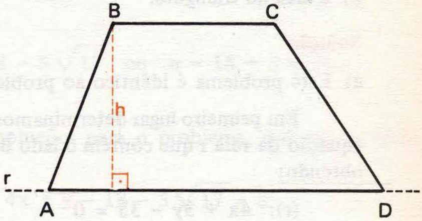
a) Em primeiro lugar vamos calcular os coeficientes angulares das retas suportes dos lados, para descobrirmos quais são os lados paralelos.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{2 - 3} = 3$$

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{4 - 5}{3 - 5} = \frac{1}{2}$$

$$m_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{5 - 6}{5 - 12} = \frac{1}{7}$$

$$m_{DA} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{6 - 1}{12 - 2} = \frac{1}{2}$$



Como $m_{BC} = m_{DA}$, os lados paralelos são $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DA}$.

A altura **h** do trapézio é a distância entre os lados paralelos. Podemos determiná-la, por exemplo, calculando a distância do ponto B à reta **r** que passa por A e D.

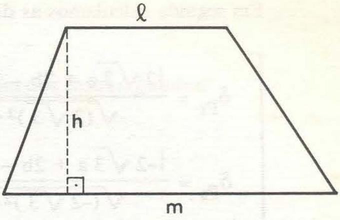
Determinamos a equação de **r**: $x - 2y = 0$.

Assim:

$$h = \delta_{Br} = \frac{|3 - 2(4)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

b) Como sabemos, sendo ℓ e m as medidas dos lados paralelos de um trapézio e sendo h sua altura, a área S do trapézio é dada por:

$$S = \frac{1}{2}(\ell + m)h$$



Podemos calcular então as medidas dos lados paralelos do nosso trapézio, obtendo:

$$\delta_{BC} = \sqrt{5} \quad e \quad \delta_{AD} = 5\sqrt{5}$$

Portanto:

$$S = \frac{1}{2}h \cdot (\delta_{BC} + \delta_{AD}) = \frac{1}{2}(\sqrt{5})(\sqrt{5} + 5\sqrt{5}) = 15$$

8.10) Consideremos um triângulo eqüilátero qualquer e um ponto P qualquer, interior ao triângulo. Mostre que a soma das distâncias de P aos três lados do triângulo é igual à altura do triângulo.

Solução

Consideremos um triângulo eqüilátero cuja medida do lado é ℓ e cuja altura é h. Sendo α, β e γ as distâncias de P aos três lados, devemos demonstrar que:

$$\alpha + \beta + \gamma = h$$

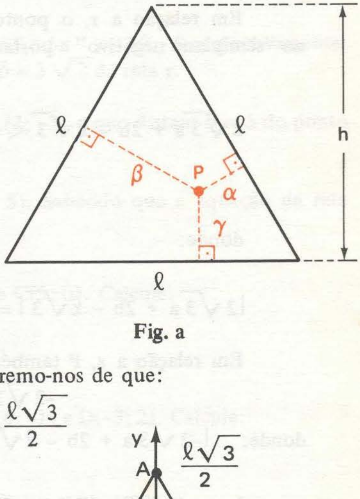


Fig. a

Antes de iniciarmos a demonstração lembremo-nos de que:

$$\begin{cases} \text{num triângulo eqüilátero temos } h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \\ x > 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = x \\ x < 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = -x \end{cases}$$

Vamos colocar o nosso triângulo ABC na posição indicada na figura b, sendo P(a; b). Seja r a reta que contém $\overleftrightarrow{AC}$ e seja s a reta que contém $\overleftrightarrow{AB}$.

Determinamos as equações de r e s que são:

(r): $2\sqrt{3}x + 2y - \ell\sqrt{3} = 0$

(s): $-2\sqrt{3}x + 2y - \ell\sqrt{3} = 0$

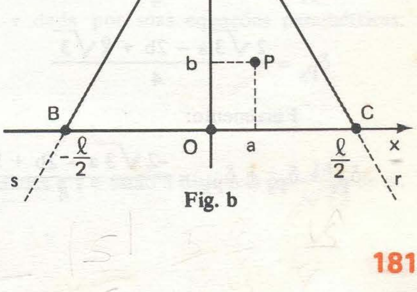


Fig. b

Em seguida calculamos as distâncias de P às retas r, s e ao eixo Ox:

$$\begin{cases} \delta_{Pr} = \dfrac{|2\sqrt{3}a + 2b - \ell\sqrt{3}|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2}} = \dfrac{|2\sqrt{3}a + 2b - \ell\sqrt{3}|}{4} & \text{(I)} \\ \delta_{Ps} = \dfrac{|-2\sqrt{3}a + 2b - \ell\sqrt{3}|}{\sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + 2^2}} = \dfrac{|-2\sqrt{3}a + 2b - \ell\sqrt{3}|}{4} & \text{(II)} \\ \delta_{Px} = b \end{cases}$$

Usando o processo visto no capítulo 6, fazemos a "sinalização" dos semiplanos determinados por r e s (figura c).

Em relação a r, o ponto P está no "semiplano negativo" e portanto

$$2\sqrt{3}a + 2b - \ell\sqrt{3} < 0$$

dònde:

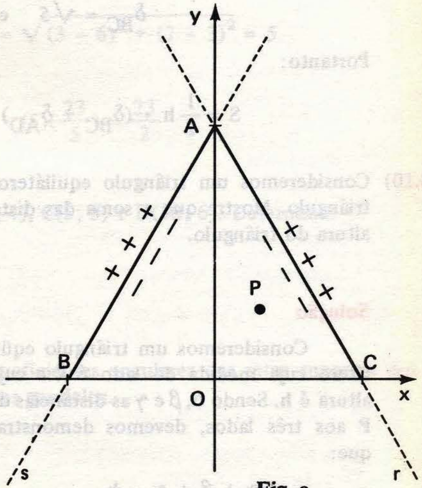


Fig. c

$$|2\sqrt{3}a + 2b - \ell\sqrt{3}| = -2\sqrt{3}a - 2b + \ell\sqrt{3} \quad \text{(III)}$$

Em relação a s, P também está no "semiplano negativo" e portanto:

$$-2\sqrt{3}a + 2b - \ell\sqrt{3} < 0$$

donde: $|-2\sqrt{3}a + 2b - \ell\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}a - 2b + \ell\sqrt{3}$ (IV)

Levando (III) e (IV) ém (I) e (II), podemos escrever:

$$\delta_{Pr} = \frac{-2\sqrt{3}a - 2b + \ell\sqrt{3}}{4}$$

$$\delta_{Ps} = \frac{2\sqrt{3}a - 2b + \ell\sqrt{3}}{4}$$

Finalmente:

$$\delta_{Pr} + \delta_{Ps} + \delta_{Px} = \frac{-2\sqrt{3}a - 2b + \ell\sqrt{3}}{4} + \frac{2\sqrt{3}a - 2b + \ell\sqrt{3}}{4} + b = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

Exercícios Propostos

8.11) Calcule a distância do ponto P à reta r em cada um dos casos seguintes:

a) P(2; –3) e (r): $4x + 3y - 1 = 0$
b) P(–1; 0) e (r): $2x - y + 4 = 0$
c) P(2; 1) e (r): $3x + y - 7 = 0$
d) P(0; 0) e (r): $5x - 12y - 23 = 0$
e) P(a; a) e (r): $x - y + 2a^2 = 0$
f) P(b; –a) e (r): $ax + by + a^2 + b^2 = 0$

8.12) Determine o valor de k de modo que a distância do ponto A(3; –2) à reta de equação $8x + 15y + k = 0$ seja igual a 10.

8.13) Consideremos o ponto A(–1; 4) e a reta r de equação $24x - 7y + 2 = 0$. Determine as equações das retas que são perpendiculares a r e que distam 8 unidades do ponto A.

8.14) Uma reta de coeficiente angular $m = 5$ está à distância $\delta = \frac{3}{2}$ do ponto $A(-\frac{1}{2}; 6)$. Determine a equação dessa reta.

8.15) Consideremos as retas r e s de equações $x - y + 3 = 0$ e $5x - y - 19 = 0$ respectivamente. Determine os pontos da reta s que estão à distância $\delta = 3\sqrt{2}$ da reta r.

8.16) Determine as equações das retas que passam por A(2; –3) e que distam $\delta = 5$ do ponto B(1; 4).

8.17) Consideremos um quadrado ABCD tal que A(3; 5). Sabendo que a equação da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é $4x + 5y - 40 = 0$, calcule a área do quadrado.

8.18) Os vértices de um triângulo são A(2; 5), B(–1; 3) e C(5; 0). Calcule:
a) a medida da altura relativa a $\overline{BC}$;
b) a área do triângulo.

8.19) Num trapézio ABCD temos A(–4; –2), B(–1; –3), C(6; –1) e D(–3; 2). Calcule:
a) a medida da altura do trapézio;
b) a área do trapézio.

8.20) Seja r a reta que contém uma das medianas de um triângulo qualquer. Mostre que r é eqüidistante dos vértices do triângulo que não pertencem a r.

8.21) Consideremos o ponto A(4; –2) e a reta r dada por suas equações paramétricas:

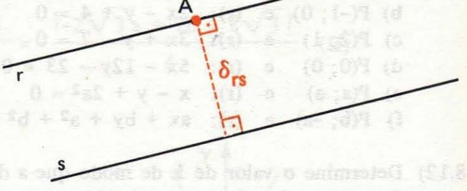
$$(r)\begin{cases} x = -2t + 4 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$$

Determine as equações das retas que são paralelas a r e estão à distância $\delta = \frac{14}{\sqrt{13}}$ de A.

8.4 – DISTÂNCIA ENTRE RETAS PARALELAS

Consideremos duas retas paralelas **r** e **s** cujas equações são:

$$(r): \ ax + by + c_1 = 0$$
$$(s): \ ax + by + c_2 = 0$$



Para calcularmos a distância δ_{rs} entre as retas, vamos tomar um ponto A qualquer em uma das retas e calcular a distância de A à outra reta.

Seja o ponto $A(x_A ; y_A)$ pertencente a **r**. Podemos então escrever:

$$ax_A + by_A + c_1 = 0$$

ou: $$ax_A + by_A = -c_1$$

Assim:

$$\delta_{rs} = \delta_{As} = \frac{|ax_A + by_A + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c_1 + c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Portanto:

$$\delta_{rs} = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (8.3)$$

Exercícios Resolvidos

8.22) Calcule a distância entre as retas

$$(r): 6x + 8y + 13 = 0$$
$$(s): 6x + 8y + 7 = 0$$

Solução

1º modo

É fácil concluir que r e s são paralelas. Como os coeficientes de x são iguais e os coeficientes de y também são iguais, podemos aplicar a fórmula 8.3:

$$\delta_{rs} = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|13 - 7|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

2º modo

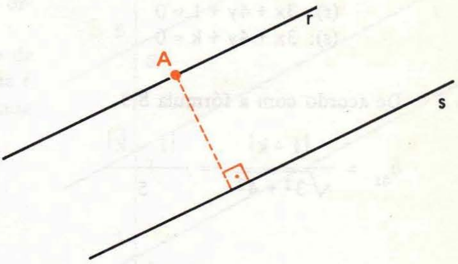
Podemos calcular δ_{rs} seguindo o procedimento usado na dedução da fórmula 8.3.

Vamos tomar um ponto $A(x_A; y_A)$ qualquer na reta (r): $6x + 8y + 13 = 0$. Fazendo por exemplo $x_A = 1$ temos:

$$6(1) + 8y_A + 13 = 0$$

ou: $y_A = -\frac{19}{8}$

Portanto: $A(1; -\frac{19}{8})$



Calculamos agora a distância entre A e s:

$$\delta_{rs} = \delta_{As} = \frac{|6(1) + 8(\frac{-19}{8}) + 7|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

8.23) Calcule a distância entre as retas paralelas r e s:

(r): $6x - 8y + 5 = 0$

(s): $9x - 12y - 1 = 0$

Solução

É fácil verificar que r e s são paralelas. Porém, se quisermos usar a fórmula 8.3 deveremos transformar as equações, de modo que os coeficientes de x fiquem iguais e os coeficientes de y também fiquem iguais. Temos, então:

$$\begin{cases} 6x - 8y + 5 = 0 \iff 3x - 4y + \frac{5}{2} = 0 \\ 9x - 12y - 1 = 0 \iff 3x - 4y - \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

Portanto:

$$\delta_{rs} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(\frac{5}{2}) - (-\frac{1}{3})|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{\frac{17}{6}}{5} = \frac{17}{30}$$

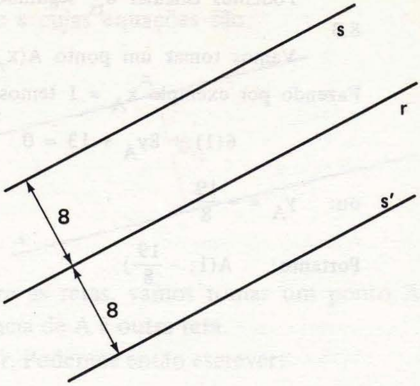
8.24) Calcule a distância entre as retas de equações $4x - 2y + 1 = 0$ e $3x + 5y + 7 = 0$.

Solução

É fácil verificar que as retas dadas são concorrentes. Portanto a distância entre elas é igual a zero.

8.25) Consideremos a reta r de equação 3x + 4y + 1 = 0. Determine as equações das retas que estão à distância $\delta = 8$ de r.

Solução



Seja s uma das retas procuradas.

Podemos então escrever:

(r): $3x + 4y + 1 = 0$

(s): $3x + 4y + k = 0$

De acordo com a fórmula 8.3:

$$\delta_{sr} = \frac{|1 - k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|1 - k|}{5}$$

Assim:

$$\delta_{sr} = 8 \iff \frac{|1 - k|}{5} = 8 \iff k = 41 \text{ ou } k = -39$$

Concluímos então que as retas procuradas têm equações:

$$3x + 4y + 41 = 0 \quad \text{e} \quad 3x + 4y - 39 = 0$$

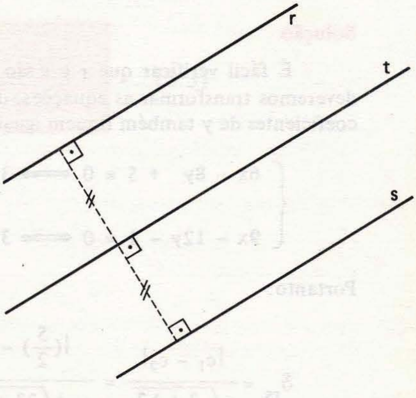
8.26) Determine a equação da reta que é eqüidistante das seguintes retas paralelas:

(r): $4x - y + 1 = 0$

(s): $4x - y + 5 = 0$

Solução

1º modo



Seja t a reta procurada. Sua equação pode ser escrita:

$$4x - y + k = 0$$

Devemos ter $\delta_{rt} = \delta_{st}$

$$\delta_{rt} = \delta_{st} \iff \frac{|1 - k|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{|5 - k|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} \iff |1 - k| = |5 - k| \iff$$

$$\iff 1 - k = 5 - k \text{ ou } 1 - k = -5 + k \iff 1 = 5 \text{ ou } k = 3 \iff$$

$$\iff k = 3$$

Portanto a equação de t é: $4x - y + 3 = 0$.

2º modo

Podemos passar as equações de r e s para a forma reduzida, obtendo:

(r): $y = 4x + 1$
(s): $y = 4x + 5$

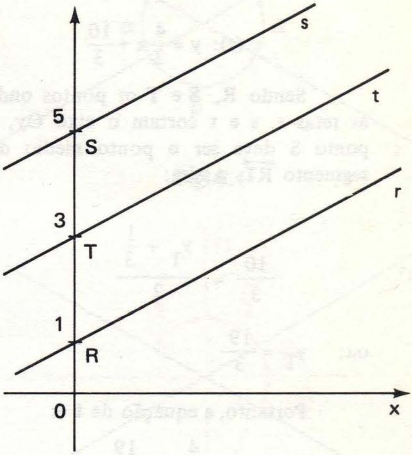
Concluímos então que a reta r corta o eixo Oy no ponto R de ordenada 1 e a reta s corta Oy no ponto S de ordenada 5.

Como a reta t é eqüidistante de r e s, deve cortar Oy no ponto T que é o ponto médio de $\overline{RS}$. Assim, a ordenada de T é: $\frac{1 + 5}{2} = 3$.

Portanto, a equação de t é:

$$y = 4x + 3$$

ou: $4x - y + 3 = 0$



8.27) Consideremos as retas paralelas r e s:

(r): $4x - 3y + 1 = 0$
(s): $4x - 3y + 10 = 0$

Determine a equação da reta simétrica de r em relação a s.

Solução

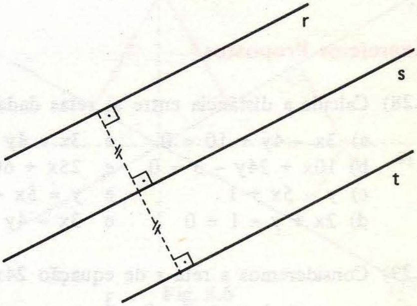
1º modo

Sendo t a reta procurada, sua equação pode ser escrita:

$$4x - 3y + k = 0$$

Além disso, devemos ter:

$$\delta_{ts} = \delta_{rs}$$



Assim:

$$\delta_{ts} = \delta_{rs} \iff \frac{|k - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|1 - 10|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \iff k = 19 \text{ ou } k = 1$$

A possibilidade $k = 1$ corresponde à reta r. Assim, ficamos com $k = 19$. Portanto a equação de t é:

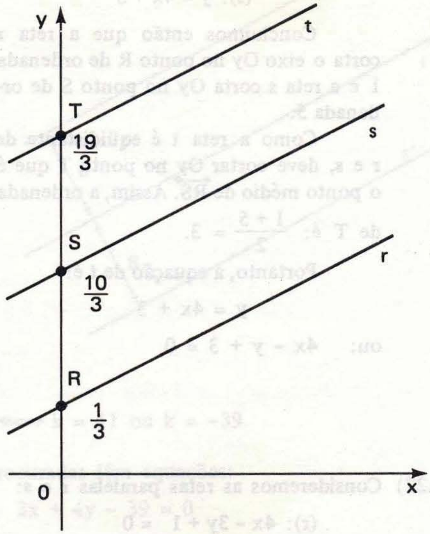
$$4x - 3y + 19 = 0$$

2º modo

Passando as equações de **r** e **s** para a forma reduzida temos:

$$(r):\ y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$(s):\ y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$



Sendo **R**, **S** e **T** os pontos onde as retas **r**, **s** e **t** cortam o eixo Oy, o ponto S deve ser o ponto médio do segmento $\overline{RT}$. Assim:

$$\frac{10}{3} = \frac{y_T + \frac{1}{3}}{2}$$

ou: $y_T = \frac{19}{3}$

Portanto, a equação de **t** é:

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{19}{3}$$

ou: $4x - 3y + 19 = 0$

Exercícios Propostos

8.28) Calcule a distância entre as retas dadas em cada um dos casos seguintes:

a) $3x - 4y + 10 = 0$ e $3x - 4y - 2 = 0$
b) $10x + 24y - 3 = 0$ e $25x + 60y + 6 = 0$
c) $y = 5x + 1$ e $y = 5x - 1$
d) $2x + y - 1 = 0$ e $3x - 4y + 7 = 0$

8.29) Consideremos a reta **r** de equação $24x - 7y + 2 = 0$. Determine as equações das retas que estão à distância $\delta = \frac{3}{2}$ de **r**.

8.30) Determine a equação da reta que é eqüidistante das retas de equações $8x - 12y + 5 = 0$ e $6x - 9y + 1 = 0$.

8.31) Consideremos as retas paralelas **r** e **t**:

(r): $3x - 6y + 1 = 0$
(t): $5x - 10y - 4 = 0$

Determine a equação da reta simétrica de **t** em relação a **r**.

8.5 — BISSETRIZES

Dadas duas retas concorrentes r_1 e r_2 (figura 8.4) sabemos que elas formam quatro ângulos sendo que os opostos pelo vértice são congruentes e os adjacentes são suplementares:

$$\alpha + \beta = 180°$$

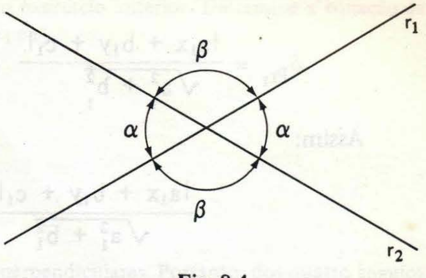


Fig. 8.4

Se considerarmos as retas s_1 e s_2 bissetrizes desses ângulos (figura 8.5), é fácil concluir que s_1 e s_2 são perpendiculares:

$$\alpha + \beta = 180° \iff \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$$

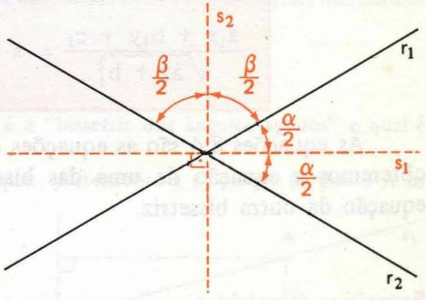


Fig. 8.5

Uma propriedade importante das bissetrizes s_1 e s_2 é que **qualquer** ponto delas é **eqüidistante das retas r_1 e r_2.**

Assim, por exemplo, se **A** é um ponto qualquer de s_2 (figura 8.6) temos

$$\delta_{Ar_2} = \delta_{Ar_1}$$

e se **B** é um ponto qualquer de s_1 temos:

$$\delta_{Br_1} = \delta_{Br_2}$$

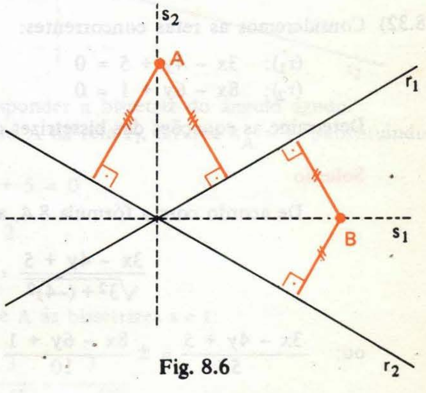


Fig. 8.6

Suponhamos que as equações de r_1 e r_2 sejam:

$$(r_1):\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$(r_2):\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Se P(x; y) é um ponto qualquer pertencente a qualquer das bissetrizes, temos:

$$\delta_{Pr_1} = \delta_{Pr_2}$$

Mas, de acordo com a fórmula 8.2 podemos escrever:

$$\delta_{Pr_1} = \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \quad e \quad \delta_{Pr_2} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Assim:

$$\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

ou:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (8.4)$$

As equações 8.4 são as equações das bissetrizes s_1 e s_2. Se usarmos o sinal + obteremos a equação de **uma** das bissetrizes; se usarmos o sinal - obteremos a equação da **outra** bissetriz.

Exercícios Resolvidos

8.32) Consideremos as retas concorrentes:

(r_1): $3x - 4y + 5 = 0$
(r_2): $8x - 6y + 1 = 0$

Determine as equações das bissetrizes dos ângulos formados por r_1 e r_2.

Solução

De acordo com a fórmula 8.4, as bissetrizes têm equações dadas por:

$$\frac{3x - 4y + 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{8x - 6y + 1}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}$$

ou: $$\frac{3x - 4y + 5}{5} = \pm \frac{8x - 6y + 1}{10} \quad \text{(I)}$$

Se considerarmos o sinal + a equação I, depois de simplificada, reduz-se a:

$$2x + 2y - 9 = 0$$

Considerando o sinal - a equação I, depois de simplificada, torna-se:

$$14x - 14y + 11 = 0$$

Assim, as equações das bissetrizes são·

$$\begin{cases} 2x + 2y - 9 = 0 \\ 14x - 14y + 11 = 0 \end{cases}$$

8.33) Consideremos novamente as retas r_1 e r_2 do exercício anterior. Determine a equação da bissetriz dos ângulos agudos formados por r_1 e r_2.

Solução

1º modo

As equações de r_1 e r_2 são:

(r_1): $3x - 4y + 5 = 0$

(r_2): $8x - 6y + 1 = 0$

É fácil verificar que r_1 e r_2 não são perpendiculares. Portanto, dos quatro ângulos formados por r_1 e r_2, dois são agudos e dois são obtusos.

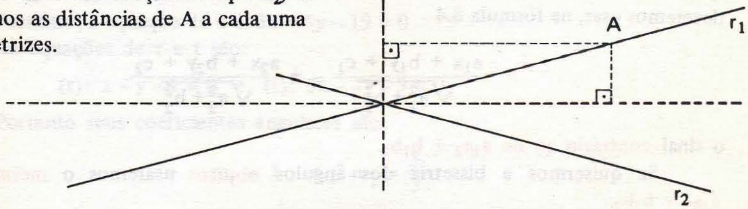
No exercício anterior obtivemos as equações das retas s e t, bissetrizes dos ângulos formados por r_1 e r_2:

(s): $2x + 2y - 9 = 0$

(t): $14x - 14y + 11 = 0$

Mas não sabemos ainda qual delas é a "bissetriz dos ângulos agudos" e qual é a "bissetriz dos ângulos obtusos".

Tomemos então um ponto A qualquer, pertencente a r_1 ou r_2 (o ponto A só não deve ser a interseção de r_1 e r_2) e calculemos as distâncias de A a cada uma das bissetrizes.



A menor das distâncias deve corresponder à bissetriz do ângulo agudo.

Consideremos, por exemplo, o ponto A na reta r_1, tal que $x_A = 1$. Substituindo na equação de r_1:

$$3(1) - 4y_A + 5 = 0$$

$$y_A = 2$$

Assim: A(1; 2).

Determinemos agora as distâncias de A às bissetrizes s e t:

$$\delta_{As} = \frac{|2(1) + 2(2) - 9|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\delta_{At} = \frac{|14(1) - 14(2) + 11|}{\sqrt{14^2 + 14^2}} = \frac{3}{\sqrt{2(14^2)}} = \frac{3}{14\sqrt{2}}$$

É fácil concluir que $\delta_{At} < \delta_{As}$. Portanto, a reta t deve ser a bissetriz dos ângulos agudos.

(t): $14x - 14y + 11 = 0$

2º modo

As equações de r_1 e r_2 são

(r_1): $3x - 4y + 5 = 0$

(r_2): $8x - 6y + 1 = 0$

Portanto, as equações das bissetrizes dos ângulos formados por r_1 e r_2 são dadas por:

$$\frac{3x - 4y + 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{8x - 6y + 1}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} \quad \text{(I)}$$

No momento de decidir se, na equação (I), usamos o sinal + ou o sinal –, podemos aplicar a seguinte propriedade (a qual daremos sem demonstração):

> Sejam duas retas concorrentes, não-perpendiculares, de equações
>
> $$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{e} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
>
> Para obtermos a equação da bissetriz dos ângulos agudos formados por essas retas, deveremos usar, na fórmula 8.4
>
> $$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$
>
> o sinal contrário ao de $a_1a_2 + b_1b_2$.
>
> Se quisermos a bissetriz dos ângulos obtusos usaremos o mesmo sinal de $a_1a_2 + b_1b_2$.

No nosso problema temos:

$$a_1a_2 + b_1b_2 = 3(8) + (-4)(-6) = 48 > 0$$

Portanto, para obtermos a bissetriz dos ângulos agudos deveremos usar, na equação (I), o sinal negativo:

$$\frac{3x - 4y + 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = - \frac{8x - 6y + 1}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}$$

Simplificando obtemos: $14x + 14y + 11 = 0$.

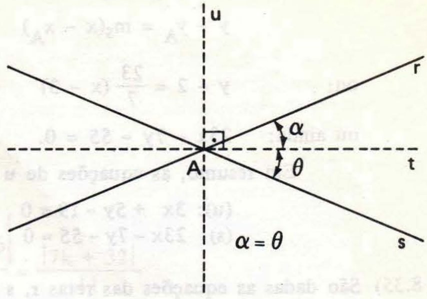
8.34) Sejam **t** e **u** as retas bissetrizes dos ângulos formados pelas retas concorrentes **r** e **s**. São dadas as equações de **r** e **t**:

(r): $x - y - 1 = 0$

(t): $5x - 3y - 9 = 0$

Determine as equações de s e u.

Solução



Em primeiro lugar procuramos a interseção A das retas **r** e **t**, obtendo A(3; 2). As retas **s** e **u** também devem passar pelo ponto A. Em seguida devemos lembrar-nos de que as bissetrizes **t** e **u** são perpendiculares. Assim, se a equação de **t** é:

$$5x - 3y - 9 = 0$$

a equação de **u** pode ser colocada na forma

$$3x + 5y + k = 0 \quad \text{(I)}$$

Como A pertence a **u**, podemos substituir as coordenadas de A na equação (I):

$$3(3) + 5(2) + k = 0$$

donde: $k = -19$

Portanto, a equação de u é: $3x + 5y - 19 = 0$

As equações de **r** e **t** são:

$$(r): x - y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad (t): 5x - 3y - 9 = 0$$

Portanto seus coeficientes angulares são:

$$m_r = 1 \quad \text{e} \quad m_t = \frac{5}{3}$$

Como a reta **t** é bissetriz de um par de ângulos formados por **r** e **s**, concluímos que os ângulos α e θ da figura são **agudos** e congruentes.

Temos então:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \left|\dfrac{m_r - m_t}{1 + m_r \cdot m_t}\right| = \left|\dfrac{1 - \frac{5}{3}}{1 + (1)(\frac{5}{3})}\right| = \dfrac{1}{4} \\[2ex] \operatorname{tg} \theta = \left|\dfrac{m_t - m_s}{1 + m_t \cdot m_s}\right| = \left|\dfrac{\frac{5}{3} - m_s}{1 + (\frac{5}{3})(m_s)}\right| = \left|\dfrac{5 - 3m_s}{3 + 5m_s}\right| \end{array}\right.$$

Assim:

$$\alpha = \theta \iff \frac{1}{4} = \left|\frac{5 - 3m_s}{3 + 5m_s}\right| \iff \frac{5 - 3m_s}{3 + 5m_s} = \frac{1}{4} \text{ ou } \frac{5 - 3m_s}{3 + 5m_s} = -\frac{1}{4} \iff$$

$$\iff m_s = 1 \quad \text{ou} \quad m_s = \frac{23}{7}$$

O valor $m_s = 1$ corresponde à reta **r**. Portanto ficamos com $m_s = \dfrac{23}{7}$.

Como a reta s passa por A, sua equação pode ser escrita:

$$y - y_A = m_s(x - x_A)$$

ou: $$y - 2 = \frac{23}{7}(x - 3)$$

ou ainda: $$23x - 7y - 55 = 0.$$

Em resumo, as equações de **u** e **s** são:

$$(u): 3x + 5y - 19 = 0$$
$$(s): 23x - 7y - 55 = 0$$

8.35) São dadas as equações das retas **r**, **s** e **t**:

$$(r): 5x + 12y + 16 = 0$$
$$(s): 3x + 4y = 0$$
$$(t): 3x - 11y + 20 = 0$$

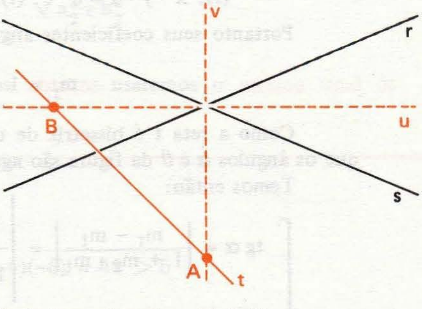
Determine os pontos de **t** que são eqüidistantes das retas **r** e **s**.

Solução

1º modo

É fácil concluir que as retas **r** e **s** são concorrentes. Isto significa que os pontos do plano eqüidistantes de **r** e **s** são os pontos pertencentes às bissetrizes (**u** e **v**) dos ângulos formados por **r** e **s**.

Portanto, os pontos de **t** que são eqüidistantes de **r** e **s**, podem ser obtidos procurando-se as interseções de **t** com **v** (ponto A) e de **t** com **u** (ponto B). Aplicando a fórmula 8.4 obtemos as equações das bissetrizes **u** e **v**:

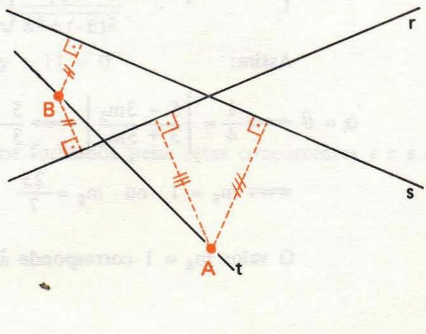


$$(u): 7x - 4y - 40 = 0$$
$$(v): 4x + 7y + 5 = 0$$

Em seguida determinamos a interseção de **t** e **v** obtendo: A(−3; 1). Finalmente determinamos a interseção de **t** e **u** obtendo: B(8; 4).

2º modo

A equação de t é $3x - 11y + 20 = 0$. Seja **A** um ponto de **t** que é eqüidistante de **r** e **s**. Supondo que a abscissa de **A** é $x_A = k$ temos:



$$3k - 11y_A + 20 = 0$$

ou: $$y_A = \frac{3k + 20}{11}$$

Assim, podemos representar A por:

$A(k; \frac{3k + 20}{11})$.

Calculemos em seguida as distâncias de A às retas

(r): $5x + 12y + 16 = 0$ e
(s): $3x + 4y = 0$.

$$\delta_{Ar} = \frac{\left|5k + 12(\frac{3k + 20}{11}) + 16\right|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{|7k + 32|}{11}$$

$$\delta_{As} = \frac{\left|3k + 4(\frac{3k + 20}{11})\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|9k + 16|}{11}$$

$$\delta_{Ar} = \delta_{As} \iff \frac{|7k + 32|}{11} = \frac{|9k + 16|}{11} \iff k = 8 \quad \text{ou} \quad k = -3$$

$$\begin{cases} \text{Para } k = 8 \text{ temos: } A(8; 4) \\ \text{Para } k = -3 \text{ temos: } A(-3; 1) \end{cases}$$

Portanto, os pontos procurados são (8; 4) e (–3; 1).

8.36) Consideremos um triângulo cujos vértices são A(5; 6), B(1; 3) e C(17; 1). Determine a equação da reta bissetriz do ângulo interno Â.

Solução

Em primeiro lugar vamos lembrar-nos de que em cada vértice de um triângulo podemos considerar um ângulo interno e dois ângulos externos (os dois externos são congruentes). Lembremos também que o ângulo externo é o suplemento do interno.

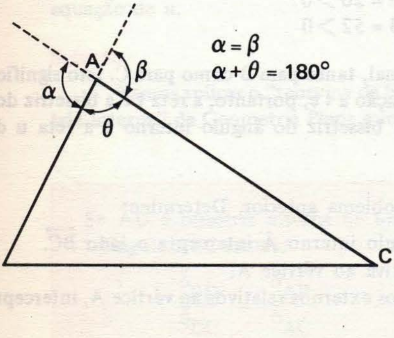


Fig. a

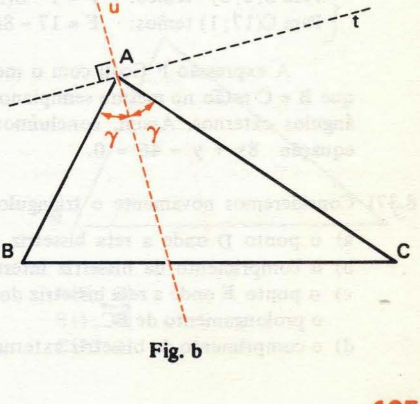


Fig. b

Assim, por exemplo, na figura **a** o ângulo θ é **interno** correspondente ao vértice A; os ângulos α e β são **externos** correspondentes ao vértice A. Na figura **b**, **u** é a reta bissetriz do ângulo interno correspondente ao vértice A e **t** é a reta bissetriz dos ângulos externos correspondentes ao vértice A.

Consideremos agora o triângulo ABC fornecido pelo problema, onde A(5; 6), B(1; 3) e C(17; 1). Sejam **r** e **s** as retas-suportes dos lados $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ respectivamente. Procuramos as equações de **r** e **s** obtendo:

(r): $3x - 4y + 9 = 0$
(s): $5x + 12y - 97 = 0$

Determinamos em seguida as equações das retas bissetrizes dos ângulos formados por **r** e **s**:

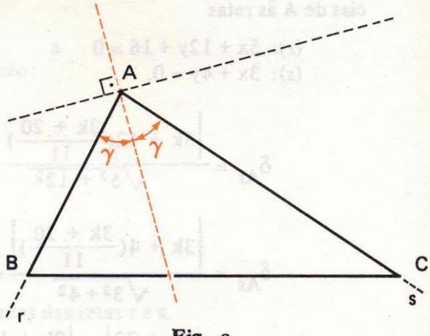


Fig. c

$$\frac{3x - 4y + 9}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{5x + 12y - 97}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \quad (I)$$

Simplificando (I) obtemos as equações das bissetrizes **t** e **u**:

(t): $x - 8y + 43 = 0$
(u): $8x + y - 46 = 0$

Precisamos, agora, descobrir qual delas é a bissetriz do ângulo interno e qual é a bissetriz dos ângulos externos. Um modo de descobri-lo é observar (ver figura c) que os pontos B e C estão em semiplanos opostos em relação à bissetriz interna e estão no mesmo semiplano em relação à bissetriz externa.

Vamos verificar então, as posições de **B** e **C** em relação a uma **qualquer** das bissetrizes (usando o processo visto no capítulo 6). Tomemos por exemplo a reta **t** e façamos

$$F = x - 8y + 43$$

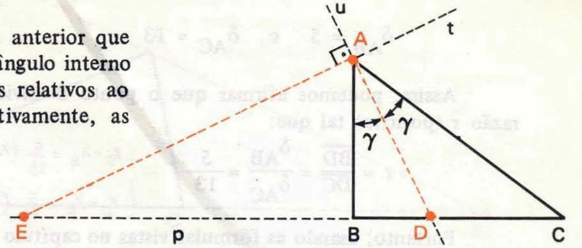
$$\begin{cases} \text{Para B(1; 3) temos:} & F = 1 - 8(3) + 43 = 20 > 0 \\ \text{Para C(17; 1) temos:} & F = 17 - 8(1) + 43 = 52 > 0 \end{cases}$$

A expressão F ficou com o mesmo sinal, tanto para B como para C. Isto significa que B e C estão no mesmo semiplano em relação a **t** e, portanto, a reta **t** é a bissetriz dos ângulos externos. Assim, concluímos que a bissetriz do ângulo interno é a reta **u** de equação $8x + y - 46 = 0$.

8.37) Consideremos novamente o triângulo do problema anterior. Determine:

a) o ponto D onde a reta bissetriz do ângulo interno Â intercepta o lado $\overleftrightarrow{BC}$.
b) o comprimento da bissetriz interna relativa ao vértice A.
c) o ponto E onde a reta bissetriz dos ângulos externos relativos ao vértice A, intercepta o prolongamento de $\overleftrightarrow{BC}$.
d) o comprimento da bissetriz externa relativa ao vértice A.

Solução



a) Já vimos no problema anterior que as retas bissetrizes do ângulo interno e dos ângulos externos relativos ao vértice A são, respectivamente, as retas **u** e **t** de equações:

(u): $8x + y - 46 = 0$
(t): $x - 8y + 43 = 0$

Podemos obter a equação da reta **p** que passa por $\overleftrightarrow{BC}$:

$$(p): x + 8y - 25 = 0$$

Para obtermos o ponto D, determinamos a interseção das retas **p** e **u**, o que nos dá: $D(\frac{49}{9}; \frac{22}{9})$.

b) A **bissetriz interna** relativa ao vértice A é o segmento $\overline{AD}$, o qual está contido na **reta bissetriz** do ângulo interno Â. Portanto, calculamos a distância entre os pontos A e D obtendo:

$$\delta_{AD} = \sqrt{\frac{1\,040}{81}} = \frac{4\sqrt{65}}{9}$$

c) Para obtermos o ponto E, determinamos a interseção das retas **p** e **t**, o que nos dá: $E(-9; \frac{17}{4})$.

d) A **bissetriz externa** relativa ao vértice A é o segmento $\overline{AE}$, o qual está contido na **reta bissetriz** dos ângulos externos. Calculamos então a distância entre os pontos A e E, obtendo:

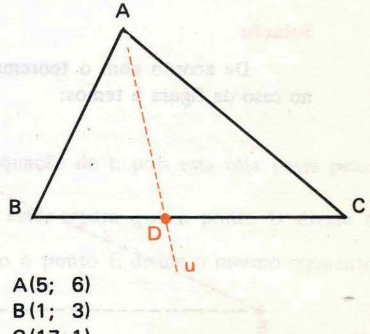
$$\delta_{AE} = \sqrt{\frac{3\,185}{16}} = \frac{7\sqrt{65}}{4}$$

8.38) Consideremos novamente o triângulo ABC do problema anterior e seja **u** a reta bissetriz do ângulo interno Â. Determine o ponto D onde a reta **u** intercepta $\overleftrightarrow{BC}$, sem usar a equação de **u**.

Solução

Vamos aplicar o "teorema da bissetriz interna" da Geometria Plana que diz:

> Se $\overleftrightarrow{AD}$ é bissetriz interna de um triângulo ABC temos:
>
> $$\frac{\delta_{BD}}{\delta_{DC}} = \frac{\delta_{AB}}{\delta_{AC}}$$



A(5; 6)
B(1; 3)
C(17; 1)

Aplicando a fórmula de distância entre pontos, obtemos:

$$\delta_{AB} = 5 \quad e \quad \delta_{AC} = 13$$

Assim, podemos afirmar que o ponto D divide o segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ na razão r (positiva) tal que:

$$r = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\delta_{AB}}{\delta_{AC}} = \frac{5}{13} \Rightarrow \begin{cases} x_D - x_B = \frac{5}{13}(x_C - x_D) \\ y_D - y_B = \frac{5}{13}(y_C - y_D) \end{cases} \text{(2 eq 2 incóg.)}$$

Portanto, usando as fórmulas vistas no capítulo 2, podemos obter as coordenadas de D:

$$x_D = \frac{x_B + r x_C}{1 + r} = \frac{1 + (\frac{5}{13})(17)}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{49}{9}$$

$$y_D = \frac{y_B + r y_C}{1 + r} = \frac{3 + (\frac{5}{13})(1)}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{22}{9}$$

Temos então: $D(\frac{49}{9}; \frac{22}{9})$

Após obtermos o ponto D, poderíamos obter a equação da reta **u**, pois esta passa pelos pontos A e D que são conhecidos. Poderíamos também determinar a equação da reta **t** (bissetriz dos ângulos externos relativos a A) observando que **t** é perpendicular a **u** e passa por A. Temos assim um outro processo para determinar as equações das retas bissetrizes dos ângulos internos e externos de um triângulo, além daquele visto no exercício 8.36. Porém, o processo da razão de seção costuma ser vantajoso apenas nos casos em que a razão de seção **r** é um número racional. Quando **r** é um número irracional, em geral é mais vantajoso o processo do exercício 8.36.

8.39) Para o triângulo do problema anterior, seja **t** a reta bissetriz dos ângulos externos relativos ao vértice A. Determine o ponto E onde a reta **t** intercepta a reta-suporte do lado $\overleftrightarrow{BC}$, sem usar a equação de **t**.

Solução

De acordo com o **teorema da bissetriz externa**, tanto no caso da figura **a** como no caso da figura **b** temos:

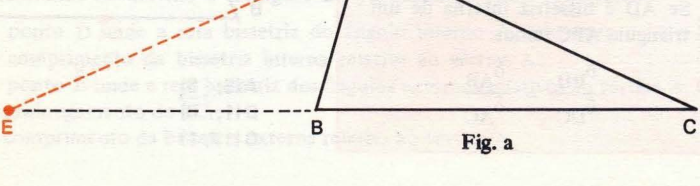


Fig. a

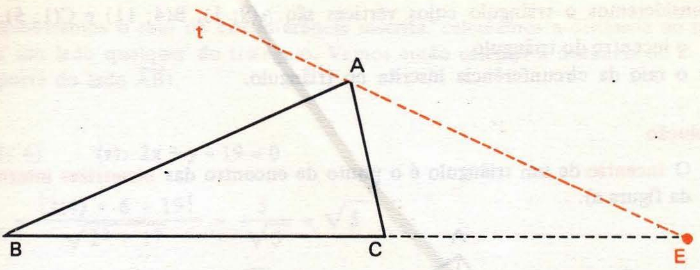


Fig. b

$$\frac{\delta_{BE}}{\delta_{EC}} = \frac{\delta_{AB}}{\delta_{AC}}$$

Como $\delta_{AB} = 5$ e $\delta_{AC} = 13$, vemos que o ponto E divide o segmento orientado $\overrightarrow{BC}$, na razão r (negativa) tal que:

$$r = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = -\frac{\delta_{AB}}{\delta_{AC}} = -\frac{5}{13}$$

Portanto:

$$x_E = \frac{x_B + r x_C}{1 + r} = \frac{1 + (\frac{-5}{13})(17)}{1 - \frac{5}{13}} = -9$$

$$y_E = \frac{y_B + r y_C}{1 + r} = \frac{3 + (\frac{-5}{13})(1)}{1 - \frac{5}{13}} = \frac{17}{4}$$

Assim: $E(-9; \frac{17}{4})$

Após obtermos E, poderíamos determinar a equação de t, pois esta reta passa pelos pontos A e E, que são conhecidos.

Comparando o problema anterior com este, repare que o ponto D divide o segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ na razão $\frac{5}{13}$, enquanto o ponto E divide o mesmo segmento orientado $\overrightarrow{BC}$ na razão $-\frac{5}{13}$.

8.40) Consideremos o triângulo cujos vértices são A(9; 1), B(4; 11) e C(1; 5). Determine:

a) o incentro do triângulo

b) o raio da circunferência inscrita no triângulo.

Solução

a) O incentro de um triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes internas (ponto D da figura a).

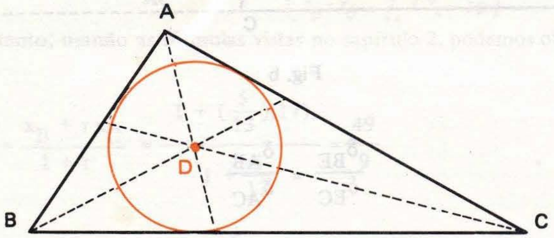


Fig. a

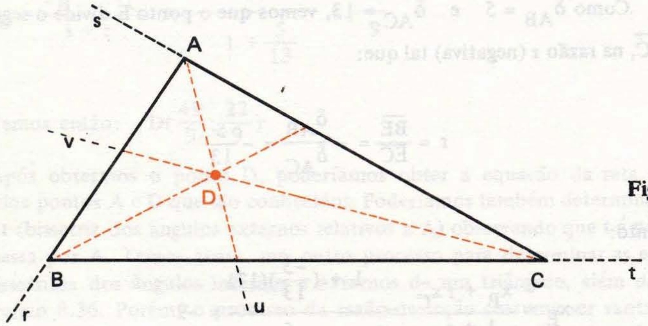


Fig. b

Como o incentro pertence às três bissetrizes internas, concluímos que ele é eqüidistante dos três lados do triângulo e, portanto, é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

Sejam r, s e t as retas-suportes dos lados $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente. O primeiro passo é obter as equações dessas retas, que são:

(r): $2x + y - 19 = 0$
(s): $x + 2y - 11 = 0$
(t): $2x - y + 3 = 0$

Em seguida determinamos as equações das retas bissetrizes de dois ângulos internos. Sejam por exemplo a reta u, bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$, e a reta v, bissetriz do ângulo interno $\hat{C}$ (figura b). Obtemos as equações de u e v, que são:

(u): $x + y - 10 = 0$
(v): $x - 3y + 14 = 0$

A interseção D, das retas u e v, é o incentro procurado:

$$D(4;\ 6)$$

b) Para obtermos o raio da circunferência inscrita, calculamos a distância do incentro D a um lado qualquer do triângulo. Vamos então calcular a distância de D à reta r (suporte do lado $\overleftrightarrow{AB}$).

D(4; 6) (r): 2x + y - 19 = 0

$$\delta_{Dr} = \frac{|2(4) + 6 - 19|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Portanto, o raio mede $\sqrt{5}$.

Exercícios Propostos

8.41) Determine as equações das retas bissetrizes dos ângulos formados pelas retas **r** e **s** em cada caso a seguir:

a) (r): 3x + 4y - 1 = 0 (s): 4x + 3y + 5 = 0
b) (r): x + y + 3 = 0 (s): $x - \sqrt{7}y - 2 = 0$
c) (r): 3x - 4y = 0 (s): 5x + 12y = 0
d) (r): 2x + 3y - 2 = 0 (s): 3x - 2y + 4 = 0
e) (r): 8x + 15y + 2 = 0 (s): 24x - 7y + 1 = 0

8.42) Determine a equação da reta bissetriz dos ângulos agudos formados pelas retas de equações 12x - 5y + 2 = 0 e 4x - 3y - 1 = 0.

8.43) Sejam **t** e **u** as retas bissetrizes dos ângulos formados pelas retas **r** e **s**. São dadas as equações de **s** e **t**:

(s): 5x - 2y - 1 = 0
(t): 3x - 7y - 4 = 0

Determine as equações de **r** e **u**.

8.44) São dadas as equações das retas **r**, **s** e **t**:

(r): 2x - y - 5 = 0
(s): x - 2y - 1 = 0
(t): 5x + y + 8 = 0

Determine os pontos de **t** que são eqüidistantes de **r** e **s**.

8.45) Consideremos o triângulo de vértices A(-5; 4), B(-2; 8) e C(22; 1). Determine:

a) a equação da reta **u**, bissetriz do ângulo interno $\hat{B}$.
b) a equação da reta **t**, bissetriz dos ângulos externos relativos ao vértice B.
c) o ponto D onde a reta **u** corta o lado $\overline{AC}$.
d) o ponto E onde a reta **t** corta a reta suporte do lado $\overleftrightarrow{AC}$.
e) o comprimento da bissetriz interna relativa ao vértice B.
f) o comprimento da bissetriz externa relativa ao vértice B.

8.46) Dado o triângulo de vértices A(2; 4), $B(\frac{27}{2}; 5)$ e C(6; 1), seja **u** a reta bissetriz do ângulo interno $\hat{C}$ e seja **t** a reta bissetriz dos ângulos externos relativos ao vértice C. Determine:

a) o ponto onde **u** corta o lado $\overline{AB}$

b) o ponto onde **t** corta a reta-suporte do lado $\overline{AB}$

8.47) Consideremos o triângulo de vértices A(1; 9), B(13; 18) e C(25; 2).

Determine:

a) o incentro do triângulo

b) o raio da circunferência inscrita no triângulo

Capítulo

9

Área de polígonos

9.1 – ÁREA DO TRIÂNGULO

A seguir demonstraremos que, sendo S a área de um triângulo de vértices $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ e $C(x_C; y_C)$, temos:

$$S = \frac{1}{2} |\Delta| \quad (9.1)$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Demonstração

Se **h** é a altura em relação ao lado $\overleftrightarrow{BC}$ temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \delta_{BC} \cdot h \quad \text{(I)}$$

Para obtermos a altura **h**, calculamos a distância do vértice **A** à reta **r** que é suporte do lado $\overleftrightarrow{BC}$.

A equação de **r** é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(II)}$$

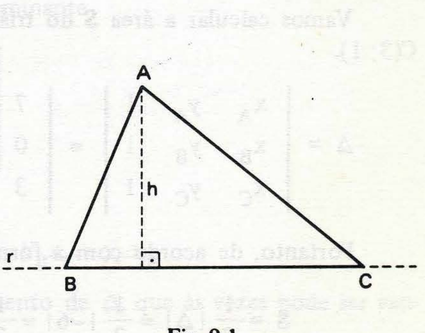


Fig. 9.1

Desenvolvendo o determinante pelos elementos da primeira linha, a equação (II) transforma-se em:

$$(y_B - y_C)x + (x_C - x_B)y + (x_B y_C - x_C y_B) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Assim, de acordo com a fórmula (8.2), a distância do ponto **A** à reta **r** é:

$$\delta_{Ar} = h = \frac{|(y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_B y_C - x_C y_B)|}{\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2}} \qquad \text{(IV)}$$

Porém:

$$\sqrt{(y_B - y_C)^2 + (x_C - x_B)^2} = \delta_{BC}$$

e

$$\Delta = (y_B - y_C)x_A + (x_C - x_B)y_A + (x_B y_C - x_C y_B) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Com isso, a equação (IV) pode ser escrita:

$$h = \frac{|\Delta|}{\delta_{BC}} \qquad \text{(V)}$$

Substituindo (V) em (I), vem:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \delta_{BC} \cdot \frac{|\Delta|}{\delta_{BC}} = \frac{1}{2} |\Delta|$$

Exemplo

Vamos calcular a área **S** do triângulo cujos vértices são A(7; 3), B(0; -2) e C(3; 1).

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

Portanto, de acordo com a fórmula (9.1) vem:

$$S = \frac{1}{2} |\Delta| = \frac{1}{2} |-6| = \frac{1}{2}(6) = 3$$

Observações

1ª) Devemos lembrar-nos de que, quando permutamos duas linhas de um determinante, mudamos **apenas** o seu **sinal**. Como na fórmula (9.1) o que interessa é o **módulo** de Δ (pois a área é um número não-negativo), podemos fazer, indiferentemente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_C & y_C & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

2ª) Se $\Delta = 0$, a área S é nula. Isto significa que os pontos A, B e C estão alinhados. Note que isso corresponde à condição de alinhamento dos pontos A, B e C, vista no capítulo 3:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

9.2 – REGRA PRÁTICA

Fazendo o desenvolvimento do determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

obtemos:

$$\Delta = x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - y_A x_B - y_B x_C - y_C x_A$$

Um modo de se obter o desenvolvimento de Δ, que às vezes pode ser vantajoso é:

1º) Dispomos as abscissas e as ordenadas em duas colunas, como mostra a figura 9.2, repetindo a primeira linha.

2º) efetuamos os produtos indicados pelas flechas, trocando o sinal daqueles produtos que têm o sinal ⊖ na "ponta" da flecha.

3º) adicionamos todos os produtos.

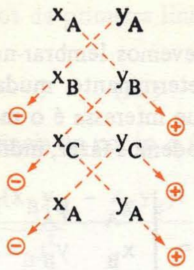


Fig. 9.2

Exemplos

a) Vamos calcular a área do triângulo cujos vértices são A(2; 3), B(4; 5) e C(7; 4). Temos:

$$\Delta = (2)(5) + (4)(4) + (7)(3) - (3)(4) - (5)(7) - (4)(2) =$$
$$= 10 + 16 + 21 - 12 - 35 - 8 = -8$$

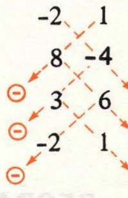
Assim:

$$S = \frac{1}{2}\,|\Delta| = \frac{1}{2}\,|-8| = \frac{1}{2}\,(8) = 4$$

b) Calculemos agora a área do triângulo cujos vértices são A(-2; 1), B(8; -4) e C(3; 6).

$$\Delta = (-2)(-4) + (8)(6) + (3)(1) - (1)(8) - (-4)(3) - (6)(-2) =$$
$$= +8 + 48 + 3 - 8 + 12 + 12 = 75$$

$$S = \frac{1}{2}\,|\Delta| = \frac{1}{2}\,|75| = \frac{75}{2}$$

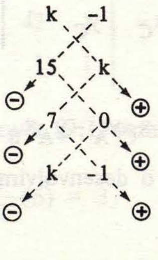


Exercícios Resolvidos

9.1) Determine o valor de **k** de modo que os pontos A(k; –1), B(15; k) e C(7; 0) formem um triângulo de área igual a 1.

Solução

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 15 & k & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Desenvolvendo, obtemos: $\Delta = k^2 - 7k + 8$.

Assim:

$$S = \frac{1}{2}\,|\Delta| \iff 1 = \frac{1}{2}\,|k^2 - 7k + 8| \iff |k^2 - 7k + 8| = 2 \iff$$

$$\iff k^2 - 7k + 8 = 2 \text{ ou } k^2 - 7k + 8 = -2$$

$$\begin{cases} \text{As raízes de } k^2 - 7k + 8 = 2 \text{ são } 1 \text{ e } 6 \\ \text{As raízes de } k^2 - 7k + 8 = -2 \text{ são } 2 \text{ e } 5 \end{cases}$$

Portanto, os valores possíveis de **k** são: 1, 2, 5 e 6.

9.2) Consideremos o triângulo de vértices A(1; 2), B(3; 7) e C(6; 3). Calcule:

a) a área do triângulo

b) a altura relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$

Solução

a) Este problema é idêntico ao problema 8.8. Compare depois as soluções. Temos:

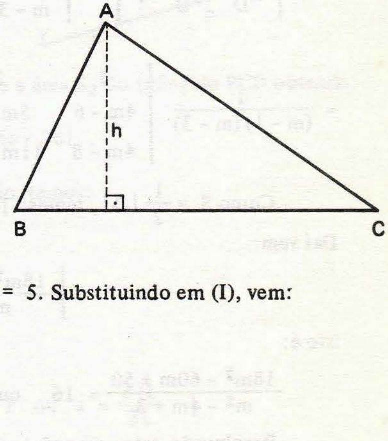
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -23$$

$$\text{donde: } S = \frac{1}{2}\,|\Delta| = \frac{1}{2}\,|-23| = \frac{23}{2}$$

b) Sendo **h** a medida da altura relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \delta_{BC} \cdot h$$

$$\text{ou: } h = \frac{2S}{\delta_{BC}} \qquad \text{(I)}$$



Podemos calcular δ_{BC}, obtendo $\delta_{BC} = 5$. Substituindo em (I), vem:

$$h = \frac{2\left(\frac{23}{2}\right)}{5} = \frac{23}{5}$$

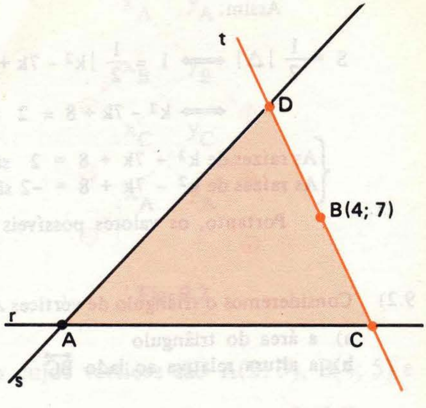
9.3) São dadas as retas (r): $y = x + 1$ e (s): $y = 3x - 1$, que se cortam em A. Pelo ponto B(4; 7) conduz-se a reta **t**, que corta **r** no ponto C e **s** no ponto D. Determine a equação de **t**, sabendo que a área do triângulo ACD é $S = 8$.

Solução

Suponhamos inicialmente que a reta t não seja vertical. Assim podemos supor que ela tem um coeficiente angular m. É conveniente ressaltar que devemos ter $m \neq 1$ e $m \neq 3$, pois t não é paralela a r nem a s. Como t passa por B, sua equação pode ser escrita:

$$y - 7 = m(x - 4)$$

ou: $y = mx - 4m + 7$



Assim:

(r): $y = x + 1$

(s): $y = 3x - 1$

(t): $y = mx - 4m + 7$

A interseção de r e s é: $A(1; 2)$

A interseção de r e t é: $C\left(\dfrac{4m-6}{m-1}; \dfrac{5m-7}{m-1}\right)$

A interseção de s e t é: $D\left(\dfrac{4m-8}{m-3}; \dfrac{11m-21}{m-3}\right)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \dfrac{4m-6}{m-1} & \dfrac{5m-7}{m-1} & 1 \\ \dfrac{4m-8}{m-3} & \dfrac{11m-21}{m-3} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)(m-3)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4m-6 & 5m-7 & m-1 \\ 4m-8 & 11m-21 & m-3 \end{vmatrix} = \frac{18m^2 - 60m + 50}{m^2 - 4m + 3}$$

Como $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, temos: $|\Delta| = 2S = 2(8) = 16$

Daí vem:

$$\left|\frac{18m^2 - 60m + 50}{m^2 - 4m + 3}\right| = 16$$

isto é:

$$\frac{18m^2 - 60m + 50}{m^2 - 4m + 3} = 16 \quad \text{ou} \quad \frac{18m^2 - 60m + 50}{m^2 - 4m + 3} = -16$$

Resolvendo estas equações obtemos:

$$m = -1 \quad \text{ou} \quad m = \frac{31 + 8\sqrt{2}}{17} \quad \text{ou} \quad m = \frac{31 - 8\sqrt{2}}{17}$$

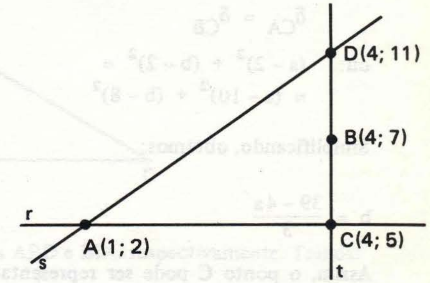
Substituindo em $y = mx - 4m + 7$, obtemos três possibilidades para a reta t:

$$y = -x + 11$$

$$y = \frac{31 + 8\sqrt{2}}{17}x - \frac{5 + 32\sqrt{2}}{17}$$

$$y = \frac{31 - 8\sqrt{2}}{17}x - \frac{5 - 32\sqrt{2}}{17}$$

Vamos agora analisar a possibilidade de a reta t ser vertical. Neste caso, como ela passa por B(4; 7), sua equação é $x = 4$. Assim, suas interseções com as retas s e r são os pontos D(4; 11) e C(4; 5). Calculando a área do triângulo ACD obtemos $S = 9$ e portanto *não* satisfaz a condição do problema. Assim, concluímos que a reta t não pode ser vertical e ficamos com as três possibilidades relacionadas acima.



9.4) Sejam A(-3; -1), B(-2; 3), C(2; 4) e D(9; 6). Determine o ponto P da reta r de equação $y = 2x - 4$, tal que a área do triângulo PAB seja $\frac{17}{40}$ da área do triângulo PCD.

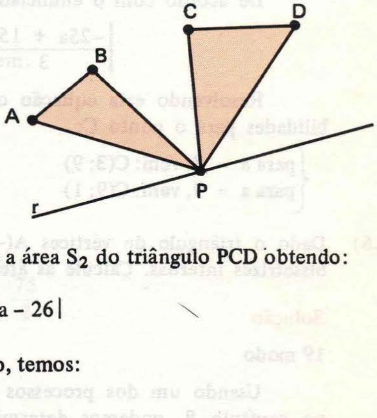
Solução

Seja a a abscissa de P. Como P está em r, podemos escrever:

$$y_P = 2x_P - 4 = 2a - 4$$

isto é, podemos representar P por:

P(a; 2a - 4)



Calculamos a área S_1 do triângulo PAB e a área S_2 do triângulo PCD obtendo:

$$S_1 = \frac{|-2a - 15|}{2} \quad \text{e} \quad S_2 = |6a - 26|$$

De acordo com o enunciado do exercício, temos:

$$S_1 = \frac{17}{40} S_2$$

isto é:

$$\frac{|-2a - 15|}{2} = \frac{17}{40} |6a - 26|$$

Resolvendo esta equação obtemos $a = 1$ ou $a = \frac{371}{31}$

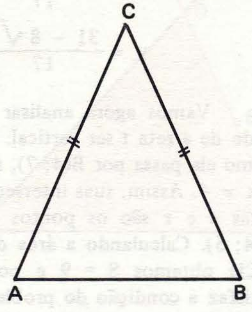
Para $a = 1$ temos: P(1; -2)

Para $a = \frac{371}{31}$ temos: $P(\frac{371}{31}; \frac{618}{31})$

9.5) O triângulo ABC é isósceles de base $\overleftrightarrow{AB}$ e tem área de 25 unidades. Determine as coordenadas do ponto C, sendo A(2; 2) e B(10; 8).

Solução

Representemos o ponto C por C(a; b). Como o triângulo é isósceles de base $\overleftrightarrow{AB}$, devemos ter:



$$\delta_{CA} = \delta_{CB}$$

ou: $(a-2)^2 + (b-2)^2 =$
$= (a-10)^2 + (b-8)^2$

Simplificando, obtemos:

$$b = \frac{39-4a}{3}$$

Assim, o ponto C pode ser representado por: $C(a; \frac{39-4a}{3})$.

Calculamos, a seguir, a área do triângulo ABC que é:

$$S = \left|\frac{-25a + 150}{3}\right|$$

De acordo com o enunciado, devemos ter S = 25. Portanto:

$$\left|\frac{-25a + 150}{3}\right| = 25$$

Resolvendo esta equação obtemos a = 3 ou a = 9. Temos então duas possibilidades para o ponto C:

$$\begin{cases} \text{para } a = 3, \text{ vem: } C(3; 9) \\ \text{para } a = 9, \text{ vem: } C(9; 1) \end{cases}$$

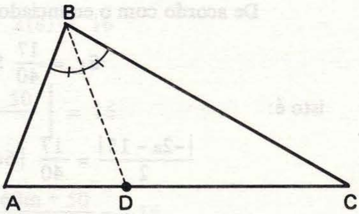
9.6) Dado o triângulo de vértices A(-5; 3), B(-2; 7) e C(10; -2), seja $\overleftrightarrow{BD}$ uma de suas bissetrizes internas. Calcule as áreas dos triângulos ABD e BDC.

Solução

1º modo

Usando um dos processos vistos no capítulo 8, podemos determinar o ponto D:

$$D(\frac{-5}{4}; \frac{7}{4})$$

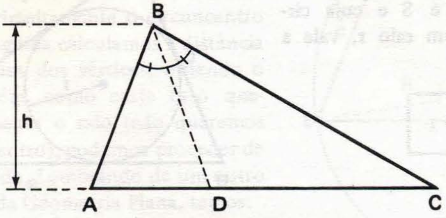


Em seguida podemos calcular as áreas dos triângulos ABD e DBC, que são respectivamente $\frac{75}{8}$ e $\frac{225}{8}$.

2º modo

Calculamos a área S do triângulo ABC e os comprimentos de $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, obtendo:

$$S = \frac{75}{2}\ ;\ \delta_{AB} = 5;\ \delta_{BC} = 15$$



Sejam S_1 e S_2 as áreas dos triângulos ABD e BDC respectivamente. Temos:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \delta_{AD} \cdot h \quad \text{e} \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot \delta_{DC} \cdot h$$

Assim:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\delta_{AD}}{\delta_{DC}} \qquad \text{(I)}$$

Porém, pelo "teorema da bissetriz interna" vem:

$$\frac{\delta_{AD}}{\delta_{DC}} = \frac{\delta_{AB}}{\delta_{BC}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Com isso, a relação (I) fica

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3}$$

Por outro lado, devemos ter: $S_1 + S_2 = S = \frac{75}{2}$.

Temos então o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{3} \\ S_1 + S_2 = \dfrac{75}{2} \end{cases}$$

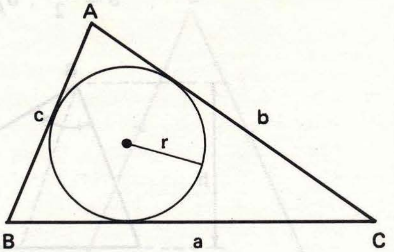
que, resolvido, nos dá: $S_1 = \frac{75}{8}$ e $S_2 = \frac{225}{8}$.

9.7) Calcule o raio da circunferência inscrita no triângulo de vértices A(9; 1), B(4; 11) e C(1; 5).

Solução

Este problema é idêntico ao problema 8.40. Porém, como agora queremos apenas o raio da circunferência inscrita (não queremos o incentro), há um modo mais rápido de dar a solução.

Vamos lembrar-nos de um teorema de Geometria Plana que diz: Dado um triângulo ABC cujos lados medem a, b e c, cuja área é S e cuja circunferência inscrita tem raio r, vale a relação:



$$\boxed{S = p \cdot r}$$

onde: $p = \dfrac{a + b + c}{2}$

Fazendo os cálculos, obtemos para o nosso caso:

$$\begin{cases} a = \delta_{BC} = 3\sqrt{5} & c = \delta_{AB} = 5\sqrt{5} \\ b = \delta_{AC} = 4\sqrt{5} & S = 30 \end{cases}$$

donde: $p = \dfrac{a + b + c}{2} = 6\sqrt{5}$

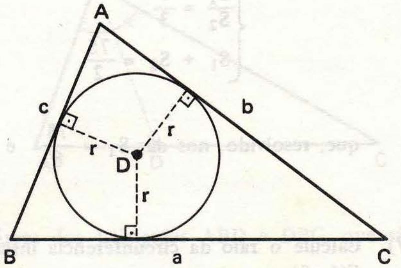
Assim:

$$S = pr \iff r = \frac{S}{p} = \frac{30}{6\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

9.8) Consideremos novamente o triângulo do problema anterior. Sendo D o seu incentro, calcule as áreas dos triângulos ABD, BDC e ADC.

Solução

Sejam S_1, S_2 e S_3 as áreas dos triângulos BDC, ADC e ADB, respectivamente. Temos:



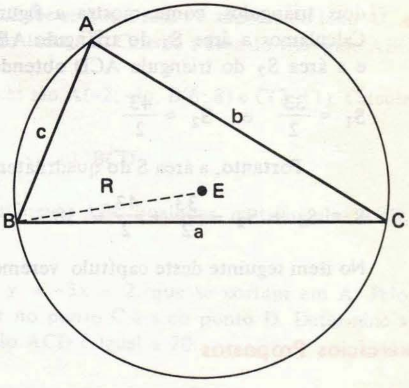
$$S_1 = \frac{ar}{2} = \frac{(3\sqrt{5})(\sqrt{5})}{2} = \frac{15}{2}$$

$$S_2 = \frac{br}{2} = \frac{(4\sqrt{5})(\sqrt{5})}{2} = 10$$

$$S_3 = \frac{cr}{2} = \frac{(5\sqrt{5})(\sqrt{5})}{2} = \frac{25}{2}$$

9.9) Seja o triângulo ABC do problema anterior. Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

Solução



a) Poderíamos resolver este problema como já resolvemos um semelhante a ele no capítulo 2, isto é, determinamos primeiramente o circuncentro E e em seguida calculamos a distância de E a um dos vértices, obtendo o raio. Porém, como neste caso queremos apenas o raio (não queremos o circuncentro), podemos proceder de outro modo. Lembrando de um outro teorema da Geometria Plana, temos:

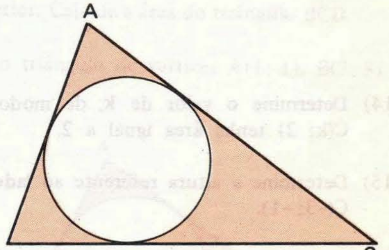
$$S = \frac{abc}{4R}$$

onde:
- S é a área do triângulo
- R é o raio da circunferência circunscrita
- a, b e c são as medidas dos lados

Assim:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{(3\sqrt{5})(4\sqrt{5})(5\sqrt{5})}{4(30)} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

9.10) Calcule a área da figura sombreada, sabendo que A(1; 9), B(13; 18) e C(25; 2).



Solução

Seja S_1 a área do triângulo ABC. Fazendo os cálculos, obtemos: $S_1 = 150$.

Em seguida calculamos o raio r da circunferência inscrita no triângulo (como no exercício 9.7), obtendo r = 5.

A área do círculo de raio r é:

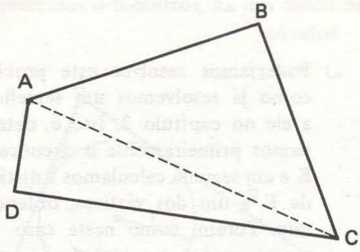
$$S_2 = \pi r^2 = \pi(5)^2 = 25\pi$$

Portanto, a área pedida é:

$$S = S_1 - S_2 = 150 - 25\pi$$

9.11) Calcule a área do quadrilátero ABCD, sendo A(-2; 3), B(1; 6), C(7; 1) e D(-1; -2).

Solução



Vamos dividir o quadrilátero em dois triângulos, como mostra a figura. Calculamos a área S_1 do triângulo ABC e a área S_2 do triângulo ACD obtendo:

$$S_1 = \frac{33}{2} \quad e \quad S_2 = \frac{43}{2}$$

Portanto, a área S do quadrilátero é:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{33}{2} + \frac{43}{2} = 38$$

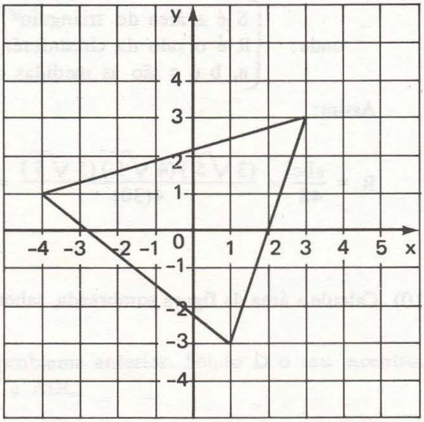
No item seguinte deste capítulo veremos um outro modo de resolver este problema.

Exercícios Propostos

9.12) Calcule a área do triângulo ABC em cada um dos casos a seguir:

a) A(4; 3), B(6; -1), C(-1; -5)
b) A(-1; -1), B(2; 0), C(-2; 5)

9.13) Calcule a área do triângulo representado na figura ao lado.



9.14) Determine o valor de k, de modo que o triângulo de vértices A(k; 0), B(1; k) e C(k; 2) tenha área igual a 2.

9.15) Determine a altura referente ao lado $\overleftrightarrow{AC}$, no triângulo de vértices A(5; 7), B(2; 2) e C(-3; -1).

9.16) Determine a área do triângulo ABC, conhecendo as coordenadas do vértice A(3; 5), do ponto médio M(3; 3) de $\overleftrightarrow{BC}$ e do ponto médio N(5; 1) de $\overleftrightarrow{AC}$.

9.17) Determine a área do triângulo cujos vértices são os pontos de interseção das retas de equações:

$4x - 5y + 26 = 0$, $4x + 7y + 2 = 0$ e $4x + y - 10 = 0$

9.18) Consideremos as retas

(r): $3x - 8y - 7 = 0$
(s): $3x - y + 1 = 0$

e o triângulo ABC, onde B(-1; 3) e C(-3; -2). Sabe-se que a reta r é suporte do lado $\overleftrightarrow{AC}$ e que a reta s é perpendicular à reta-suporte do lado $\overleftrightarrow{AB}$. Calcule a área do triângulo ABC.

9.19) Seja D o baricentro do triângulo cujos vértices são A(-2; -1), B(6; 8) e C(2; 11). Calcule as áreas dos triângulos.

a) ABD b) ACD c) BCD

9.20) Mostre que, sendo D o baricentro de um triângulo ABC qualquer, os triângulos ABD, ACD e BCD têm a mesma área.

9.21) São dadas as retas (r): $y = 2x + 3$ e (s): $y = -3x - 2$, que se cortam em A. Pelo ponto B(2; 2) passa uma reta **t** que corta **r** no ponto C e s no ponto D. Determine a equação de **t**, sabendo que a área do triângulo ACD é igual a 20.

9.22) Sejam A(0; 2), B(0; 1), C(2; 2) e D(2; 8). Determine o ponto P do eixo das abscissas tal que a área do triângulo PCD seja o dobro da área do triângulo PAB.

9.23) As retas (r): $5x - y + 9 = 0$ e (s): $x - 8y + 33 = 0$ cortam-se no vértice B de um triângulo ABC, cuja área é igual a $\frac{39}{2}$. Determine a equação da reta-suporte do lado $\overleftrightarrow{AC}$, sabendo que ela é perpendicular à reta de equação $3x + 2y - 2 = 0$.

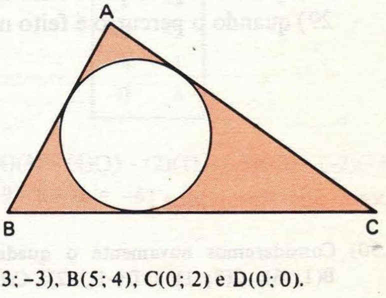
9.24) Dado o triângulo de vértices A(-3; 2), B(3; 10) e C(8; -2), seja $\overrightarrow{BD}$ uma de suas bissetrizes internas. Calcule as áreas dos triângulos ABD e BDC.

9.25) Calcule o raio da circunferência inscrita no triângulo de vértices A(-3; 1), B(3; $\frac{11}{2}$) e C(9; $\frac{-5}{2}$).

9.26) Seja D o incentro do triângulo do exercício anterior. Calcule a área do triângulo BCD.

9.27) Calcule o raio da circunferência circunscrita ao triângulo de vértices A(1; 1), B(7; 9) e C(13; $\frac{9}{2}$).

9.28) Calcule a área sombreada na figura, sabendo que A(-3; -3), B(2; 7) e C(5; 1).



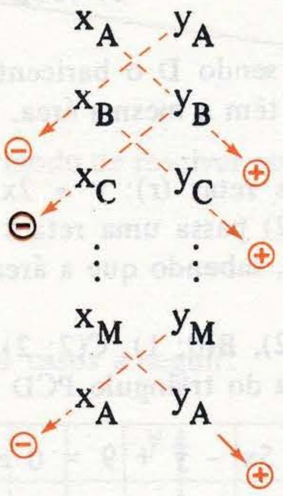
9.29) Calcule a área do quadrilátero ABCD tal que A(3; -3), B(5; 4), C(0; 2) e D(0; 0).

9.3 – ÁREA DE UM POLÍGONO

Para calcularmos a área de um polígono de mais de três lados, podemos proceder como no exercício 9.11, isto é, dividimos o polígono em triângulos. No entanto, podemos obter diretamente a área do polígono (sem dividi-lo em triângulos) usando uma regra prática (a qual daremos a seguir, sem demonstração), que é uma generalização da regra prática apresentada no item 9.2, para os triângulos.

Sejam A, B, C, ... , M vértices consecutivos de um polígono qualquer. Sua área S é dada por:

$$S = \frac{1}{2} \, |\Delta|$$



onde:

$$\Delta = x_A y_B - y_A x_B + x_B y_C - y_B x_C + \ldots + x_M y_A - y_M x_A$$

Observemos que:

1º) De modo semelhante ao que foi feito para os triângulos, dispomos as coordenadas dos vértices em duas colunas, repetindo a primeira linha.

2º) Os vértices devem ser consecutivos, isto é, tomamos um vértice qualquer como ponto de partida e percorremos o polígono no sentido horário ou anti-horário.

Pode-se ainda demonstrar que:

1º) quando o percurso é feito no sentido anti-horário, temos $\Delta > 0$

2º) quando o percurso é feito no sentido horário, temos $\Delta < 0$

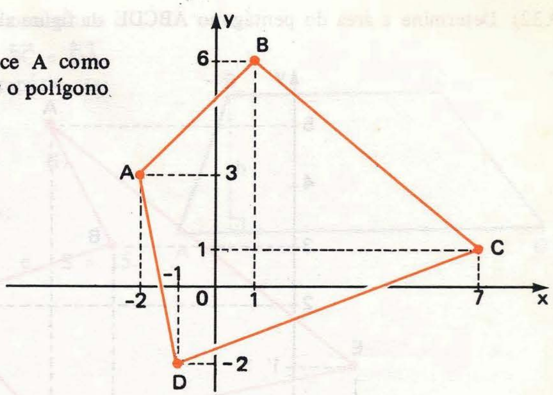
Exercícios Resolvidos

9.30) Consideremos novamente o quadrilátero ABCD do problema 9.11, onde A(–2; 3), B(1; 6), C(7; 1) e D(–1; –2). Calcule sua área.

Solução

Vamos tomar o vértice A como ponto de partida, e percorrer o polígono no sentido horário.

-2	3
1	6
7	1
-1	-2
-2	3



Temos:

$$\Delta = (-2)(6) + (1)(1) + (7)(-2) + (-1)(3) - (3)(1) - (6)(7) - (1)(-1) - (-2)(-2) =$$
$$= -12 + 1 - 14 - 3 - 3 - 42 + 1 - 4 = -76$$

Portanto:

$$S = \frac{1}{2}\,|\Delta| = \frac{1}{2}\,|-76| = 38$$

A título de ilustração, vamos calcular novamente a área, partindo do vértice C e percorrendo o polígono no sentido anti-horário:

7	1
1	6
-2	3
-1	-2
7	1

$$\Delta = (7)(6) + (1)(3) + (-2)(-2) + (-1)(1) - (1)(1) - (6)(-2) - (3)(-1) - (-2)(7) =$$
$$= 42 + 3 + 4 - 1 - 1 + 12 + 3 + 14 = 76$$

Assim: $S = \frac{1}{2}\,|\Delta| = \frac{1}{2}\,|76| = 38$

9.31) Consideremos o pentágono ABCDE, onde A(0; 4), B(3; 2), C(1; -3), D(-3; -2) e E(-4; 1). Calcule sua área.

Solução

Por convenção, quando se fala "pentágono ABCDE", admite-se que os vértices são consecutivos; assim, não há necessidade de fazermos o desenho. Partindo do vértice A temos:

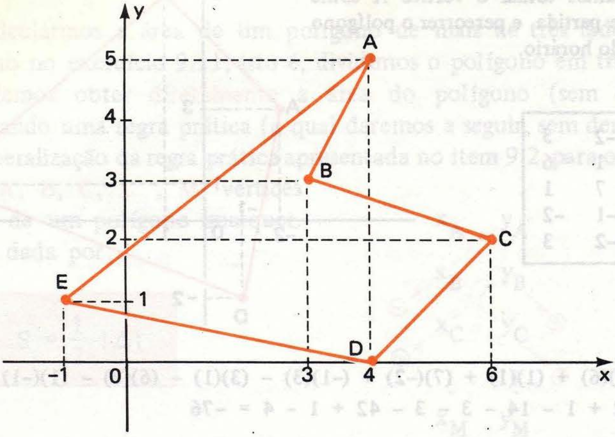
0	4
3	2
1	-3
-3	-2
-4	1
0	4

$$\Delta = (0)(2) + (3)(-3) + (1)(-2) + (-3)(1) + (-4)(4) - (4)(3) - (2)(1) - (-3)(-3) - (-2)(-4) -$$
$$- (1)(0) = 0 - 9 - 2 - 3 - 16 - 12 - 2 - 9 - 8 - 0 = -61$$

Portanto:

$$S = \frac{1}{2}\,|\Delta| = \frac{1}{2}\,|-61| = \frac{61}{2}$$

9.32) Determine a área do pentágono ABCDE da figura abaixo.



Solução

Vamos partir do vértice A e percorrer o polígono no sentido horário.

A(4; 5)
B(3; 3)
C(6; 2)
D(4; 0)
E(−1; 1)

4	5
3	3
6	2
4	0
−1	1
4	5

$$\Delta = (4)(3) + (3)(2) + (6)(0) + (4)(1) + (-1)(5) - (5)(3) - (3)(6) - (2)(4) - (0)(-1) - (1)(4) =$$
$$= 12 + 6 + 0 + 4 - 5 - 15 - 18 - 8 - 0 - 4 = -28$$

Portanto: $S = \frac{1}{2}\,|\Delta| = \frac{1}{2}\,|-28| = 14$

9.33) Calcule a altura do trapézio ABCD onde A(2; 1), B(3; 4), C(5; 5) e D(12; 6).

Solução

Este problema é idêntico ao problema 8.9. Compare depois as soluções.

Em primeiro lugar, calculamos os coeficientes angulares das retas-suportes dos lados, para descobrirmos quais são os lados paralelos:

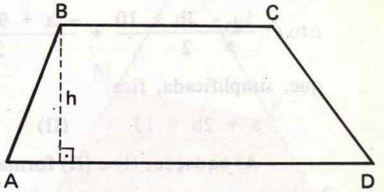
$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 4}{2 - 3} = 3 \qquad m_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{5 - 6}{5 - 12} = \frac{1}{7}$$

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{4 - 5}{3 - 5} = \frac{1}{2} \qquad m_{DA} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{6 - 1}{12 - 2} = \frac{1}{2}$$

Como $m_{BC} = m_{DA}$, concluímos que os lados paralelos são $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{DA}$.

Sendo S a área do trapézio, sabemos que:

$$S = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (\delta_{AD} + \delta_{BC}) \quad (I)$$



Fazendo os cálculos, obtemos:

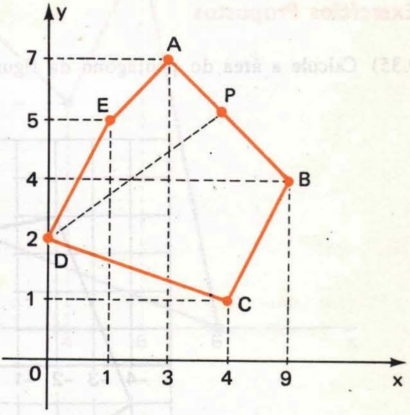
$$\delta_{AD} = 5\sqrt{5}, \; \delta_{BC} = \sqrt{5} \quad e \quad S = 15.$$

Substituindo em (I):

$$15 = \frac{1}{2} h(5\sqrt{5} + \sqrt{5})$$

donde: $h = \sqrt{5}$

9.34) Consideremos o pentágono ABCDE, onde A(3; 7), B(9; 4), C(4; 1), D(0; 2) e E(1; 5). Determine um ponto P do lado $\overline{AB}$ tal que a área do quadrilátero APDE seja $\frac{17}{43}$ da área do quadrilátero PBCD.



Solução

Façamos um esboço do pentágono no plano cartesiano, sem preocupações com a "escala". Sejam S_1 e S_2 as áreas dos quadriláteros APDE e PBCD respectivamente e seja S a área do pentágono. Fazendo os cálculos obtemos S = 30.

Supondo P(a; b), calculemos em seguida os valores de S_1 e S_2, fazendo os "percursos" no sentido anti-horário (para que tenhamos $\Delta > 0$). Assim, obtemos:

$$S_1 = \frac{5a - 3b + 10}{2} \quad e \quad S_2 = \frac{-2a + 9b - 1}{2}$$

De acordo com o enunciado, devemos ter:

$$S_1 = \frac{17}{43} S_2$$

ou: $$\frac{5a - 3b + 10}{2} = \frac{17}{43} \cdot \frac{-2a + 9b - 1}{2}$$

que, após as simplificações, fica:

$83a - 94b = -149 \quad (I)$

Por outro lado, devemos ter:

$$S_1 + S_2 = 30$$

isto é: $\dfrac{5a - 3b + 10}{2} + \dfrac{-2a + 9b - 1}{2} = 30$

que, simplificada, fica:

$$a + 2b = 17 \qquad \text{(II)}$$

As equações (I) e (II) formam o sistema

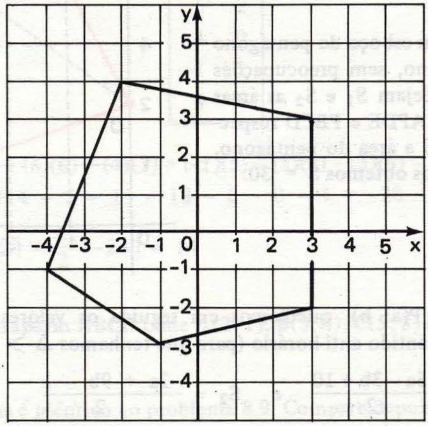
$$\begin{cases} 83a - 94b = -149 \\ a + 2b = 17 \end{cases}$$

que, resolvido, nos dá: $a = 5$ e $b = 6$

Portanto: P(5; 6)

Exercícios Propostos

9.35) Calcule a área do pentágono da figura.



9.36) Calcule a área do quadrilátero ABCD em cada um dos casos a seguir:

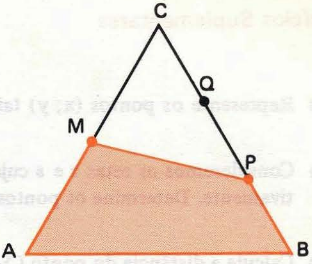
a) A(2; -2), B(3; 4), C(-4; 1), D(-2; -1)

b) A(3; 0), B(0; 5), C(-6; 2), D(-2; 0)

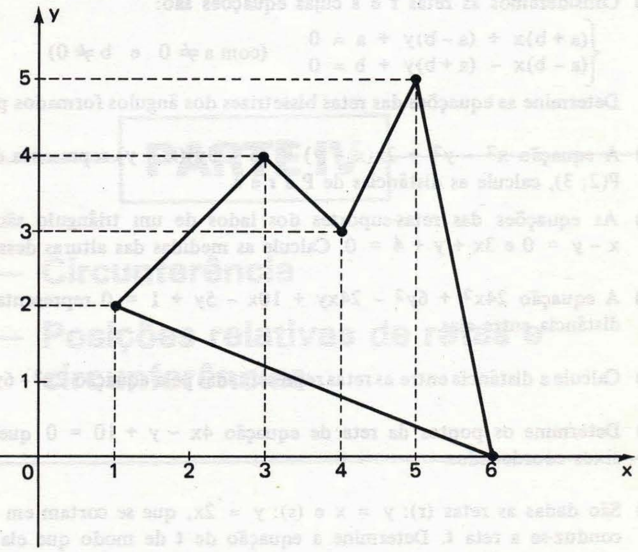
9.37) Calcule a área do hexágono ABCDEF, onde:

A(1; 3), B(4; 1), C(3; -2), D(0; -3), E(-2; -1) e F(-1; 2)

9.38) Seja o triângulo ABC de vértices A(−6; 0), B(6; 0) e C(0; 12), representado na figura. O ponto M divide $\overleftrightarrow{AC}$ ao meio e os pontos P e Q dividem $\overleftrightarrow{BC}$ em três partes de mesmo comprimento. Determine a área do quadrilátero ABPM.



9.39) Calcule a área do polígono da figura.



9.40) Consideremos o quadrilátero ABCD tal que A(0; 4), B(2; 7), C(7; 2) e D(3; 1). Determine um ponto P do lado $\overleftrightarrow{BC}$ tal que a área do triângulo ABP seja $\frac{1}{3}$ da área do quadrilátero APCD.

9.41) Demonstre que, em qualquer quadrilátero, os pontos médios dos lados são vértices de um segundo quadrilátero, cuja área é metade da área do primeiro.

III.1) Represente os pontos (x; y) tais que $\frac{9x - 18}{3x - y - 3} > 2$.

III.2) Consideremos as retas r e s cujas equações são $x + y - 6 = 0$ e $3x - 4y + 3 = 0$ respectivamente. Determine os pontos de r cujas distâncias à reta s são iguais a $\frac{28}{5}$.

III.3) Calcule a distância do ponto $(\sqrt{a}; \sqrt{b})$ à reta de equação $\sqrt{a}\ x + \sqrt{b}\ x = 0$.

III.4) Determine o valor de a sabendo que o ponto (a; 2) é eqüidistante das retas de equações $4x - 3y + 7 = 0$ e $7x + 24y - 30 = 0$.

III.5) Consideremos as retas r e s cujas equações são:

$$\begin{cases} (a + b)x + (a - b)y + a = 0 \\ (a - b)x - (a + b)y + b = 0 \end{cases} \quad (\text{com } a \neq 0 \text{ e } b \neq 0)$$

Determine as equações das retas bissetrizes dos ângulos formados por r e s.

III.6) A equação $x^2 - y^2 + 2x(x - y) = (5 - 3y)(x - y)$ representa duas retas r e s. Sendo P(2; 3), calcule as distâncias de P a r e s.

III.7) As equações das retas-suportes dos lados de um triângulo são $3x + 5y - 16 = 0$, $x - y = 0$ e $3x + y + 4 = 0$. Calcule as medidas das alturas desse triângulo.

III.8) A equação $24x^2 + 6y^2 - 24xy + 10x - 5y + 1 = 0$ representa duas retas. Calcule a distância entre elas.

III.9) Calcule a distância entre as retas representadas pela equação $2x^2 - 6y^2 - xy + x + 5y - 1 = 0$.

III.10) Determine os pontos da reta de equação $4x - y + 10 = 0$ que são eqüidistantes dos eixos coordenados.

III.11) São dadas as retas (r): $y = x$ e (s): $y = 2x$, que se cortam em A. Pelo ponto P(1; 1) conduz-se a reta t. Determine a equação de t de modo que ela forme com r e s um triângulo de área igual a 1.

III.12) Calcule a área do triângulo cujos vértices são:
$A(p + 1 + \sqrt{3}; s + 1 + \sqrt{3})$, $B(p; s + 2)$ e $C(p + 2; s)$

III.13) Consideremos um triângulo ABC de área $\frac{57}{2}$, tal que A(-2; 1) e C(7; 3). Determine o vértice B, sabendo que o baricentro do triângulo pertence à reta de equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 3t + 1 \end{cases}$$

III.14) Seja P um ponto qualquer da base $\overleftrightarrow{BC}$ de um triângulo isósceles ABC. Demonstre que a soma das distâncias de P aos lados $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$ é igual à altura relativa ao lado $\overleftrightarrow{BC}$.

PARTE IV

Capítulo 10 — **Circunferência**

Capítulo 11 — **Posições relativas de retas e circunferências**

Capítulo 10

Circunferência

10.1 – EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos uma circunferência de centro C(a; b) e raio r. Pela definição de circunferência, sendo P(x; y) um ponto qualquer da circunferência, devemos ter:

$$\delta_{PC} = r$$

ou: $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$

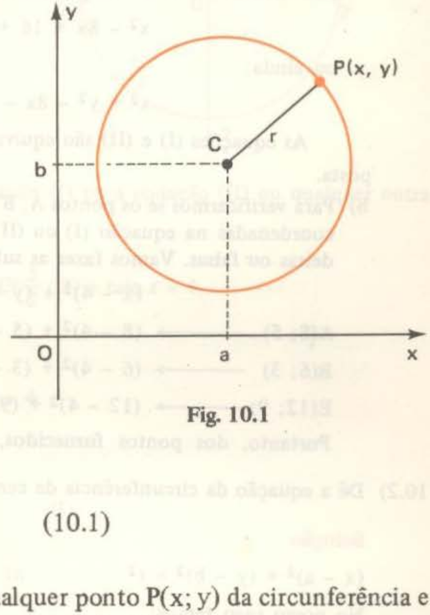


Fig. 10.1

ou ainda: $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad (10.1)$$

A equação 10.1 será satisfeita por qualquer ponto P(x; y) da circunferência e nenhum ponto fora da circunferência deverá satisfazê-la. Assim, dizemos que a equação 10.1 é uma equação da circunferência de centro (a; b) e raio r.

Exercícios Resolvidos

10.1) Seja a circunferência de centro C(4; 2) e raio r = 5.

a) Dê sua equação

b) Verifique se os pontos A(8; 5), B(6; 3) e E(12; 9) pertencem à circunferência.

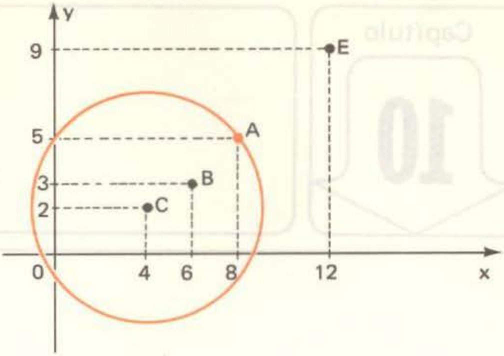
Solução

a) Tomemos a equação 10.1:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Aqui temos:

$a = 4, b = 2$ e $r = 5$



Assim a equação fica:

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2 \qquad \text{(I)}$$

Podemos desenvolver os quadrados, ficando com:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 25$$

ou ainda:

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0 \qquad \text{(II)}$$

As equações (I) e (II) são equivalentes; tanto uma como outra servem como resposta.

b) Para verificarmos se os pontos A, B e E pertencem à circunferência, substituímos suas coordenadas na equação (I) ou (II) e observamos se as sentenças obtidas são verdadeiras ou falsas. Vamos fazer as substituições na equação (I):

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

A(8; 5) ⟶ $(8 - 4)^2 + (5 - 2)^2 = 5^2$ (verdadeira)

B(6; 3) ⟶ $(6 - 4)^2 + (3 - 2)^2 = 5^2$ (falsa)

E(12; 9) ⟶ $(12 - 4)^2 + (9 - 2)^2 = 5^2$ (falsa)

Portanto, dos pontos fornecidos, apenas o ponto A pertence à circunferência.

10.2) Dê a equação da circunferência de centro C(2; –1) e raio r = 3.

Solução

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

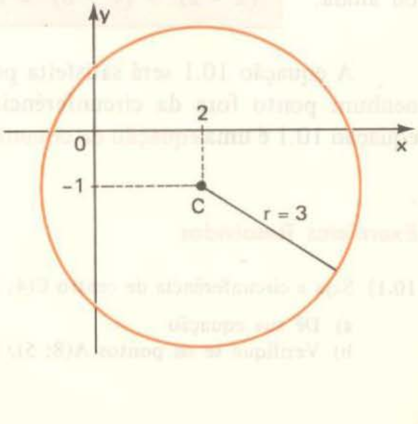
No nosso caso temos:

$a = 2, b = -1$ e $r = 3$

Assim:

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$

ou: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ (I)



Desenvolvendo os quadrados obtemos:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9$$

ou ainda: $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ (II)

Podemos dar como resposta a equação (I) ou a equação (II) ou outra qualquer equivalente a elas.

10.3) Dê a equação da circunferência de centro C(0; 0) e raio r = 2.

Solução

Neste caso o centro da circunferência é a origem do sistema de coordenadas. Temos então:

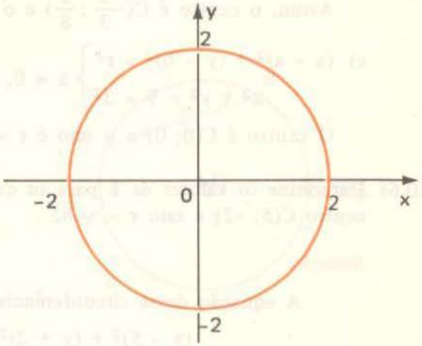
$a = 0, b = 0 \text{ e } r = 2$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2 = 4$

$x^2 + y^2 = 4$ (I)

ou: $x^2 + y^2 - 4 = 0$ (II)



Podemos dar como resposta a equação (I) ou a equação (II) ou qualquer outra equivalente a elas.

10.4) Dê a equação da circunferência de centro $C(\frac{5}{2}; 3)$ e raio r = 4.

Solução

Agora temos: $a = \frac{5}{2}, b = 3 \text{ e } r = 4$

Assim: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - \frac{5}{2})^2 + (y - 3)^2 = 4^2$ (I)

$$x^2 - 5x + \frac{25}{4} + y^2 - 6y + 9 = 16$$

$x^2 + y^2 - 5x - 6y - \frac{3}{4} = 0$ (II)

ou: $4x^2 + 4y^2 - 20x - 24y - 3 = 0$ (III)

Qualquer uma das equações (I), (II) e (III) serve como resposta.

10.5) Determine o centro e o raio das circunferências cujas equações são dadas a seguir:

a) $(x - 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$

b) $(x + \frac{2}{3})^2 + (y - \frac{5}{8})^2 = 10$

c) $x^2 + y^2 = 9$

Solução

a) $\left.\begin{matrix}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\(x-2)^2+(y-7)^2=36=6^2\end{matrix}\right\} a=2,\ b=7,\ r=6$

Portanto o centro é C(2; 7) e o raio é r = 6

b) $\left.\begin{matrix}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\(x+\frac{2}{3})^2+(y-\frac{5}{8})^2=10=(\sqrt{10})^2\end{matrix}\right\} a=\frac{-2}{3},\ b=\frac{5}{8},\ r=\sqrt{10}$

Assim, o centro é $C(\frac{-2}{3};\frac{5}{8})$ e o raio é $r=\sqrt{10}$

c) $\left.\begin{matrix}(x-a)^2+(y-b)^2=r^2\\x^2+y^2=9=3^2\end{matrix}\right\} a=0,\ b=0,\ r=3$

O centro é C(0; 0) e o raio é r = 3.

10.6) Determine os valores de k para os quais o ponto P(k; 5) pertence à circunferência de centro C(5; -2) e raio $r=\sqrt{85}$.

Solução

A equação dessa circunferência é:

$$(x-5)^2+(y+2)^2=(\sqrt{85})^2=85 \quad \text{(I)}$$

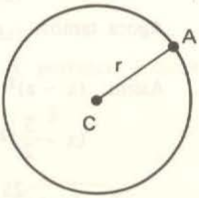
Se P(k; 5) é ponto da circunferência, suas coordenadas devem satisfazer a equação (I):

$$(k-5)^2+(5+2)^2=85$$

Resolvendo esta equação obtemos: k = 11 ou k = –1

10.7) Calcule o raio da circunferência que tem centro no ponto C(-2; 7) e que passa por A(3; -1).

Solução

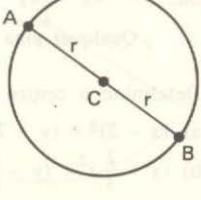


O raio é a distância entre os pontos A e C:

$$r=\delta_{AC}=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=$$
$$=\sqrt{(3+2)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{89}$$

10.8) Sendo A(-3; 2) e B(7; 6), determine a equação da circunferência que tem o segmento $\overleftrightarrow{AB}$ como diâmetro.

Solução



O centro C da circunferência é o ponto médio do segmento $\overleftrightarrow{AB}$. Assim:

$$\begin{cases} x_C=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-3+7}{2}=2\\ y_C=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{2+6}{2}=4\end{cases} \quad C(2;4)$$

Para obtermos o raio, calculamos a distância de C ao ponto A (ou ao ponto B):

$$r = \delta_{CA} = \sqrt{(2+3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{29}$$

Portanto, a equação da circunferência é:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 29$$

ou, desenvolvendo os quadrados:

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 9 = 0$$

10.9) Dê a equação da circunferência que passa pelos pontos A(0; 2), B(7; -5) e C(6; -6).

Solução

Seja D o centro de nossa circunferência. Em primeiro lugar vamos observar que, sendo A e B pontos (distintos) da circunferência, a mediatriz da corda $\overleftrightarrow{AB}$ deve passar pelo centro da circunferência (figura a).

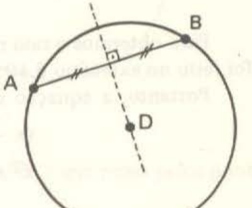


Fig. a

Sejam então r e s as mediatrizes das cordas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ respectivamente (fig. b). Podemos determinar as equações de r e s que são:

(r): $x - y - 5 = 0$

(s): $x + y - 1 = 0$

O centro D é a interseção das retas r e s:

D(3; -2)

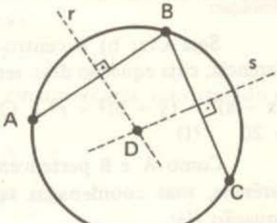


Fig. b

Para obtermos o raio, calculamos a distância de D ao ponto A (ou B, ou C):

$$r = \delta_{DA} = 5$$

Assim, a equação da circunferência é:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5^2$$

ou, desenvolvendo os quadrados:

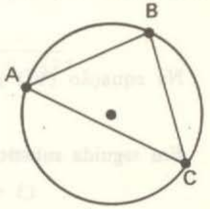
$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

Devemos observar que:

1º) O problema não teria solução se os pontos A, B e C estivessem alinhados.

2º) O problema também poderia ter sido enunciado do seguinte modo: "Determine a equação da circunferência circunscrita ao triângulo de vértices A(0; 2), B(7; -5) e C(6; -6)".

3º) Indicaremos uma outra solução para este problema no exercício 10.38.



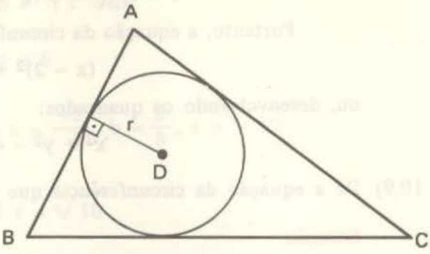
10.10) Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo de vértices A(9; 1), B(4; 11) e C(1; 5).

Solução

Este triângulo é o mesmo do exercício 8.40.

O centro da circunferência inscrita é o incentro D que já foi determinado no exercício 8.40:

$$D(4;\ 6)$$



Para obtermos o raio r, calculamos a distância de D a um dos lados, o que também já foi feito no exercício 8.40: $r = \sqrt{5}$

Portanto, a equação da circunferência é:

$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 = (\sqrt{5})^2$$

ou:
$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 47 = 0$$

10.11) Determine a equação da circunferência de raio $r = 2\sqrt{5}$ e que passa pelos pontos A(1; 4) e B(7; -2).

Solução

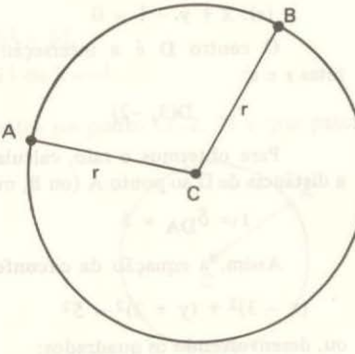
Seja C(a; b) o centro da circunferência, cuja equação deve ser:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 = (2\sqrt{5})^2 =$
$= 20$ (I)

Como A e B pertencem à circunferência, suas coordenadas satisfazem a equação (I):

A(1; 4) $\rightarrow (1 - a)^2 + (4 - b)^2 = 20$ (II)

B(7; -2) $\rightarrow (7 - a)^2 + (-2 - b)^2 = 20$ (III)



Desenvolvendo e simplificando as equações (II) e (III), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 8b = 3 & \text{(IV)} \\ a^2 + b^2 - 14a + 4b = -33 & \text{(V)} \end{cases}$$

Um modo simples de resolver esse sistema é subtrair membro a membro as equações (IV) e (V). Vamos fazer (IV) - (V), obtendo:

$$12a - 12b = 36$$

ou:
$$a - b = 3 \quad \text{(VI)}$$

Na equação (VI) isolamos uma das incógnitas. Vamos, por exemplo, isolar a:

$$a = 3 + b \quad \text{(VII)}$$

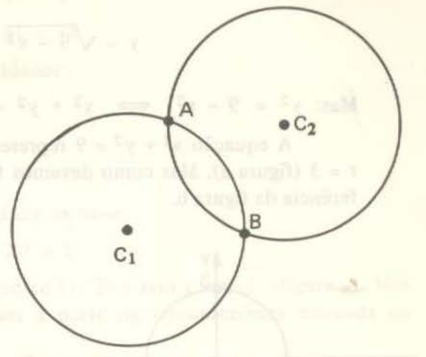
Em seguida substituímos em (IV) ou (V). Vamos substituir em (IV):

$$(3 + b)^2 + b^2 - 2(3 + b) - 8b = 3$$

Resolvendo esta última equação obtemos: $b = 2$ ou $b = 0$.

Substituindo em (VII):

$$\begin{cases} b = 2 \Longleftrightarrow a = 3 + 2 = 5 \therefore C(5; 2) \\ b = 0 \Longleftrightarrow a = 3 + 0 = 3 \therefore C(3; 0) \end{cases}$$



Portanto, temos duas circunferências satisfazendo as condições do problema: uma de centro $C_1(5; 2)$ e outra de centro $C_2(3; 0)$. A de centro C_1 tem equação

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$$

e a de centro C_2 tem equação

$$(x - 3)^2 + y^2 = 20$$

10.12) Determine a equação da circunferência de raio $r = \sqrt{5}$ e que passa pelos pontos $A(-1; 3)$ e $B(3; 1)$.

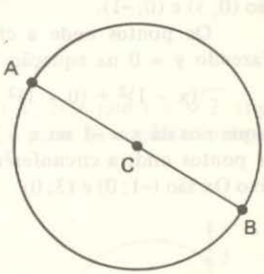
Solução

Este problema é semelhante ao anterior e vamos encaminhá-lo do mesmo modo. Sendo $C(a; b)$ o centro, a equação da circunferência é:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5 \quad \text{(I)}$$

Os pontos $A(-1; 3)$ e $B(3; 1)$ pertencem à circunferência; substituindo suas coordenadas em (I), obtemos o sistema.

$$\begin{cases} (-1 - a)^2 + (3 - b)^2 = 5 \\ (3 - a)^2 + (1 - b)^2 = 5 \end{cases}$$



o qual, resolvido, nos dá: $a = 1$ e $b = 2$.

Assim, neste caso obtivemos apenas uma circunferência satisfazendo as condições do problema (no exercício anterior obtivemos duas). Isto significa que os pontos A e B dados são extremos de um diâmetro da circunferência.

O centro da circunferência é $C(1; 2)$ e sua equação é:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

10.13) No plano cartesiano, o que representa a equação $y = \sqrt{9 - x^2}$?

Solução

Para a existência de $y = \sqrt{9 - x^2}$ devemos impor

$$9 - x^2 \geqslant 0 \quad \text{e} \quad y \geqslant 0$$

Porém, se elevarmos ao quadrado os dois membros de $y = \sqrt{9 - x^2}$, obteremos $y^2 = 9 - x^2$, o que já garante a condição $9 - x^2 \geqslant 0$. Assim, podemos escrever:

$$y = \sqrt{9 - x^2} \iff \begin{cases} y^2 = 9 - x^2 \\ \text{e} \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Mas: $y^2 = 9 - x^2 \iff x^2 + y^2 = 9$

A equação $x^2 + y^2 = 9$ representa uma circunferência de centro na origem e raio $r = 3$ (figura a). Mas como devemos ter $y \geqslant 0$, a resposta do problema é a semicircunferência da figura b.

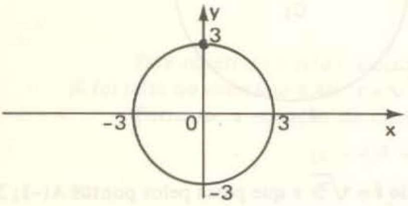


Fig. a

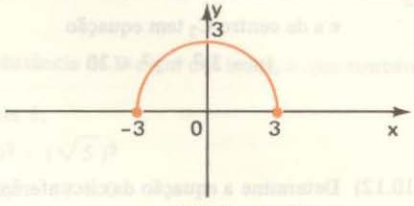


Fig. b

10.14) Obtenha os pontos onde a circunferência de equação

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

corta os eixos coordenados.

Solução

Os pontos onde a circunferência corta o eixo Oy devem ter abscissa nula. Fazendo $x = 0$ na equação dada temos:

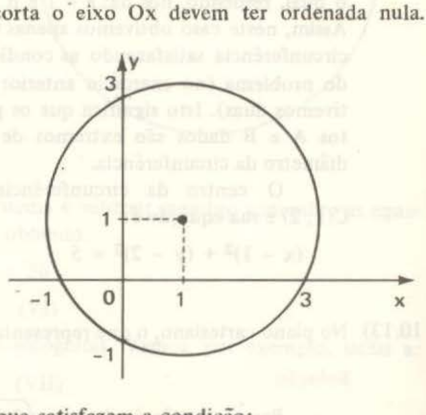
$$(0 - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

o que nos dá $y = 3$ ou $y = -1$. Portanto, os pontos onde a circunferência corta o eixo Oy são $(0; 3)$ e $(0; -1)$.

Os pontos onde a circunferência corta o eixo Ox devem ter ordenada nula. Fazendo $y = 0$ na equação dada, temos:

$$(x - 1)^2 + (0 - 1)^2 = 5$$

o que nos dá $x = -1$ ou $x = 3$. Portanto, os pontos onde a circunferência corta o eixo Ox são $(-1; 0)$ e $(3; 0)$



10.15) Represente no plano cartesiano os pontos que satisfazem a condição:

$$(|x| - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

Solução

Conforme sabemos: $\begin{cases} x \geqslant 0 \iff |x| = x \\ x \leqslant 0 \iff |x| = -x \end{cases}$

Vamos considerar então duas possibilidades:

1ª) $x \geqslant 0$

Neste caso temos $|x| = x$ e a equação dada torna-se:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

que é a equação de uma circunferência de centro (1; 2) e raio $r = \sqrt{2}$ (figura a). Mas como estamos supondo $x \geqslant 0$, ficamos com a parte da circunferência marcada na figura b.

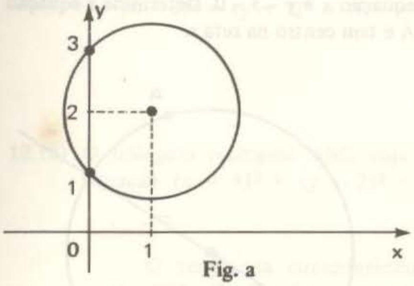


Fig. a

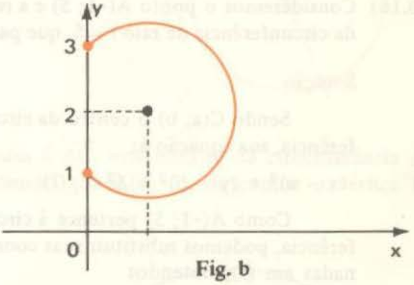


Fig. b

2ª) $x \leqslant 0$

Agora temos $|x| = -x$ e a equação dada fica:

$$(-x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

ou: $$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

que é a equação de uma circunferência de centro (–1; 2) e raio $r = \sqrt{2}$ (figura c). Porém, como estamos supondo $x \leqslant 0$, ficamos com a parte da circunferência marcada na figura d.

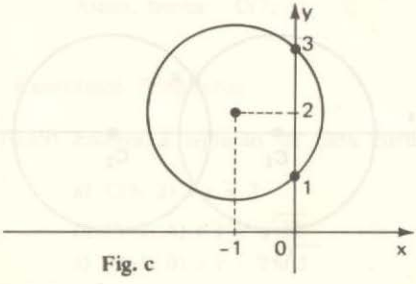


Fig. c

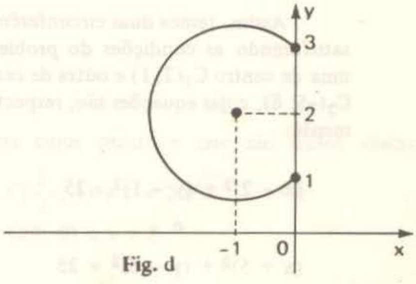


Fig. d

A resposta ao problema é a reunião das figuras **b** e **d**, isto é, é a região representada na figura **e**.

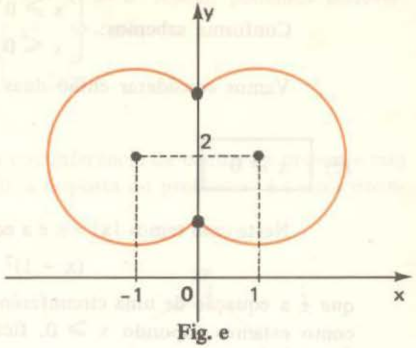


Fig. e

10.16) Consideremos o ponto A(-1; 5) e a reta s de equação $x + y - 3 = 0$. Determine a equação da circunferência de raio $r = 5$, que passa por A e tem centro na reta r.

Solução

Sendo C(a; b) o centro da circunferência, sua equação é:

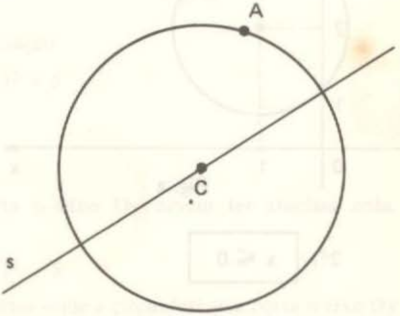
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 5^2$ (I)

Como A(-1; 5) pertence à circunferência, podemos substituir suas coordenadas em (I), obtendo:

$(-1 - a)^2 + (5 - b)^2 = 25$ (II)

O centro C(a; b) pertence à reta (s): $x + y - 3 = 0$. Portanto, temos:

$a + b - 3 = 0$ (III)



Resolvendo o sistema formado pelas equações (II) e (III), obtemos:

$a = 2$ e $b = 1$

ou

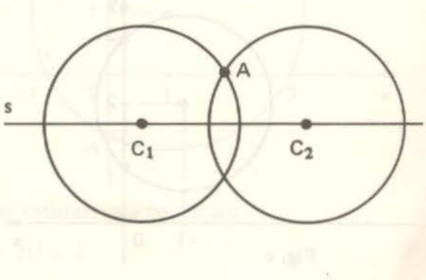
$a = -5$ e $b = 8$

Assim, temos duas circunferências satisfazendo as condições do problema: uma de centro $C_1(2; 1)$ e outra de centro $C_2(-5; 8)$, cujas equações são, respectivamente:

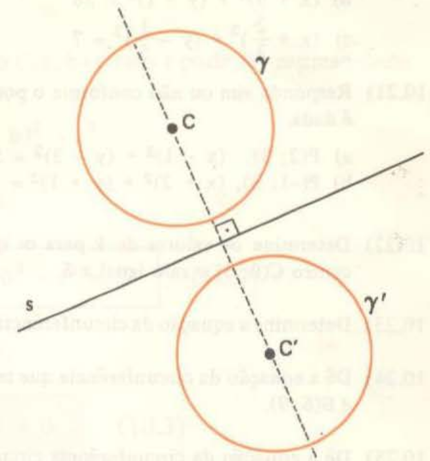
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$

e

$(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$



10.17) Consideremos a circunferência γ de equação $(x-1)^2+(y-5)^2=13$ e a reta s de equação $x-4y+2=0$. Seja γ' a circunferência simétrica de γ em relação a s. Determine a equação de γ'.



Solução

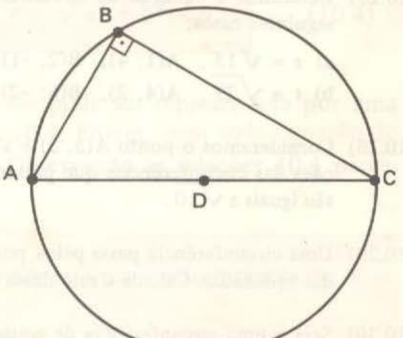
As circunferências γ e γ' devem ter o mesmo raio $r=\sqrt{13}$. Sejam C e C' os centros de γ e γ', respectivamente. Da equação tiramos C(1; 5). O ponto C' deve ser o simétrico de C em relação a s. Usando o processo visto no capítulo 5, obtemos:

C'(3; −3)

Portanto, a equação de γ' é:

$$(x-3)^2+(y+3)^2=13$$

10.18) O triângulo retângulo ABC, cuja hipotenusa é $\overleftrightarrow{AC}$, está inscrito na circunferência de equação $(x-4)^2+(y-3)^2=13$. Sabendo que A(1; 5), determine o vértice C.



Solução

O centro da circunferência é o ponto D(4; 3). Conforme sabemos da Geometria Plana, quando um triângulo retângulo está inscrito numa circunferência, a hipotenusa é diâmetro da circunferência. Portanto, o centro D é o ponto médio do segmento $\overleftrightarrow{AC}$. Assim:

$$x_D=\frac{x_A+x_C}{2} \quad \text{e} \quad y_D=\frac{y_A+y_C}{2}$$

ou: $4=\dfrac{1+x_C}{2}$ e $3=\dfrac{5+y_C}{2}$

donde: $x_C=7$ e $y_C=1$

Assim, temos: C(7; 1)

Exercícios Propostos

10.19) Escreva a equação de cada circunferência cujos centro e raio são dados abaixo:

a) C(5; 3) e $r=2$

b) C(−2; 4) e $r=\sqrt{10}$

c) C(−1; 0) e $r=2\sqrt{3}$

d) $C(\frac{2}{3};\ 1)$ e $r=2\sqrt{2}$

e) C(0; 0) e $r=8$

10.20) Dê o centro C e o raio r das circunferências cujas equações são dadas a seguir:

a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 49$

b) $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 36$

c) $(x + \frac{2}{3})^2 + (y - \frac{1}{5})^2 = 7$

d) $(x + 2)^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 80$

e) $x^2 + y^2 = 16$

f) $x^2 + y^2 = 6$

10.21) Responda sim ou não conforme o ponto P pertença ou não à circunferência cuja equação é dada.

a) P(2; 3), $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$

b) P(-1; 3), $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 17$

c) P(3; -4), $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$

10.22) Determine os valores de k para os quais o ponto P(-3; k) pertence à circunferência de centro C(0; 3) e raio igual a 5.

10.23) Determine a equação da circunferência de centro C(-1; 4) e que passa pelo ponto A(2; -7).

10.24) Dê a equação da circunferência que tem como diâmetro o segmento de extremos A(-4; 5) e B(6; 9).

10.25) Dê a equação da circunferência circunscrita ao triângulo de vértices A(-2; 3), B(1; 6) e C(6; 1).

10.26) Determine a equação da circunferência inscrita no triângulo de vértices A(1; 9), B(13; 18) e C(25; 2).

10.27) Determine a equação da circunferência de raio r e que passa pelos pontos A e B nos seguintes casos:

a) $r = \sqrt{13}$, A(1; 4), B(2; -1)

b) $r = \sqrt{29}$, A(4; 2), B(6; -2)

10.28) Consideremos o ponto A(3; 3) e a reta s de equação $x + 4y - 8 = 0$. Determine as equações das circunferências que passam por A e têm centro na reta s, sabendo que seus raios são iguais a $\sqrt{10}$.

10.29) Uma circunferência passa pelos pontos A(3; 1) e B(4; 0) e tem seu centro sobre o eixo das ordenadas. Calcule o raio dessa circunferência.

10.30) Seja γ uma circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 15$ e consideremos a reta t de equação $x - 2y - 1 = 0$. Determine a equação da circunferência simétrica de γ em relação a t.

10.31) Consideremos um triângulo retângulo cujos vértices são A(1; -1), B(3; 3) e C(5; 2). Dê a equação da circunferência circunscrita ao triângulo.

10.32) Os pontos (-1; 4) e (3; 2) são vértices consecutivos de um quadrado. Determine a equação da circunferência circunscrita ao quadrado.

10.33) Desenhe no plano cartesiano as figuras representadas pelas equações:

a) $x = -\sqrt{16 - y^2}$

b) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 = 2$

10.2 – RECONHECIMENTO DA EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Vimos que uma circunferência de centro C(a; b) e raio **r** pode ser representada pela equação 10.1:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0} \quad (10.2)$$

A equação 10.2 tem a seguinte forma:

$$\boxed{x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0} \quad (10.3)$$

onde: $\boxed{\alpha = -2a}$ $\boxed{\beta = -2b}$ $\boxed{\gamma = a^2 + b^2 - r^2}$

isto é: $\boxed{a = -\frac{\alpha}{2}}$ $\boxed{b = -\frac{\beta}{2}}$ $\boxed{r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma}}$ (10.4)

É óbvio portanto que toda circunferência pode ser representada por uma equação do tipo da 10.3, valendo as relações 10.4. Porém, nem toda equação do tipo da 10.3 representa uma circunferência. Observando as relações 10.4 percebemos que:

> Uma equação do tipo da 10.3, representa uma circunferência se, e somente se:
>
> $$a^2 + b^2 - \gamma > 0$$

Devemos acrescentar que, em relação à equação 10.3:

1º) Se $a^2 + b^2 - \gamma = 0$, nas relações 10.4 teremos $r = 0$, isto é, uma "circunferência" de centro C(a; b) e **raio nulo**. Isto significa que a equação dada representa apenas o ponto C(a; b).

2º) Se $a^2 + b^2 - \gamma < 0$, a equação dada não é satisfeita por nenhum ponto do plano. Alguns autores dizem, neste caso, que a equação dada representa uma circunferência imaginária.

10.34) Para cada equação dada a seguir, verifique se representa uma circunferência. Em caso afirmativo, dê o centro e o raio.

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 3x - 8y + 15 = 0$
e) $2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 6 = 0$
f) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 21 = 0$
g) $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$
h) $x^2 + y^2 + 6xy + 8x - 9y + 1 = 0$
i) $4x^2 + 3y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$

Solução

a) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$

Trata-se de uma equação do tipo da 10.3 onde:

$$\alpha = -6, \ \beta = 4 \ \text{ e } \ \gamma = -3$$

Portanto, temos:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{-6}{2} = 3 \\ b = -\dfrac{\beta}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2 \\ r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma} = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 - (-3)} = 4 \end{cases}$$

Concluímos, então, que se trata de uma circunferência de centro C(3; -2) e raio r = 4.

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$

É uma equação do tipo da 10.3, com:

$$\alpha = -2, \ \beta = -4 \ \text{ e } \ \gamma = 7$$

$$\text{Assim:} \begin{cases} a = -\dfrac{\alpha}{2} = 1 \\ b = -\dfrac{\beta}{2} = 2 \end{cases}$$

Neste caso, temos:

$$a^2 + b^2 - \gamma = (1)^2 + (2)^2 - (7) = -2 < 0$$

Portanto, a equação fornecida não representa nenhum ponto do plano. Trata-se de uma circunferência imaginária.

c) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

É uma equação do tipo da 10.3 onde:

$$\alpha = -4, \ \beta = -6 \ \text{ e } \ \gamma = 13$$

$$a = -\frac{\alpha}{2} = 2$$

$$b = -\frac{\beta}{2} = 3$$

Repare que: $a^2 + b^2 - \gamma = (2)^2 + (3)^2 - 13 = 0$
Portanto a equação dada representa apenas o ponto C(2; 3).

d) $x^2 + y^2 + 3x - 8y + 15 = 0$

Esta equação é do tipo da 10.3 com:

$$\alpha = 3, \ \beta = -8, \ \gamma = 15$$

Assim: $\begin{cases} a = -\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{3}{2} \\ b = -\dfrac{\beta}{2} = 4 \end{cases}$

$$a^2 + b^2 - \gamma = (-\frac{3}{2})^2 + (4)^2 - 15 = \frac{13}{4} > 0$$

Concluímos que se trata de uma circunferência de centro $C(-\frac{3}{2}; 4)$ e raio r dado por:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma} = \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

e) $2x^2 + 2y^2 - 12x + 8y - 6 = 0$

Esta equação não é do tipo da equação 10.3. Porém, dividindo todos os seus termos por 2 obtemos a equação

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0 \qquad \text{(I)}$$

que é equivalente à equação dada e é do tipo da equação 10.3, com:

$$\alpha = -6, \ \beta = 4 \ \text{ e } \ \gamma = -3$$

Assim: $\begin{cases} a = 3, \ b = -2 \\ a^2 + b^2 - \gamma = (3)^2 + (-2)^2 - (-3) = 16 > 0 \\ r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma} = \sqrt{16} = 4 \end{cases}$

Temos então uma circunferência de centro C(3; -2) e raio r = 4

f) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 12y + 21 = 0$

Dividindo todos os termos por 3:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 7 = 0$$

$$\alpha = -2, \ \beta = -4, \ \gamma = 7$$

$\begin{cases} a = 1, \ b = 2 \\ a^2 + b^2 - \gamma = (1)^2 + (2)^2 - 7 = -2 < 0 \end{cases}$

Portanto, a equação não representa circunferência.

g) $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$

Esta equação é do tipo da 10.3 com:

$$\alpha = 0, \quad \beta = -8, \quad \gamma = 12$$

$$\begin{cases} a = 0, b = 4 \\ a^2 + b^2 - \gamma = (0)^2 + (4)^2 - 12 = 4 > 0 \end{cases}$$

Assim: $r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma} = \sqrt{4} = 2$

É uma circunferência de centro C(0; 4) e raio r = 2.

h) $x^2 + y^2 + 6xy + 8x - 9y + 1 = 0$

Esta equação apresenta um termo em xy, o que não ocorre na equação 10.3. Portanto, não é equação de circunferência. Nos capítulos seguintes aprenderemos a decidir que tipo de figura esta equação representa.

i) $4x^2 + 3y^2 - 6x + 2y - 1 = 0$

Na equação 10.3, os coeficientes de x^2 e y^2 são ambos iguais a 1. Na equação dada neste exercício, os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes. Portanto, jamais conseguiremos transformar essa equação numa equivalente a ela, com os coeficientes de x^2 e y^2 iguais a 1. Assim, concluímos que essa equação não é de circunferência. Nos capítulos seguintes aprenderemos a decidir o que ela representa.

10.35) Para que valores reais de m a equação $x^2 + y^2 - 2x + 6y + m = 0$ representa uma circunferência?

Solução

A equação dada é do tipo da 10.3 com: $\alpha = -2$, $\beta = 6$ e $\gamma = m$. Assim:

$$a = -\frac{\alpha}{2} = 1 \quad \text{e} \quad b = -\frac{\beta}{2} = -3$$

E portanto, para que a equação represente uma circunferência, devemos ter:

$$a^2 + b^2 - \gamma > 0$$

ou:

$$(1)^2 + (-3)^2 - m > 0$$

Resolvendo esta inequação obtemos: $m < 10$

10.36) Sejam A, B, C, D, E e F números reais e consideremos a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

a) Dê as condições para que essa equação represente uma circunferência.
b) Supondo que as condições do item anterior estejam verificadas, determine o centro e o raio da circunferência.

Solução

a) Em primeiro lugar, devemos lembrar-nos de que os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais e que não pode haver termo em xy. Assim, impomos:

$$A = B \neq 0 \quad \text{e} \quad C = 0$$

Com isso, a equação transforma-se em:

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Dividindo todos os termos por A obtemos:

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

que é uma equação do tipo da 10.3, com:

$$\alpha = \frac{D}{A}, \quad \beta = \frac{E}{A} \quad e \quad \gamma = \frac{F}{A}$$

$$\text{Assim:} \begin{cases} a = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{D}{2A} \\ b = -\frac{\beta}{2} = -\frac{E}{2A} \end{cases}$$

Finalmente impomos:

$$a^2 + b^2 - \gamma > 0$$

isto é:

$$(-\frac{D}{2A})^2 + (-\frac{E}{2A})^2 - \frac{F}{A} > 0$$

ou:

$$\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} > 0$$

ou ainda:

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0$$

Em resumo:

Para que a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ represente uma circunferência, devemos ter:

$$\begin{cases} A = B \neq 0 \\ C = 0 \\ D^2 + E^2 - 4AF > 0 \end{cases}$$

b) Do que foi visto acima concluímos que o centro é o ponto

$$(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2A})$$

e o raio r é:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - \gamma} = \sqrt{(-\frac{D}{2A})^2 + (-\frac{E}{2A})^2 - \frac{F}{A}} = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2|A|}$$

10.37) Determine os números reais E, F, G e H, de modo que a equação

$$2x^2 + Ey^2 + Fx + Gy + H = 0$$

represente uma circunferência de centro (2; -1)

Solução

Devemos, em primeiro lugar, impor: E = 2. Em seguida, dividimos todos os termos por 2, obtendo:

$$x^2 + y^2 + \frac{F}{2}x + \frac{G}{2}y + \frac{H}{2} = 0$$

que é uma equação do tipo da 10.3 com:

$$\alpha = \frac{F}{2},\ \beta = \frac{G}{2} \text{ e } \gamma = \frac{H}{2}$$

Assim: $\begin{cases} a = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{F}{4} \\ b = -\frac{\beta}{2} = -\frac{G}{4} \end{cases}$

Como o centro é o ponto (2; -1), temos:

$$-\frac{F}{4} = 2 \quad \text{e} \quad -\frac{G}{4} = -1$$

isto é: $F = -8 \quad \text{e} \quad G = 4$

Finalmente, para que a circunferência exista, impomos:

$$a^2 + b^2 - \gamma > 0$$

isto é: $2^2 + (-1)^2 - \frac{H}{2} > 0$

donde: $H < 10$

Em resumo, devemos ter:

$$E = 2,\ F = -8,\ G = 4 \text{ e } H < 10$$

10.38) Dê a equação da circunferência que passa pelos pontos A(0; 2), B(7; -5) e C(6; -6).

Solução

Este problema é idêntico ao 10.9. Daremos agora uma outra solução.
A equação da circunferência procurada pode ser escrita:

$$x^2 + y^2 + kx + my + n = 0 \qquad \text{(I)}$$

Como A, B e C pertencem à circunferência, suas coordenadas podem ser substituídas em (I):

$A(0; 2) \longrightarrow 0^2 + 2^2 + k(0) + m(2) + n = 0$

$B(7; -5) \longrightarrow 7^2 + (-5)^2 + k(7) + m(-5) + n = 0$

$C(6; -6) \longrightarrow 6^2 + (-6)^2 + k(6) + m(-6) + n = 0$

Simplificando as equações acima, ficamos com o sistema:

$$\begin{cases} 2m + n + 4 = 0 \\ 7k - 5m + n + 74 = 0 \\ 6k - 6m + n + 72 = 0 \end{cases}$$

que, resolvido, nos dá:

$$k = -6, \quad m = 4 \quad e \quad n = -12$$

Portanto, a equação da circunferência é:

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

10.39) Consideremos a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$$

Calcule a distância entre a circunferência e cada um dos pontos a seguir:

a) $A(-1; \frac{-5}{2})$ b) $B(3; 2)$ c) $D(9; 5)$

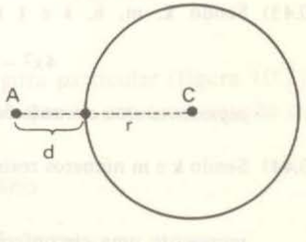
Solução

a) Em primeiro lugar, determinamos o centro C e o raio r da circunferência, obtendo:

$$C(5; 2) \quad e \quad r = 5$$

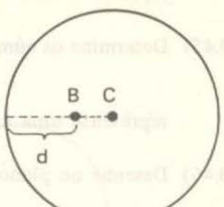
Em seguida, calculamos a distância entre os pontos A e C:

$$\delta_{AC} = \frac{15}{2}$$



Percebemos que $\delta_{AC} > r$. Portanto, o ponto A é exterior à circunferência. Se indicarmos por d a distância de A à circunferência, teremos:

$$d = \delta_{AC} - r = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$$

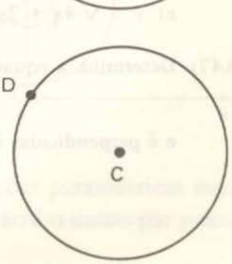


b) Neste caso obtemos:

$$\delta_{BC} = 2 < r$$

Daí, concluímos que o ponto B é interior à circunferência. Portanto, a distância d de B à circunferência é:

$$d = r - \delta_{BC} = 5 - 2 = 3$$



c) Agora obtemos:

$$\delta_{DC} = 5 = r$$

Portanto, o ponto D está sobre a circunferência e a distância de D à circunferência é nula.

10.40) Para cada equação dada abaixo, verifique se representa circunferência e, em caso afirmativo, dê o raio e as coordenadas do centro.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 14x + 40 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$
f) $9x^2 + 9y^2 - 12x - 18y + 4 = 0$
g) $2x^2 + 3y^2 - x - y - 6 = 0$
h) $x^2 + y^2 + 4xy + 2x - 8y + 1 = 0$
i) $x^2 - 8x + 12y - 3 = 0$

10.41) Para que valores de **k**, a equação

$$x^2 + y^2 + 4x - k = 0$$

representa uma circunferência?

10.42) Sendo **k**, **m**, **n** e **s** números reais, dê as condições para que a equação

$$kx^2 - \frac{3}{4}y^2 + nx - 4y + s = 0$$

represente uma circunferência.

10.43) Sendo **k**, **m**, **n**, **s** e **t** números reais, determine as condições para que a equação

$$4x^2 - \frac{k}{5}y^2 + \frac{m}{2}x - \frac{n}{3}y + sxy + t = 0$$

represente uma circunferência cujo centro é o ponto (–2; 3).

10.44) Sendo **k** e **m** números reais, dê as condições para que a equação

$$x^2 + y^2 - 4x + ky + m = 0$$

represente uma circunferência que passa pelo ponto (3; 5).

10.45) Determine os números reais **k**, **m** e **t** de modo que a equação

$$x^2 + y^2 + kx + my + t = 0$$

represente uma circunferência de centro (3; –4) e raio r = 6.

10.46) Desenhe no plano cartesiano as figuras correspondentes às equações:

a) $y = \sqrt{4x + 2y - x^2 + 5}$
b) $x - 4 = \sqrt{6y - y^2 - 5}$

10.47) Determine a equação de uma reta que passa pelo centro da circunferência de equação

$$2x^2 + 2y^2 - 3x + 5y - 1 = 0$$

e é perpendicular à reta cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = \frac{4}{9}t - \frac{1}{9} \end{cases}$$

10.48) Calcule a distância do ponto A à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 16 = 0$ em cada um dos casos a seguir:

a) A(5; 2) b) A(4; 2) c) A(-1; -3) d) A(1; -1)

10.3 – EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos a circunferência da figura 10.2, cujo centro é C(a; b) e cujo raio é r. Seja P(x; y) um ponto qualquer da circunferência. Temos:

$$\cos\theta = \frac{x - a}{r} \quad e \quad \text{sen}\,\theta = \frac{y - b}{r}$$

ou:

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta \\ y = b + r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad (10.5)$$

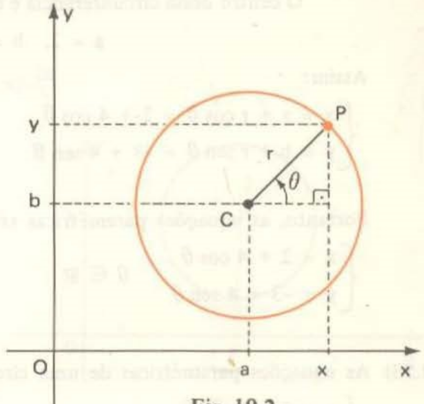


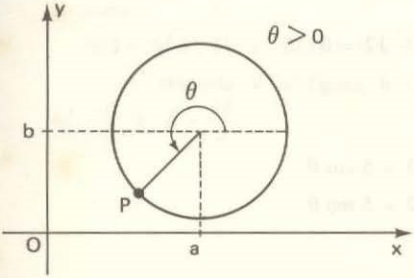
Fig. 10.2

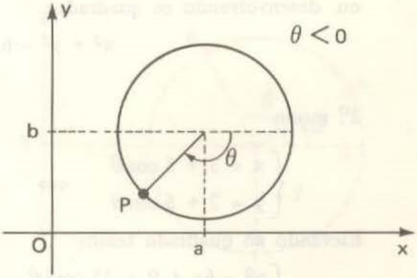
As equações 10.5 são um par de equações paramétricas da circunferência, onde o parâmetro é o número real θ (θ pode ser um número real qualquer).

As equações 10.5 foram obtidas usando uma figura particular (figura 10.2); no entanto, elas valem em qualquer outro caso, desde que se use a convenção da trigonometria:

$$\begin{cases} \theta > 0\text{: sentido anti-horário} \\ \theta < 0\text{: sentido horário} \end{cases}$$

Como exemplo observe as figuras a seguir:





Observação: As equações 10.5 constituem o par de equações paramétricas mais usado para representar a circunferência; mas não é o único par possível. Nos exercícios ilustraremos este fato.

10.49) Obtenha um par de equações paramétricas que represente a circunferência de equação:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$$

Solução

O centro dessa circunferência é C(2; -3) e o raio é r = 4, isto é:

$$a = 2, \quad b = -3 \quad e \quad r = 4$$

Assim:

$$\begin{cases} x = a + r\cos\theta = 2 + 4\cos\theta \\ y = b + r\,\text{sen}\,\theta = -3 + 4\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Portanto, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 2 + 4\cos\theta \\ y = -3 + 4\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

10.50) As equações paramétricas de uma circunferência são

$$\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta \\ y = 2 + 5\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Obtenha, para essa circunferência, uma equação independente do parâmetro θ.

Solução

1º modo

Da teoria vista, concluímos imediatamente que:

$$a = 3, \quad b = 2 \quad e \quad r = 5$$

Portanto, a circunferência pode ser representada por:

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

ou, desenvolvendo os quadrados:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

2º modo

$$\begin{cases} x = 3 + 5\cos\theta \\ y = 2 + 5\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3 = 5\cos\theta \\ y - 2 = 5\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

Elevando ao quadrado temos:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 25\cos^2\theta \\ y^2 - 4y + 4 = 25\,\text{sen}^2\theta \end{cases}$$

Somando membro a membro:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 25(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)$$

Lembrando que $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, ficamos com:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 25$$

ou: $$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

10.51) Desenhe a figura representada pelas equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 4 + 2\cos\theta \\ y = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

onde θ é um número real tal que $\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{2\pi}{3}$

Solução

Se não houvesse a restrição sobre θ, as equações representariam uma circunferência de centro C(4; 3) e raio r = 2 (figura a). Porém, com a limitação dada, as equações devem representar um arco de circunferência, cujos extremos vamos determinar.

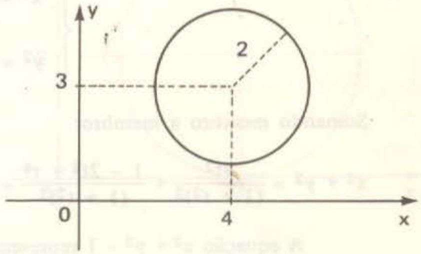


Fig. a

para $\theta = \frac{\pi}{6}$ $\begin{cases} x = 4 + 2\cos\frac{\pi}{6} = 4 + 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 4 + \sqrt{3} \\ y = 3 + 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} = 3 + 2\,(\frac{1}{2}) = 4 \end{cases}$

para $\theta = \frac{2\pi}{3}$ $\begin{cases} x = 4 + 2\cos\frac{2\pi}{3} = 4 + 2\,(-\frac{1}{2}) = 3 \\ y = 3 + 2\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 3 + 2\,(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3 + \sqrt{3} \end{cases}$

Assim, os extremos do arco são os pontos:

$A(4 + \sqrt{3}\,;\, 4)$ e $B(3;\, 3 + \sqrt{3}\,)$.

A resposta é a figura b com $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e $\beta = \frac{2\pi}{3}$

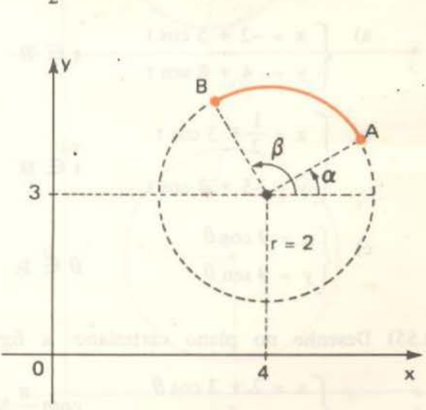


Fig. b

10.52) Mostre que as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

onde t é um número real qualquer, representam uma circunferência.

Solução

Elevando ao quadrado obtemos:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{4t^2}{(1 + t^2)^2} \\ y^2 = \dfrac{1 - 2t^2 + t^4}{(1 + t^2)^2} \end{cases}$$

Somando membro a membro:

$$x^2 + y^2 = \frac{4t^2}{(1 + t^2)^2} + \frac{1 - 2t^2 + t^4}{(1 + t^2)^2} = \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{(1 + t^2)^2} = \frac{(t^2 + 1)^2}{(1 + t^2)^2} = 1$$

A equação $x^2 + y^2 = 1$ representa uma circunferência de centro na origem e raio $r = 1$.

Exercícios Propostos

10.53) Dê um par de equações paramétricas para cada circunferência a seguir:

a) $2x^2 + 2y^2 - 16x + 20y - 16 = 0$
b) $x^2 + y^2 = 6$

10.54) Temos a seguir circunferências dadas por suas equações paramétricas. Em cada caso determine uma equação da circunferência, independente do parâmetro.

a) $\begin{cases} x = -2 + 5 \cos t \\ y = 4 + 5 \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + 3 \cos t \\ y = -5 + 3 \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) $\begin{cases} x = 9 \cos \theta \\ y = 9 \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$

10.55) Desenhe no plano cartesiano a figura representada pelas equações paramétricas:

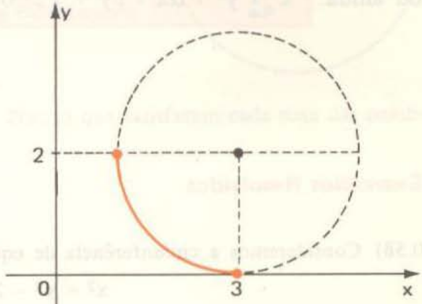
$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos \theta \\ y = 1 + 3 \operatorname{sen} \theta \end{cases} \quad \text{com } \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{7\pi}{4}$$

10.56) Uma circunferência tem equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \dfrac{4t}{1 + t^2} \\ y = \dfrac{2 - 2t^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

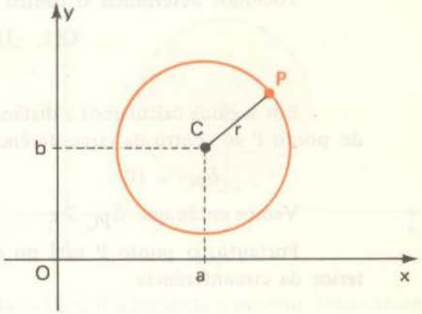
Dê uma equação da circunferência independente do parâmetro t.

10.57) Represente através de equações paramétricas o arco de circunferência assinalado ao lado.



10.4 – INEQUAÇÕES

Consideremos uma circunferência de centro C(a; b) e raio r. Conforme já vimos, se P(x; y) é um ponto qualquer da circunferência temos:



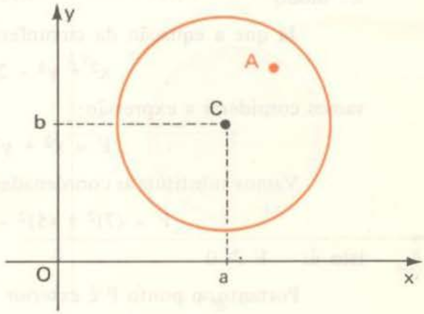
$$\delta_{PC} = r$$

ou: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

ou ainda: $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$

onde: $\alpha = -2a$, $\beta = -2b$ e $\gamma = a^2 + b^2 - r^2$

Consideremos agora um ponto A(x; y) qualquer, no **interior** da circunferência. Devemos ter:



$$\delta_{AC} < r$$

ou: $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$

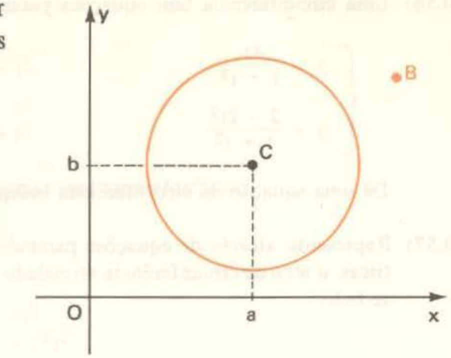
ou ainda: $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma < 0$

Se B(x; y) for um ponto qualquer no exterior da circunferência, devemos ter:

$$\delta_{BC} > r$$

ou: $(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$

ou ainda: $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma > 0$



Exercícios Resolvidos

10.58) Consideremos a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$

Verifique se o ponto P(7; 5) está sobre a circunferência, no seu interior ou no seu exterior.

Solução

1º modo

Podemos determinar o centro C e o raio r, obtendo:

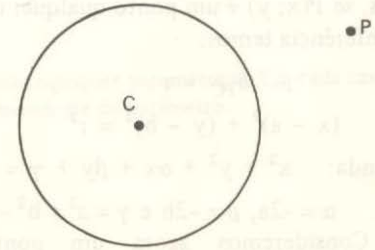
$$C(1; -3) \quad e \quad r = 4$$

Em seguida calculamos a distância do ponto P ao centro da circunferência:

$$\delta_{PC} = 10$$

Vemos então que: $\delta_{PC} > r$

Portanto, o ponto P está no exterior da circunferência



2º modo

Já que a equação da circunferência é

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$$

vamos considerar a expressão:

$$F = x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6$$

Vamos substituir as coordenadas do ponto P(7; 5) na expressão F:

$$F = (7)^2 + (5)^2 - 2(7) + 6(5) - 6 = 84$$

isto é: $F > 0$

Portanto, o ponto P é exterior à circunferência.

10.59) Verifique a posição do ponto P(3; -2) em relação à circunferência de equação

$$x^2 + y^2 + 4x + 5y - 17 = 0$$

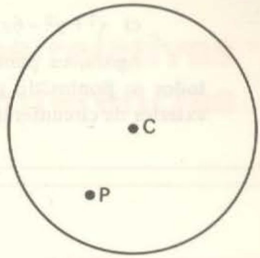
Solução

Seja $F = x^2 + y^2 + 4x + 5y - 17$;

vamos substituir as coordenadas de P(3; -2) na expressão F:

$$F = (3)^2 + (-2)^2 + 4(3) + 5(-2) - 17 = -2$$

Como $F < 0$, concluímos que o ponto P é interior à circunferência.



10.60) Represente no plano cartesiano os pontos P(x; y) que satisfazem cada uma das condições:

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 < 0$
b) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 \leqslant 0$
c) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 > 0$
d) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 \geqslant 0$

Solução

a) Como é fácil concluir, a equação

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$$

representa uma circunferência de centro C(3; 2) e raio r = 1 (figura a).

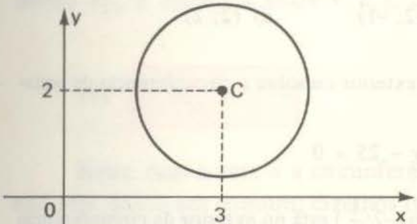


Fig. a

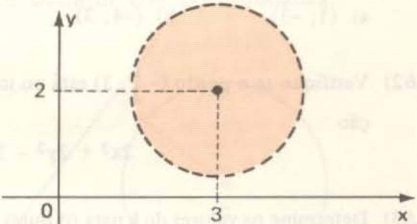


Fig. b

Portanto, a sentença $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 < 0$ representa o interior dessa circunferência (figura b), isto é, um círculo de centro C(3; 2) e raio r = 1, excluindo a circunferência de centro C(3; 2) e raio r = 1.

b) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 \leqslant 0$

Neste caso servem os pontos do interior da circunferência e a própria circunferência (figura c).

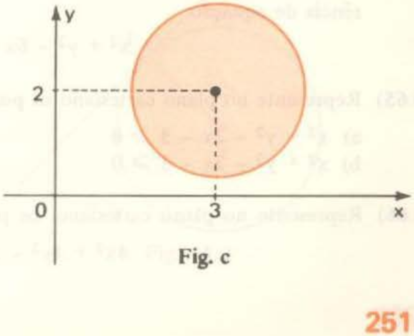


Fig. c

c) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 > 0$

Agora, os pontos que servem são todos os pontos do plano que estão no exterior da circunferência (fig. d)

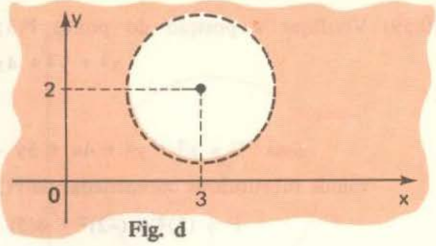


Fig. d

d) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 \geqslant 0$

Os pontos que servem são aqueles que estão no exterior da circunferência e a própria circunferência (fig. e)

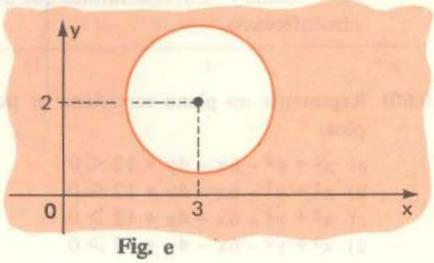


Fig. e

Exercícios Propostos

10.61) Verifique se os pontos dados abaixo estão no interior, no exterior ou sobre a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 15 = 0$$

a) (1; -3) b) (-4; 3) c) (-2; -1) d) (2; 2)

10.62) Verifique se o ponto $(-\frac{1}{2}; 3)$ está no interior, exterior ou sobre a circunferência de equação

$$2x^2 + 2y^2 - 3x + 2y - 25 = 0$$

10.63) Determine os valores de **k** para os quais o ponto $(-2; \frac{1}{2})$ está no exterior da circunferência de equação

$$3x^2 + 3y^2 + 4x - 2y + k = 0$$

10.64) Determine os valores de **k** de modo que o ponto P(2; 4) esteja no interior da circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + k + 1 = 0$$

10.65) Represente no plano cartesiano os pontos P(x; y) que satisfazem cada condição abaixo:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 3 > 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 \geqslant 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 3 < 0$

d) $x^2 + y^2 - 2x - 3 \leqslant 0$

10.66) Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) tais que

$$4x^2 + 4y^2 - 12x - 8y - 7 < 0$$

Capítulo

11

Posições relativas de retas e circunferências

11.1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é fazer o estudo dos principais problemas envolvendo retas e circunferências e dos principais problemas envolvendo duas ou mais circunferências.

11.2 – RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos uma circunferência de centro C (a; b) e raio r, e uma reta s. Sendo δ_{Cs} a distância entre C e s, devemos destacar três possibilidades:

1ª) $\delta_{Cs} > r$

Neste caso a reta e a circunferência não têm ponto em comum; dizemos que a reta e a circunferência são **exteriores**.

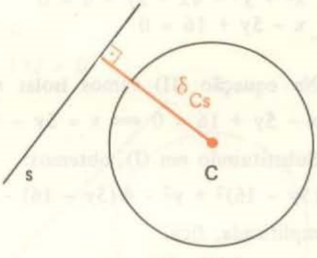


Fig. 11.1

2ª) $\delta_{Cs} = r$

Agora dizemos que a reta e a circunferência são **tangentes**: elas têm em comum apenas um ponto (é o ponto T da figura 11.2).

É importante destacar que, sendo T o ponto de tangência, a reta s e o segmento $\overline{TC}$ são perpendiculares.

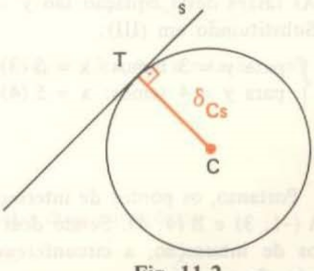


Fig. 11.2

3ª) $\delta_{Cs} < r$

Neste caso a reta e a circunferência têm dois pontos em comum. Dizemos que elas são secantes.

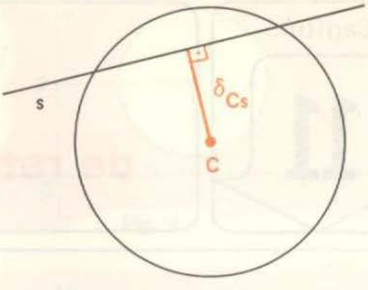


Fig. 11.3

Exercícios Resolvidos

11.1) Seja a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$$

Determine a interseção dessa circunferência com cada uma das retas a seguir:

a) $x - 5y + 16 = 0$

b) $3x + 2y - 21 = 0$

c) $x - 2y + 10 = 0$

Solução

a) Para determinarmos a interseção entre a circunferência e a reta, resolvemos o sistema formado por suas equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 & \text{(I)} \\ x - 5y + 16 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Na equação (II) vamos isolar uma das variáveis; por exemplo, isolemos x:

$x - 5y + 16 = 0 \Longleftrightarrow x = 5y - 16$ (III)

Substituindo em (I), obtemos:

$(5y - 16)^2 + y^2 - 4(5y - 16) - 2y - 8 = 0$

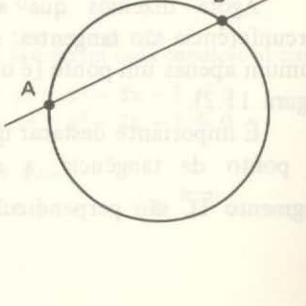
que, simplificada, fica:

$y^2 - 7y + 12 = 0$

As raízes desta equação são $y' = 3$ e $y'' = 4$.
Substituindo em (III):

$$\begin{cases} \text{para } y = 3 \text{ temos: } x = 5(3) - 16 = -1 \\ \text{para } y = 4 \text{ temos: } x = 5(4) - 16 = 4 \end{cases}$$

Portanto, os pontos de interseção são A (–1; 3) e B (4; 4). Sendo dois os pontos de interseção, a circunferência e a reta são secantes.



b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 & \text{(I)} \\ 3x + 2y - 21 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Isolemos a variável y na equação (II):

$$3x + 2y - 21 = 0 \iff y = \frac{21 - 3x}{2} \qquad \text{(III)}$$

Substituindo em (I):

$$x^2 + \left(\frac{21 - 3x}{2}\right)^2 - 4x - 2\left(\frac{21 - 3x}{2}\right) - 8 = 0$$

Simplificando:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

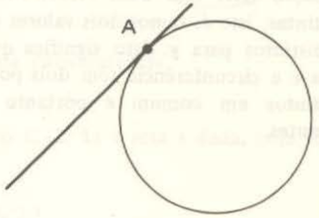
Esta equação tem duas raízes reais e iguais:

$$x' = x'' = 5$$

Substituindo em (III):

$$y = \frac{21 - 3(5)}{2} = 3$$

Assim a reta e a circunferência se interceptam em um único ponto: A (5; 3). Portanto, a circunferência e a reta são tangentes.



c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 & \text{(I)} \\ x - 2y + 10 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

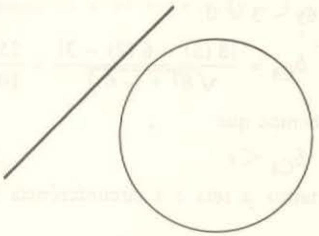
Isolando x na equação (II): $x = 2y - 10$.

Substituindo em (I):

$$(2y - 10)^2 + y^2 - 4(2y - 10) - 8 = 0$$

Simplificando obtemos: $5y^2 - 48y + 132 = 0$

Porém, calculando o discriminante desta equação, obtemos $\Delta = -336$, isto é, $\Delta < 0$. Isto significa que a equação não possui raízes reais e portanto a reta e a circunferência não se interceptam. Podemos dizer que elas são exteriores.



11.2) Verifique se a circunferência $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0$ e a reta $8x - 6y - 3 = 0$ são exteriores, tangentes ou secantes.

Solução

1º modo

Vamos analisar o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 13 = 0 & \text{(I)} \\ 8x - 6y - 3 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando x na equação (II), obtemos:

$$x = \frac{6y + 3}{8}$$

Substituindo em (I):

$$\left(\frac{6y + 3}{8}\right)^2 + y^2 - 10\left(\frac{6y + 3}{8}\right) - 4y + 13 = 0$$

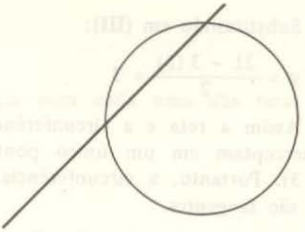
Simplificando, ficamos com:

$$100y^2 - 700y + 601 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Não iremos resolver a equação (III); vamos apenas calcular o seu discriminante (Δ) para sabermos quantas soluções ela tem:

$$\Delta = (-700)^2 - 4(100)(601) = 249600 > 0$$

Como $\Delta > 0$, concluímos que a equação (III) tem **duas** raízes reais e **distintas**, isto é, temos dois valores reais e distintos para y. Isto significa que a reta e a circunferência têm dois pontos distintos em comum e portanto são **secantes**.



2º modo

Em primeiro lugar determinamos o centro C e o raio r da circunferência: C (5; 2) e r = 4

Em seguida calculamos a distância do centro C (5; 2) à reta s dada, de equação $8x - 6y - 3 = 0$:

$$\delta_{Cs} = \frac{|8(5) - 6(2) - 3|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

Percebemos que

$$\delta_{Cs} < r$$

e portanto a reta e a circunferência são secantes.

11.3) Verifique a posição relativa da circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ e da reta $3x - 2y + 9 = 0$.

Solução

1º modo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 & \text{(I)} \\ 3x - 2y + 9 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolemos y na equação (II): $y = \dfrac{3x + 9}{2}$

Substituindo em (I):

$$x^2 + \left(\frac{3x + 9}{2}\right)^2 - 4x - 2\left(\frac{3x + 9}{2}\right) - 8 = 0$$

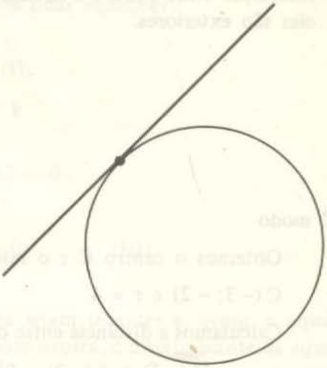
Simplificando:

$$x^2 + 2x + 1 = 0 \qquad \text{(III)}$$

O discriminante da equação (III) é:

$$\Delta = 2^2 - 4\,(1)\,(1) = 0$$

Concluímos que a equação (III) tem duas raízes reais e **iguais**. Em outras palavras, temos apenas um valor para x e, portanto, a circunferência e a reta têm em comum apenas um ponto. Isto quer dizer que a reta e a circunferência são tangentes.



2º modo

Determinamos o centro C e o raio r da circunferência:

$C\,(2;\,1)$ e $r = \sqrt{13}$

Em seguida calculamos a distância do centro C (2; 1) à reta s dada, cuja equação é $3x - 2y + 9 = 0$:

$$\delta_{Cs} = \frac{|3\,(2) - 2\,(1) + 9|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

Vemos que:

$$\delta_{Cs} = r$$

Portanto, a reta e a circunferência são tangentes.

11.4) Verifique a posição relativa da circunferência $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ e da reta $3x + 4y - 8 = 0$.

Solução

1º modo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0 & \text{(I)} \\ 3x + 4y - 8 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando x na equação (II): $x = \dfrac{8 - 4y}{3}$

Substituindo em (I):

$$\left(\frac{8 - 4y}{3}\right)^2 + y^2 + 6\left(\frac{8 - 4y}{3}\right) + 4y - 3 = 0$$

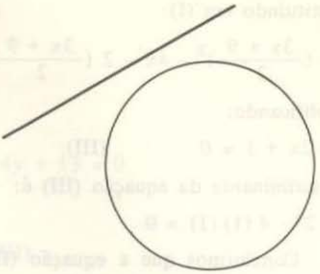
Simplificando:

$$25y^2 - 100y + 181 = 0 \qquad \text{(III)}$$

O discriminante da equação (III) é:

$$\Delta = (-100)^2 - 4\,(25)\,(181) = -8100 < 0$$

Como $\Delta < 0$, a equação III não admite raízes reais e, portanto, não há interseção entre a reta e a circunferência: elas são exteriores.



2º modo

Obtemos o centro C e o raio r da circunferência:

$C(-3; -2)$ e $r = 4$

Calculamos a distância entre o centro C e a reta s dada, de equação $3x + 4y - 8 = 0$:

$$\delta_{Cs} = \frac{|3(-3) + 4(-2) - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{5} = 5$$

Como $\delta_{Cs} > r$, concluímos que a reta e a circunferência são exteriores.

11.5) Calcule a distância entre a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$ e a reta s de equação $3x + 4y - 8 = 0$.

Solução:

Determinamos o centro C e o raio r da circunferência:

$C(-3; -2)$ e $r = 4$

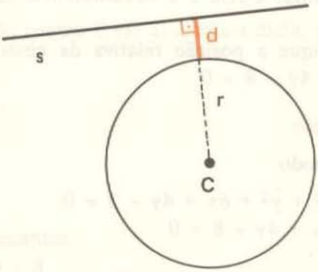
Em seguida calculamos a distância entre C e s:

$$\delta_{Cs} = \frac{|3(-3) + 4(-2) - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

Como $\delta_{Cs} > r$, concluímos que a reta e a circunferência são exteriores.

Assim, a distância d entre elas é:

$d = \delta_{Cs} - r = 5 - 4 = 1$



Observação: Conforme já chamamos a atenção no capítulo 8, se houvesse ponto em comum entre a reta e a circunferência, a distância d entre elas seria nula.

11.6) Consideremos a circunferência de equação

$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$

e a reta s de equação

$2x - y + k = 0$

Determine os valores de k para os quais a reta e a circunferência são sècantes.

Solução

1º modo

Vamos analisar o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0 & \text{(I)} \\ 2x - y + k = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolemos y na equação II : $y = 2x + k$

Substituindo em I :

$$x^2 + (2x + k)^2 - 6x - 6(2x + k) + 13 = 0$$

Simplificando:

$$5x^2 + (4k - 18)x + (k^2 - 6k + 13) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Queremos que a reta e a circunferência sejam secantes e, assim, a equação III deve ter duas raízes reais e distintas. Para que isto ocorra, o discriminante da equação III deve ser positivo ($\Delta > 0$). Temos, então:

$$\Delta = (4k - 18)^2 - 4(5)(k^2 - 6k + 13) = -4k^2 - 24k + 64$$

Portanto:

$$\Delta > 0 \iff -4k^2 - 24k + 64 > 0 \iff k^2 + 6k - 16 < 0$$

Resolvendo a última inequação obtemos

$$-8 < k < 2$$

2º modo

Determinamos o centro C e o raio r da circunferência:

$C(3;\ 3)$ e $r = \sqrt{5}$

Calculamos em seguida a distância entre o centro C e a reta s dada, de equação $2x - y + k = 0$:

$$\delta_{Cs} = \frac{|2(3) - 3 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|k + 3|}{\sqrt{5}}$$

Para que a reta e a circunferência sejam secantes, devemos ter

$$\delta_{Cs} < r$$

isto é: $$\frac{|k + 3|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5}$$

ou: $$|k + 3| < 5$$

Mas: $|k + 3| < 5 \iff -5 < k + 3 < 5 \iff -8 < k < 2$

Portanto: $-8 < k < 2$

11.7) Determine os valores de k para os quais a reta s de equação $2x - y + k = 0$ é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$.

Solução

1º modo

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0 & \text{(I)} \\ 2x - y + k = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Isolando y na equação II e substituindo na equação I (como fizemos no problema anterior), obtemos:

$$5x^2 + (4k - 18)x + (k^2 - 6k + 13) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Para que a reta e a circunferência sejam tangentes, a equação III deve ter duas raízes reais e iguais, isto é, deve apresentar um único valor para x. Para que isto ocorra, devemos impor que o discriminante da equação III seja nulo ($\Delta = 0$). Calculando Δ, obtemos:

$$\Delta = -4k^2 - 24k + 64$$

Assim: $\Delta = 0 \iff -4k^2 - 24k + 64 = 0$

Resolvendo esta equação obtemos $k = -8$ ou $k = 2$.

2º modo

Determinamos o centro C e o raio r da circunferência: $C(3; 3)$ e $r = \sqrt{5}$.

Calculamos em seguida a distância entre o centro C e a reta s dada, de equação $2x - y + k = 0$:

$$\delta_{Cs} = \frac{|k + 3|}{\sqrt{5}}$$

Para que a reta e a circunferência sejam tangentes devemos ter:

$$\delta_{Cs} = r$$

isto é:

$$\frac{|k + 3|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

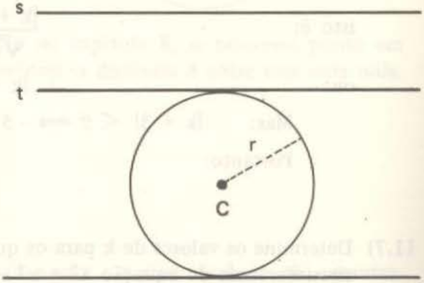
Resolvendo esta equação obtemos $k = -8$ ou $k = 2$.

11.8) Consideremos a reta s de equação $x - 2y + 2 = 0$ e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$. Determine as equações das retas que são paralelas a s e tangentes à circunferência dada.

Solução

Seja t uma das retas procuradas. Como t é paralela a s, sua equação pode ser escrita na forma:

$$x - 2y + k = 0$$



Daí por diante, temos um problema idêntico ao anterior: trata-se de impor que a reta $x - 2y + k = 0$ seja tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$. Podemos resolver este problema de qualquer um dos dois modos indicados, obtendo $k = -1$ ou $k = -11$. Portanto as retas procuradas têm equações:

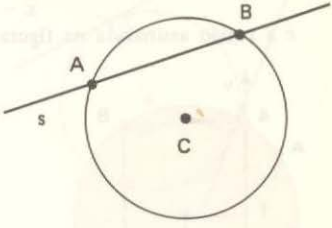
$$x - 2y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x - 2y - 11 = 0$$

Observação: Conforme vimos nos exercícios anteriores, os problemas envolvendo uma reta tangente a uma circunferência podem ser resolvidos de dois modos: ou discutindo o sistema de equações ou usando a distância do centro da circunferência à reta. Porém, daqui por diante daremos preferência ao método da distância que, em geral, é mais rápido.

11.9) A reta s de equação $x - 5y + 16 = 0$ intercepta a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ nos pontos A e B. Calcule o comprimento da corda $\overleftrightarrow{AB}$.

Solução

1º modo



Podemos resolver o sistema formado pelas equações

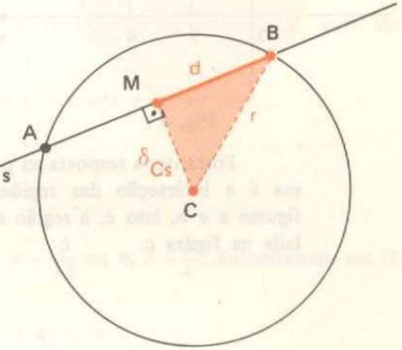
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 \\ x - 5y + 16 = 0 \end{cases}$$

obtendo as interseções A (- 1; 3) e B (4; 4).

Em seguida calculamos a distância entre A e B obtendo

$$\delta_{AB} = \sqrt{26}$$

2º modo



Sendo M o ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$, façamos $\delta_{MB} = d$.

Determinamos o centro C e o raio r da circunferência:

$$C\,(2;\,1) \text{ e } r = \sqrt{13}$$

Calculamos em seguida a distância do centro C à reta s dada obtendo:

$$\delta_{Cs} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo MBC temos:

$$d^2 + (\delta_{Cs})^2 = r^2$$

ou: $$d^2 + \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)^2 = (\sqrt{13})^2$$

donde: $$d = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Portanto: $$\delta_{AB} = 2\,d = \sqrt{26}$$

11.10) Represente os pontos que satisfazem as condições:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 \leqslant 0 \\ \text{e} \\ x - 5y + 16 \geqslant 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 \leqslant 0 \\ \text{e} \\ x - 5y + 16 = 0 \end{cases}$

Solução

a) A equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ representa uma circunferência de centro C (2; 1) e raio $r = \sqrt{13}$. A equação $x - 5y + 16 = 0$ representa uma reta cujas interseções com a circunferência são os pontos A (– 1; 3) e B (4; 4). Assim, a solução da sentença aberta

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 \leqslant 0$$

é a região assinalada na figura **a** e a solução da sentença aberta

$$x - 5y + 16 \geqslant 0$$

é a região assinalada na figura **b**.

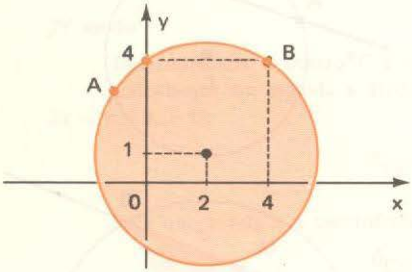


Fig. a

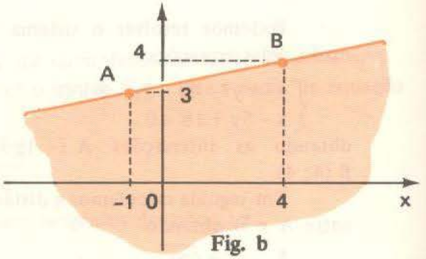


Fig. b

Portanto, a resposta ao problema é a interseção das regiões das figuras **a** e **b**, isto é, a região assinalada na figura **c**.

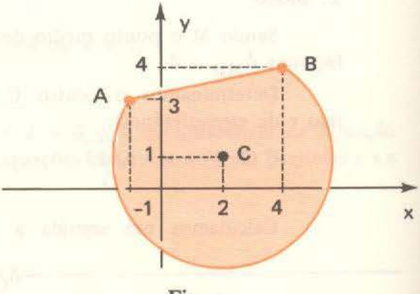
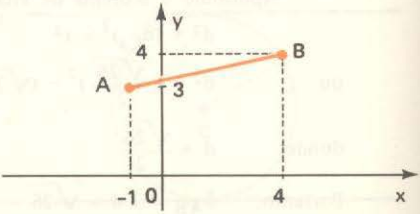


Fig. c

b) Neste caso, a resposta é apenas o segmento $\overleftrightarrow{AB}$.



11.11) Consideremos a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$$

e o ponto A (4; - 3). Determine a equação da reta que passa por A e é tangente à circunferência.

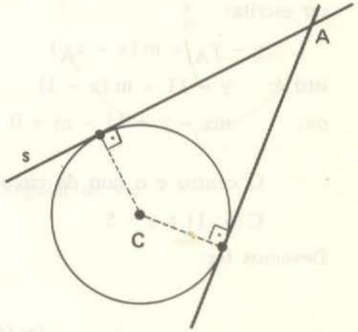
Solução

Substituindo as coordenadas do ponto A (4; - 3) na expressão

$$F = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9$$

obtemos: $F = 4^2 + (-3)^2 + 6(4) - 2(-3) + 9 = 64 > 0$

Constatamos então que o ponto A é exterior à circunferência e portanto o problema deve admitir duas soluções, isto é, há duas retas que passam por A e são tangentes à circunferência. Seja s uma dessas retas e vamos supor que ela não é vertical; assim ela deve ter um coeficiente angular m e sua equação pode ser escrita:



$y - y_A = m(x - x_A)$

ou: $y - (-3) = m(x - 4)$

ou ainda: $mx - y - 4m - 3 = 0$ (I)

Em seguida determinamos o centro e o raio da circunferência, que são

$$C(-3; 1) \text{ e } r = 1$$

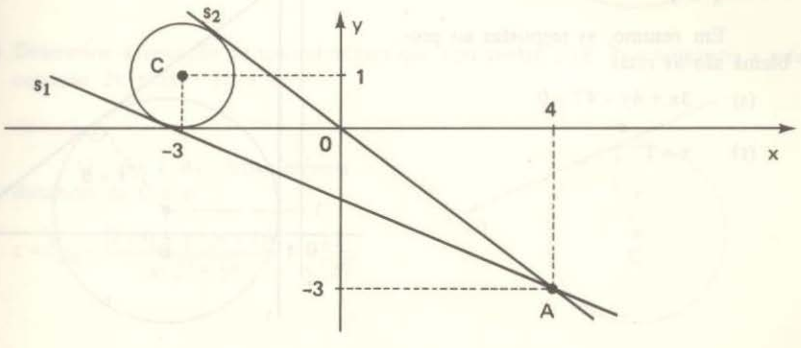
Vamos agora impor que a distância de C a s seja igual ao raio:

$$\delta_{Cs} = r$$

isto é: $$\frac{|m(-3) - (1) - 4m - 3|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

Resolvendo esta equação, obtemos $m = -\frac{5}{12}$ ou $m = -\frac{3}{4}$. Substituindo em (I), obtemos as retas procuradas:

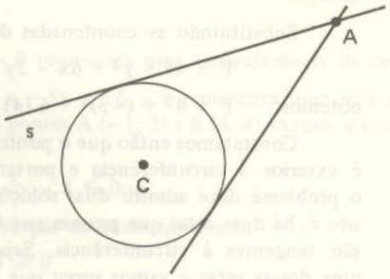
(s_1): $5x + 12y + 16 = 0$ e (s_2): $3x + 4y = 0$



11.12) Determine a equação da reta que passa por A (1; 11) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$.

Solução

Substituindo as coordenadas de A na expressão $F = x^2 + y^2 - 12x - 2y + 12$ obtemos $F > 0$ e daí concluímos que o ponto A é exterior à circunferência e portanto o problema tem duas soluções. Seja s uma das retas procuradas; supondo que ela não seja vertical, deve ter um coeficiente angular m e sua equação pode ser escrita:



$y - y_A = m(x - x_A)$

isto é: $y - 11 = m(x - 1)$

ou: $mx - y + 11 - m = 0$ (I)

O centro e o raio da circunferência são:

C (6; 1) e r = 5

Devemos ter:

$$\delta_{Cs} = r$$

isto é: $$\frac{|m(6) - 1 + 11 - m|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 5$$

Resolvendo esta equação obtemos $m = -\frac{3}{4}$.

Repare que no problema anterior obtivemos dois valores para m, enquanto neste problema obtivemos apenas um. Isto significa que uma das retas procuradas (pois sabemos que o problema deve ter duas soluções) é vertical.

Substituindo o valor $m = -\frac{3}{4}$ na equação (I), obtemos a equação da reta s:

(s): $3x + 4y - 47 = 0$

A outra reta é vertical e passa por A. Temos então a reta t de equação

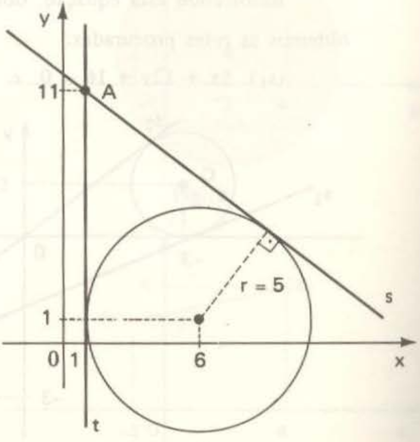
$x = 1$

Em resumo, as respostas ao problema são as retas

(s): $3x + 4y - 47 = 0$

e

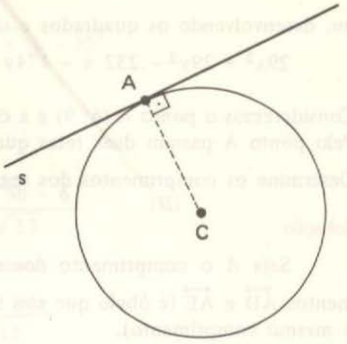
(t): $x = 1$



11.13) Determine a equação da reta que passa por A (5; 3) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$.

Solução

Substituindo as coordenadas de A na expressão $F = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8$ obtemos $F = 0$. Isto significa que A é ponto da circunferência e assim o problema admite apenas uma solução. Seja s a reta procurada.



O centro e o raio da circunferência são:

$$C(3; 2) \text{ e } r = \sqrt{5}$$

O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CA}$ é:

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2 - 3}{3 - 5} = \frac{1}{2}$$

Como s é perpendicular a $\overleftrightarrow{CA}$, o coeficiente angular de s é:

$$m_s = -\frac{1}{m} = -2$$

Portanto, a equação de s pode ser escrita:

$$y - y_A = m_s(x - x_A)$$

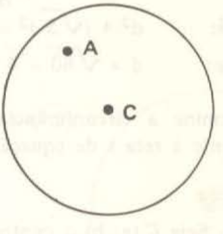
isto é: $y - 3 = -2(x - 5)$

ou: $2x + y - 13 = 0$

11.14) Determine a equação da reta que passa por A (2; 3) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$.

Solução

Substituindo as coordenadas de A na expressão $F = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8$ obtemos $F < 0$. Isto significa que o ponto A é interior à circunferência e, portanto, o problema **não tem solução**.

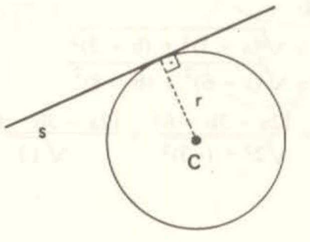


11.15) Determine a equação da circunferência que tem centro C (4; 3) e tangencia a reta s de equação $2x + 5y - 10 = 0$.

Solução

O raio r da circunferência é a distância de C a s:

$$r = \delta_{Cs} = \frac{|2(4) + 5(3) - 10|}{\sqrt{2^2 + 5^2}} = \frac{13}{\sqrt{29}}$$



Portanto, a equação da circunferência é:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=\left(\frac{13}{\sqrt{29}}\right)^2$$

ou, desenvolvendo os quadrados e simplificando:

$$29x^2+29y^2-232x-174y+556=0$$

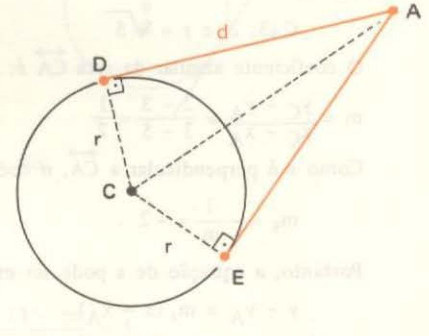
11.16) Consideremos o ponto A (6; 9) e a circunferência de equação $x^2+y^2+2x-6y+5=0$. Pelo ponto A passam duas retas que são tangentes à circunferência nos pontos D e E. Determine os comprimentos dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$.

Solução

Seja d o comprimento dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ (é óbvio que eles têm o mesmo comprimento).

Em primeiro lugar determinamos o centro e o raio da circunferência:

$C(-1;3)$ e $r=\sqrt{5}$



Em seguida calculamos a distância entre A e C:

$$\delta_{AC}=\sqrt{85}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo CDA temos:

$$d^2+r^2=(\delta_{AC})^2$$

isto é: $d^2+(\sqrt{5})^2=(\sqrt{85})^2$

donde: $d=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

11.17) Determine a circunferência que passa pelos pontos A (1; 3) e B (6; 8) e que é tangente à reta s de equação $2x-3y-6=0$.

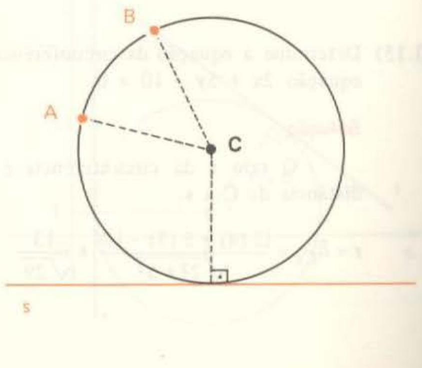
Solução

Seja C (a; b) o centro da circunferência procurada; vamos calcular as distâncias de C aos pontos A e B e à reta s:

$$\delta_{CA}=\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}$$

$$\delta_{CB}=\sqrt{(a-6)^2+(b-8)^2}$$

$$\delta_{Cs}=\frac{|2a-3b-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|2a-3b-6|}{\sqrt{13}}$$



Devemos ter:

$\delta_{CA} = \delta_{CB} = \delta_{Cs}$

De $\delta_{CA} = \delta_{CB}$ vem:

$(a - 1)^2 + (b - 3)^2 = (a - 6)^2 + (b - 8)^2$

que, depois de simplificada fica:

$$a = 9 - b \qquad (I)$$

Façamos agora $\delta_{CB} = \delta_{Cs}$:

$$\sqrt{(a - 6)^2 + (b - 8)^2} = \frac{|2a - 3b - 6|}{\sqrt{13}} \qquad (II)$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$\sqrt{(3 - b)^2 + (b - 8)^2} = \frac{|12 - 5b|}{\sqrt{13}}$$

ou: $\quad (3 - b)^2 + (b - 8)^2 = \dfrac{(12 - 5b)^2}{13}$

ou ainda: $\quad b^2 - 166b + 805 = 0$

Resolvendo esta equação obtemos b = 5 ou b = 161.
Vamos substituir em (I):

$$\begin{cases} \text{para } b = 5 \text{ temos:} & a = 9 - 5 = 4 \\ \text{para } b = 161 \text{ temos:} & a = 9 - 161 = -152 \end{cases}$$

Portanto o problema admite duas soluções: uma circunferência de centro $C_1(4; 5)$ e outra de centro $C_2(-152; 161)$.

O raio r é dado por:

$$r = \delta_{Cs} = \frac{|2a - 3b - 6|}{\sqrt{13}} = \frac{|12 - 5b|}{\sqrt{13}}$$

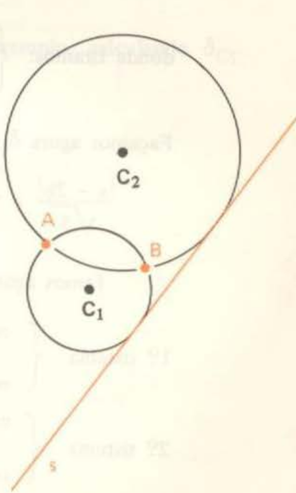
$$\begin{cases} \text{para } b = 5 \text{ obtemos:} & r = \sqrt{13} \\ \text{para } b = 161 \text{ obtemos:} & r = \dfrac{793}{\sqrt{13}} = 61\sqrt{13} \end{cases}$$

Portanto, uma das circunferências tem equação

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = (\sqrt{13})^2$$

e a outra circunferência tem equação

$$(x + 152)^2 + (y - 161)^2 = (61\sqrt{13})^2$$

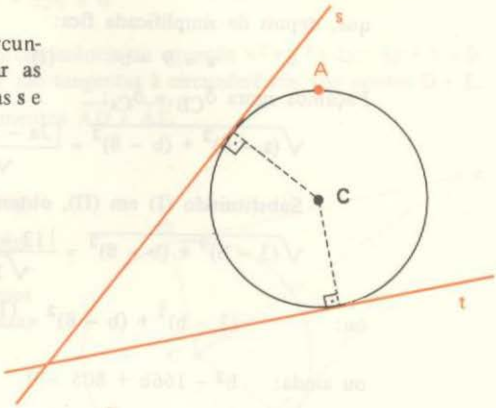


11.18) Determine a equação da circunferência que passa pelo ponto A (2; 5) e que é tangente às retas s e t:

(s): $2x - y + 6 = 0$

(t): $x - 2y = 0$

Solução



Seja C (a; b) o centro da circunferência procurada; vamos calcular as distâncias de C ao ponto A e às retas s e t:

$$\delta_{CA} = \sqrt{(a-2)^2 + (b-5)^2}$$

$$\delta_{Cs} = \frac{|2a - b + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2a - b + 6|}{\sqrt{5}}$$

$$\delta_{Ct} = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{5}}$$

Devemos ter: $\delta_{Cs} = \delta_{Ct} = \delta_{CA}$

De $\delta_{Cs} = \delta_{Ct}$ temos:

$$\frac{|2a - b + 6|}{\sqrt{5}} = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{5}}$$

isto é:

$$2a - b + 6 = a - 2b \quad \text{ou} \quad 2a - b + 6 = -(a - 2b)$$

donde tiramos: $\begin{cases} a = -b - 6 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ a = b - 2 & \text{(II)} \end{cases}$

Façamos agora $\delta_{Ct} = \delta_{CA}$:

$$\frac{|a - 2b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(a-2)^2 + (b-5)^2} \quad \text{(III)}$$

Temos agora dois sistemas para resolver:

1º sistema $\begin{cases} \text{equação I} \\ \text{e} \\ \text{equação III} \end{cases}$

2º sistema $\begin{cases} \text{equação II} \\ \text{e} \\ \text{equação III} \end{cases}$

Resolução do 1º sistema

Substituindo (I) em (III), obtemos:

$$\frac{|-3b-6|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(-b-8)^2 + (b-5)^2}$$

ou: $\frac{(-3b-6)^2}{5} = (-b-8)^2 + (b-5)^2$

ou ainda: $b^2 - 6b + 409 = 0$

Esta equação tem discriminante Δ tal que:

$\Delta = (-6)^2 - 4\,(409) = -1600 < 0$

Portanto, a equação não tem solução real e, como conseqüência, o 1º sistema não tem solução real.

Resolução do 2º sistema

Substituindo (II) em (III), obtemos:

$$\frac{|-b-2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{(b-4)^2 + (b-5)^2}$$

ou: $\frac{(-b-2)^2}{5} = (b-4)^2 + (b-5)^2$

ou ainda: $9b^2 - 94b + 201 = 0$

Resolvendo esta equação obtemos $b = 3$ ou $b = \frac{67}{9}$.

Substituindo em (II):

$$\begin{cases} \text{para } b = 3 \text{ vem:} & a = 3 - 2 = 1 \\ \text{para } b = \frac{67}{9} \text{ vem:} & a = \frac{67}{9} - 2 = \frac{49}{9} \end{cases}$$

Portanto o nosso problema tem duas soluções: uma circunferência de centro $C_1\,(1;\,3)$ e outra de centro $C_2\,(\frac{49}{9};\,\frac{67}{9})$.

O raio das circunferências pode ser obtido, por exemplo, calculando δ_{Ct}.

$$\begin{cases} \delta_{Ct} = \frac{|a-2b|}{\sqrt{5}} = \frac{|-b-2|}{\sqrt{5}} \\ a = b - 2 \end{cases}$$

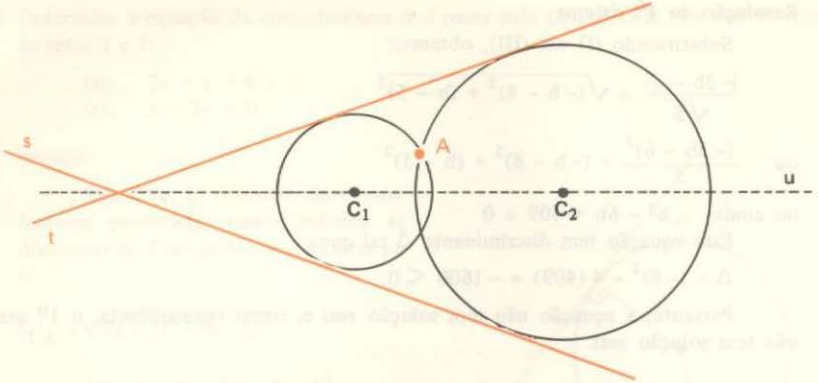
$$\begin{cases} \text{para } b = 3 \text{ obtemos} & r = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \\ \text{para } b = \frac{67}{9} \text{ obtemos} & r = \frac{85}{9\sqrt{5}} \end{cases}$$

Portanto, uma das circunferências tem equação

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{5})^2$$

e a outra tem equação

$$(x - \frac{49}{9})^2 + (y - \frac{67}{9})^2 = (\frac{85}{9\sqrt{5}})^2$$



É conveniente observar que a reta **u** que passa por C_1 e C_2 é uma das bissetrizes dos ângulos formados pelas retas **s** e **t**.

11.19) Consideremos as seguintes retas:

(s): $2x - y + 7 = 0$
(t): $x - 2y + 2 = 0$
(w): $x - 5y + 23 = 0$

Determine a equação da circunferência que tem centro na reta **w** e é tangente às retas **s** e **t**.

Solução

Sejam **u** e **v** as retas bissetrizes dos ângulos formados por **s** e **t**. A circunferência tangente às retas **s** e **t** deve ter seu centro em uma das duas bissetrizes. Por outro lado o centro da circunferência deve estar também na reta **w**. Concluímos então que o centro deve estar na interseção de **w** com uma das bissetrizes. Dependendo das posições das retas, o problema pode admitir até duas soluções: uma circunferência de centro C_1 e uma de centro C_2 (figura b).

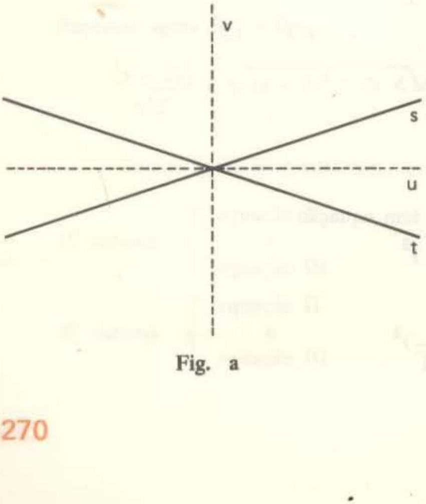


Fig. a

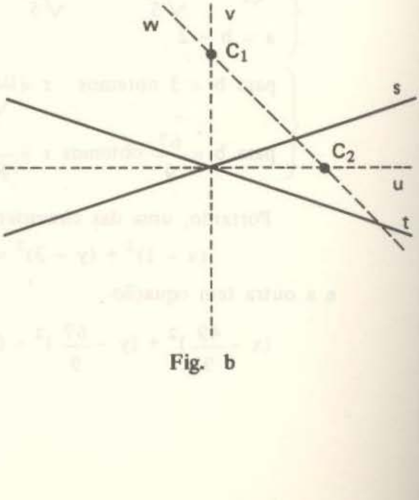


Fig. b

Procuramos então as equações das bissetrizes obtendo:

(u): $x - y + 3 = 0$ e (v): $x + y + 5 = 0$

Procuramos em seguida a interseção C_1 de w com v e a interseção C_2 de w com u obtendo:

$C_1 (-8; 3)$ e $C_2 (2; 5)$

Sejam r_1 e r_2 os raios das circunferências de centros C_1 e C_2 respectivamente. Para calcularmos esses raios, determinamos a distância de cada centro à reta s ou à reta t. Vamos usar a reta s cuja equação é $2x - y + 7 = 0$:

$$r_1 = \delta_{C_1 s} = \frac{|2(-8) - (3) + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

$$r_2 = \delta_{C_2 s} = \frac{|2(2) - 5 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

Portanto, as circunferências procuradas têm equações:

$$(x + 8)^2 + (y - 3)^2 = \left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2$$

e

$$(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2$$

Exercícios Propostos

11.20) Determine os pontos onde a reta s e a circunferência λ se interceptam, em cada caso a seguir:

a) $\begin{cases} (s): & 3x - y - 4 = 0 \\ (\lambda): & x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (s): & 4x - y + 1 = 0 \\ (\lambda): & x^2 + y^2 + 8x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (s): & 2x - 5y = 0 \\ (\lambda): & x^2 + y^2 - 14x + 6y + 33 = 0 \end{cases}$

11.21) Determine os pontos de interseção da reta de equação $x - 4y + 3 = 0$ com a circunferência de centro $C(-1; 9)$ e raio $r = \sqrt{85}$.

11.22) Determine os pontos onde a circunferência de centro $C(3; 7)$ e raio $r = \sqrt{53}$ corta o eixo Ox.

11.23) Determine os pontos onde a bissetriz dos quadrantes ímpares intercepta a circunferência de centro $C(9; -8)$ e raio $r = 13$.

11.24) Calcule o comprimento da corda determinada na circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ pela reta de equação $3x + y - 2 = 0$.

11.25) Dê a equação da reta que é paralela à reta

$$(s): \quad 3x - 4y - 11 = 0$$

e que corta a circunferência

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

segundo uma corda de comprimento 6.

11.26) A circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 2y + a = 0$ tem no eixo Ox uma corda de comprimento 2. Determine o valor de a.

11.27) Verifique a posição de cada reta a seguir, em relação à circunferência de equação

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y + 12 = 0$$

a) $x - 2y + 11 = 0$
b) $2x - y + 3 = 0$
c) $4x + 3y + 9 = 0$

11.28) Calcule a distância entre a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 12 = 0$ e cada uma das retas a seguir:

a) $x - 2y + 11 = 0$
b) $2x - y + 3 = 0$
c) $4x + 3y + 9 = 0$

11.29) Resolva graficamente os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 1 < 0 \end{cases}$

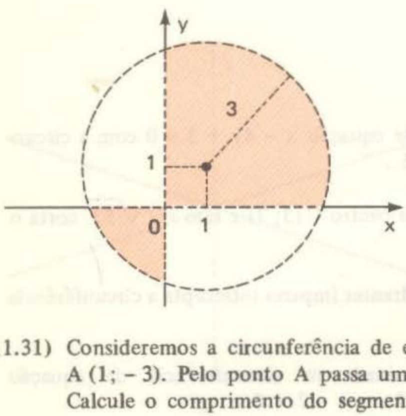
b) $\begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - 2 \geqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 2 > 0 \\ x + 2y - 4 < 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 5 < 0 \end{cases}$

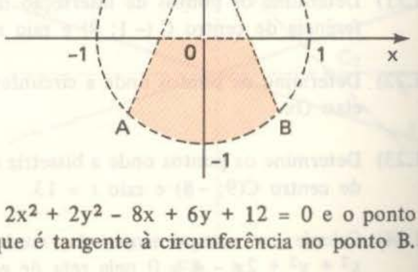
d) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \\ x - y - 2 \geqslant 0 \end{cases}$

11.30) Forme um sistema de sentenças abertas para representar cada uma das regiões assinaladas nas figuras a seguir:

a)



b)



11.31) Consideremos a circunferência de equação $2x^2 + 2y^2 - 8x + 6y + 12 = 0$ e o ponto A (1; – 3). Pelo ponto A passa uma reta que é tangente à circunferência no ponto B. Calcule o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

11.32) Dada a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 12 = 0$$

e a reta de equação $5x - 2y + k = 0$, determine os valores de k de modo que a reta e a circunferência:

a) sejam tangentes
b) sejam secantes
c) sejam externas
d) tenham interseção não-vazia

11.33) Consideremos uma reta s de equação $x + 2y + 7 = 0$ e a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 47 = 0$$

Determine as equações das retas que são perpendiculares a s e tangentes à circunferência.

11.34) Determine a equação da reta que passa por A (1; − 2) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$.

11.35) Determine a equação da reta que passa por A (3; − 2) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 35 = 0$.

11.36) Determine o raio da circunferência que tem centro C (− 2; 1) e tangencia a reta de equação $4x - 3y + 2 = 0$.

11.37) Dê a equação da circunferência que passa pelo ponto A (− 1; 6) e tangencia o eixo das ordenadas no ponto B (0; 3).

11.38) Dê o valor de k para o qual a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 6y + c = 0$ tangencia os dois eixos coordenados.

11.39) Uma circunferência tem centro no eixo das ordenadas e tangencia a reta de equação $x - 3y + 4 = 0$. Dê a equação dessa circunferência, sabendo que ela passa pelo ponto A (6; 10).

11.40) Dê a equação da reta que passa por A (− 2; 8) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.

11.41) Determine a equação da reta que passa por A (− 7; − 6) e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

11.42) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos A (1; 3) e B (4; 2) e que é tangente à reta de equação $2x - y + 2 = 0$.

11.43) Determine a equação da circunferência que passa pelo ponto A (1; 3) e é tangente às retas de equações: $3x - y + 2 = 0$ e $x - 3y - 2 = 0$.

11.44) Consideremos as retas:

(t): $3x - y + 5 = 0$
(s): $x - 3y - 1 = 0$
(w): $2x - y = 0$

Determine as equações das circunferências que têm centro na reta w e são tangentes às retas t e s.

11.3 — DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Consideremos duas circunferências *distintas* de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2 respectivamente. Sendo $\delta_{C_1C_2}$ a distância entre os centros e d a distância entre as circunferências, vamos analisar cinco possibilidades:

1ª) $\delta_{C_1C_2} > r_1 + r_2$

Neste caso dizemos que as circunferências são **exteriores** e temos:

$$d = \delta_{C_1C_2} - (r_1 + r_2)$$

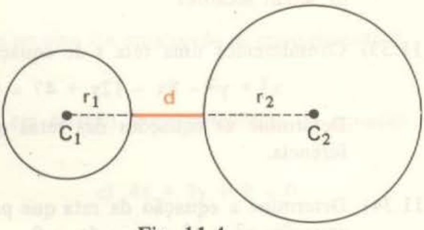


Fig. 11.4

2ª) $\delta_{C_1C_2} = r_1 + r_2$

As circunferências são **tangentes externamente** e temos:

$$d = 0$$

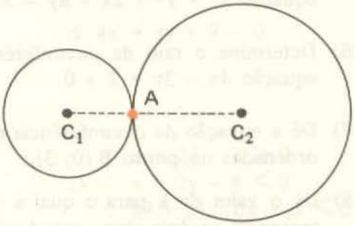


Fig. 11.5

É importante *destacar* que, neste caso, o ponto de tangência (ponto A da figura 11.5) pertence ao segmento de reta que liga os centros.

3ª) $\delta_{C_1C_2} = |r_1 - r_2|$

As circunferências são **tangentes interiormente** e temos:

$$d = 0$$

É óbvio que podemos escrever

$$\delta_{C_1C_2} = |r_1 - r_2| \quad \text{ou} \quad \delta_{C_1C_2} = |r_2 - r_1|$$

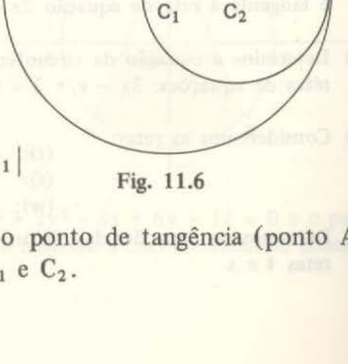


Fig. 11.6

Devemos observar mais uma vez que o ponto de tangência (ponto A na figura 11.6) pertence à reta que passa por C_1 e C_2.

4ª) $|r_1 - r_2| < \delta_{C_1C_2} < r_1 + r_2$

As circunferências são secantes e temos:

$d = 0$

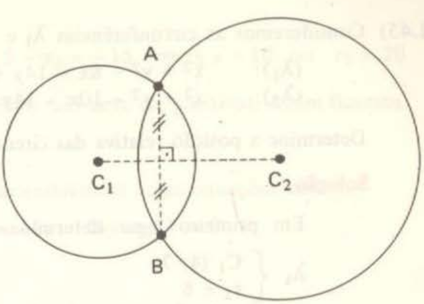


Fig. 11.7

Sendo A e B os pontos de interseção, vale a pena observar que a reta $\overleftrightarrow{C_1C_2}$ é mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

5ª) $\delta_{C_1C_2} < |r_1 - r_2|$

A circunferência de menor raio é interior à outra. Neste caso temos:

$d = |r_1 - r_2| - \delta_{C_1C_2}$

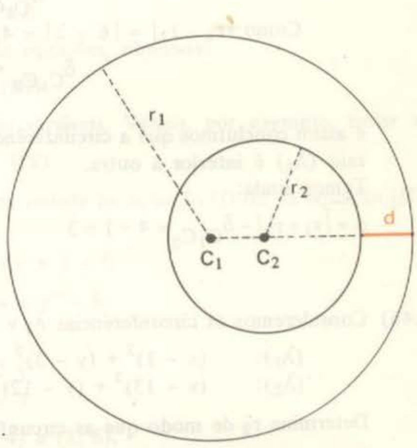


Fig. 11.8

Como caso particular desta possibilidade, temos as circunferências concêntricas (figura 11.9), quando temos:

$C_1 = C_2$ e $d = |r_1 - r_2|$

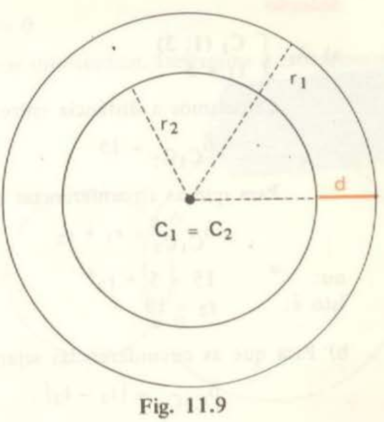


Fig. 11.9

11.45) Consideremos as circunferências λ_1 e λ_2 de equações:

(λ_1): $x^2 + y^2 - 8x - 14y + 29 = 0$
(λ_2): $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 70 = 0$

Determine a posição relativa das circunferências e calcule a distância d entre elas.

Solução

Em primeiro lugar determinamos o centro e o raio de cada circunferência:

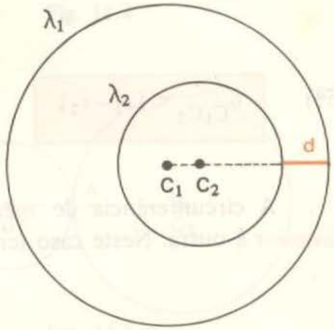
$\lambda_1 \begin{cases} C_1\ (4;\ 7) \\ r_1 = 6 \end{cases}$ $\quad \lambda_2 \begin{cases} C_2\ (5;\ 7) \\ r_2 = 2 \end{cases}$

Em seguida calculamos a distância entre os centros:

$$\delta_{C_1C_2} = 1$$

Como $|r_1 - r_2| = |6 - 2| = 4$, temos:

$$\delta_{C_1C_2} < |r_1 - r_2|$$



e assim concluímos que a circunferência de menor raio (λ_2) é **interior** à outra.
Temos ainda:

$d = |r_1 - r_2| - \delta_{C_1C_2} = 4 - 1 = 3$

11.46) Consideremos as circunferências λ_1 e λ_2:

(λ_1): $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$
(λ_2): $(x - 13)^2 + (y - 12)^2 = r_2^2$

Determine r_2 de modo que as circunferências sejam tangentes:

a) externamente;
b) internamente.

Solução

a) $\lambda_1 \begin{cases} C_1\ (1;\ 3) \\ r_1 = 5 \end{cases}$ $\quad \lambda_2 \begin{cases} C_2\ (13;\ 12) \\ r_2 = ? \end{cases}$

Calculamos a distância entre os centros, obtendo:

$$\delta_{C_1C_2} = 15$$

Para que as circunferências sejam tangentes externamente, devemos ter:

$$\delta_{C_1C_2} = r_1 + r_2$$

ou: $15 = 5 + r_2$
isto é: $r_2 = 10$

b) Para que as circunferências sejam tangentes internamente, impomos:

$$\delta_{C_1C_2} = |r_1 - r_2|$$

ou: $15 = |5 - r_2|$

Mas:

$|5 - r_2| = 15 \iff 5 - r_2 = 15$ ou $5 - r_2 = -15 \iff r_2 = -10$ ou $r_2 = 20$

A possibilidade $r_2 = -10$ não serve (pois o raio deve ser positivo). Assim ficamos com $r_2 = 20$.

11.47) Determine os pontos de interseção das circunferências cujas equações são:

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ e $x^2 + y^2 - 14x - 16y + 93 = 0$

Solução

Vamos resolver o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 14x - 16y + 93 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro estas equações, obtemos:

$$10x + 10y - 90 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Na equação (III) isolamos uma das variáveis. Vamos, por exemplo, isolar x:

$$x = 9 - y \qquad \text{(IV)}$$

Em seguida, substituímos a incógnita isolada na equação (I) ou na equação (II). Vamos substituir em (I):

$$(9 - y)^2 + y^2 - 4(9 - y) - 6y + 3 = 0$$

As raízes desta equação são: $y' = 4$ e $y'' = 6$.

Substituindo em (IV):

$$\begin{cases} \text{para } y = 4 \text{ temos:} & x = 9 - 4 = 5 \\ \text{para } y = 6 \text{ temos:} & x = 9 - 6 = 3 \end{cases}$$

Portanto os pontos de interseção são (5; 4) e (3; 6).

11.48) Consideremos as circunferências λ_1 e λ_2:

(λ_1): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$

(λ_2): $x^2 + y^2 - 14x - 16y + 93 = 0$

Sejam **A** e **B** os pontos onde as circunferências se interceptam. Determine o comprimento do segmento $\overline{AB}$.

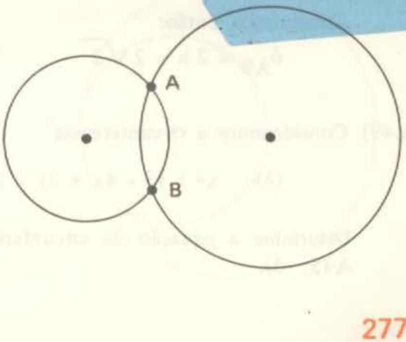
Solução

1º modo

As circunferências dadas são as mesmas do exercício anterior. Podemos então determinar os pontos de interseção que são: A (5; 4) e B (3; 6).

Em seguida calculamos a distância entre A e B:

$$\delta_{AB} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$



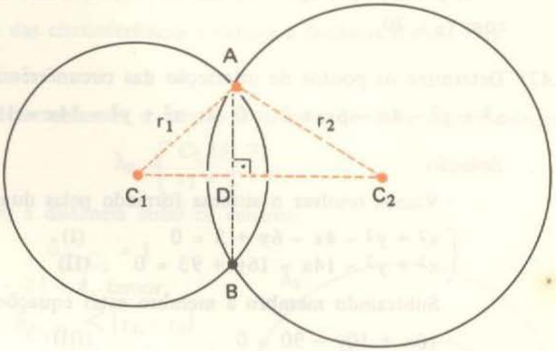
2º modo

Podemos calcular δ_{AB} sem determinarmos as interseções.

Obtemos em primeiro lugar o centro e o raio de cada circunferência:

$$\lambda_1 \begin{cases} C_1\ (2;\ 3) \\ r_1 = \sqrt{10} \end{cases}$$

$$\lambda_2 \begin{cases} C_2\ (7;\ 8) \\ r_2 = \sqrt{20} \end{cases}$$

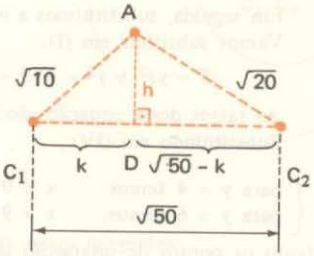


Calculamos em seguida a distância entre os centros:

$$\delta_{C_1C_2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

No triângulo AC_1C_2 temos:

$$\begin{cases} h^2 = (\sqrt{10}\,)^2 - k^2 \\ h^2 = (\sqrt{20}\,)^2 - (\sqrt{50} - k)^2 \end{cases}$$



Assim:

$$(\sqrt{10}\,)^2 - k^2 = (\sqrt{20}\,)^2 - (\sqrt{50} - k)^2$$

Resolvendo esta equação obtemos: $k = 2\sqrt{2}$

Portanto:

$$h^2 = (\sqrt{10}\,)^2 - k^2 = 10 - (2\sqrt{2}\,)^2 = 10 - 8 = 2$$

donde: $h = \sqrt{2}$

Concluímos, então:

$$\delta_{AB} = 2\,h = 2\sqrt{2}$$

11.49) Consideremos a circunferência

$$(\lambda):\quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$

Determine a equação da circunferência de raio 10 que é tangente a λ no ponto A (5; -5).

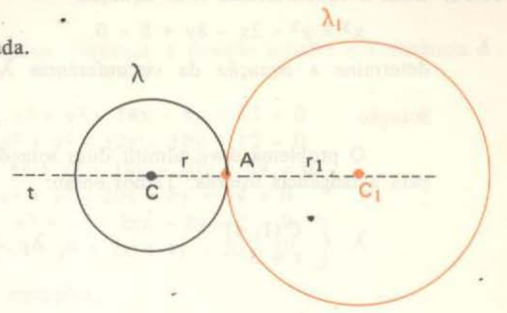
Solução

Seja λ_1 a circunferência procurada.

Temos:

$\lambda \begin{cases} C(2; -1) \\ r = 5 \end{cases}$

$\lambda_1 \begin{cases} C_1(a; b) \\ r_1 = 10 \end{cases}$



Determinamos a equação da reta t que passa por C e A:

$$4x + 3y - 5 = 0 \quad \text{(I)}$$

O ponto C_1 pertence a t portanto suas coordenadas podem ser substituídas em (I):

$$4a + 3b - 5 = 0 \quad \text{(II)}$$

Por outro lado devemos ter:

$$\delta^2_{C_1A} = r_1^2$$

ou: $$(a - 5)^2 + (b + 5)^2 = 10^2 \quad \text{(III)}$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (II) e (III), obtemos:

$$a = \frac{7}{2} \text{ e } b = -3$$

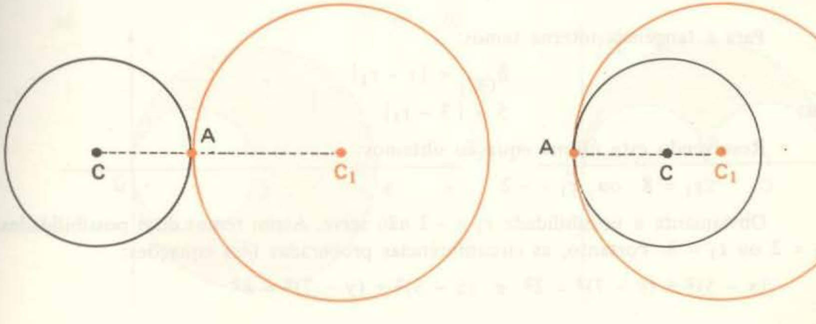
ou: $$a = \frac{13}{2} \text{ e } b = -7$$

Portanto, a circunferência procurada pode ter centro $C_1(\frac{7}{2}; -3)$ ou $C_1(\frac{13}{2}; -7)$.

Suas equações são:

$$(x - \frac{7}{2})^2 + (y + 3)^2 = 10^2 \text{ e } (x - \frac{13}{2})^2 + (y + 7)^2 = 10^2$$

Um dos casos corresponde à tangência externa e o outro à tangência interna.



11.50) Dada a circunferência λ de equação

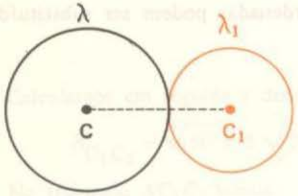
$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 8 = 0$$

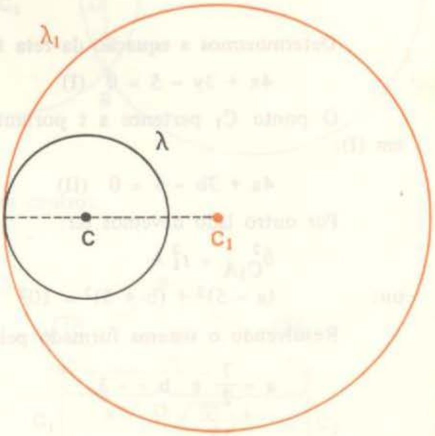
determine a equação da circunferência λ_1 de centro C_1 (5; 7) e tangente a λ.

Solução

O problema deve admitir duas soluções: uma para a tangência externa e outra para a tangência interna. Temos então:

$$\lambda \begin{cases} C\,(1;\,4) \\ r = 3 \end{cases} \qquad \lambda_1 \begin{cases} C_1\,(5;\,7) \\ r_1 = ? \end{cases}$$





Calculando a distância entre os centros obtemos:

$$\delta_{CC_1} = 5$$

Para a tangência externa temos:

$$\delta_{CC_1} = r + r_1$$

ou: $5 = 3 + r_1$
donde: $r_1 = 2$

Para a tangência interna temos:

$$\delta_{CC_1} = |r - r_1|$$

ou: $5 = |3 - r_1|$

Resolvendo esta última equação obtemos:

$$r_1 = 8 \quad \text{ou} \quad r_1 = -2$$

Obviamente a possibilidade $r_1 = -2$ não serve. Assim temos duas possibilidades: $r_1 = 2$ ou $r_1 = 8$. Portanto, as circunferências procuradas têm equações:

$$(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 2^2 \quad \text{e} \quad (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 8^2$$

Exercícios Propostos

11.51) Para cada par de circunferências abaixo, verifique a posição relativa e a distância d entre elas.

a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$ e $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 52 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 12 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 75 = 0$ e $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 69 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ e $x^2 + y^2 - 20x - 6y + 84 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 15 = 0$ e $x^2 + y^2 - 16x - 8y - 1 = 0$
f) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$

11.52) Consideremos as circunferências de equações:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9 \text{ e } (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = r^2$$

Determine r de modo que as circunferências sejam:

a) tangentes exteriormente;
b) tangentes interiormente;
c) secantes;
d) exteriores.

11.53) Dadas as circunferências de equações

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 21 = 0 \text{ e } x^2 + y^2 - 20x - 16y + 99 = 0$$

sejam A e B os pontos onde elas se interceptam.

a) Obtenha os pontos A e B
b) Calcule o comprimento do segmento $\overleftrightarrow{AB}$

11.54) Resolva graficamente os seguintes sistemas:

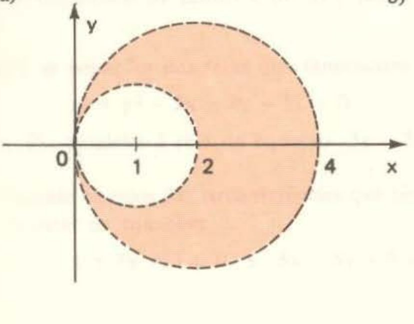
a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 21 \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 - 20x - 16y + 99 \leqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 \leqslant 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 \leqslant 0 \end{cases}$

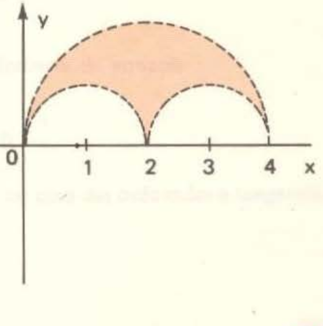
c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 < 0 \\ x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 > 0 \end{cases}$

11.55) Forme sistemas de sentenças abertas que representem as regiões assinaladas nas figuras:

a)



b)



11.56) Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) tais que:

a) $(x^2 + y^2 - 5)^2 + (x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13)^2 = 0$

b) $(x^2 + y^2 - 5)(x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13) = 0$

11.57) Seja a circunferência λ de equação

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

Determine as equações das circunferências de raio $3\sqrt{5}$ que são tangentes a λ no ponto (3; 4).

11.58) Dada a circunferência λ de equação

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$$

determine as equações das circunferências de centro (5; 4) e que são tangentes a λ.

Exercícios Suplementares

IV.1) Determine os valores de k para os quais o ponto P (k; 2k) pertence à circunferência de centro C (11; − 3) e raio igual a $\sqrt{170}$.

IV.2) Calcule a área do triângulo cujos vértices são os centros das circunferências de equações: $x^2 + y^2 + 8x = 0$, $2x^2 + 2y^2 - 4x - 12y - 3 = 0$ e $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 4 = 0$.

IV.3) Dê a equação da circunferência inscrita no triângulo formado pelos eixos coordenados e a reta de equação $3x + 4y - 6 = 0$.

IV.4) Determine os pontos onde a circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ corta os eixos coordenados, sendo A $(2 - \sqrt{3}\,;\ \sqrt{3} - 1)$ e B $(2 + \sqrt{3}\,;\ \sqrt{3} + 1)$.

IV.5) Determine os pontos onde a reta de equação $x + 2y - 3 = 0$ intercepta a circunferência de centro C (− 1; 9) e raio $\sqrt{85}$.

IV.6) Calcule o comprimento da corda determinada pela bissetriz dos quadrantes pares na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x + 6 = 0$.

IV.7) Os pontos A (5; − 3), B (3; 0) e C (4; 0) são vértices de um triângulo. Com centro no baricentro desse triângulo construímos uma circunferência que passa por A. Determine as interseções dessa circunferência com a reta $\overleftrightarrow{BC}$.

IV.8) Determine o raio da circunferência de centro na origem e que tangencia a reta de equação $5x + 13y - 12 = 0$.

IV.9) Determine as equações das retas que passam pelo ponto P (− 1; 1) e tangenciam a circunferência de centro C (0; 3) e raio $r = \dfrac{4\sqrt{85}}{17}$.

IV.10) Dê as equações das retas que tangenciam a circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$$

e são paralelas à reta de equação $3x - 2y + 1 = 0$.

IV.11) Calcule os raios das circunferências que têm centros no eixo das ordenadas e tangenciam as retas de equações

$$x + 7y + 3 = 0 \quad \text{e} \quad 5x - 5y - 9 = 0.$$

PARTE V

Capítulo 12 — **Parábola**

Capítulo 13 — **Elipse**

Capítulo 14 — **Hipérbole**

Capítulo 15 — **Cônicas**

Capítulo 16 — **Lugares geométricos**

Capítulo

12

Parábola

12.1 – DEFINIÇÃO

Consideremos em um plano α uma reta d e um ponto F não pertencente a d. O conjunto de todos os pontos de α que são eqüidistantes de F e d recebe o nome de parábola.

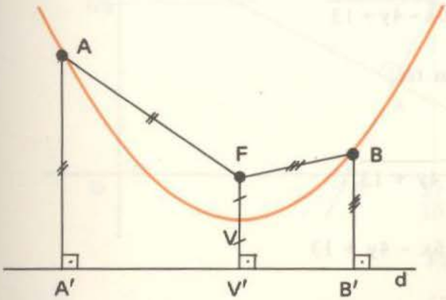


Fig. 12.1

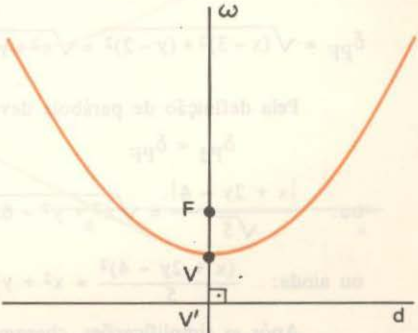


Fig. 12.2

Na figura 12.1 consideremos os pontos A, V e B pertencentes à parábola; temos:

$$\delta_{AA'} = \delta_{AF}\,,\ \delta_{VV'} = \delta_{VF}\,,\ \delta_{BB'} = \delta_{BF}$$

O ponto F é chamado foco e a reta d é chamada diretriz da parábola.

A reta ω que passa por F e é perpendicular a d é chamada eixo da parábola (ver figura 12.2).

O ponto V da parábola que está sobre o eixo recebe o nome de vértice da parábola.

Devemos destacar que a parábola é simétrica em relação ao eixo ω.

Observação: Há autores que chamam a distância entre F e d de parâmetro da parábola.

12.1) Considere no plano cartesiano uma parábola cujo foco é o ponto F(3; 2) e cuja diretriz é a reta **d** de equação $x + 2y - 4 = 0$.

a) Dê a equação da parábola.
b) Dê a equação do eixo ω.
c) Determine as coordenadas do vértice V.

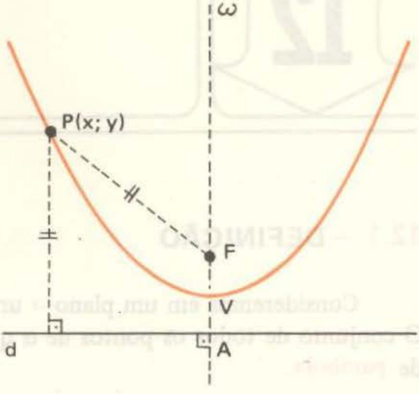


Fig. a

Solução

a) F(3; 2)
(d): $x + 2y - 4 = 0$
Seja P(x; y) um ponto qualquer da parábola. Temos:

$$\delta_{Pd} = \frac{|x + 2y - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|x + 2y - 4|}{\sqrt{5}}$$

$$\delta_{PF} = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$$

Pela definição de parábola devemos ter

$$\delta_{Pd} = \delta_{PF}$$

ou: $$\frac{|x + 2y - 4|}{\sqrt{5}} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$$

ou ainda: $$\frac{(x + 2y - 4)^2}{5} = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13$$

Após as simplificações, chegamos a:

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 22x - 4y + 49 = 0$$

que é a equação da parábola.

b) A reta **d** tem equação $x + 2y - 4 = 0$. Como o eixo ω é perpendicular a **d**, sua equação pode ser escrita:

$$2x - y + k = 0$$

Como F(3; 2) pertence a ω, podemos escrever:

$$2(3) - 2 + k = 0$$

donde: $k = -4$

Portanto a equação do eixo ω é:

$$2x - y - 4 = 0$$

c) O vértice V poderia ser obtido determinando-se a interseção da parábola com o eixo ω, através da resolução do sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 4xy - 22x - 4y + 49 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

Porém, é mais prático determinarmos primeiramente a interseção A entre as retas d e ω e em seguida usarmos o fato de que V é ponto médio do segmento $\overleftrightarrow{FA}$ (veja figura a).

Assim, resolvendo o sistema $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$

obtemos $A(\frac{12}{5}; \frac{4}{5})$. Em seguida determinamos o ponto médio de $\overleftrightarrow{FA}$ que é

$$V(\frac{27}{10}, \frac{7}{5})$$

A figura b nos permite visualizar a posição da parábola no plano Oxy

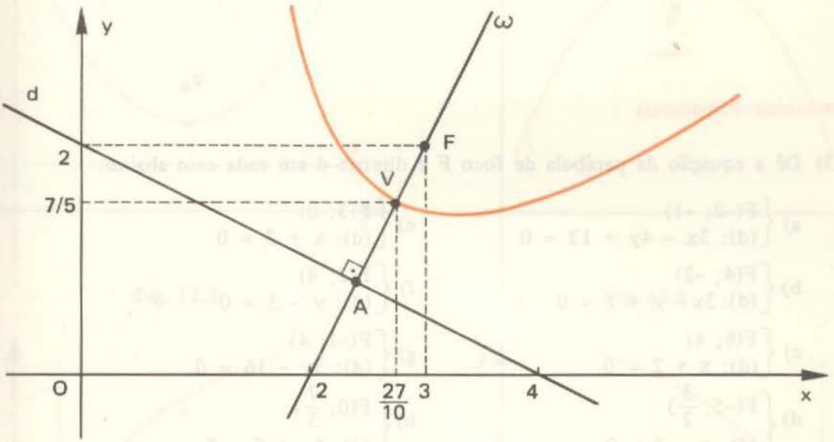


Fig. b

12.2) Determine a equação da parábola de foco F(2; 1) e cuja diretriz é a reta d de equação $x - 4 = 0$.

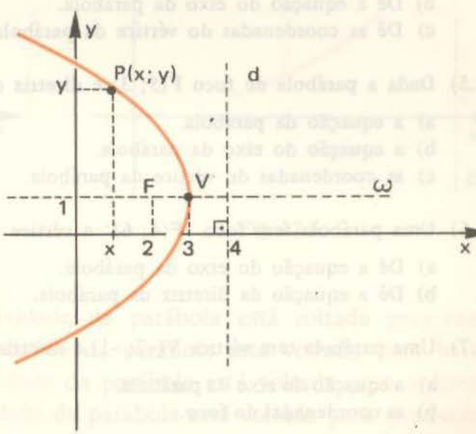
Solução

F(2; 1)
(d): $x - 4 = 0$

Sendo P(x; y) um ponto qualquer da parábola, temos:

$$\delta_{Pd} = |x - 4|$$

$$\delta_{PF} = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$$



Pela definição de parábola:

$$\delta_{Pd} = \delta_{PF}$$

ou: $|x - 4| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}$

ou ainda: $(x - 4)^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$

Desenvolvendo os quadrados e fazendo as simplificações, obtemos:

$$y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$$

que é a equação da parábola. Pela posição do foco e da diretriz é fácil concluir que o vértice é o ponto V(3; 1) e o eixo é a reta ω de equação $y - 1 = 0$.

Exercícios Propostos

12.3) Dê a equação da parábola de foco **F** e diretriz **d** em cada caso abaixo:

a) $\begin{cases} F(-2; -1) \\ (d): 3x - 4y + 12 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} F(4; -2) \\ (d): 3x - y + 1 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} F(6; 4) \\ (d): x + 2 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} F(-5; \frac{3}{2}) \\ (d): x - 3 = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} F(3; 0) \\ (d): x + 3 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} F(2; 8) \\ (d): y - 5 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} F(-1; 4) \\ (d): 3y - 16 = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} F(0; \frac{7}{3}) \\ (d): 3y + 7 = 0 \end{cases}$

12.4) Consideremos a parábola de foco F(–2; 6) e diretriz de equação $2x - 5y + 20 = 0$.

a) Dê a equação da parábola.
b) Dê a equação do eixo da parábola.
c) Dê as coordenadas do vértice da parábola.

12.5) Dada a parábola de foco F(5; 3) e diretriz de equação $y - 8 = 0$, determine:

a) a equação da parábola.
b) a equação do eixo da parábola.
c) as coordenadas do vértice da parábola.

12.6) Uma parábola tem foco F(4; 6) e vértice V(–1; 2).

a) Dê a equação do eixo da parábola.
b) Dê a equação da diretriz da parábola.

12.7) Uma parábola tem vértice V(–2; –1) e diretriz de equação $3x - 4y + 12 = 0$. Determine:

a) a equação do eixo da parábola.
b) as coordenadas do foco.

12.2 – ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Nos exercícios anteriores obtivemos as equações de parábolas em que as diretrizes eram **retas quaisquer**. Porém, daqui por diante, concentraremos nossa atenção nos casos em que a diretriz é horizontal ou vertical; é o caso, por exemplo, das figuras 12.3 a 12.6.

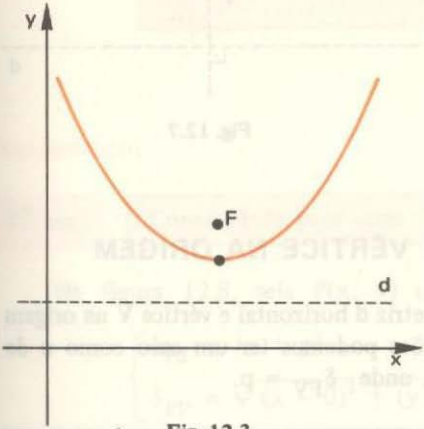


Fig. 12.3

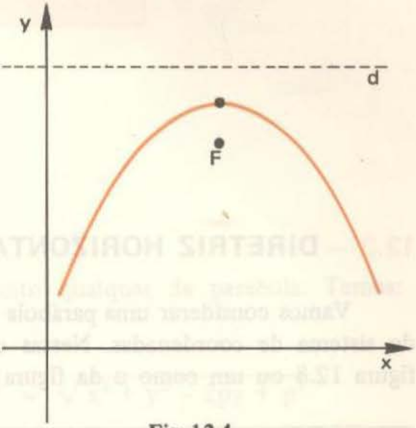


Fig. 12.4

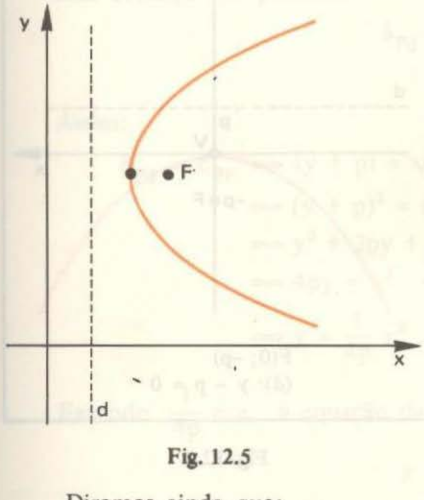


Fig. 12.5

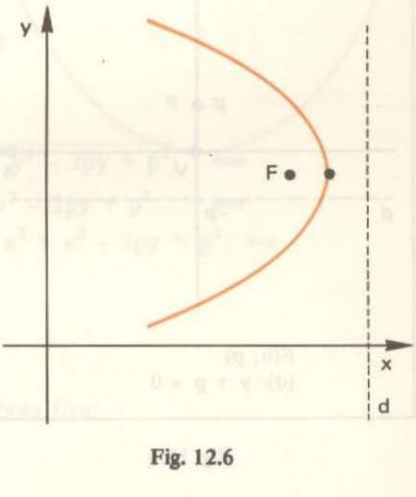


Fig. 12.6

Diremos ainda que:

1º) na figura 12.3 a concavidade da parábola está voltada para cima.

2º) na figura 12.4 a concavidade da parábola está voltada para baixo.

3º) na figura 12.5 a concavidade da parábola está voltada para a direita.

4º) na figura 12.6 a concavidade da parábola está voltada para a esquerda.

Nos itens seguintes passaremos a representar a distância entre o foco F e o vértice V por p:

$$\delta_{FV} = p$$

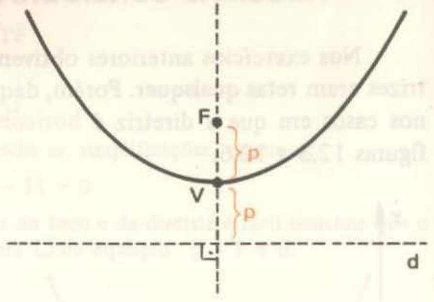


Fig. 12.7

12.3 – DIRETRIZ HORIZONTAL E VÉRTICE NA ORIGEM

Vamos considerar uma parábola de diretriz d horizontal e vértice V na origem do sistema de coordenadas. Nestas condições podemos ter um caso como o da figura 12.8 ou um como o da figura 12.9, onde $\delta_{FV} = p$.

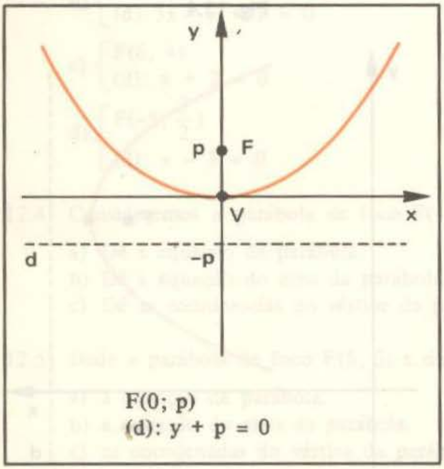


Fig. 12.8

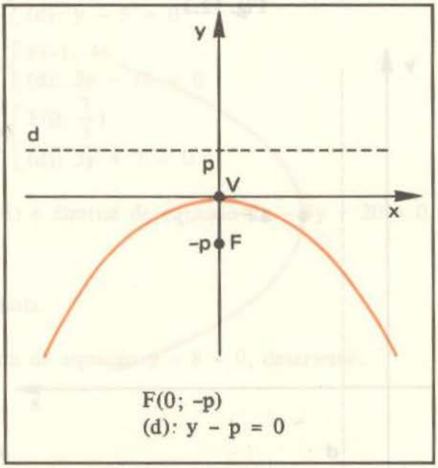


Fig. 12.9

Vamos mostrar que qualquer uma dessas parábolas pode ser representada pela equação

$$y = ax^2 \quad (12.1)$$

onde a é um número real não-nulo, e tal que:

$$a > 0 \Longleftrightarrow \text{concavidade para cima}$$
$$a < 0 \Longleftrightarrow \text{concavidade para baixo}$$
$$p = \frac{1}{4|a|} \quad \text{ou} \quad |a| = \frac{1}{4p}$$

Demonstração

1º caso | Concavidade para cima

Na figura 12.8, seja P(x; y) um ponto qualquer da parábola. Temos:

$$\begin{cases} \delta_{Pd} = |y + p| \\ \delta_{PF} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2} \end{cases}$$

Pela definição de parábola:

$$\delta_{Pd} = \delta_{PF}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \delta_{Pd} = \delta_{PF} &\Longleftrightarrow |y + p| = \sqrt{x^2 + y^2 - 2py + p^2} \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (y + p)^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y^2 + 2py + p^2 = x^2 + y^2 - 2py + p^2 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow 4py = x^2 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow y = \frac{1}{4p}x^2 \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{1}{4p} = a$, a equação da parábola fica:

$$y = ax^2$$

Como $p > 0$, concluímos que $a > 0$

Por outro lado, de $\frac{1}{4p} = a$ tiramos:

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4|a|}$$

2º caso | **Concavidade para baixo**

Na figura 12.9, seja P(x; y) um ponto qualquer da parábola. Temos:

$$\begin{cases} \delta_{Pd} = |y - p| \\ \delta_{PF} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+p)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2py + p^2} \end{cases}$$

Assim:

$$\begin{aligned} \delta_{Pd} = \delta_{PF} &\iff |y - p| = \sqrt{x^2 + y^2 + 2py + p^2} \iff \\ &\iff (y-p)^2 = x^2 + y^2 + 2py + p^2 \iff \\ &\iff y^2 - 2py + p^2 = x^2 + y^2 + 2py + p^2 \iff \\ &\iff -4py = x^2 \iff \\ &\iff y = \frac{-1}{4p} x^2 \end{aligned}$$

Fazendo $\frac{-1}{4p} = a$, a equação da parábola fica:

$$y = ax^2$$

Como $p > 0$ temos: $a = \frac{-1}{4p} < 0$.

Por outro lado, de $\frac{-1}{4p} = a$ tiramos:

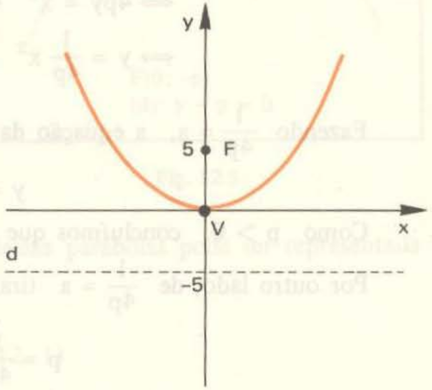
$$p = \frac{-1}{4a} = \frac{1}{4|a|}$$

Exemplos

a) Consideremos a parábola da figura ao lado, onde p = 5. A equação dessa parábola deve ser

$$y = ax^2$$

onde $|a| = \frac{1}{4p} = \frac{1}{4(5)} = \frac{1}{20}$



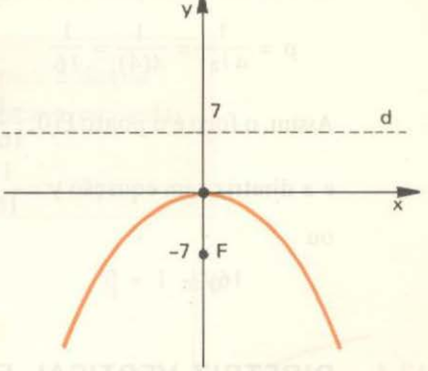
Como a concavidade está voltada para cima, devemos ter $a > 0$ e portanto $a = \frac{1}{20}$. Assim a equação da parábola é

$$y = \frac{1}{20}x^2$$

b) Para a parábola da figura ao lado temos $p = 7$. Sua equação deve ser

$$y = ax^2$$

onde $|a| = \frac{1}{4p} = \frac{1}{4(7)} = \frac{1}{28}$



Como a concavidade está voltada para baixo, devemos ter $a < 0$ e portanto $a = -\frac{1}{28}$. Assim, a equação da parábola é

$$y = \frac{-1}{28}x^2$$

c) Consideremos uma parábola de equação $y = 12x^2$ e vamos determinar as coordenadas do foco e a equação da diretriz. A equação dada tem a forma

$$y = ax^2$$

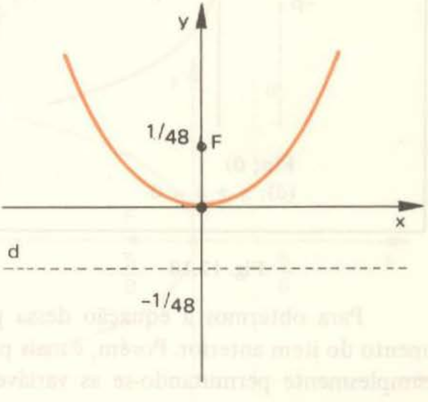
onde $a = 12 > 0$.
Daí concluímos que deve ser uma parábola de vértice na origem, diretriz horizontal e concavidade para cima com

$$p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(12)} = \frac{1}{48}$$

Portanto o foco é $F(0; \frac{1}{48})$ e a diretriz **d** tem equação

$$y = -\frac{1}{48}$$

ou $48y + 1 = 0$



d) Seja a parábola de equação $y = -4x^2$. Esta equação tem a forma

$$y = ax^2$$

onde $a = -4 < 0$. Daí concluímos que é uma parábola de vértice na origem, diretriz horizontal e concavidade para baixo com

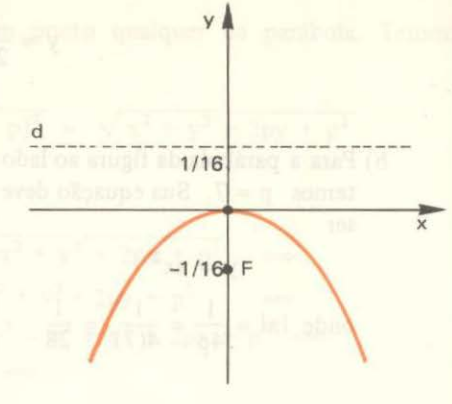
$$p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(4)} = \frac{1}{16}$$

Assim, o foco é o ponto $F(0; \frac{-1}{16})$

e a diretriz tem equação $y = \frac{1}{16}$,

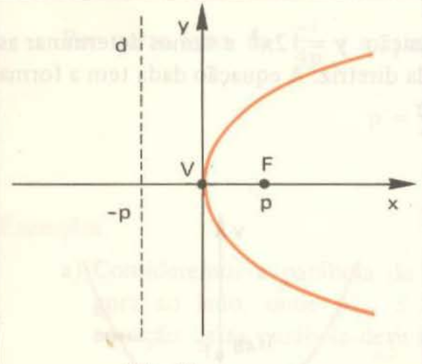
ou

$$16y - 1 = 0$$



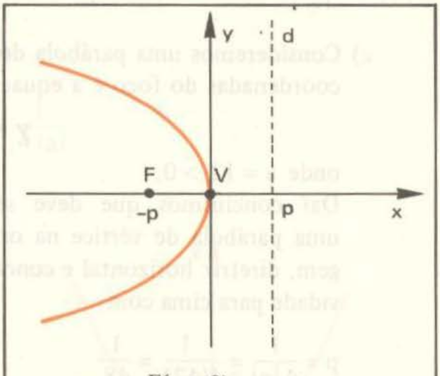
12.4 – DIRETRIZ VERTICAL E VÉRTICE NA ORIGEM

Seja uma parábola de diretriz **d** vertical e vértice V na origem do sistema de coordenadas. Podemos ter um caso como o da figura 12.10 ou como o da figura 12.11.



F(p; 0)
(d): x + p = 0

Fig. 12.10



F(–p; 0)
(d): x – p = 0

Fig. 12.11

Para obtermos a equação dessa parábola podemos seguir o mesmo procedimento do item anterior. Porém, é mais prático aproveitar os resultados daquele item, simplesmente permutando-se as variáveis **x** e **y**.

Assim, podemos estabelecer que uma parábola desse tipo pode ser representada pela equação

$$\boxed{x = ay^2} \quad (12.2)$$

onde a é um número real não-nulo tal que:

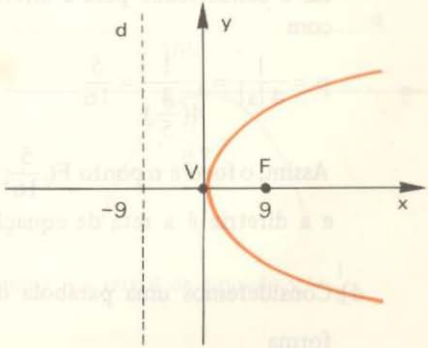
$$a > 0 \iff \text{concavidade para a direita}$$
$$a < 0 \iff \text{concavidade para a esquerda}$$
$$p = \frac{1}{4|a|} \quad \text{ou} \quad |a| = \frac{1}{4p}$$

Exemplos

a) A parábola da figura ao lado tem vértice na origem e diretriz **d** vertical, com p = 9. Portanto, ela pode ser representada pela equação

$$x = ay^2$$

tal que $|a| = \frac{1}{4p} = \frac{1}{4(9)} = \frac{1}{36}$



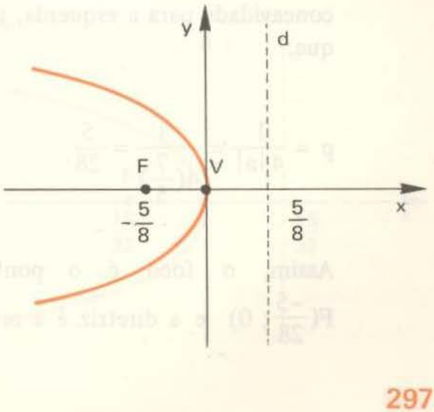
Como a concavidade está para a direita, devemos ter $a > 0$ e portanto $a = \frac{1}{36}$. A equação dessa parábola é então

$$x = \frac{1}{36}y^2$$

b) A parábola da figura ao lado tem vértice na origem e diretriz vertical, com $p = \frac{5}{8}$. Portanto, pode ser representada pela equação

$$x = ay^2$$

tal que $|a| = \frac{1}{4p} = \frac{1}{4(\frac{5}{8})} = \frac{2}{5}$



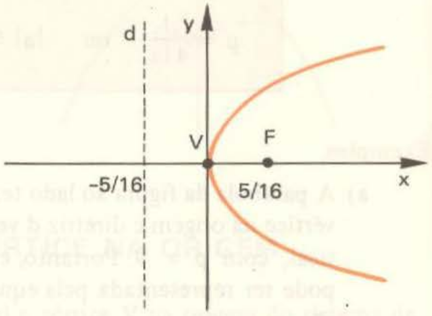
Como a concavidade está para a esquerda devemos ter $a < 0$ e portanto $a = -\frac{2}{5}$. Assim, a equação da parábola é

$$x = -\frac{2}{5} y^2$$

c) Seja uma parábola de equação $x = \frac{4}{5} y^2$ e vamos determinar as coordenadas do foco e a equação da diretriz. A equação tem a forma

$$x = ay^2$$

onde $a = \frac{4}{5} > 0$. Portanto, concluímos que é uma parábola de vértice na origem, diretriz vertical e concavidade para a direita, com



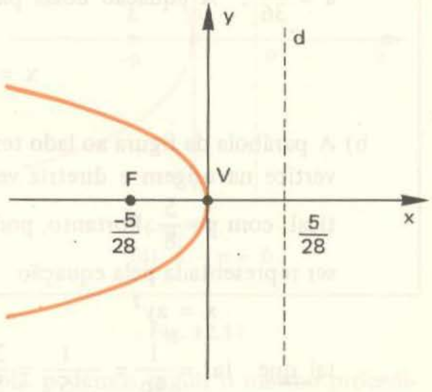
$$p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(\frac{4}{5})} = \frac{5}{16}$$

Assim, o foco é o ponto $F(\frac{5}{16}; 0)$ e a diretriz é a reta de equação $x = \frac{-5}{16}$, ou $16x + 5 = 0$

d) Consideremos uma parábola de equação $x = -\frac{7}{5} y^2$. Esta equação tem a forma

$$x = ay^2$$

com $a = -\frac{7}{5} < 0$. Daí concluímos que é uma parábola de vértice na origem, diretriz vertical e concavidade para a esquerda, tal que:



$$p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(\frac{7}{5})} = \frac{5}{28}$$

Assim, o foco é o ponto $F(\frac{-5}{28}; 0)$ e a diretriz é a reta de equação $x = \frac{5}{28}$ ou $28x - 5 = 0$.

Exercício Resolvido

12.8) Para cada uma das parábolas cujas equações são dadas a seguir, determine as coordenadas do foco e a equação da diretriz.

a) $6x^2 + 3y = 0$ b) $15x + 8y^2 = 0$

Solução

a) Aqui temos:

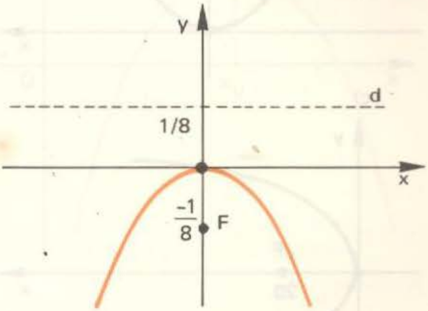
$$6x^2 + 3y = 0 \iff y = -2x^2$$

Portanto, nossa parábola tem equação da forma

$$y = ax^2$$

com $a = -2 < 0$. Daí concluímos que se trata de parábola com vértice na origem, diretriz horizontal e concavidade para baixo, onde:

$$p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(2)} = \frac{1}{8}$$



Assim, o foco é o ponto $F(0; \frac{-1}{8})$ e a diretriz é a reta **d** de equação $y = \frac{1}{8}$.

b) Neste caso temos:

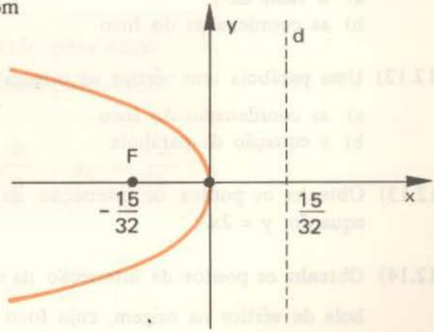
$$15x + 8y^2 = 0 \iff x = \frac{-8}{15}y^2$$

Portanto, a parábola tem equação da forma

$$x = ay^2$$

onde $a = -\frac{8}{15} < 0$. Daí concluímos que é uma parábola de vértice na origem, diretriz vertical e concavidade para a esquerda, com

$$p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(\frac{8}{15})} = \frac{15}{32}$$

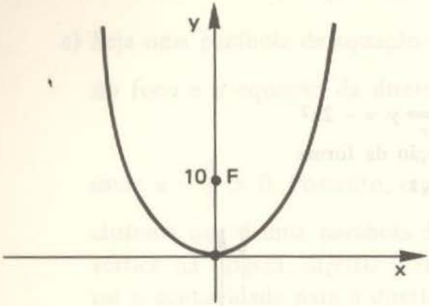


Portanto o foco é $F(\frac{-15}{32}; 0)$ e a diretriz é a reta de equação $x = \frac{15}{32}$.

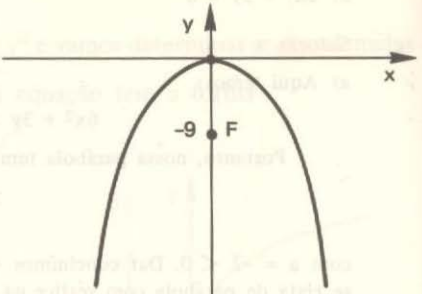
Exercícios Propostos

12.9) Dê as equações das parábolas desenhadas a seguir, sendo F o foco.

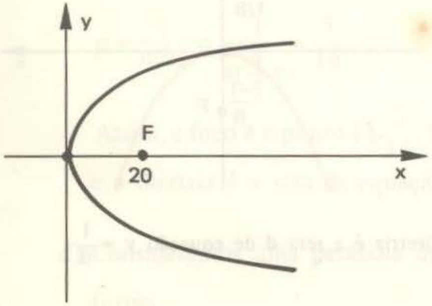
a)



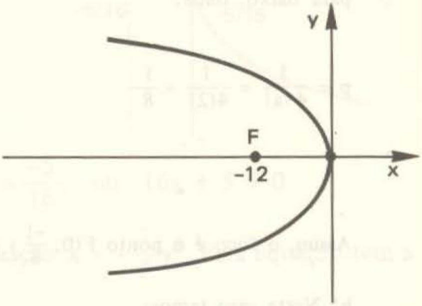
b)



c)



d)



12.10) Determine o foco F e a equação da diretriz d para cada parábola cuja equação é dada a seguir:

a) $2x^2 - 5y = 0$
b) $3x^2 + 4y = 0$
c) $8x + 9y^2 = 0$
d) $5x - 6y^2 = 0$

12.11) Uma parábola cuja equação é $y^2 + kx = 0$, passa pelo ponto $(-54; 9)$. Determine:

a) o valor de k
b) as coordenadas do foco

12.12) Uma parábola tem vértice na origem e diretriz de equação $y + 15 = 0$. Dê:

a) as coordenadas do foco
b) a equação da parábola

12.13) Obtenha os pontos de interseção da reta de equação $y = 2x + 4$ com a parábola de equação $y = 2x^2$.

12.14) Obtenha os pontos de interseção da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10$ com a parábola de vértice na origem, cujo foco é $F(0; \frac{1}{12})$.

12.5 – EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE DIRETRIZ HORIZONTAL

Vamos agora considerar o caso em que a parábola tem diretriz horizontal e vértice $V(x_V; y_V)$ numa posição qualquer.

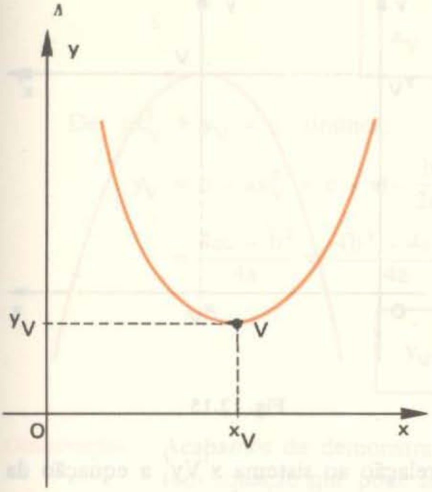


Fig. 12.12

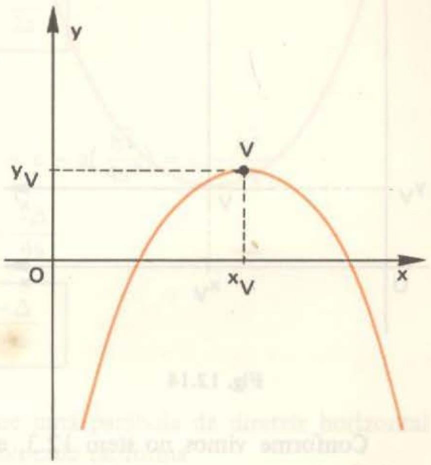


Fig. 12.13

Sendo p a distância entre o foco e o vértice, vamos mostrar que uma parábola desse tipo pode ser representada pela equação

$$y = ax^2 + bx + c \quad (12.3)$$

onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ e tais que:

$a > 0 \iff$ concavidade para cima $a < 0 \iff$ concavidade para baixo		
$p = \dfrac{1}{4\lvert a \rvert}$	$x_V = \dfrac{-b}{2a}$	$y_V = \dfrac{-\Delta}{4a}$

sendo $\Delta = b^2 - 4ac$

Demonstração

Vamos considerar um sistema de coordenadas $x'Vy'$ com origem V e tal que Vx' tenha o mesmo sentido de Ox e Vy' tenha o mesmo sentido de Oy.

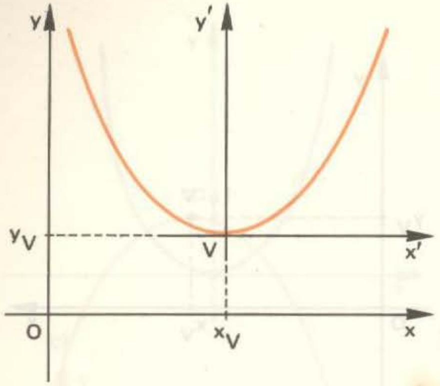


Fig. 12.14

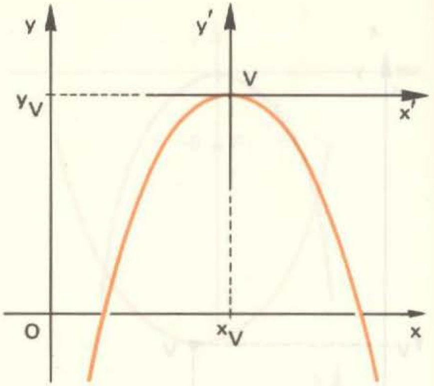


Fig. 12.15

Conforme vimos no item 12.3, em relação ao sistema $x'Vy'$ a equação da parábola é

$$y' = ax'^2 \quad \text{(I)}$$

onde:

$$\begin{cases} a > 0 \iff \text{concavidade para cima} \\ a < 0 \iff \text{concavidade para baixo} \\ p = \dfrac{1}{4|a|} \end{cases}$$

Usando as fórmulas de translação de eixos, vistas no capítulo 7, temos:

$$x' = x - x_V \quad \text{e} \quad y' = y - y_V$$

Substituindo em (I), obtemos:

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

ou: $y - y_V = a(x^2 - 2x_Vx + x_V^2)$

ou ainda: $y = ax^2 - (2ax_V)x + (ax_V^2 + y_V) \quad \text{(II)}$

Fazendo

$$\begin{cases} -2ax_V = b \\ ax_V^2 + y_V = c \end{cases}$$

a equação (II) pode ser escrita:

$$y = ax^2 + bx + c$$

De $-2ax_V = b$ tiramos:

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$

De $ax_V^2 + y_V = c$ tiramos:

$$y_V = c - ax_V^2 = c - a(-\frac{b}{2a})^2 = c - a(\frac{b^2}{4a^2}) = c - \frac{b^2}{4a}$$

$$= \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$\boxed{y_V = \frac{-\Delta}{4a}}$$

Observação Acabamos de demonstrar que uma parábola de diretriz horizontal tem equação que pode ser colocada na forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

isto é, não aparece termo em xy. No entanto, em alguns dos exercícios do início deste capítulo apareceram alguns casos de equações de parábola com termo em xy.

Por exemplo, no exercício 12.1 obtivemos a equação

$$4x^2 + y^2 - 4\textcircled{xy} - 22x - 4y + 49 = 0$$

O termo em xy aparece apenas quando a diretriz não é horizontal nem vertical.

Exercícios Resolvidos

12.15) Consideremos a parábola de equação

$$x^2 - 8x - 8y + 40 = 0$$

Determine:

a) as coordenadas do vértice
b) as coordenadas do foco
c) a equação da diretriz

Solução

a) Vamos primeiramente passar a equação para a forma $y = ax^2 + bx + c$. Temos:

$$x^2 - 8x - 8y + 40 = 0 \iff y = \frac{1}{8}x^2 - x + 5$$

Portanto: $\begin{cases} a = \frac{1}{8};\ b = -1;\ c = 5 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(\frac{1}{8})(5) = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Assim, de acordo com o teorema demonstrado:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(\frac{1}{8})} = 4$$

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(\frac{-3}{2})}{4(\frac{1}{8})} = 3$$

O vértice é, então, o ponto V(4; 3)

b) $p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(\frac{1}{8})} = 2$

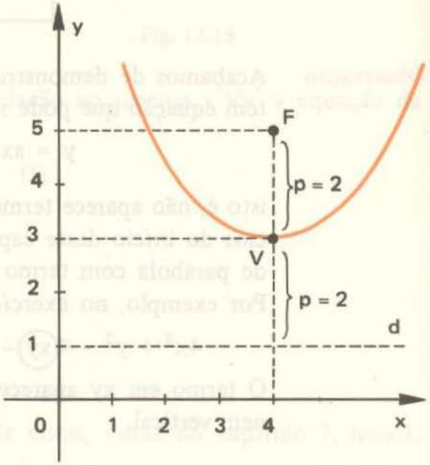
Como $a > 0$, a concavidade da parábola está voltada para cima. Portanto, o foco $F(x_F; y_F)$ está acima do vértice:

$$y_F = y_V + p = 3 + 2 = 5$$

A abscissa do foco é a mesma do vértice:

$$x_F = x_V = 4$$

Assim, o foco é o ponto F(4; 5)



c) Como p = 2, a diretriz d deve estar 2 unidades abaixo do vértice. Portanto, sua equação é:

$$y = 1$$

ou: $y - 1 = 0$

Devemos observar que o desenho acima *não* está assinalando o ponto onde a parábola corta o eixo Oy, que seria realmente (0,5).

12.16) Uma parábola tem equação

$$y = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{23}{12}$$

Determine o vértice, o foco e a equação da diretriz.

Solução

A equação dada já está na forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

com: $a = -\dfrac{1}{12}$, $b = \dfrac{5}{6}$ e $c = \dfrac{23}{12}$

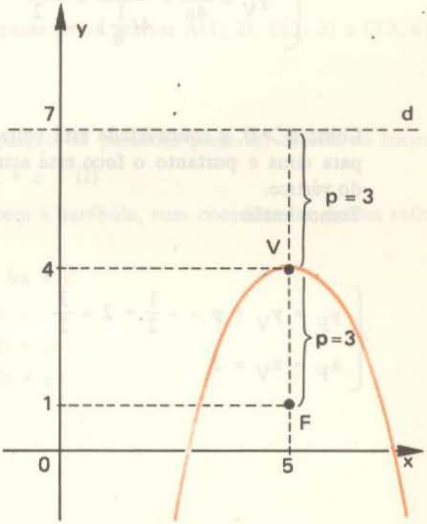
Assim:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (\frac{5}{6})^2 - 4(\frac{-1}{12})(\frac{23}{12}) = \frac{4}{3} \\ p = \dfrac{1}{4|a|} = \dfrac{1}{4|\frac{-1}{12}|} = 3 \\ x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(\frac{5}{6})}{2(\frac{-1}{12})} = 5 \\ y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-\frac{4}{3}}{4(\frac{-1}{12})} = 4 \end{cases}$$

Como $a < 0$, a concavidade está para baixo e o foco deve estar abaixo do vértice.

$$\begin{cases} y_F = y_V - p = 4 - 3 = 1 \\ x_F = x_V = 5 \end{cases}$$

Temos então F(5; 1) e V(5; 4).



A reta diretriz deve estar acima do vértice 3 unidades. Portanto sua equação é $y = 7$ ou $y - 7 = 0$.

Mais uma vez devemos observar que o desenho não assinala corretamente as interseções com os eixos coordenados. O desenho serviu apenas para facilitar a obtenção do foco e da diretriz.

12.17) Uma parábola tem equação $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x$. Determine as coordenadas do vértice e do foco.

Solução

A equação dada tem a forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

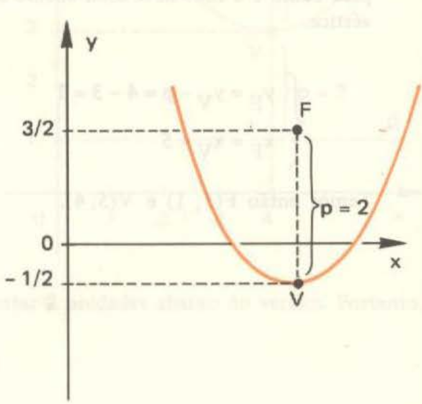
onde: $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{1}{2}$ e $c = 0$.

Assim:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (-\frac{1}{2})^2 - 4(\frac{1}{8})(0) = \frac{1}{4} \\ p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(\frac{1}{8})} = 2 \\ x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(\frac{-1}{2})}{2(\frac{1}{8})} = 2 \\ y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\frac{1}{4}}{4(\frac{1}{8})} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Como $a > 0$, a concavidade está voltada para cima e portanto o foco está acima do vértice.
Temos então:

$$\begin{cases} y_F = y_V + p = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \\ x_F = x_V = 2 \end{cases}$$



Portanto, o vértice é o ponto $V(2; -\frac{1}{2})$ e o foco é o ponto $F(2; \frac{3}{2})$.

12.18) Uma parábola tem equação $y = x^2 - 5x + 4$. Determine os pontos onde ela intercepta os eixos coordenados.

Solução

O ponto onde a parábola intercepta o eixo Oy deve ter abscissa nula. Fazendo $x = 0$ em $y = x^2 - 5x + 4$, obtemos:

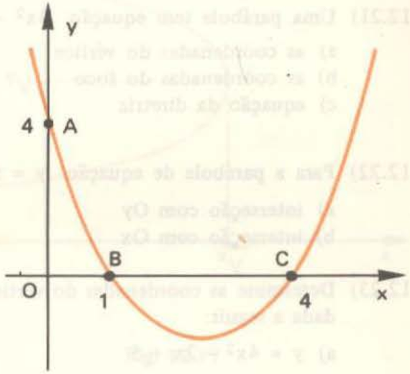
$$y = 0^2 - 5(0) + 4 = 4$$

Assim, a parábola corta Oy no ponto A(0; 4).

O ponto onde a parábola corta o eixo Ox deve ter ordenada nula. Fazendo $y = 0$ em $y = x^2 - 5x + 4$, obtemos:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Esta equação admite duas raízes reais: $x' = 1$ e $x'' = 4$. Assim, concluímos que a parábola corta o eixo Ox nos pontos B(1; 0) e C(4; 0).



12.19) Uma parábola cuja diretriz é horizontal, passa pelos pontos A(1; 2), B(2; 3) e C(3; 6). Determine sua equação.

Solução

Como a diretriz é horizontal, a equação da parábola pode ser escrita na forma

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{(I)}$$

Como os pontos A, B e C pertencem à parábola, suas coordenadas devem satisfazer a equação (I):

$$y = ax^2 + bx + c$$

A(1; 2) $\quad 2 = a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$

B(2; 3) $\quad 3 = a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$

C(3; 6) $\quad 6 = a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c$

Temos, então, o sistema:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= 3 \\ 9a + 3b + c &= 6 \end{aligned}$$

que, resolvido, nos dá

$$a = 1, \quad b = -2 \quad e \quad c = 3$$

Assim, a equação da parábola é

$$y = x^2 - 2x + 3$$

12.20) Consideremos uma parábola de equação

$$y = 2x^2 - 8x + 6$$

Determine:

a) as coordenadas do vértice
b) as coordenadas do foco
c) a equação da diretriz
d) a equação do eixo da parábola
e) a interseção com o eixo Oy
f) a interseção com o eixo Ox

12.21) Uma parábola tem equação $3x^2 - 2x + y + 5 = 0$. Determine:

a) as coordenadas do vértice
b) as coordenadas do foco
c) equação da diretriz
d) equação do eixo
e) interseção com o eixo Oy
f) interseção com o eixo Ox

12.22) Para a parábola de equação $y = x^2 - 8x + 16$ determine:

a) interseção com Oy
b) interseção com Ox

12.23) Determine as coordenadas do vértice V e do foco F para cada parábola cuja equação é dada a seguir:

a) $y = 4x^2 - 2x + 5$
b) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$
c) $y = \frac{1}{8}x^2 - 6$
d) $y = -3x^2 + 6$
e) $y = -3x^2 + 6x$
f) $x^2 - 6x - y + 5 = 0$

12.24) Obtenha os pontos onde a reta r intercepta a parábola s, em cada caso a seguir:

a) $\begin{cases} (r): x - y + 3 = 0 \\ (s): y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} (r): 5x - y - 7 = 0 \\ (s): y = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (r): x - y - 4 = 0 \\ (s): y = x^2 - 2x + 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} (r): x + 3 = 0 \\ (s): y = \frac{1}{2}x^2 + x - 4 \end{cases}$

12.25) Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) tais que:

a) $(x - y + 1)^2 + (x^2 - y - 4x + 5)^2 = 0$
b) $(x - y + 1)(x^2 - y - 4x + 5) = 0$

12.26) Obtenha as interseções das parábolas de equações $y = x^2 - 2x + 3$ e $y = -3x^2 + 18x - 21$

12.27) Uma parábola cuja diretriz é horizontal, passa pelos pontos (1; 3), (2; 4) e (3; 3). Dê sua equação.

12.28) O foco da parábola de equação $y = x^2 + bx + c$ tem abscissa igual a 1. Determine o valor de c para que essa parábola passe pelo ponto A(3; 7).

12.6 – EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE DIRETRIZ VERTICAL

Consideremos uma parábola de diretriz vertical e vértice $V(x_V; y_V)$ numa posição qualquer.

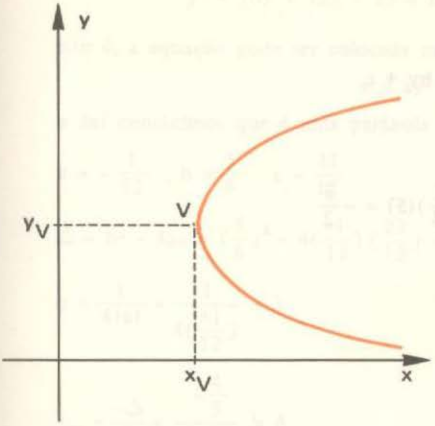


Fig. 12.16

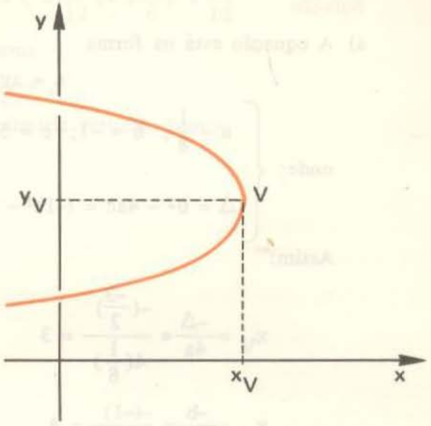


Fig. 12.17

Para obtermos a equação de uma parábola desse tipo poderíamos seguir o mesmo processo desenvolvido no item 12.5. No entanto, é mais prático aproveitar as conclusões do item 12.5, simplesmente permutando-se as variáveis x e y.

Assim, sendo p a distância entre o foco e o vértice, podemos estabelecer que uma parábola desse tipo pode ser representada pela equação

$$x = ay^2 + by + c \quad (12.4)$$

onde a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ e tais que

$a > 0 \iff$ concavidade para a direita
$a < 0 \iff$ concavidade para a esquerda

$p = \frac{1}{4\|a\|}$	$x_V = \frac{-\Delta}{4a}$	$y_V = \frac{-b}{2a}$

sendo $\Delta = b^2 - 4ac$

Exercícios Resolvidos

12.29) Para a parábola de equação $x = \frac{1}{8}y^2 - y + 5$ determine:

a) coordenadas do vértice
b) coordenadas do foco
c) equação da diretriz
d) equação do eixo

Solução

a) A equação está na forma

$$x = ay^2 + by + c$$

onde: $\begin{cases} a = \frac{1}{8};\ b = -1;\ c = 5 \\ \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(\frac{1}{8})(5) = -\frac{3}{2} \end{cases}$

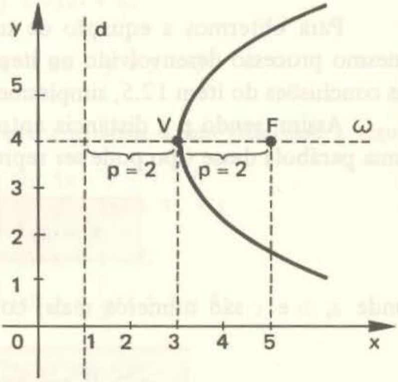
Assim:

$$x_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(\frac{-3}{2})}{4(\frac{1}{8})} = 3$$

$$y_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2(\frac{1}{8})} = 4$$

O vértice é, então, o ponto V(3; 4)

b) $p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4(\frac{1}{8})} = 2$



Como $a > 0$, a concavidade está voltada para a direita e portanto o foco $F(x_F; y_F)$ está à direita do vértice:

$$x_F = x_V + p = 3 + 2 = 5$$

A ordenada do foco é a mesma do vértice:

$$y_F = y_V = 4$$

Assim, o foco é o ponto F(5; 4)

c) Como p = 2, a diretriz d deve estar à distância de 2 unidades à esquerda do vértice e, assim, sua equação é

$$x = 1$$

ou $x - 1 = 0$

d) O eixo ω deve ser horizontal e passar pelo vértice. Sua equação é

$$y = 4$$

ou $y - 4 = 0$

12.30) Uma parábola tem equação $y^2 - 10y + 12x - 23 = 0$. Determine o vértice V, o foco F e a equação da diretriz d.

Solução

Em primeiro lugar verificamos que

$$y^2 - 10y + 12x - 23 = 0 \iff x = \frac{-1}{12}y^2 + \frac{5}{6}y + \frac{23}{12}$$

isto é, a equação pode ser colocada na forma

$$x = ay^2 + by + c$$

e daí concluímos que é uma parábola de diretriz vertical. Temos:

$$a = -\frac{1}{12}; \quad b = \frac{5}{6}; \quad c = \frac{23}{12}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 4\left(\frac{-1}{12}\right)\left(\frac{23}{12}\right) = \frac{4}{3}$$

$$p = \frac{1}{4|a|} = \frac{1}{4\left(\frac{+1}{12}\right)} = 3$$

$$x_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\frac{4}{3}}{4\left(\frac{-1}{12}\right)} = 4$$

$$y_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{5}{6}}{2\left(\frac{-1}{12}\right)} = 5$$

Como $a < 0$, a concavidade está voltada para a esquerda e o foco está à esquerda do vértice:

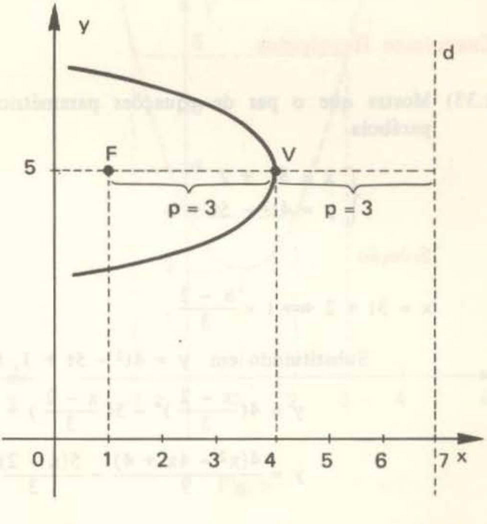
$$\begin{cases} x_F = x_V - p = 4 - 3 = 1 \\ y_F = y_V = 5 \end{cases}$$

Temos então F(1; 5) e V(4; 5)

A diretriz d deve estar 3 unidades à direita do vértice e portanto sua equação é:

$$x = 7$$

ou $\quad x - 7 = 0$



Exercícios Propostos

12.31) Uma parábola tem equação $x = 6y^2 - 9y + 2$. Determine:

a) coordenadas do vértice
b) coordenadas do foco
c) equação da diretriz
d) equação do eixo

12.32) Seja uma parábola de equação $x = -2y^2 + 4y + 1$. Determine:

a) coordenadas do vértice
b) coordenadas do foco

12.7 – EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Conforme veremos nos exercícios, uma parábola de diretriz horizontal pode ser representada por um par de equações paramétricas do tipo

$$\begin{cases} x = at + b \\ y = ct^2 + dt + e \end{cases}$$

onde a, b, c, d, e são números reais (com $a \neq 0$ e $c \neq 0$) e $t \in \mathbb{R}$.

Quando a parábola tiver diretriz vertical, poderá ser representada pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} y = at + b \\ x = ct^2 + dt + e \end{cases}$$

Veremos nos exercícios também que, quando tivermos apenas um arco de parábola, haverá outros modos de representar parametricamente.

Exercícios Resolvidos

12.33) Mostre que o par de equações paramétricas abaixo, com $t \in \mathbb{R}$, representa uma parábola.

$$\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 4t^2 - 5t + 1 \end{cases}$$

Solução

$$x = 3t + 2 \iff t = \frac{x-2}{3}$$

Substituindo em $y = 4t^2 - 5t + 1$, temos:

$$y = 4\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 - 5\left(\frac{x-2}{3}\right) + 1$$

$$y = \frac{4(x^2 - 4x + 4)}{9} - \frac{5(x-2)}{3} + 1$$

e após as simplificações:

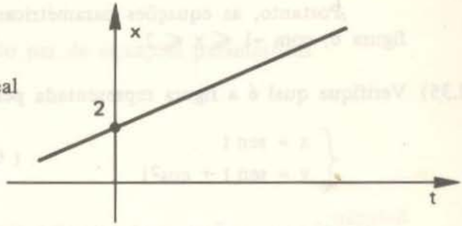
$$y = \frac{4}{9}x^2 - \frac{31}{9}x + \frac{55}{9}$$

que é uma equação da forma da equação (12.3).

Para podermos garantir que as equações paramétricas dadas realmente representam a parábola "inteira" (e não apenas um arco de parábola) basta observarmos que, sendo t um número real qualquer, a variável x dada por

$$x = 3t + 2$$

também pode assumir um valor real qualquer.



12.34) O que representa o par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^2 - 4t + 6 \end{cases}$$

onde $0 \leqslant t \leqslant 3$?

Solução

$$x = t - 1 \iff t = x + 1$$

Substituindo em $y = t^2 - 4t + 6$, temos:

$$y = (x + 1)^2 - 4(x + 1) + 6$$

ou: $y = x^2 - 2x + 3$ (I)

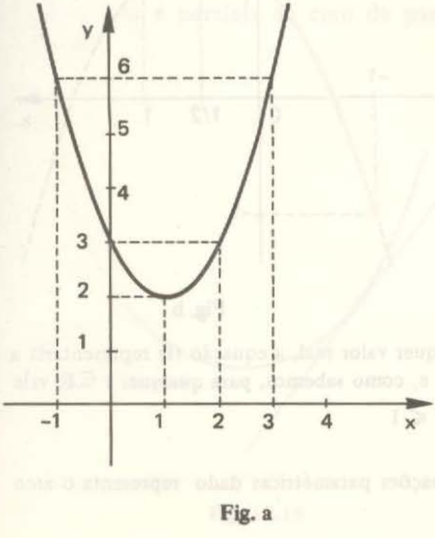


Fig. a

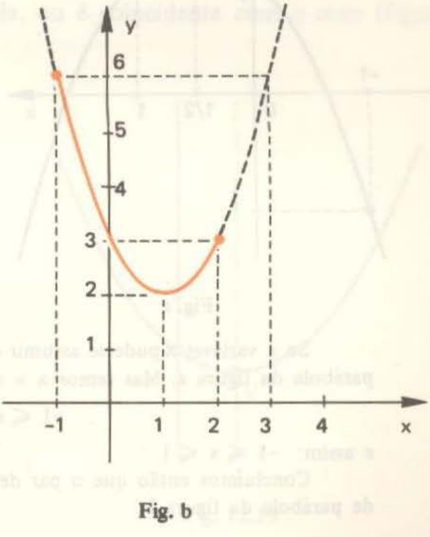


Fig. b

Se a variável x pudesse assumir qualquer valor real, a equação (I) representaria a parábola da figura a. Mas acontece que temos

$$x = t - 1$$

com $0 \leqslant t \leqslant 3$.

$$\begin{cases} \text{Para } t = 0 \text{ vem: } x = 0 - 1 = -1 \\ \text{Para } t = 3 \text{ vem: } x = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

Portanto, as equações paramétricas dadas representam o arco de parábola da figura b, com $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

12.35) Verifique qual é a figura representada pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen} t + \cos^2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Solução

Lembrando que, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ temos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

vem: $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$

Assim: $y = \operatorname{sen} t + \cos^2 t = \operatorname{sen} t + 1 - \operatorname{sen}^2 t$

Levando em conta que $x = \operatorname{sen} t$:

$$y = x + 1 - x^2$$

ou $y = -x^2 + x + 1 \quad$ (I)

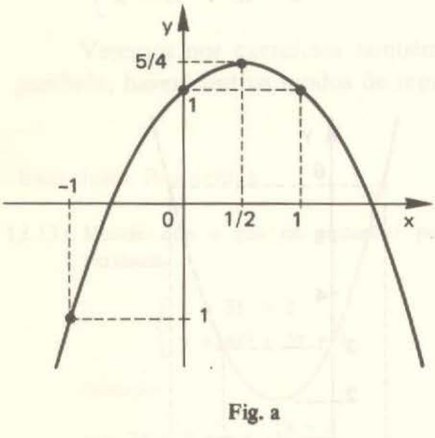


Fig. a

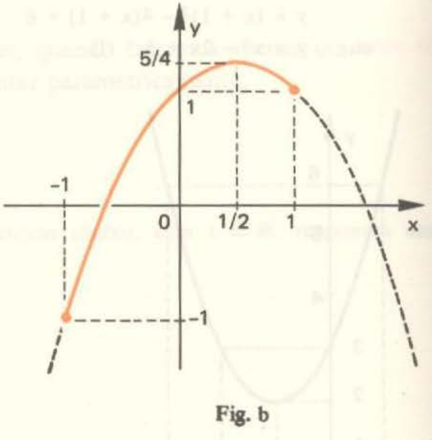


Fig. b

Se a variável x pudesse assumir qualquer valor real, a equação (I) representaria a parábola da figura a. Mas temos $x = \operatorname{sen} t$ e, como sabemos, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ vale

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} t \leqslant 1$$

e assim: $-1 \leqslant x \leqslant 1$

Concluímos então que o par de equações paramétricas dado representa o arco de parábola da figura b.

12.36) O que representa o par de equações paramétricas

$$\begin{cases} y = 2t - 3 \\ x = t^2 - 5t \end{cases}$$

com $t \in \mathbb{R}$?

12.37) Determine a figura representada pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} y = 2t \\ x = 4t^2 - 1 \end{cases}$$

com $-1 \leqslant t \leqslant 1$

12.38) Verifique qual é a figura representada pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \cos 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

12.8 – RETA TANGENTE À PARÁBOLA

Em geral, para resolvermos um problema de reta tangente à parábola, basta impormos que a reta e a parábola tenham apenas um ponto em comum (figura 12.18). No entanto, devemos observar que há uma situação em que a reta e a parábola têm apenas um ponto em comum e no entanto não são tangentes: é o caso em que a reta é paralela ao eixo da parábola, ou é coincidente com o eixo (figura 12.19)

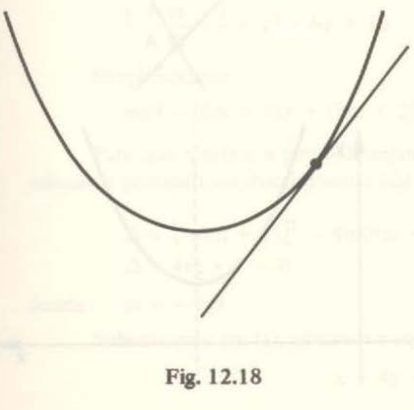


Fig. 12.18

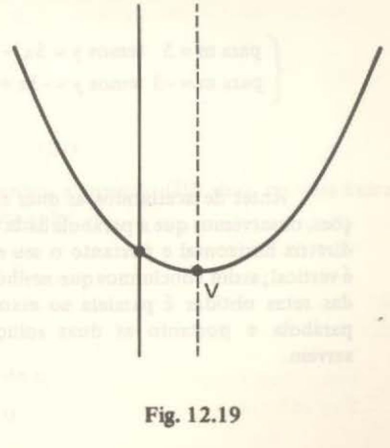
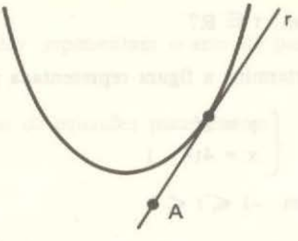


Fig. 12.19

12.39) Consideremos uma parábola de equação

$$y = x^2 - 3x + 2$$

e um ponto A(2; -4). Determine a equação da reta que passa por A e é tangente à parábola.



Solução

Seja r a reta procurada. Sua equação pode ser escrita:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

ou: $y + 4 = m(x - 2)$

ou ainda: $y = mx - 2m - 4$

Vamos considerar o sistema formado pelas equações da reta e da parábola:

$$\begin{cases} y = mx - 2m - 4 & \text{(I)} \\ y = x^2 - 3x + 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), obtemos:

$$x^2 - 3x + 2 = mx - 2m - 4$$

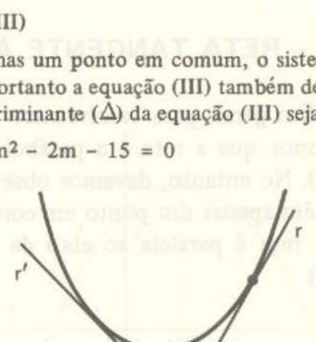
ou: $x^2 - (3 + m)x + (2m + 6) = 0$ (III)

Para que a reta e a parábola tenham apenas um ponto em comum, o sistema de equações acima deve ter apenas uma solução e portanto a equação (III) também deve ter apenas uma solução. Assim impomos que o discriminante (Δ) da equação (III) seja nulo:

$$\Delta = [-(3 + m)]^2 - 4(2m + 6) = m^2 - 2m - 15 = 0$$

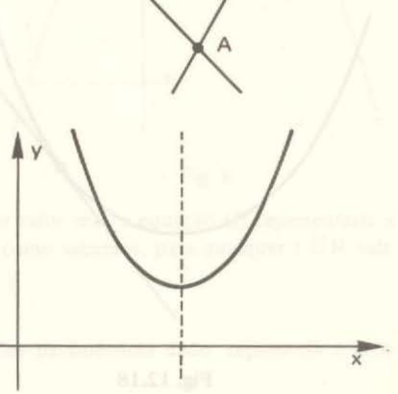
Daí obtemos $m = 5$ ou $m = -3$

Isto significa que o problema tem duas soluções. Substituindo em (I):



$$\begin{cases} \text{para } m = 5 \text{ temos } y = 5x - 14 \\ \text{para } m = -3 \text{ temos } y = -3x + 2 \end{cases}$$

Antes de aceitarmos as duas soluções, observemos que a parábola dada tem diretriz horizontal e portanto o seu eixo é vertical; assim concluímos que nenhuma das retas obtidas é paralela ao eixo da parábola e portanto as duas soluções servem.

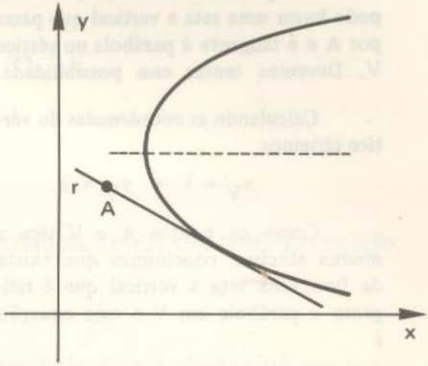


12.40) Determine a equação da reta que passa pelo ponto A(1; 2) e é tangente à parábola de equação

$$x = y^2 - 6y + 10$$

Solução

A parábola dada tem eixo horizontal; daí concluímos que a reta tangente procurada (se existir) não poderá ser horizontal.



Suponhamos então que haja uma reta r tangente à parábola cujo coeficiente angular é m (já que essa reta não pode ser horizontal, devemos ter $m \neq 0$). A equação de r pode ser escrita:

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

ou: $y - 2 = m(x - 1)$

ou ainda: $x = \dfrac{y + m - 2}{m}$

Vamos considerar então o sistema formado pela equação da reta r e da parábola:

$$\begin{cases} x = \dfrac{y + m - 2}{m} & \text{(I)} \\ x = y^2 - 6y + 10 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$\frac{y + m - 2}{m} = y^2 - 6y + 10$$

Simplificando:

$$my^2 - (6m + 1)y + (9m + 2) = 0 \qquad \text{(III)}$$

Para que a reta e a parábola sejam tangentes, a equação (III) deve ter uma única solução e portanto seu discriminante (Δ) deve ser nulo:

$$\Delta = [-(6m + 1)]^2 - 4m(9m + 2) = 0$$

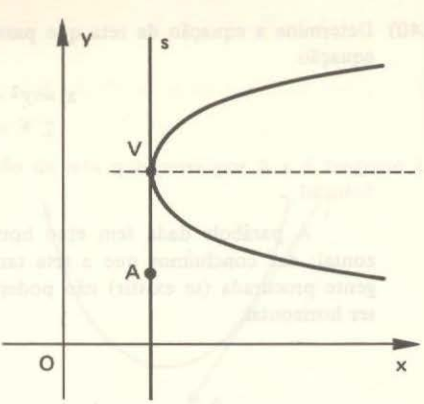
$$\Delta = 4m + 1 = 0$$

donde: $m = -1/4$

Substituindo em (I), obtemos a equação de r:

$$x + 4y - 9 = 0$$

Porém, talvez essa não seja a única solução do problema pois ao iniciarmos a solução, supusemos que a reta procurada tinha um coeficiente angular m,e pelo fato de a parábola ter eixo horizontal, pode haver uma reta s vertical que passa por A e é tangente à parábola no vértice V. Devemos tentar essa possibilidade.



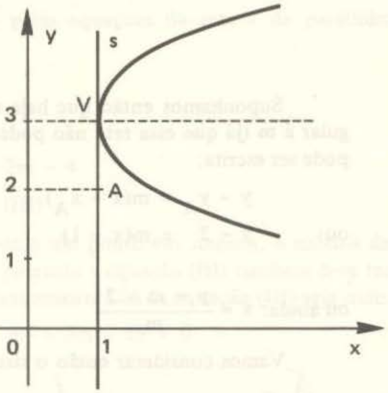
Calculando as coordenadas do vértice obtemos

$$x_V = 1 \quad e \quad y_V = 3$$

Como os pontos A e V têm a mesma abscissa, concluímos que existe de fato uma reta s vertical que é tangente à parábola em V e cuja equação é

$$x = 1$$

ou $\quad x - 1 = 0$



Portanto, o problema dado tem duas soluções que são as retas de equações

$$x + 4y - 9 = 0 \quad e \quad x - 1 = 0$$

Exercícios Propostos

12.41) Em cada caso abaixo é dado um ponto A e a equação de uma parábola. Determine a equação da reta que passa por A e é tangente à parábola.

a) $\begin{cases} A(3; -1) \\ y = x^2 - 5x + 6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} A(-2; 2) \\ y^2 - x - 5y + 4 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} A(-3; 3) \\ x = y^2 - 5y + 4 \end{cases}$

d) $\begin{cases} A(3; 1) \\ x = y^2 - 8y + 19 \end{cases}$

12.42) Determine a equação da reta que passa pelo ponto (2; 3) e é tangente à parábola de equação $y = x^2 - 2x + 2$.

12.43) Consideremos uma reta r de equação

$$5x + y - 3 = 0$$

Determine a equação da reta que é paralela a r e é tangente à parábola de equação $y = 3x^2 + x + 1$.

12.9 – INEQUAÇÕES

Consideremos uma parábola de diretriz horizontal. Como sabemos, seus pontos obedecem a uma equação do tipo

$$y = ax^2 + bx + c$$

Assim, é fácil concluir que:

1º) Os pontos que estão "acima" da parábola devem obedecer à condição

$$y > ax^2 + bx + c$$

2º) Os pontos que estão "abaixo" da parábola devem obedecer à condição

$$y < ax^2 + bx + c$$

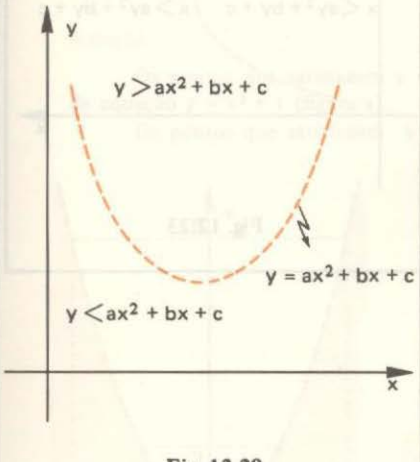


Fig. 12.20

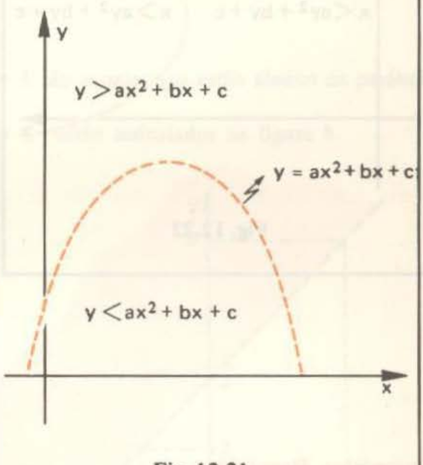


Fig. 12.21

Quando a parábola tem diretriz vertical, seus pontos devem obedecer a uma equação do tipo

$$x = ay^2 + by + c$$

Assim, podemos estabelecer que:

1º) Os pontos que estão "à direita" da parábola devem obedecer à condição

$$x > ay^2 + by + c$$

2º) Os pontos que estão "à esquerda" da parábola devem obedecer à condição

$$x < ay^2 + by + c$$

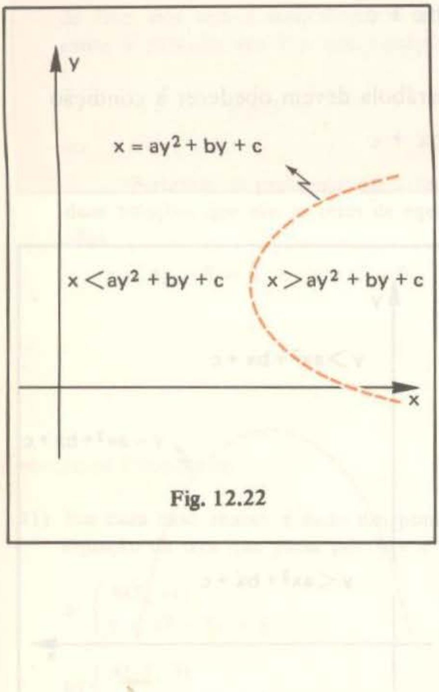


Fig. 12.22

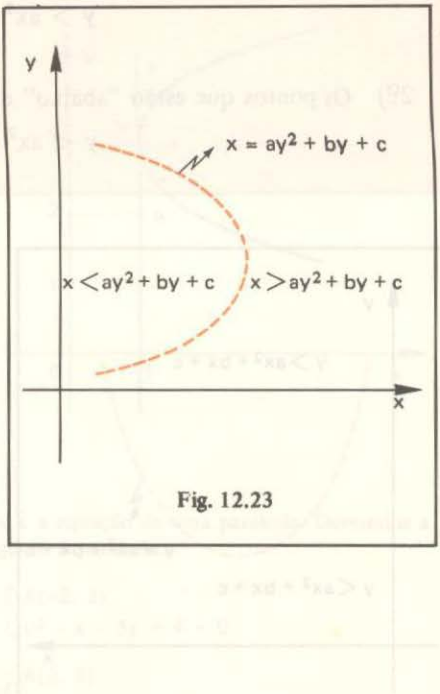


Fig. 12.23

Exercícios Resolvidos

12.44) Represente os pontos (x; y) tais que $y > x^2 + 1$

Solução

A equação $y = x^2 + 1$ representa a parábola da figura **a**. Portanto, a condição $y > x^2 + 1$ representa a região sombreada na figura **b** (isto é, os pontos que estão acima da parábola)

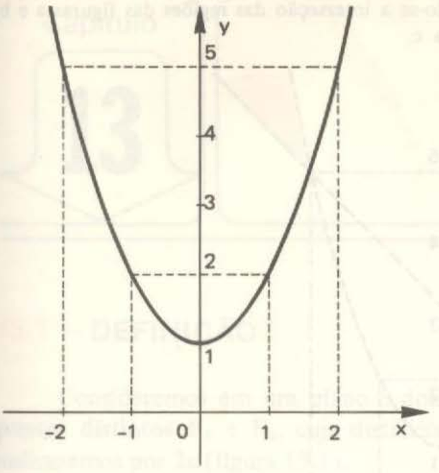


Fig. a

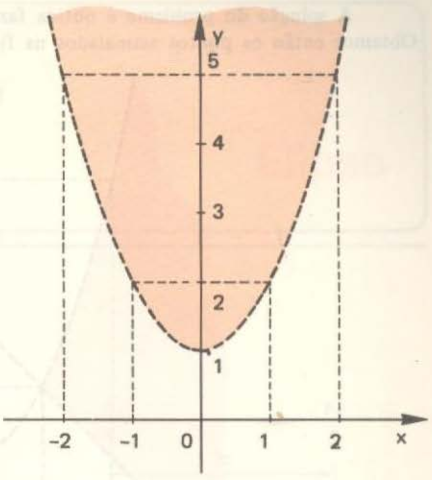


Fig. b

12.45) Represente os pontos do plano que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} y < x^2 + 1 \\ y > x + 3 \end{cases}$$

Solução

Os pontos que satisfazem $y < x^2 + 1$ são aqueles que estão **abaixo** da parábola de equação $y = x^2 + 1$ (figura a).

Os pontos que satisfazem $y > x + 3$ estão assinalados na figura **b**.

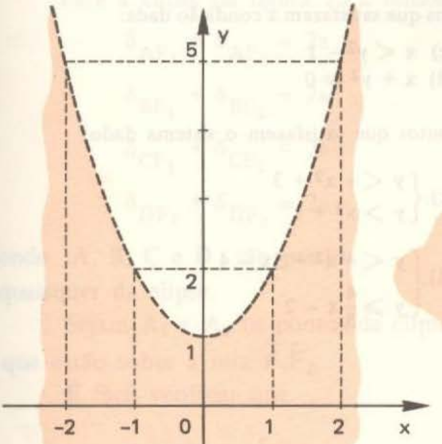


Fig. a

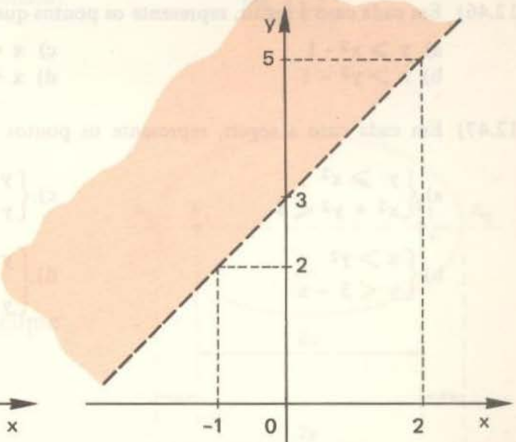
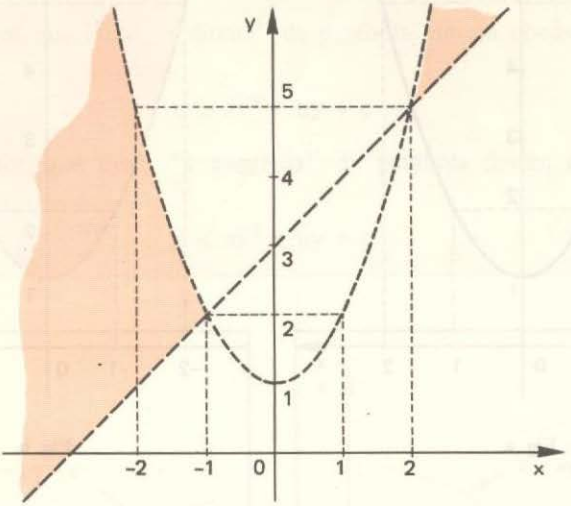


Fig. b

A solução do problema é obtida fazendo-se a interseção das regiões das figuras a e b. Obtemos então os pontos assinalados na figura c.



(Fig. c)

Exercícios Propostos

12.46) Em cada caso a seguir, represente os pontos que satisfazem a condição dada:

a) $y \geqslant x^2 - 1$

b) $x > y^2 - 1$

c) $x < y^2 - 1$

d) $x + y^2 \geqslant 0$

12.47) Em cada caso a seguir, represente os pontos que satisfazem o sistema dado:

a) $\begin{cases} y \geqslant x^2 \\ x^2 + y^2 \leqslant 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x > y^2 \\ y < 3 - x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y < -x^2 + 3 \\ y > x^2 + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y < -x^2 + 5x - 4 \\ y \geqslant \frac{4}{5}x - 2 \end{cases}$

Capítulo

13 Elipse

13.1 – DEFINIÇÃO

Consideremos em um plano α dois pontos distintos F_1 e F_2, cuja distância indicaremos por 2c (figura 13.1).

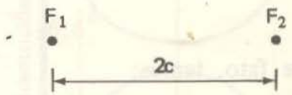


Fig. 13.1

Consideremos também um número real 2a tal que

$$2a > 2c$$

O conjunto de todos os pontos P do plano tais que

$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a$$

recebe o nome de ELIPSE.

Para a elipse da figura 13.2 temos:

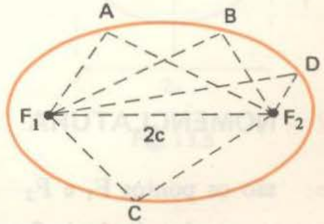


Fig. 13.2

$$\delta_{AF_1} + \delta_{AF_2} = 2a$$
$$\delta_{BF_1} + \delta_{BF_2} = 2a$$
$$\delta_{CF_1} + \delta_{CF_2} = 2a$$
$$\delta_{DF_1} + \delta_{DF_2} = 2a$$

onde A, B, C e D são pontos quaisquer da elipse.

Sejam A_1 e A_2 os pontos da elipse que estão sobre a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$.

É fácil verificar que

$$\delta_{A_1F_1} = \delta_{F_2A_2}$$

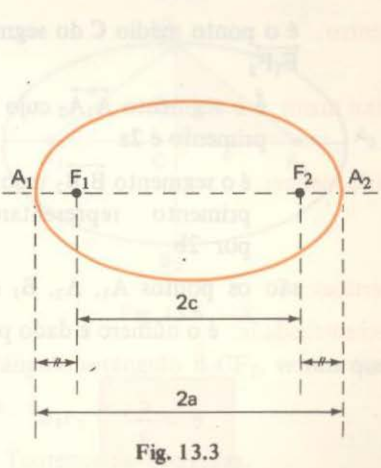


Fig. 13.3

De fato, pela definição de elipse, devemos ter:

$$\delta_{A_1F_1} + \delta_{A_1F_2} = \delta_{A_2F_1} + \delta_{A_2F_2}$$

$$\delta_{A_1F_1} + (\delta_{A_1F_1} + \delta_{F_1F_2}) = (\delta_{A_2F_2} + \delta_{F_1F_2}) + \delta_{A_2F_2}$$

$$2\,\delta_{A_1F_1} = 2\,\delta_{A_2F_2}$$

$$\delta_{A_1F_1} = \delta_{A_2F_2}$$

Outro fato importante a destacar é que

$$\delta_{A_1A_2} = 2a$$

De fato, temos:

$$\delta_{A_1A_2} = \underbrace{\delta_{A_1F_1}}_{\text{iguais}} + \delta_{F_1F_2} + \delta_{A_2F_2} = \delta_{A_1F_1} + \delta_{A_1F_1} + \delta_{F_1F_2} =$$

$$= \delta_{A_1F_1} + \delta_{A_1F_2} = 2a$$

13.2 – NOMENCLATURA

focos: são os pontos F_1 e F_2

distância focal: é a distância 2c entre os focos

centro: é o ponto médio C do segmento $\overleftrightarrow{F_1F_2}$

eixo maior: é o segmento $\overleftrightarrow{A_1A_2}$ cujo comprimento é 2a

eixo menor: é o segmento $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ cujo comprimento representaremos por 2b

vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

excentricidade: é o número e dado por

$$e = \frac{c}{a}$$

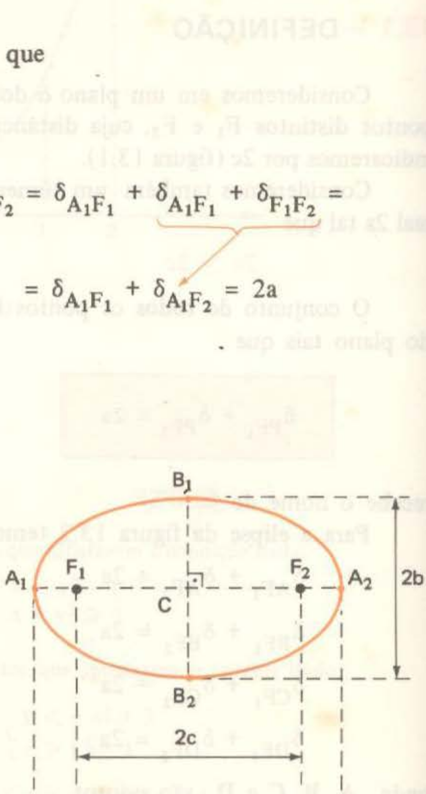


Fig. 13.4

Como $c < a$, temos sempre

$$0 < e < 1$$

Conforme o valor da excentricidade a elipse pode ter uma forma mais **arredondada** ou mais **afilada**. Este fato é ilustrado na figura 13.5 onde 2a é mantido fixo e variamos a distância focal 2c. Note que à **medida que os focos se aproximam, isto é, a excentricidade diminui, a forma da elipse vai ficando parecida com a da circunferência.** No capítulo 15 veremos com mais detalhe a importância do conceito de excentricidade.

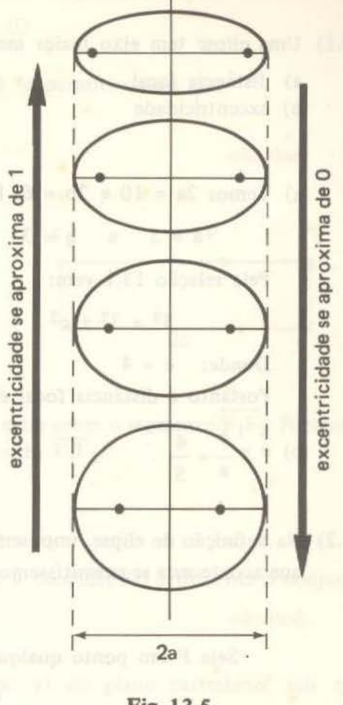


Fig. 13.5

13.3 – RELAÇÃO ENTRE a, b e c

Numa elipse vale a relação

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad (13.1)$$

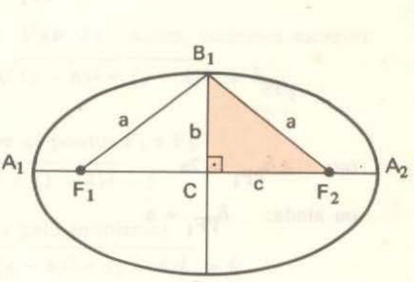


Fig. 13.6

De fato, observando na figura 13.6 o triângulo retângulo B_1CF_2, vemos que

$$\delta_{CB_1} = b, \quad \delta_{CF_2} = c \quad e \quad \delta_{B_1F_2} = a$$

Assim, a relação 13.1 é a expressão do Teorema de Pitágoras.

Exercícios Resolvidos

13.1) Uma elipse tem eixo maior medindo 10 e eixo menor medindo 6. Calcule:

a) distância focal
b) excentricidade

Solução

a) Temos $2a = 10$ e $2b = 6$. Portanto:

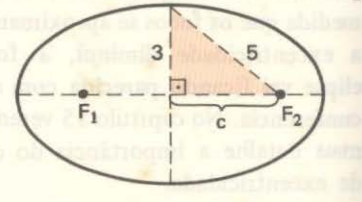
$$a = 5 \quad e \quad b = 3$$

Pela relação 13.1 vem:

$$5^2 = 3^2 + c^2$$

Donde: $c = 4$

Portanto a distância focal é $2c = 8$



b) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$

13.2) Na definição de elipse, impusemos que os focos F_1 e F_2 são pontos distintos. Discuta o que aconteceria se permitíssemos $F_1 = F_2$.

Solução

Seja P um ponto qualquer da elipse. Devemos ter

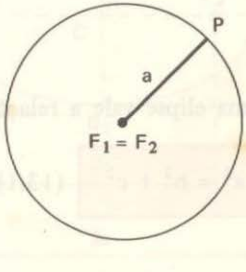
$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a$$

Se os pontos F_1 e F_2 forem coincidentes ($F_1 = F_2$) teremos:

$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_1} = 2a$$

ou: $2\,\delta_{PF_1} = 2a$

ou ainda: $\delta_{PF_1} = a$



Obteríamos desse modo uma circunferência de centro F_1 e raio a.

13.3) Ao definirmos elipse, consideramos em um plano dois pontos distintos F_1 e F_2, separados pela distância 2c, e um número 2a tal que

$$2a > 2c$$

Assim, a elipse é o conjunto de todos os pontos P do plano tais que

$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a \quad (I)$$

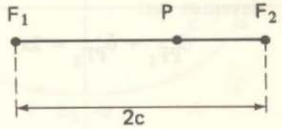
Verifique que figura representaria a condição (I) se permitíssemos que:

a) $2a = 2c$
b) $2a < 2c$

Solução

a) Se $2a = 2c$, a condição (I) poderia ser escrita:

$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2c$$



e assim, é fácil perceber que o ponto P deveria estar sobre o segmento $\overline{F_1F_2}$. Portanto, neste caso, a condição (I) representa o segmento $\overline{F_1F_2}$.

b) Se $2a < 2c$, deveríamos ter

$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} < 2c$$

o que, obviamente, é impossível. Neste caso, a condição (I) representa o conjunto vazio.

13.4) Considere o conjunto de todos os pontos P(x; y) do plano cartesiano, tais que

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} = 6$$

Que figura é esse conjunto de pontos?

Solução

Consideremos os pontos $F_1(2; 1)$ e $F_2(6; 4)$. Assim, podemos escrever:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \delta_{PF_1} \quad e \quad \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} = \delta_{PF_2}$$

Podemos calcular a distância 2c entre os pontos F_1 e F_2:

$$2c = \delta_{F_1F_2} = \sqrt{(2-6)^2 + (1-4)^2} = 5$$

Fazendo $2a = 6$, a condição (dada pelo problema)

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-6)^2 + (y-4)^2} = 6$$

pode ser escrita:

$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a$$

com $2a > 2c$. Portanto, trata-se de uma elipse cujos focos são F_1 e F_2 e cujo eixo maior mede 6.

13.5) Determine a equação de uma elipse cujos focos são os pontos $F_1(-1; 1)$ e $F_2(1; 2)$, sabendo que o comprimento do eixo maior é $2a = 4$.

Solução

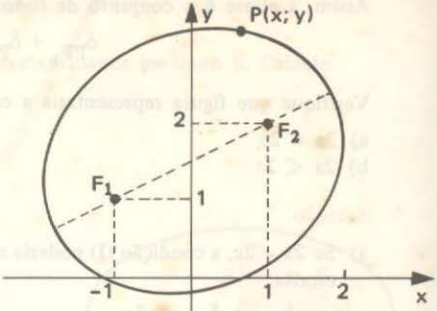
Sendo P(x; y) um ponto qualquer da elipse, temos:

$\delta_{PF_1} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$

$\delta_{PF_2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$

Pela definição de elipse devemos ter:

$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a$



Assim:

$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a \iff \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 4 \iff$$

$$\iff \sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2} + \sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5} = 4 \iff$$

$$\iff \sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2} = 4 - \sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5} \iff$$

$$\iff \left(\sqrt{x^2+y^2+2x-2y+2}\right)^2 = \left(4-\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}\right)^2 \iff$$

$$\iff x^2+y^2+2x-2y+2 = 16 - 8\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5} + x^2+y^2-2x-4y+5 \iff$$

$$\iff 8\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5} = -4x-2y+19 \iff$$

$$\iff \left(8\sqrt{x^2+y^2-2x-4y+5}\right)^2 = (-4x-2y+19)^2 \iff$$

$$\iff 64x^2+64y^2-128x-256y+320 = 16x^2 + 4y^2+16xy-152x-76y+361 \iff$$

$$\iff 48x^2 + 60y^2 - 16xy + 24x - 180y - 41 = 0$$

Exercícios Propostos

13.6) Uma elipse tem eixo maior medindo 6 e eixo menor medindo 4. Calcule:

a) distância focal b) excentricidade

13.7) Uma elipse de excentricidade $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tem eixo menor medindo 20. Calcule:

a) medida do eixo maior b) distância focal

13.8) Sendo (x; y) um ponto qualquer do plano cartesiano verifique, em cada caso a seguir, que figura representa a equação dada.

a) $\sqrt{(x-6)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-8)^2+(y-4)^2} = 7$

b) $\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-10)^2} = 5$

c) $\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-10)^2} = 4$

13.9) Determine a equação da elipse cujo eixo maior mede 6 e cujos focos são os pontos (-2; -1) e (1; 2).

13.4 – ELIPSE DE CENTRO NA ORIGEM E FOCOS NO EIXO Ox

Consideremos uma elipse cujo centro está na origem do sistema de coordenadas e cujos focos estão sobre o eixo Ox. Sendo P(x; y) um ponto qualquer da elipse temos:

$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a$$

Mas: $F_1(-c; o)$ e $F_2(c; o)$

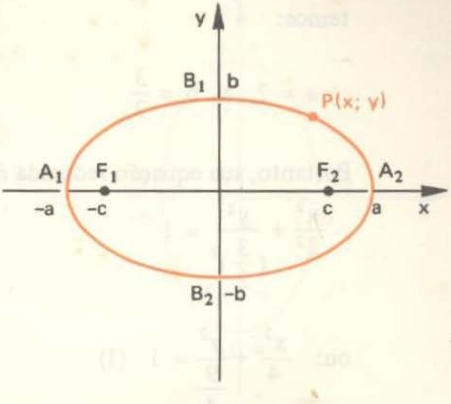


Fig. 13.7

Assim $\begin{cases} \delta_{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} \\ \delta_{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \end{cases}$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a &\iff \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} + \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = 2a \iff \\
&\iff \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = 2a - \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \iff \\
&\iff \left(\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}\right)^2 \iff \\
&\iff x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} + \\
&\qquad + x^2-2cx+c^2+y^2 \iff \\
&\iff a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = a^2 - cx \iff \\
&\iff a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = (a^2-cx)^2 \iff \\
&\iff \underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}x^2 + a^2y^2 = a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2} \iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2
\end{aligned}$$

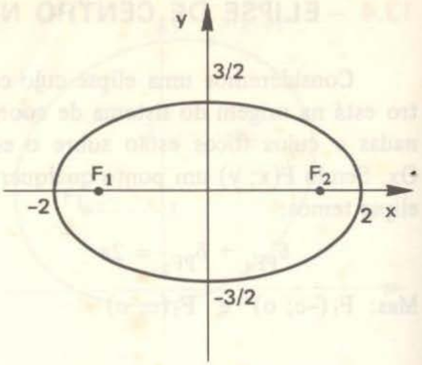
Dividindo todos os termos desta última equação por a^2b^2 obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (13.2)$$

que é a chamada equação reduzida da elipse de centro na origem e focos no eixo Ox.

Exemplos

a) Para a elipse da figura ao lado temos:



$$a = 2 \text{ e } b = \frac{3}{2}$$

Portanto, sua equação reduzida é

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\frac{3}{2})^2} = 1$$

ou: $$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \quad \text{(I)}$$

Se eliminarmos os denominadores podemos chegar na equação

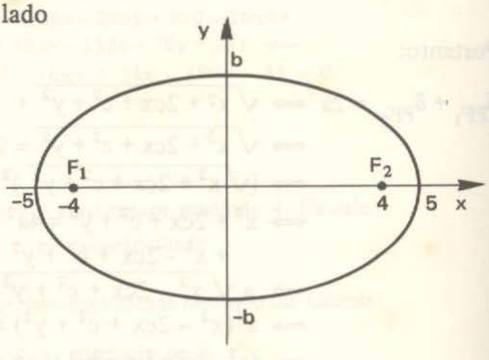
$$9x^2 + 16y^2 = 36 \quad \text{(II)}$$

ou ainda: $$9x^2 + 16y^2 - 36 = 0 \quad \text{(III)}$$

As equações (I), (II) e (III) representam a mesma elipse mas apenas a equação (I) é chamada de equação reduzida da elipse.

b) Para a elipse da figura ao lado temos:

$$a = 5 \text{ e } c = 4$$



Como $a^2 = b^2 + c^2$ vem:

$b^2 = a^2 - c^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

Assim, a equação reduzida da elipse é:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

13.5 – ELIPSE DE CENTRO NA ORIGEM E FOCOS NO EIXO Oy

Para obtermos a equação da elipse neste caso poderíamos seguir o mesmo procedimento do item anterior. No entanto é mais prático aproveitar o resultado do item anterior, permutando as variáveis x e y. Assim, podemos dizer que a equação reduzida de uma elipse com centro na origem e focos em Oy é:

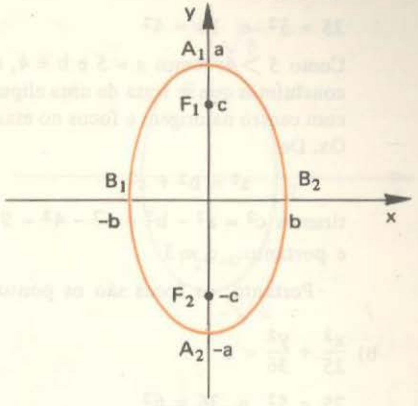


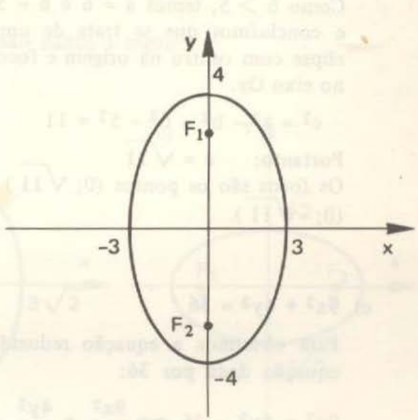
Fig. 13.8

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (13.3)$$

ou: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

Exemplo

A equação reduzida da elipse ao lado é:



$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

ou: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Exercícios Resolvidos

13.10) Dê as coordenadas dos focos das elipses cujas equações são dadas a seguir:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$

c) $9x^2 + 4y^2 = 36$

d) $5x^2 + 4y^2 - 20 = 0$

Solução

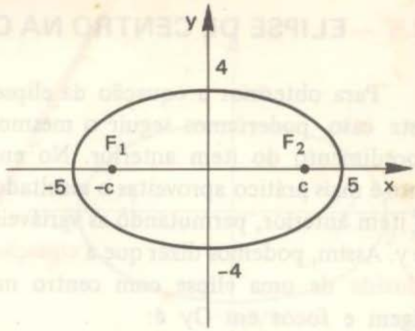
a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$25 = 5^2$ e $16 = 4^2$

Como $5 > 4$, temos $a = 5$ e $b = 4$, e concluímos que se trata de uma elipse com centro na origem e focos no eixo Ox. De

$$a^2 = b^2 + c^2$$

tiramos $c^2 = a^2 - b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$
e portanto: $c = 3$



Portanto, os focos são os pontos $(-3; 0)$ e $(3; 0)$.

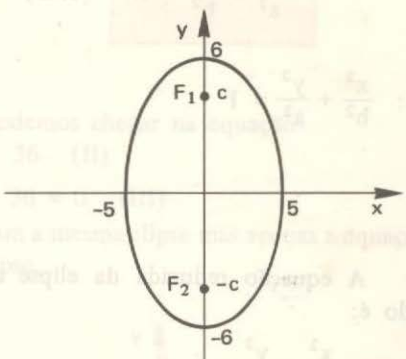
b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$

$25 = 5^2$ e $36 = 6^2$

Como $6 > 5$, temos $a = 6$ e $b = 5$, e concluímos que se trata de uma elipse com centro na origem e focos no eixo Oy.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

Portanto: $c = \sqrt{11}$
Os focos são os pontos $(0; \sqrt{11})$ e $(0; -\sqrt{11})$.



c) $9x^2 + 4y^2 = 36$

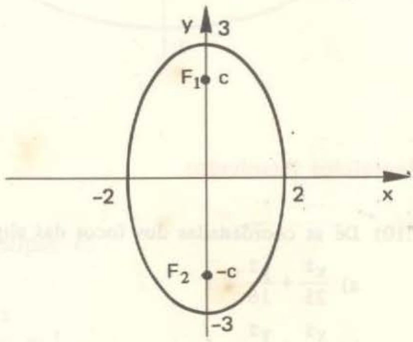
Para obtermos a equação reduzida da elipse, vamos dividir todos os termos da equação dada por 36:

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \iff \frac{9x^2}{36} + \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36} \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Temos: $4 = 2^2$ e $9 = 3^2$
Portanto: $a = 3$ e $b = 2$
Vemos então que se trata de uma elipse de centro na origem e focos no no eixo Oy.

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

Daí: $c = \sqrt{5}$
Concluímos então que os focos são os pontos $(0; \sqrt{5})$ e $(0; -\sqrt{5})$.



d) $5x^2 + 4y^2 - 20 = 0 \iff 5x^2 + 4y^2 = 20 \iff \frac{5x^2}{20} + \frac{4y^2}{20} = \frac{20}{20} \iff \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

$4 = 2^2$ e $5 = (\sqrt{5})^2$

Portanto, como $\sqrt{5} > 2$, temos

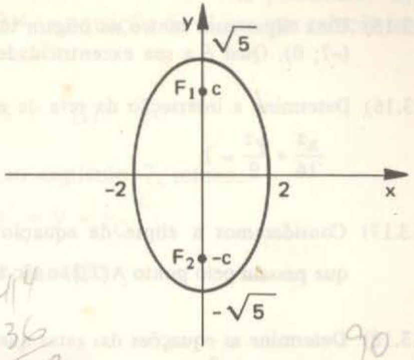
$a = \sqrt{5}$ e $b = 2$

Trata-se então de uma elipse com centro na origem e focos no eixo Oy.

$c^2 = a^2 - b^2 = 5 - 4 = 1$

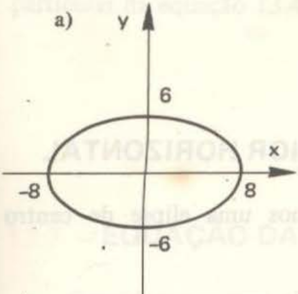
Daí: $c = 1$

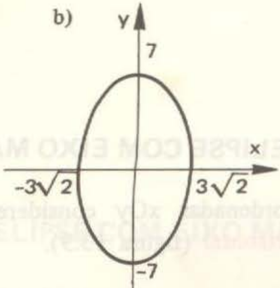
Concluímos então que os focos são os pontos (0; 1) e (0; -1).

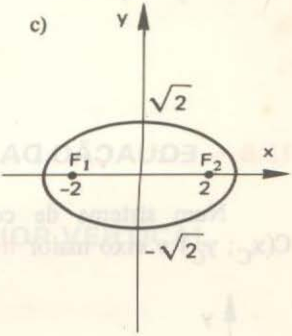


Exercícios Propostos

13.11) Dê as equações das elipses cujos desenhos são dados a seguir:

a) 

b) 

c) 

13.12) Dê as coordenadas dos focos das elipses cujas equações são dadas a seguir:

a) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{81} = 1$

c) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

d) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$

e) $\frac{2x^2}{3} + \frac{3y^2}{4} = 1$

f) $3x^2 + 4y^2 = 1$

g) $9x^2 + 10y^2 - 6 = 0$

13.13) Uma elipse de excentricidade $e = \frac{1}{2}$ tem centro na origem, focos no eixo Ox e eixo maior medindo 12. Determine sua equação.

13.14) Uma elipse tem centro na origem e focos no eixo Ox. Determine a sua equação sabendo que ela passa pelos pontos (0; -2) e (3; 0).

13.15) Uma elipse com centro na origem tem um foco no ponto (3; 0) e um vértice no ponto (-7; 0). Qual é a sua excentricidade?

13.16) Determine a interseção da reta de equação $3x - 4y - 12 = 0$ com a elipse de equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

13.17) Consideremos a elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$. Determine as equações das retas que passam pelo ponto A(2;2) e são tangentes à elipse.

13.18) Determine as equações das retas que passam pelo ponto A(3; 2) e são tangentes à elipse de equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

13.19) Consideremos uma reta r de equação $x - 2y - 1 = 0$. Determine as equações das retas que são paralelas a r e são tangentes à elipse de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

13.6 – EQUAÇÃO DA ELIPSE COM EIXO MAIOR HORIZONTAL

Num sistema de coordenadas xOy consideremos uma elipse de centro $C(x_C; y_C)$ e eixo maior horizontal (figura 13.9).

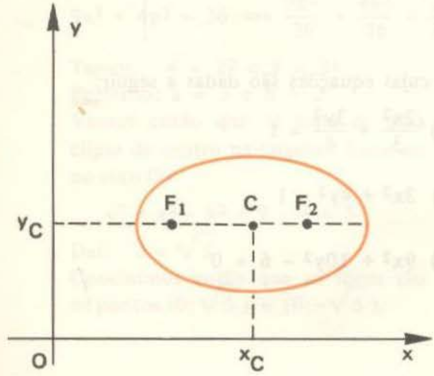


Fig. 13.9

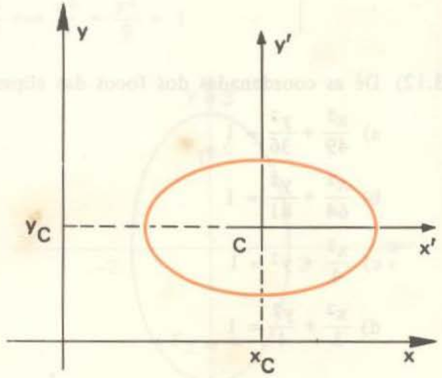


Fig. 13.10

Consideremos em seguida um outro sistema $x'Cy'$ cuja origem é o centro C da elipse e tal que o eixo Cx' seja paralelo a Ox e o eixo Cy' seja paralelo a Oy (figura 13.10). Conforme vimos no item 13.4, a equação da elipse em relação ao sistema $x'Cy'$ é

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad (I)$$

Mas, de acordo com o que foi visto no capítulo 7, temos:

$$x' = x - x_C \quad e \quad y' = y - y_C$$

Substituindo na equação (I) obtemos a equação

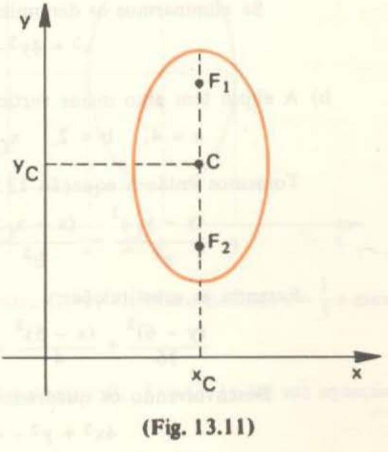
$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1 \quad (13.4)$$

que é a equação da elipse em relação ao sistema xOy. Chamaremos a equação 13.4 de equação reduzida da elipse e assim, a equação 13.2 pode ser considerada caso particular da equação 13.4.

13.7 – EQUAÇÃO DA ELIPSE COM EIXO MAIOR VERTICAL

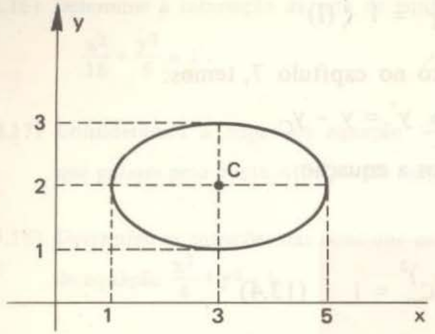
Consideremos uma elipse de centro $C(x_C; y_C)$ e eixo maior vertical (figura 13.11). Seguindo o mesmo procedimento do item anterior, podemos concluir que a equação reduzida dessa elipse é

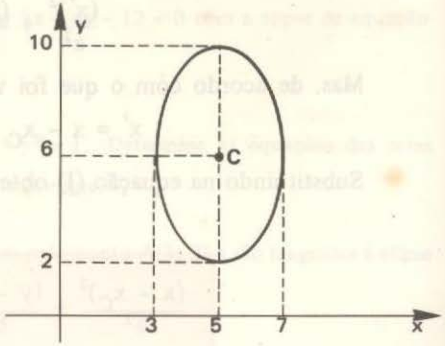
$$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} + \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1 \quad (13.5)$$



(Fig. 13.11)

13.20) Dê as equações das elipses cujos desenhos são dados a seguir:

a) 

b) 

Solução

a) Do desenho percebemos que a elipse tem eixo maior horizontal cuja medida é $2a = 4$ e tem eixo menor medindo $2b = 2$. Vemos também que o centro é o ponto $C(3; 2)$. Assim:

$$a = 2, \quad b = 1, \quad x_C = 3 \quad e \quad y_C = 2$$

Consideremos então a equação 13.4:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} + \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

Fazendo as substituições obtemos:

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{1} = 1$$

Se eliminarmos os denominadores e desenvolvermos os quadrados, chegaremos a

$$x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 21 = 0$$

b) A elipse tem eixo maior vertical e:

$$a = 4, \quad b = 2, \quad x_C = 5 \quad e \quad y_C = 6$$

Tomemos então a equação 13.5:

$$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} + \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1$$

Fazendo as substituições:

$$\frac{(y - 6)^2}{16} + \frac{(x - 5)^2}{4} = 1$$

Desenvolvendo os quadrados e eliminando os denominadores obtemos:

$$4x^2 + y^2 - 40x - 12y + 120 = 0$$

13.21) Consideremos uma elipse cuja equação é

$$x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 43 = 0$$

Obtenha sua equação reduzida.

Solução

Vamos agrupar os termos da equação dada, do seguinte modo:

$$(x^2 - 8x) + (9y^2 - 36y) = -43$$

Observe que a expressão do primeiro parênteses será transformada num quadrado perfeito se somarmos a ela o número **16**. No segundo parênteses, devemos somar **36**. A equação fica:

$$(x^2 - 8x + 16) + (9y^2 - 36y + 36) = -43 + 16 + 36$$

ou: $(x - 4)^2 + 9(y^2 - 4y + 4) = 9$

ou ainda: $(x - 4)^2 + 9(y - 2)^2 = 9$

Dividindo todos os termos por 9 obtemos:

$$\frac{(x - 4)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{1} = 1$$

Nesta equação é fácil perceber que:

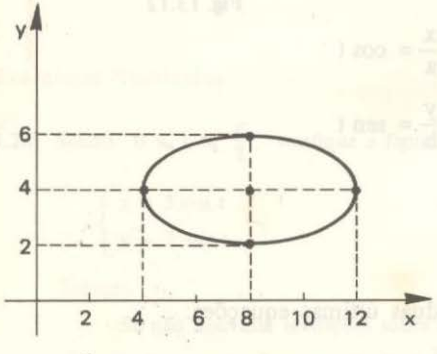
$$a^2 = 9 \quad e \quad b^2 = 1$$

e que o centro é o ponto C(4; 2).

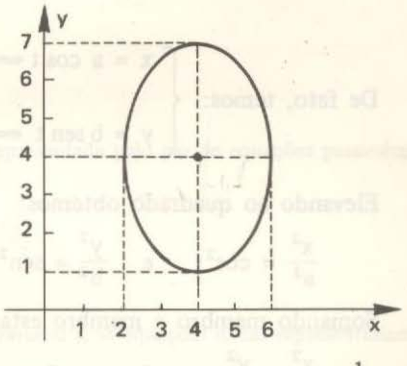
Exercícios Propostos

13.22) Dê as equações das elipses cujos desenhos são dados a seguir:

a)



b)



13.23) Uma elipse, cujo eixo maior é vertical, tem centro C(−1; 1), excentricidade $e = \frac{1}{3}$ e eixo menor de medida 6. Dê a equação da elipse.

13.24) Uma elipse de eixo maior horizontal passa pelos pontos (0; −1) e (3; 1). Dê sua equação sabendo que o centro é o ponto (3; −1).

13.25) Uma elipse tem equação

$$x^2 + 2y^2 + 2x - 4y - 7 = 0$$

Determine:

a) coordenadas do centro
b) coordenadas dos focos
c) excentricidade

13.26) Determine as coordenadas do centro e dos focos da elipse cuja equação é:

$$3x^2 + 2y^2 + 12x + 4y + 8 = 0$$

13.27) Dê a equação reduzida da elipse cuja equação é:

$$9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$$

13.8 – EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Uma elipse de centro na origem e focos no eixo Ox pode ser representada pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \text{ sen } t \end{cases} \qquad (13.6)$$

onde $0 \leqslant t < 2\pi$.

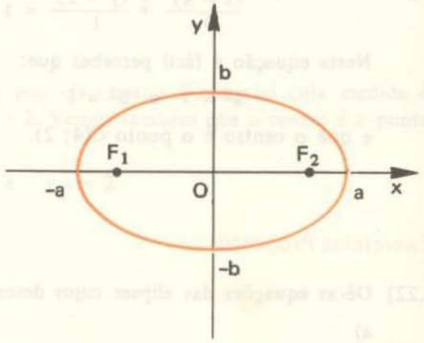


Fig. 13.12

De fato, temos: $\begin{cases} x = a \cos t \iff \dfrac{x}{a} = \cos t \\ y = b \text{ sen } t \iff \dfrac{y}{b} = \text{sen } t \end{cases}$

Elevando ao quadrado obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2} = \text{sen}^2 t$$

Somando membro a membro estas duas últimas equações:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \underbrace{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}_{1}$$

isto é: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Observemos ainda que se $0 \leqslant t < 2\pi$, tanto sen t como cos t assumem **todos** os valores do intervalo [-1; 1], isto é:

$$-1 \leqslant \cos t \leqslant 1 \quad e \quad -1 \leqslant \text{sen } t \leqslant 1$$

Portanto: $-a \leqslant a \cos t \leqslant a \quad e \quad -b \leqslant b \text{ sen } t \leqslant b$

ou: $-a \leqslant x \leqslant a \quad e \quad -b \leqslant y \leqslant b$

Isto quer dizer que a variável **x** assume **todos** os valores do intervalo [-a; a] e a variável y assume **todos** os valores do intervalo [-b; b]. Daí concluímos que as equações 13.6 representam a elipse "inteira".

Das considerações anteriores é fácil concluir que uma elipse como a da figura 13.13 pode ser representada pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_C + a \cos t \\ y = y_C + b \text{ sen } t \end{cases}$$

com $0 \leqslant t < 2\pi$.

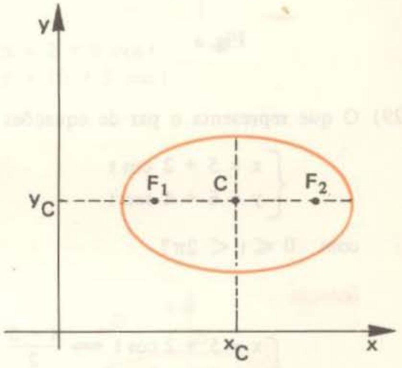


Fig. 13.13

Discutimos acima apenas o caso em que a elipse tem eixo maior horizontal. Mas considerações semelhantes podem ser feitas para uma elipse de eixo vertical.

Exercícios Resolvidos

13.28) Sendo $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, verifique a figura representada pelo par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \text{ sen } t \end{cases}$$

Solução

Se não houvesse restrições sobre a variável **t**, as equações dadas representariam a elipse da figura **a**. Porém, para $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$, temos:

$0 \leqslant \cos t \leqslant 1 \quad e \quad 0 \leqslant \text{sen } t \leqslant 1$

ou: $0 \leqslant 3 \cos t \leqslant 3 \quad e \quad 0 \leqslant 2 \text{ sen } t \leqslant 2$

ou ainda: $0 \leqslant x \leqslant 3 \quad e \quad 0 \leqslant y \leqslant 2$

Portanto as equações dadas representam o arco de elipse da figura b.

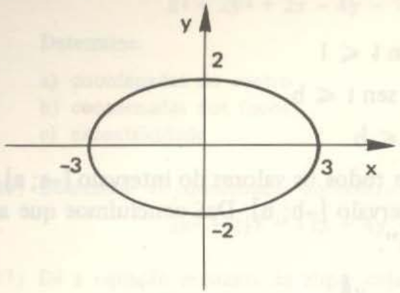


Fig. a

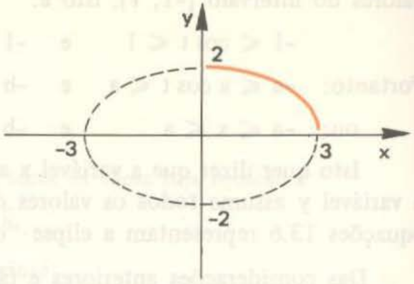


Fig. b

13.29) O que representa o par de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 5 + 2\cos t \\ y = 6 + 4\,\text{sen}\, t \end{cases}$$

com $0 \leqslant t < 2\pi$?

Solução

Temos: $$\begin{cases} x = 5 + 2\cos t \iff \dfrac{x-5}{2} = \cos t \\ y = 6 + 4\,\text{sen}\, t \iff \dfrac{y-6}{4} = \text{sen}\, t \end{cases}$$

Daí:

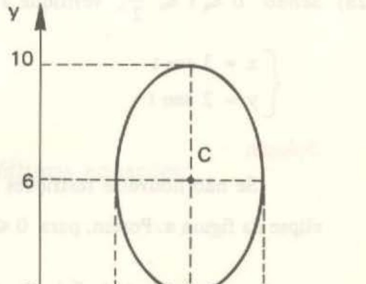
$$\frac{(x-5)^2}{2^2} = \cos^2 t \quad \text{e} \quad \frac{(y-6)^2}{4^2} = \text{sen}^2 t$$

Somando membro a membro:

$$\frac{(x-5)^2}{2^2} + \frac{(y-6)^2}{4^2} = \cos^2 t + \text{sen}^2 t = 1$$

Trata-se portanto de uma elipse de centro C(5; 6), eixo maior vertical, cuja medida é 8 e eixo menor de medida 4. Devemos ressaltar que se trata da elipse "inteira", pelo fato de

$0 \leqslant t < 2\pi$.



Exercícios Propostos

13.30) Represente as figuras cujas equações paramétricas são dadas a seguir:

a) $\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 2 \text{ sen } t \end{cases}$ onde $0 \leqslant t < 2\pi$

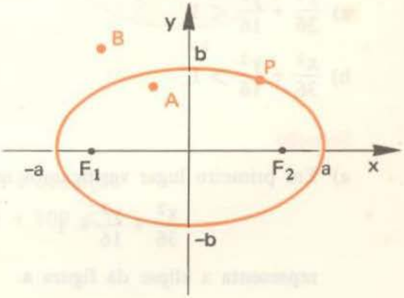
b) $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 5 \text{ sen } t \end{cases}$ onde $0 \leqslant t \leqslant \pi$

13.31) Sendo $0 \leqslant t < 2\pi$, dê as equações reduzidas das elipses cujas equações paramétricas são dadas a seguir:

a) $\begin{cases} x = -4 + 8 \cos t \\ y = 7 + 5 \text{ sen } t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2 + 6 \cos t \\ y = 10 + 9 \text{ sen } t \end{cases}$

13.9 – INEQUAÇÕES

Consideremos uma elipse de centro na origem e focos no eixo Ox. Conforme vimos, sendo P(x; y) um ponto qualquer da elipse temos:



$$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = 2a \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Consideremos agora um ponto A(x; y) situado no interior da elipse. É óbvio que neste caso temos

$$\delta_{AF_1} + \delta_{AF_2} < \delta_{PF_1} + \delta_{PF_2}$$

isto é: $\delta_{AF_1} + \delta_{AF_2} < 2a$ (I)

Desenvolvendo a relação (I), chegaremos a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

Por considerações análogas, podemos concluir que, para um ponto B(x; y) qualquer no exterior da elipse, vale:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$$

Em resumo, dado um ponto P(x; y) qualquer do plano, temos:

P está sobre a elipse	$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
P está no interior da elipse	$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$
P está no exterior da elipse	$\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$

A discussão acima foi feita para uma elipse de centro na origem e focos no eixo Ox. Porém, conclusões semelhantes valem para elipses em outras posições.

Exercícios Resolvidos

13.32) Represente os pontos (x; y) que satisfaçam a condição dada em cada caso a seguir:

a) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} < 1$

b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} > 1$

c) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} \leqslant 1$

Solução

a) Em primeiro lugar verificamos que a equação

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

representa a elipse da figura a.

Portanto, a inequação $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} < 1$ representa o interior da elipse (figura b).

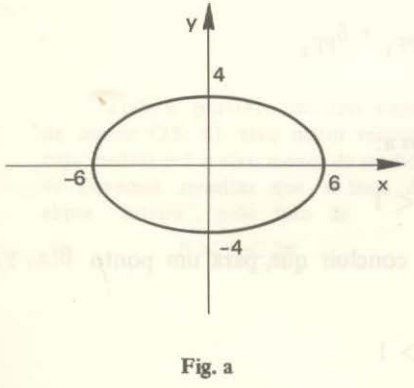


Fig. a

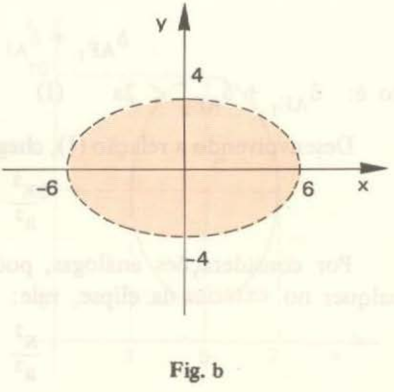
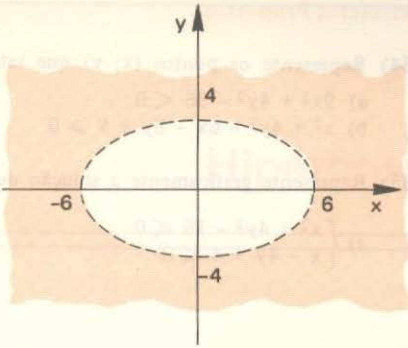


Fig. b

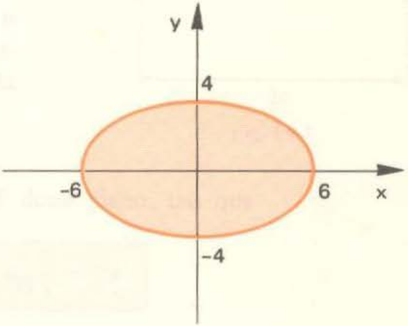
b) A inequação $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} > 1$ representa o exterior da elipse de equação

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$



c) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} \leqslant 1$

Neste caso temos a elipse reunida com o seus pontos interiores.



13.33) Represente a região do plano correspondente à condição

$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 \leqslant 0$$

Solução

Em primeiro lugar verificamos que:

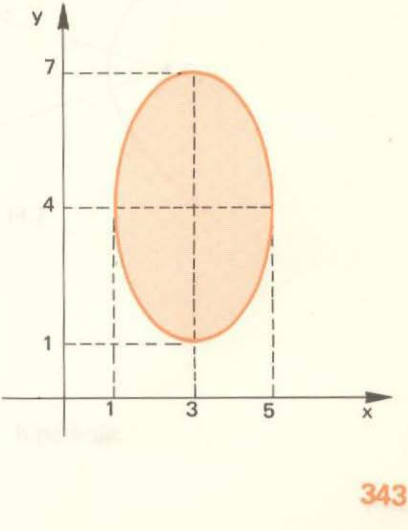
$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 \leqslant 0 \iff$$

$$\iff \frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} \leqslant 1$$

Portanto, a condição dada representa a elipse de equação

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

reunida com o seu interior.



Exercícios Propostos

13.34) Represente os pontos (x; y) que satisfazem a condição dada em cada caso a seguir:

a) $9x^2 + 4y^2 - 36 < 0$

b) $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 9 \geqslant 0$

13.35) Represente graficamente a solução de cada sistema a seguir:

a) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 \leqslant 0 \\ x - 4y + 4 \leqslant 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 36 < 0 \\ x^2 + y^2 - 4 > 0 \end{cases}$

Capítulo

14

Hipérbole

14.1 – DEFINIÇÃO

Consideremos sobre um plano α dois pontos **distintos** F_1 e F_2 cuja distância é igual a 2c. Consideremos ainda um número real 2a tal que

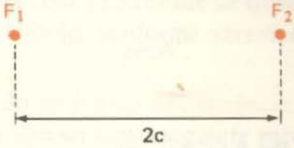


Fig. 14.1

$$0 < 2a < 2c$$

O conjunto de todos os pontos P desse plano, tais que

$$|\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2a$$

recebe o nome de HIPÉRBOLE

Para a hipérbole da figura 14.2 temos:

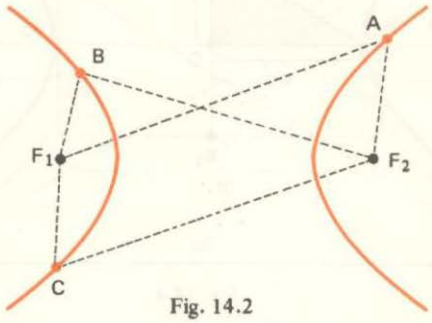


Fig. 14.2

$$|\delta_{AF_1} - \delta_{AF_2}| = 2a$$

$$|\delta_{BF_1} - \delta_{BF_2}| = 2a$$

$$|\delta_{CF_1} - \delta_{CF_2}| = 2a$$

onde A, B e C são pontos quaisquer da hipérbole.

Sejam A_1 e A_2 os pontos da hipérbole que estão sobre a reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ (figura 14.3). Pela simetria da hipérbole é fácil concluir que

$$\delta_{F_1A_1} = \delta_{A_2F_2}$$

Por outro lado devemos destacar que

$$\delta_{A_1A_2} = 2a$$

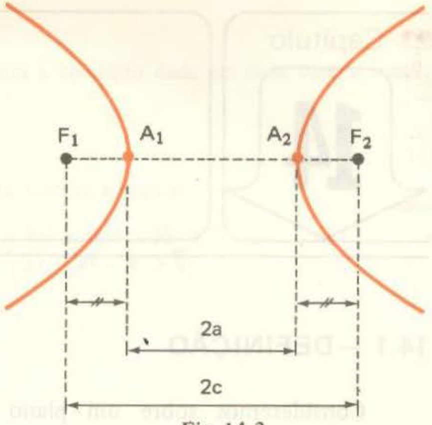


Fig. 14.3

De fato, temos:

$$\delta_{A_1A_2} = \delta_{A_1F_2} - \underbrace{\delta_{A_2F_2} = \delta_{A_1F_2} - \delta_{A_1F_1}}_{\text{iguais}} = |\delta_{A_1F_2} - \delta_{A_1F_1}| = 2a\ .$$

14.2 – NOMENCLATURA

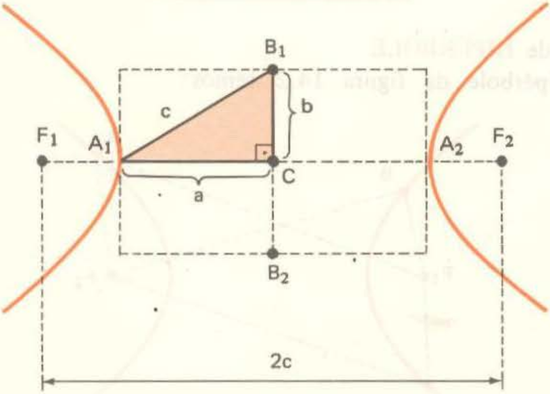


Fig. 14.4

focos: são os pontos F_1 e F_2

distância focal: é a distância 2c entre os focos

centro: é o ponto médio C do segmento $\overline{F_1F_2}$

vértices: são os pontos A_1 e A_2

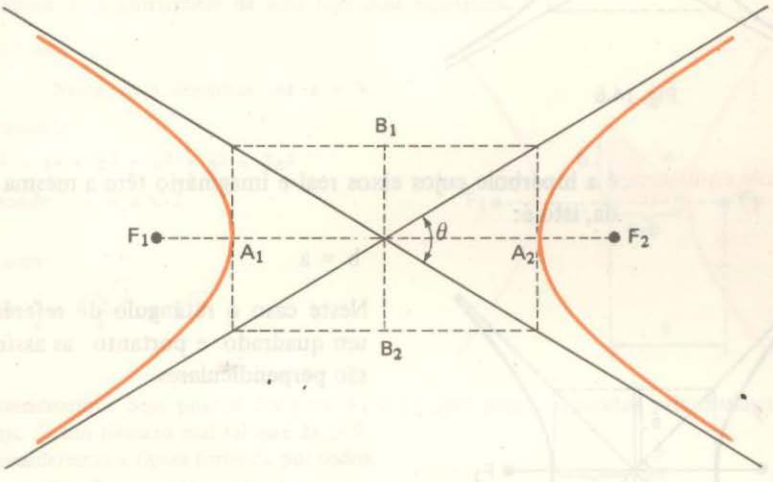
eixo real (ou transverso): é o segmento $\overline{A_1A_2}$, cujo comprimento é 2a

eixo imaginário (ou conjugado): é o segmento $\overline{B_1B_2}$ mostrado na figura 14.4, cujo comprimento é 2b. O valor de b é definido pela relação

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad (14.1)$$

onde c, a e b são as medidas dos lados do triângulo retângulo sombreado na figura 14.4. O eixo imaginário constitui um elemento artificialmente introduzido na figura com a finalidade de simplificar a equação da hipérbole, conforme veremos mais adiante.

assíntotas: são as retas que contêm as diagonais do retângulo de referência (mostrado na figura 14.5). Estas duas retas apresentam a seguinte particularidade: à medida que consideramos pontos da hipérbole mais afastados dos focos, nota-se que eles se aproximam das assíntotas, embora a hipérbole nunca chegue a cortar essas retas. Vamos chamar o ângulo θ assinalado na figura 14.5, de abertura da hipérbole.



(Fig. 14.5)

excentricidade: é o número e dado por

$$e = \frac{c}{a}$$

Observando que $c > a$, concluímos que $e > 1$. (Compare com a elipse, onde $0 < e < 1$). A excentricidade da hipérbole está relacionada com sua **abertura**. Na figura 14.6 temos duas hipérboles cujos eixos reais têm a mesma medida. Na primeira, os focos estão mais afastados um do outro, de modo que a excentricidade é maior e a hipérbole apresenta os seus ramos "mais abertos". Assim, quanto maior a excentricidade, maior a abertura.

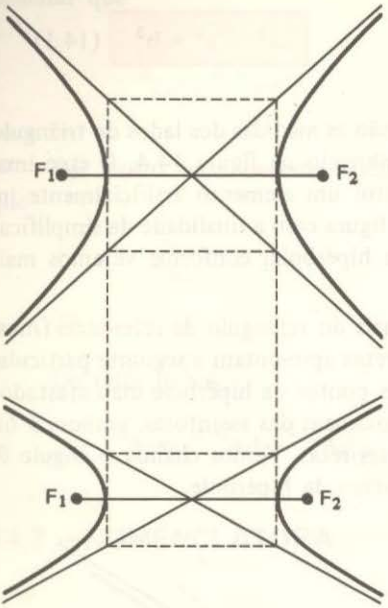


Fig. 14.6

hipérbole eqüilátera: é a hipérbole cujos eixos real e imaginário têm a mesma medida, isto é:

$$b = a$$

Neste caso o retângulo de referência é um quadrado e portanto as assíntotas são **perpendiculares**.

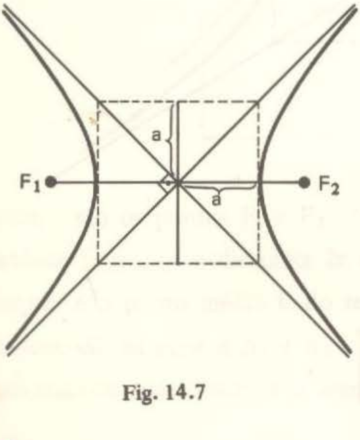
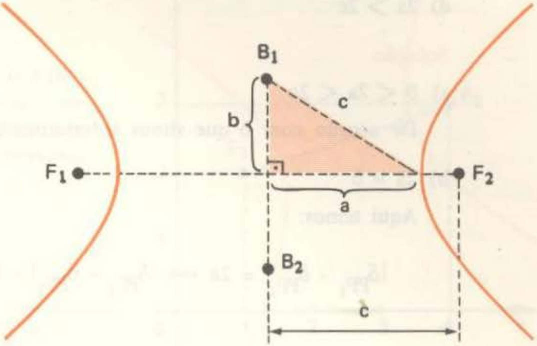


Fig. 14.7

14.1) Uma hipérbole tem distância focal $2c = 10$ e eixo imaginário de medida $2b = 6$. Determine:

a) a medida do eixo real
b) a excentricidade



Solução

a) Temos:

$$\begin{cases} 2b = 6 \iff b = 3 \\ 2c = 10 \iff c = 5 \end{cases}$$

Pela relação 14.1:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ou: $5^2 = a^2 + 3^2$

donde: $a = 4$

Portanto, o eixo real tem medida $2a = 8$

b) $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

14.2) Calcule a excentricidade de uma hipérbole eqüilátera.

Solução

Neste caso devemos ter $a = b$.

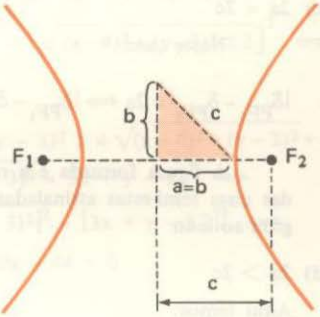
Portanto:

$c^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Donde: $c = a\sqrt{2}$

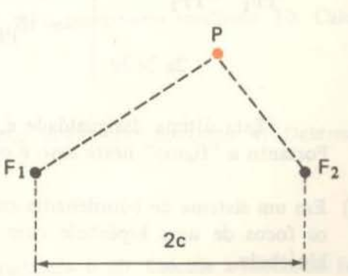
Assim:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$



14.3) Consideremos dois pontos distintos F_1 e F_2 num plano, separados pela distância $2c$. Seja $2a$ um número real tal que $2a \geqslant 0$.
Consideremos a figura formada por todos os pontos P desse plano tais que

$$| \delta_{PF_1} - \delta_{PF_2} | = 2a$$



Verifique que figura é essa em cada um dos casos a seguir:

a) $0 < 2a < 2c$
b) $2a = 0$
c) $2a = 2c$
d) $2a > 2c$

Solução

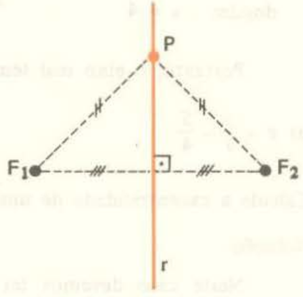
a) $0 < 2a < 2c$

De acordo com o que vimos anteriormente, neste caso a figura é uma **hipérbole**.

b) $2a = 0$

Aqui temos:

$$|\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2a \iff |\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 0 \iff \delta_{PF_1} = \delta_{PF_2}$$

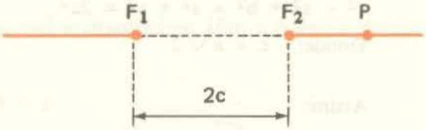


Neste caso então, a figura formada é a **mediatriz r** do segmento $\overline{F_1F_2}$

c) $2a = 2c$

Neste caso:

$$|\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2a \iff |\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2c$$



A figura formada é a reunião das duas semi-retas assinaladas na figura ao lado

d) $2a > 2c$

Aqui temos:

$$\left.\begin{array}{r} |\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2a \\ 2a > 2c \end{array}\right\} \Rightarrow |\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| > 2c$$

Esta última desigualdade é, obviamente, falsa para qualquer ponto P do plano. Portanto a "figura" neste caso é o conjunto vazio.

14.4) Em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, os pontos $F_1(1; 2)$ e $F_2(4; 3)$ são os focos de uma hipérbole cujo eixo real mede $2a = 2$. Determine a equação dessa hipérbole.

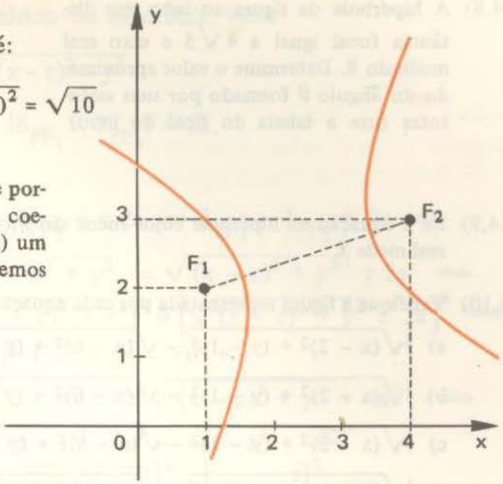
Solução

A distância entre os focos é:

$$2c = \delta_{F_1F_2} = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{10}$$

Como $2a = 2$, temos $0 < 2a < 2c$ e portanto os dados do problema estão coerentes. Pela definição, sendo $P(x; y)$ um ponto qualquer da hipérbole, devemos ter:

$$|\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2a$$



Mas: $\delta_{PF_1} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ e $\delta_{PF_2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}$

Assim:

$$|\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2a \iff \delta_{PF_1} - \delta_{PF_2} = \pm 2a \iff \delta_{PF_1} = \delta_{PF_2} \pm 2a \iff$$

$$\iff \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \pm 2 \iff$$

$$\iff \left[\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} \pm 2\right]^2 \iff$$

$$\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 =$$

$$= (x-4)^2 + (y-3)^2 \pm 4\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} + 4 \iff$$

$$\iff \pm 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = 3x + y - 12 \iff$$

$$\iff \left[\pm 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2}\right]^2 = [3x + y - 12]^2 \iff$$

$$\iff -5x^2 + 3y^2 - 6xy + 40x - 44 = 0$$

Exercícios Propostos

14.5) Uma hipérbole tem eixo real medindo 8 e eixo imaginário medindo 10. Calcule:

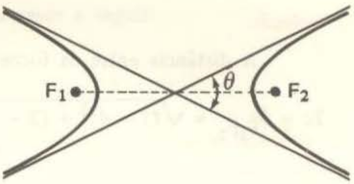
a) a distância focal
b) a excentricidade

14.6) Uma hipérbole de excentricidade $\frac{4}{3}$ tem eixo imaginário medindo 4. Determine:

a) medida do eixo real
b) distância focal

14.7) A medida do eixo real de uma hipérbole eqüilátera é 20. Calcule a distância focal.

14.8) A hipérbole da figura ao lado tem distância focal igual a $4\sqrt{5}$ e eixo real medindo 8. Determine o valor aproximado do ângulo θ formado por suas assíntotas (use a tabela do final do livro)



14.9) Dê a equação da hipérbole cujos focos são $F_1(-2; -1)$ e $F_2(3; 1)$, sabendo que seu eixo real mede 3.

14.10) Verifique a figura representada por cada equação a seguir:

a) $|\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} - \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}| = 4$

b) $|\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} - \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}| = 5$

c) $|\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} - \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}| = 6$

d) $|\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} - \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2}| = 0$

14.3 – HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM E FOCOS EM Ox

Consideremos uma hipérbole cujo centro está na origem do sistema de coordenadas e cujos focos estão no eixo Ox.

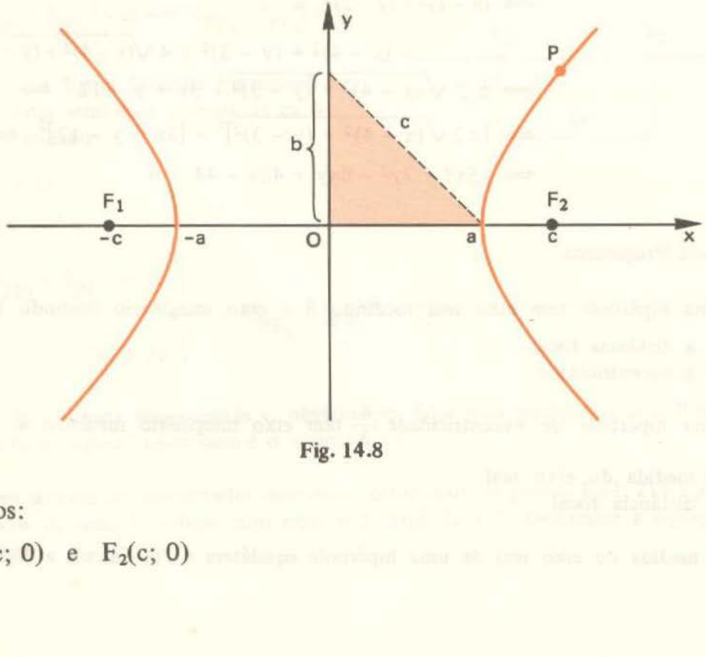


Fig. 14.8

Temos:

$F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$

Sendo P(x; y) um ponto genérico da hipérbole, vem:

$\delta_{PF_1} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ e $\delta_{PF_2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Pela definição de hipérbole: $|\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2a.$

Assim:

$$|\delta_{PF_1} - \delta_{PF_2}| = 2a \iff \delta_{PF_1} - \delta_{PF_2} = \pm 2a \iff \delta_{PF_1} = \delta_{PF_2} \pm 2a \iff$$

$$\iff \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a \iff$$

$$\iff \left[\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\right]^2 \iff$$

$$\iff (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + $$

$$+ y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 \iff$$

$$\iff \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2 \iff$$

$$\iff \left[\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right]^2 = \left[cx - a^2\right]^2 \iff$$

$$\iff (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \iff$$

$$\iff \underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2}x^2 - a^2y^2 = a^2\underbrace{(c^2 - a^2)}_{b^2} \iff$$

$$\iff b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

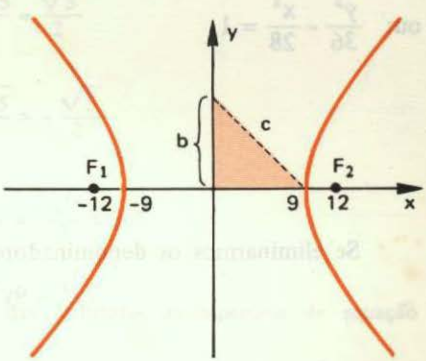
Dividindo todos os termos desta última equação por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (14.2)$$

que é a equação reduzida da hipérbole.

Exemplo

Para a hipérbole da figura ao lado temos:



$a = 9$ e $c = 12$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ vem:

$b^2 = c^2 - a^2 = 12^2 - 9^2 = 63$

donde: $b = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$

A equação reduzida dessa hipérbole é $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, isto é, $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{63} = 1$. Se eliminarmos os denominadores, obteremos a equação:

$$7x^2 - 9y^2 - 567 = 0$$

14.4 – HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM E FOCOS EM Oy

Consideremos uma hipérbole cujo centro está na origem do sistema de coordenadas e cujos focos estão no eixo Oy. Para obtermos sua equação podemos aproveitar a discussão do item anterior, permutando as variáveis x e y. Assim, neste caso, a equação reduzida da hipérbole é:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (14.3)$$

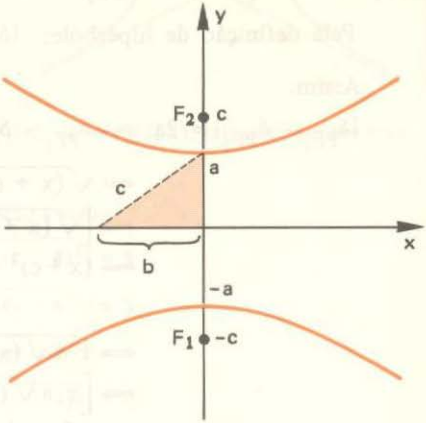


Fig. 14.9

Exemplo

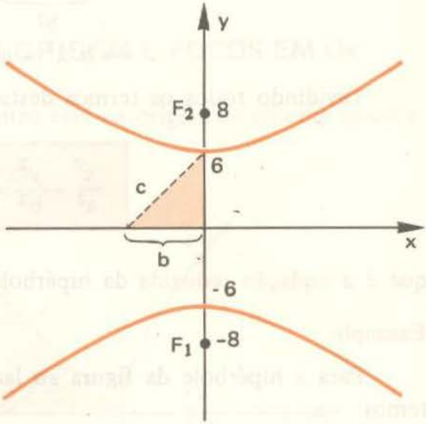
Para a hipérbole da figura ao lado temos c = 8 e a = 6. Portanto:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 8^2 - 6^2 = 28$$

Essa hipérbole tem equação reduzida:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

ou: $$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{28} = 1$$



Se eliminarmos os denominadores obteremos a equação:

$$7y^2 - 9y^2 - 252 = 0$$

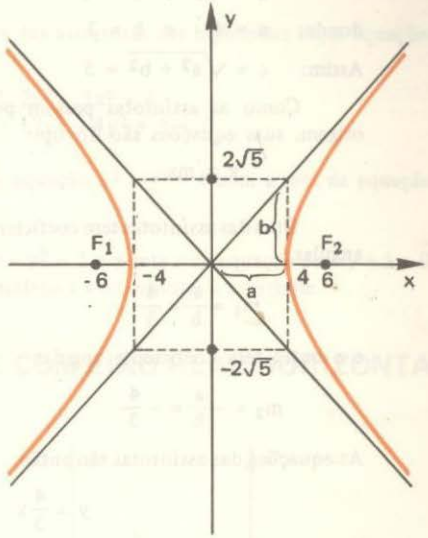
Exercícios Resolvidos

14.11) Uma hipérbole tem equação $5x^2 - 4y^2 - 80 = 0$. Dê a equação reduzida e as equações das assíntotas.

Solução

$$5x^2 - 4y^2 - 80 = 0 \iff 5x^2 - 4y^2 = 80 \iff \frac{5x^2}{80} - \frac{4y^2}{80} = \frac{80}{80} \iff \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$$

Obtivemos uma equação reduzida que tem a forma da equação 14.2. Portanto trata-se de uma hipérbole com centro na origem, focos no eixo Ox, tal que



$$a^2 = 16 \quad e \quad b^2 = 20$$

donde: $a = 4$ e $b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Assim: $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 20 = 36$

ou: $c = 6$

As assíntotas passam pela origem e portanto devem ter equação do tipo

$$y = mx$$

Uma das assíntotas tem coeficiente angular

$$m_1 = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

e a outra tem coeficiente angular

$$m_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-2\sqrt{5}}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

As equações das assíntotas são portanto:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}x \quad e \quad y = \frac{-\sqrt{5}}{2}x$$

14.12) Dê a equação reduzida e as equações das assíntotas da hipérbole de equação $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$.

Solução

$$16x^2 - 9y^2 + 144 = 0 \iff 16x^2 - 9y^2 = -144 \iff \frac{16x^2}{-144} - \frac{9y^2}{-144} = \frac{-144}{-144} \iff$$

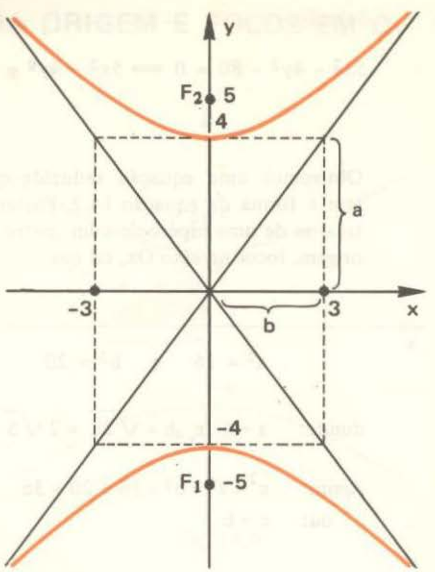
$$\iff \frac{x^2}{-9} + \frac{y^2}{16} = 1 \iff \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

Obtivemos uma equação reduzida que tem a forma da equação 14.3. Portanto, trata-se de uma hipérbole de centro na origem e focos no eixo Oy, tal que

$$a^2 = 16 \quad e \quad b^2 = 9$$

donde: $a = 4 \quad e \quad b = 3$

Assim: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$



Como as assíntotas passam pela origem, suas equações são do tipo

$$y = mx$$

Uma das assíntotas tem coeficiente angular

$$m_1 = \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

e a outra tem coeficiente angular

$$m_2 = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{3}$$

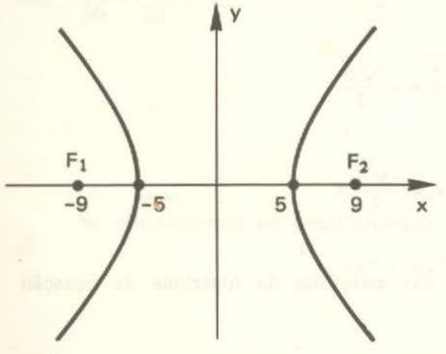
As equações das assíntotas são então:

$$y = \frac{4}{3}x \quad e \quad y = -\frac{4}{3}x$$

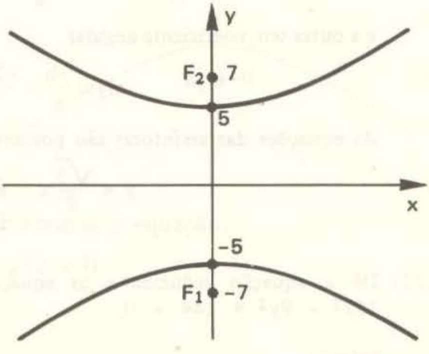
Exercícios Propostos

14.13) Dê as equações reduzidas das hipérboles desenhadas a seguir:

a)



b)



14.14) Dê as equações das assíntotas das hipérboles do exercício anterior.

14.15) Uma hipérbole tem centro na origem, eixo imaginário medindo 10, focos no eixo Oy e excentricidade $\frac{3}{2}$. Dê sua equação.

14.16) Uma hipérbole eqüilátera tem centro na origem e focos no eixo Ox. Sabendo que a distância focal é 6, dê sua equação.

14.17) Dê a excentricidade de uma hipérbole cujas assíntotas têm equações $y = \pm\frac{2}{7}x$.

14.18) Determine a excentricidade e as equações das assíntotas das hipérboles cujas equações são dadas a seguir.

a) $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$

b) $x^2 - y^2 = 4$

c) $2y^2 - 3x^2 = 6$

d) $12x^2 - 4y^2 + 3 = 0$

14.19) Determine as interseções da hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 4$ com a reta de equação $x - 2y + 2 = 0$.

14.20) Consideremos a hipérbole de equação $2x^2 - y^2 = 2$ e a reta r de equação $3x - y + 5 = 0$. Determine as equações das retas que são paralelas a r e tangentes à hipérbole.

14.5 – EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE COM EIXO REAL HORIZONTAL

Consideremos uma hipérbole de eixo real horizontal e centro $C(x_C; y_C)$. Para obtermos sua equação podemos adotar o sistema de coordenadas $x'Cy'$ como mostra a figura 14.10. De acordo com o que vimos no item 14.3, a equação da hipérbole em relação ao sistema $x'Cy'$ é:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1 \quad \text{(I)}$$

Mas: $x' = x - x_C$ e $y' = y - y_C$

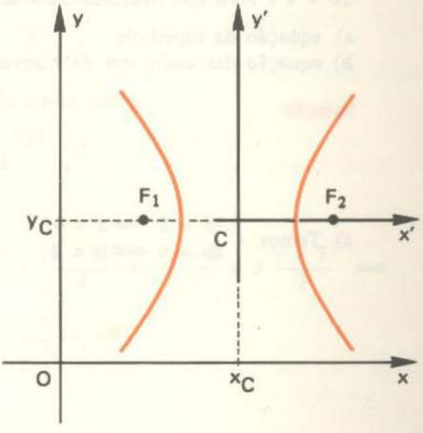


Fig. 14.10

Substituindo em (I) obtemos:

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1 \quad (14.4)$$

que é a equação reduzida da hipérbole, em relação ao sistema xOy.

14.6 – EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE COM EIXO REAL VERTICAL

Consideremos uma hipérbole de eixo real vertical e centro $C(x_C; y_C)$. Para obtermos sua equação podemos aproveitar o resultado do item anterior, permutando as variáveis x e y. Assim obtemos:

$$\frac{(y - y_C)^2}{a^2} - \frac{(x - x_C)^2}{b^2} = 1 \quad (14.5)$$

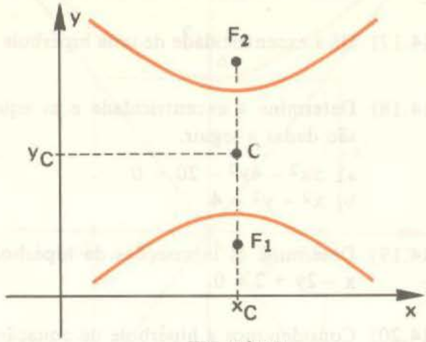


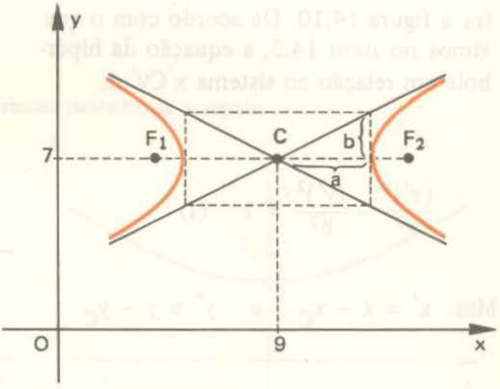
Fig. 14.11

Exercícios Resolvidos

14.21) Uma hipérbole de eixo real horizontal e centro C(9; 7) tem eixo imaginário medindo 2b = 4 e eixo real medindo 2a = 8. Obtenha:

a) equação da hipérbole
b) equação das assíntotas da hipérbole

Solução



a) Temos: $\begin{cases} 2a = 8 \iff a = 4 \\ 2b = 4 \iff b = 2 \end{cases}$

A hipérbole tem eixo real horizontal; portanto sua equação é

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

isto é: $$\frac{(x - 9)^2}{16} - \frac{(y - 7)^2}{4} = 1$$

Se desenvolvermos os quadrados e eliminarmos os denominadores, obteremos:

$$x^2 - 4y^2 - 18x + 56y - 131 = 0$$

b) As assíntotas passam pelo centro C. Portanto, suas equações são da forma

$$y - y_C = m(x - x_C)$$

isto é: $y - 7 = m(x - 9)$ (I)

Para uma das assíntotas o coeficiente angular é

$$m_1 = \frac{b}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Para a outra assíntota, o coeficiente angular é

$$m_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

Substituindo em (I) obtemos as equações das duas assíntotas:

$$y - 7 = \frac{1}{2}(x - 9) \quad \text{e} \quad y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 9)$$

Uma regra prática para obter as equações das assíntotas é fazer o seguinte:

"na equação reduzida, substituímos o número 1 do segundo membro pelo número 0".

No nosso caso, a equação reduzida da hipérbole é

$$\frac{(x - 9)^2}{16} - \frac{(y - 7)^2}{4} = 1$$

Assim, as equações das assíntotas são dadas por:

$$\frac{(x - 9)^2}{16} - \frac{(y - 7)^2}{4} = 0$$

Mas:

$$\frac{(x - 9)^2}{16} - \frac{(y - 7)^2}{4} = 0 \iff \frac{(x - 9)^2}{16} = \frac{(y - 7)^2}{4} \iff \frac{x - 9}{4} = \pm\frac{y - 7}{2} \iff$$

$$\iff y - 7 = \pm\frac{1}{2}(x - 9)$$

Obtemos então as assíntotas:

$$y - 7 = \frac{1}{2}(x - 9) \quad \text{e} \quad y - 7 = \frac{-1}{2}(x - 9)$$

14.22) Uma hipérbole cujo eixo real é paralelo a um dos eixos coordenados tem equação

$$3x^2 - y^2 - 6x - 4y + 2 = 0$$

Determine sua equação reduzida.

Solução

Vamos agrupar os termos da equação dada do seguinte modo:

$$(3x^2 - 6x) - (y^2 + 4y) = -2$$

Note que a expressão do primeiro parênteses ficará quadrado perfeito se somarmos 3 e a expressão do segundo parênteses ficará quadrado perfeito se somarmos 4.

Assim temos:

$$(3x^2 - 6x + 3) - (y^2 + 4y + 4) = -2 + 3 - 4$$

ou: $3(x - 1)^2 - (y + 2)^2 = -3$

Dividindo todos os termos por -3 chegamos a:

$$\frac{(x - 1)^2}{-1} + \frac{(y + 2)^2}{3} = 1$$

isto é: $\frac{(y + 2)^2}{3} - \frac{(x - 1)^2}{1} = 1$

Esta última equação é do tipo da equação 14.5. Concluímos então que trata-se de uma hipérbole de eixo real vertical, com $a^2 = 3$ e $b^2 = 1$, isto é, $a = \sqrt{3}$ e $b = 1$.

Exercícios Propostos

14.23) Consideremos uma hipérbole cujo eixo real é horizontal, o eixo imaginário mede 6, o eixo real mede 8 e o centro é C(-2; 1). Determine:

a) a equação da hipérbole
b) as equações das assíntotas

14.24) Uma hipérbole de centro C(4; -5) tem eixo real medindo 10, eixo imaginário medindo 8 e eixo real vertical. Determine:

a) a equação da hipérbole
b) a equação das assíntotas

14.25) Uma hipérbole tem focos $F_1(-3; 0)$ e $F_2(5; 0)$. Sabendo que sua excentricidade é igual a 2, determine sua equação.

14.26) Em cada caso a seguir é dada a equação de uma hipérbole de eixo real paralelo a um dos eixos coordenados. Determine, em cada caso, a equação reduzida.

a) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 3 = 0$
b) $2x^2 - 3y^2 - 4x - 30y - 67 = 0$

14.27) Em cada caso a seguir é dada a equação de uma hipérbole cujo eixo real é paralelo a um dos eixos coordenados. Determine as coordenadas do centro e dos focos e as equações das assíntotas:

a) $3x^2 - 5y^2 + 6x - 12 = 0$
b) $x^2 - 4y^2 + 8y - 20 = 0$
c) $2x^2 - 3y^2 + 4x + 6y - 7 = 0$
d) $x^2 - 2y^2 + 4x + 4y = 0$

14.7 – EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

Consideremos uma hipérbole de centro na origem e focos no eixo Ox. Podemos representar parametricamente essa hipérbole pelas equações:

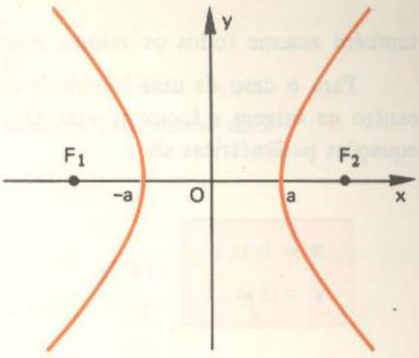


Fig. 14.12

$$\begin{cases} x = a \sec t \\ y = b \operatorname{tg} t \end{cases} \quad (14.6)$$

onde $0 \leqslant t < 2\pi$ e $\begin{cases} t \neq \pi/2 \\ t \neq 3\pi/2 \end{cases}$

De fato:

$$\begin{cases} x = a \sec t \Longrightarrow x^2 = a^2 \sec^2 t \Longrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} = \sec^2 t \quad (I) \\ y = b \operatorname{tg} t \Longrightarrow y^2 = b^2 \operatorname{tg}^2 t \Longrightarrow \dfrac{y^2}{b^2} = \operatorname{tg}^2 t \quad (II) \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro as equações (I) e (II) obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t \quad (III)$$

Mas, da Trigonometria, sabemos que

$$\sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 1$$

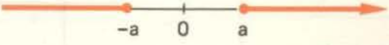
Portanto, a equação (III) pode ser escrita:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação reduzida de uma hipérbole, com centro na origem e focos em Ox. Porém, para termos certeza de que as equações 14.6 representam a hipérbole "inteira" e não apenas "uma parte", devemos observar que, para $0 \leqslant t < 2\pi$ e $t \neq \frac{\pi}{2}$ e $t \neq \frac{3\pi}{2}$, temos:

1º) sec t assume todos os valores reais com exceção do intervalo $]-1; 1[$
Portanto, a variável x dada por

$$x = a \sec t$$



assume todos os valores reais com exceção do intervalo $]-a; a[$.

2º) tg t assume todos os valores reais. Portanto, a variável y, dada por

$$y = b \operatorname{tg} t$$

também assume todos os valores reais.

Para o caso de uma hipérbole com centro na origem e focos no eixo Oy, as equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = b \operatorname{tg} t \\ y = a \sec t \end{cases} \quad (14.7)$$

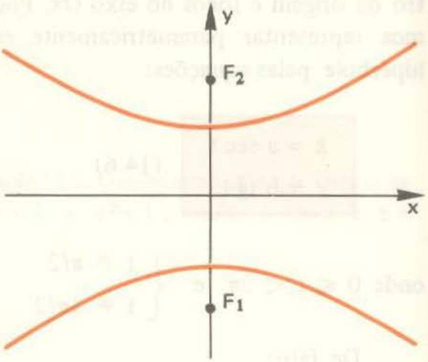


Fig. 14.13

Para uma hipérbole de eixo real horizontal e centro $C(x_C; y_C)$ as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = x_C + a \sec t \\ y = y_C + b \operatorname{tg} t \end{cases}$$

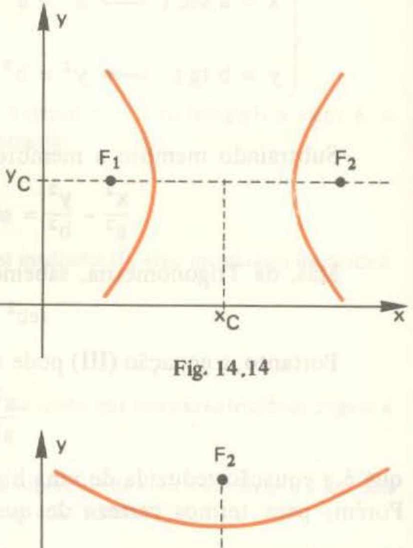


Fig. 14.14

Se a hipérbole tem eixo real vertical e centro $C(x_C; y_C)$, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = x_C + b \operatorname{tg} t \\ y = y_C + a \sec t \end{cases}$$

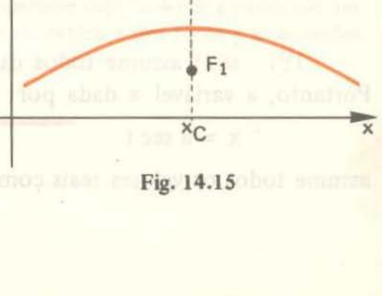


Fig. 14.15

Exercício Resolvido

14.28) Sendo t um número real qualquer, tal que

$$0 \leqslant t < 2\pi \quad e \quad t \neq \frac{\pi}{2} \quad e \quad t \neq \frac{3\pi}{2},$$

dê a equação reduzida da hipérbole cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = 6 \sec t \\ y = 8 \operatorname{tg} t \end{cases}$$

Solução

$$\begin{cases} x = 6 \sec t \Rightarrow x^2 = 36 \sec^2 t \Rightarrow \dfrac{x^2}{36} = \sec^2 t \quad \text{(I)} \\ y = 8 \operatorname{tg} t \Rightarrow y^2 = 64 \operatorname{tg}^2 t \Rightarrow \dfrac{y^2}{64} = \operatorname{tg}^2 t \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro as equações (I) e (II) obtemos:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = \sec^2 t - \operatorname{tg}^2 t = 1$$

Portanto a equação reduzida é: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1.$

Exercício Proposto

14.29) Seja t um número real qualquer, tal que:

$$0 \leqslant t < 2\pi \quad e \quad t \neq \frac{\pi}{2} \quad e \quad t \neq \frac{3\pi}{2}$$

Dê as equações reduzidas das hipérboles cujas equações paramétricas são dadas a seguir:

a) $\begin{cases} x = 5 \sec t \\ y = 4 \operatorname{tg} t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t \\ y = 7 \sec t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 4 + 6 \sec t \\ y = -2 + 3 \operatorname{tg} t \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = -3 + 4 \operatorname{tg} t \\ y = 1 + 9 \sec t \end{cases}$

14.8 – INEQUAÇÕES

Consideremos uma hipérbole de eixo real horizontal e centro C cuja equação reduzida é

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} = 1$$

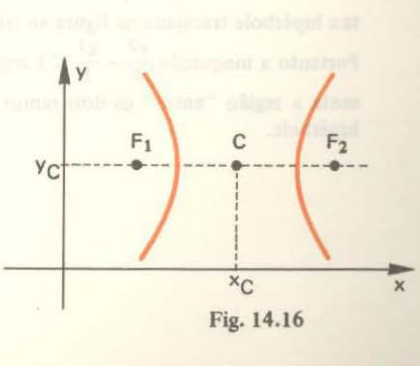


Fig. 14.16

Pode-se demonstrar que a inequação

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} < 1$$

representa a região do plano situada "entre" os dois ramos da hipérbole (figura 14.17) e a inequação

$$\frac{(x - x_C)^2}{a^2} - \frac{(y - y_C)^2}{b^2} > 1$$

representa a região do plano sombreada na figura 14.18.

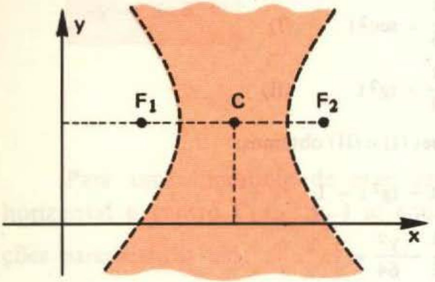


Fig. 14.17

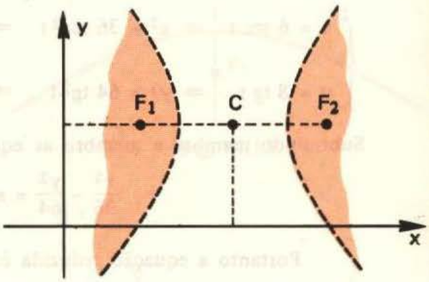


Fig. 14.18

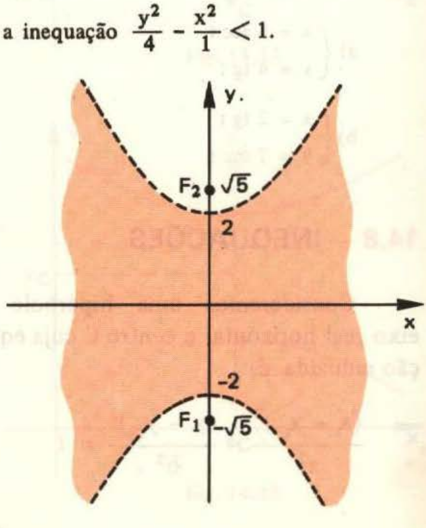
Conclusões análogas valem para uma hipérbole de eixo real vertical.

Exercício Resolvido

14.30) Represente a região do plano que satisfaz a inequação $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} < 1$.

Solução

A equação $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$ representa a hipérbole tracejada na figura ao lado. Portanto a inequação $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} < 1$ representa a região "entre" os dois ramos da hipérbole.



Exercícios Propostos

14.31) Em cada caso a seguir, represente a região do plano que satisfaz a condição dada.

a) $\frac{(x-3)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{4} \geqslant 1$ b) $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} > 1$

14.32) Resolva graficamente o sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 > 1 \\ x^2 + y^2 < 9 \end{cases}$$

Capítulo 15

Cônicas

15.1 – INTRODUÇÃO

Consideremos uma superfície cônica circular reta de duas folhas, de vértice V, eixo z e ângulo de abertura medindo α (figura 15.1). Qualquer reta que passa pelo vértice e está sobre a superfície cônica, recebe o nome de geratriz da superfície cônica. Na figura 15.1 as retas r e s são geratrizes.

Chamamos de seção cônica (ou, simplesmente, cônica) a interseção da superfície cônica com um plano π qualquer.

Suponhamos inicialmente que π **não passe** pelo vértice. Nesse caso pode-se demonstrar que:

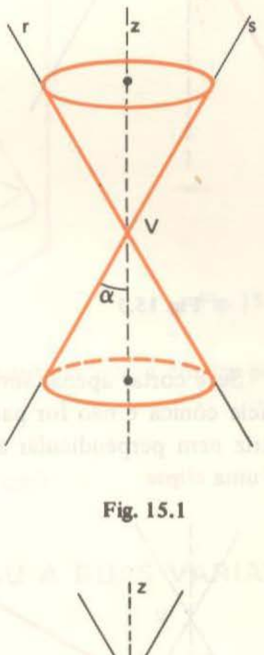


Fig. 15.1

1º) Se π for perpendicular a z, a cônica é uma circunferência.

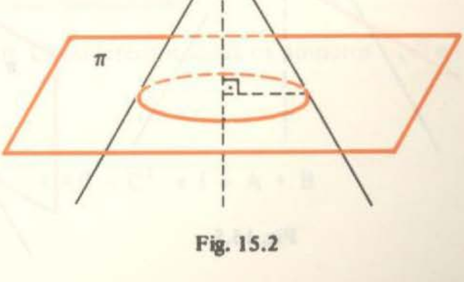


Fig. 15.2

2º) Se π for paralelo a uma geratriz, a cônica é uma parábola.

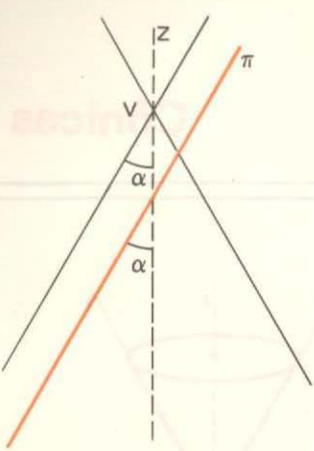


Fig. 15.3

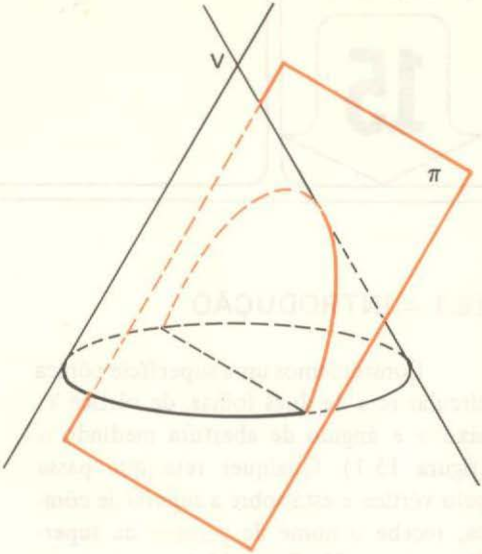


Fig. 15.4

3º) Se π cortar apenas uma folha da superfície cônica e não for paralelo a uma geratriz nem perpendicular ao eixo, a cônica é uma elipse.

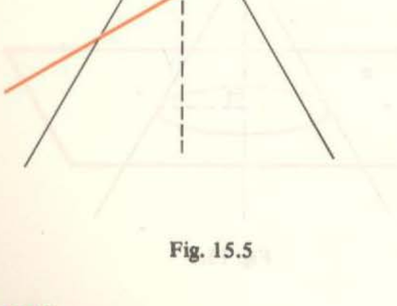


Fig. 15.5

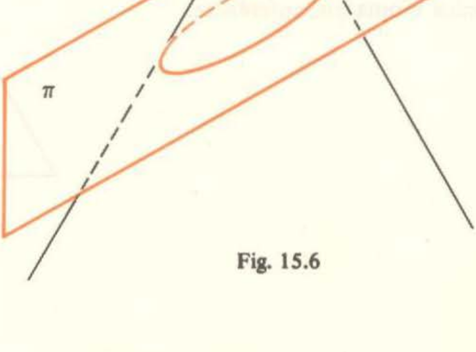


Fig. 15.6

4º) Se π cortar as duas folhas, a cônica será uma hipérbole.

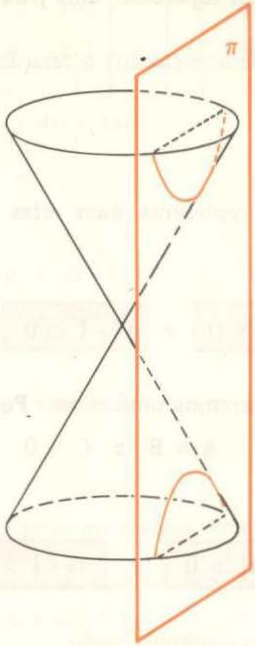


Fig. 15.7

Se o plano π passar pelo vértice, é fácil verificar que a cônica poderá ser:

1º) um ponto (o próprio vértice)
2º) uma reta (uma geratriz)
3º) duas retas concorrentes (duas geratrizes)

15.2 – EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU A DUAS VARIÁVEIS

Consideremos a equação

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \qquad (15.1)$$

onde A, B, C, D, E e F são números reais. Consideremos ainda os números G, H e I dados por:

$$G = \begin{vmatrix} A & C/2 & D/2 \\ C/2 & B & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix}, \quad H = 4\,AB - C^2 \quad e \quad I = A + B$$

Dependendo dos valores de G, H e I, a equação 15.1 pode representar uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, duas retas, um ponto ou, ainda, o conjunto vazio.

Damos a seguir (sem demonstração) a relação dos casos possíveis:

1º) $\boxed{G = 0}$

Neste caso a equação representa **duas retas** ou um ponto ou o conjunto vazio.

2º) $\boxed{G \neq 0}$ e $\boxed{H > 0}$ e $\boxed{G \cdot I < 0}$

Neste caso, em geral, teremos uma elipse. Porém, se

$$A = B \quad e \quad C = 0$$

teremos uma circunferência.

3º) $\boxed{G \neq 0}$ e $\boxed{H > 0}$ e $\boxed{G \cdot I > 0}$

A equação representa o conjunto vazio.

4º) $\boxed{G \neq 0}$ e $\boxed{H = 0}$

Neste caso a equação representa uma parábola.

5º) $\boxed{G \neq 0}$ e $\boxed{H < 0}$

A equação representa uma hipérbole.

Exercícios Resolvidos

15.1) Verifique que figura representa a equação

$$5x^2 + 8y^2 - 4xy - 18x + 9 = 0$$

Solução

Aqui temos:

$$A = 5,\ B = 8,\ C = -4,\ D = -18,\ E = 0 \text{ e } F = 9$$

Assim:

$$G = \begin{vmatrix} A & C/2 & D/2 \\ C/2 & B & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -9 \\ -2 & 8 & 0 \\ -9 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -324$$

$H = 4\,AB - C^2 = 4(5)(8) - (-4)^2 = 144$

$I = A + B = 5 + 8 = 13$

$G \cdot I = (-324)(13) < 0$

Vemos então que:

$$G \neq 0, \quad H > 0 \quad e \quad G \cdot I < 0$$

Portanto, trata-se de uma elipse.

15.2) Mostre que a equação

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x + 5y - 3 = 0$$

representa duas retas.

Solução

Antes de resolver este problema devemos lembrar-nos de que já resolvemos problemas semelhantes no capítulo 3.

Vamos agrupar os termos da equação dada do seguinte modo:

$$2x^2 + (5 - 3y)x + (5y - 2y^2 - 3) = 0$$

isto é, vamos interpretá-la como uma equação do segundo grau na variável x. O discriminante dessa equação é:

$$\Delta = (5 - 3y)^2 - 4(2)(5y - 2y^2 - 3) = 25y^2 - 70y + 49 = (5y - 7)^2$$

Assim, as raízes da equação são dadas por:

$$x = \frac{-5 + 3y \pm (5y - 7)}{4}$$

isto é: $x' = 2y - 3$ e $x'' = \dfrac{-y + 1}{2}$

Lembrando que $\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')}$

temos:

$$2x^2 + (5 - 3y)x + (5y - 2y^2 - 3) = 2[x - (2y - 3)]\left[x - \left(\frac{-y + 1}{2}\right)\right] =$$

$$= (x - 2y + 3)(2x + y - 1)$$

Assim:

$$2x^2 - 3yx - 2y^2 + 5x + 5y - 3 = 0 \iff (x - 2y + 3)(2x + y - 1) = 0 \iff$$

$$\iff x - 2y + 3 = 0 \quad ou \quad 2x + y - 1 = 0$$

Portanto, a equação dada representa as retas de equações $x - 2y + 3 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$.

15.3) Determine o valor de **k** de modo que a equação

$$2x^2 - 6y^2 - xy + 7x + ky - 4 = 0$$

represente duas retas.

Solução

Agrupemos os termos da equação do seguinte modo:

$$2x^2 + (7 - y)x + (ky - 6y^2 - 4) = 0$$

onde estamos interpretando x como variável. O discriminante dessa equação é:

$$\Delta = (7 - y)^2 - 4(2)(ky - 6y^2 - 4) = 49y^2 - (8k + 14)y + 81$$

Para que possamos efetuar a fatoração e assim obtermos duas retas, é necessário que Δ seja quadrado perfeito e para que isso ocorra, devemos impor que o discriminante Δ' da expressão Δ seja nulo.

$$\Delta' = [-(8k + 14)]^2 - 4(49)(81) = 0$$

Desenvolvendo as operações e simplificando, chegamos na equação

$$2k^2 + 7k - 490 = 0$$

cujas raízes são $k' = 14$ e $k'' = \frac{-35}{2}$.

Portanto, para que a equação dada represente duas retas, devemos ter $k = 14$ ou $k = \frac{-35}{2}$.

Exercícios Propostos

15.4) Verifique qual é a figura representada por cada uma das equações abaixo:

a) $4x^2 + y^2 - 4xy - 22x - 4y + 49 = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 - 24x + 4y + 33 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x - 4y + 20 = 0$

d) $5x^2 - 3y^2 + 6xy - 40x + 44 = 0$

e) $2x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 4y + 6 = 0$

15.5) Determine o valor de **k** de modo que a equação

$$x^2 - 2y^2 - xy + 5x - y + k = 0$$

represente duas retas.

15.3 – EXCENTRICIDADE E RETA DIRETRIZ

Consideremos num plano α uma reta **d** e um ponto **F** não pertencente a **d**. Consideremos a seguir a figura formada por todos os pontos P do plano α tais que

$$\delta_{PF} = k \cdot \delta_{Pd} \quad (15.2)$$

onde **k** é um número real positivo.

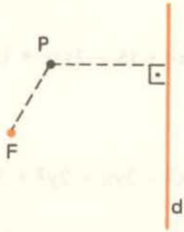


Fig. 15.8

Conforme o que estudamos no capítulo 12, sabemos que se $k = 1$ a figura é uma parábola.

Pode-se demonstrar que:

1º) Se $0 < k < 1$ a figura é uma elipse cuja excentricidade e é igual à constante k, o ponto F é um dos focos e a distância entre o centro C da elipse e a reta d é igual a $\frac{a}{e}$. A reta d é chamada de diretriz da elipse.

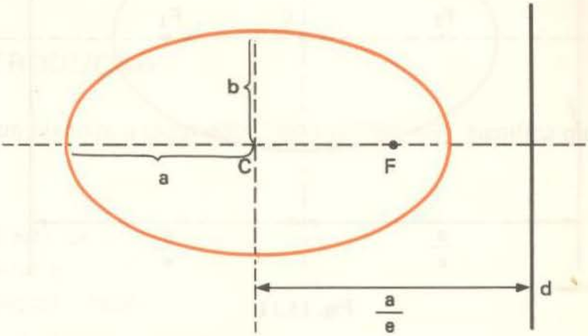


Fig. 15.9

2º) Se $k > 1$ a figura é uma hipérbole cuja excentricidade e é igual à constante k, o ponto F é um dos focos e a distância entre o centro C da hipérbole e a reta d é igual a $\frac{a}{e}$. A reta d é chamada de diretriz da hipérbole.

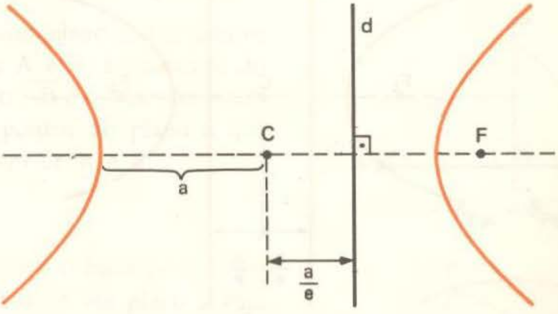


Fig. 15.10

Vemos então que é possível definir tanto a parábola, como a elipse, como a hipérbole, usando apenas um foco e uma reta diretriz, através da equação 15.2, onde a constante k é a excentricidade da figura. Podemos então dizer que:

"a excentricidade da parábola é igual a 1"

Devemos ainda observar que tanto a elipse como a hipérbole têm duas diretrizes (figuras 15.11 e 15.12) enquanto que a parábola tem apenas uma.

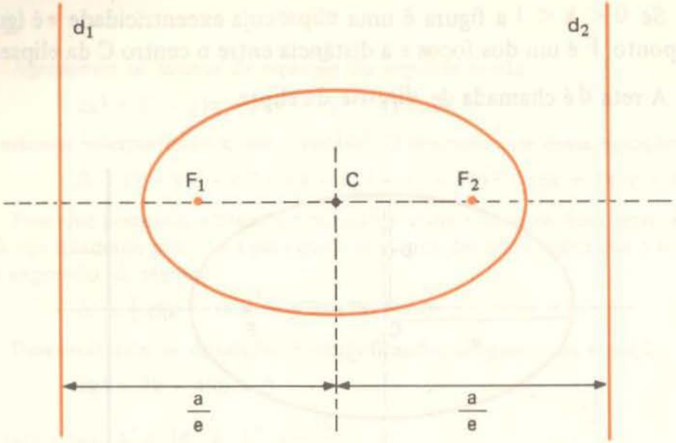


Fig. 15.11

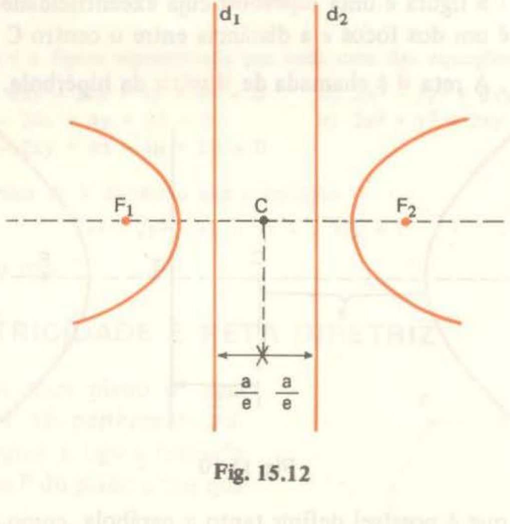


Fig. 15.12

Capítulo

16

Lugares geométricos

16.1 – INTRODUÇÃO

Dado um plano α, a expressão "lugar geométrico" significa qualquer "subconjunto de α".

Assim,

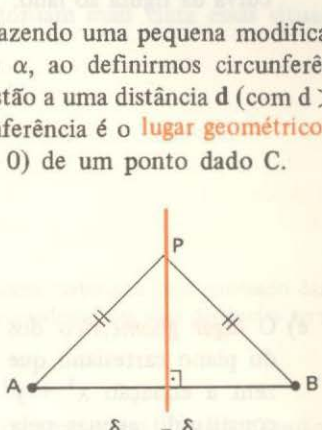
a) uma reta de α
b) o plano α
c) o conjunto vazio

são exemplos de lugares geométricos.

Note o leitor que neste capítulo estamos fazendo uma pequena modificação em nossa linguagem. Por exemplo, num plano α, ao definirmos circunferência dissemos que esta é o conjunto dos pontos que estão a uma distância **d** (com $d > 0$) de um ponto C dado; diremos agora que circunferência é o lugar geométrico dos pontos de α que estão a uma distância d ($d > 0$) de um ponto dado C.

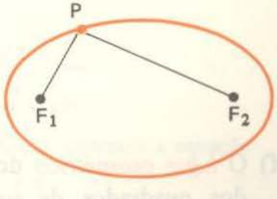
Vejamos outros exemplos:

a) Dados, num plano α, dois pontos distintos A e B, a *mediatriz* do segmento $\overline{AB}$ é o *lugar geométrico* dos pontos do plano α que eqüidistam de A e B.



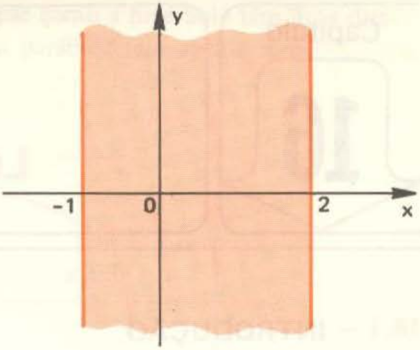
$\delta_{PA} = \delta_{PB}$

b) Uma *elipse* é o *lugar geométrico* dos pontos de um plano α cuja soma das distâncias a dois pontos distintos F_1 e F_2 (pertencentes a α) é uma constante k tal que $k > \delta_{F_1F_2}$.

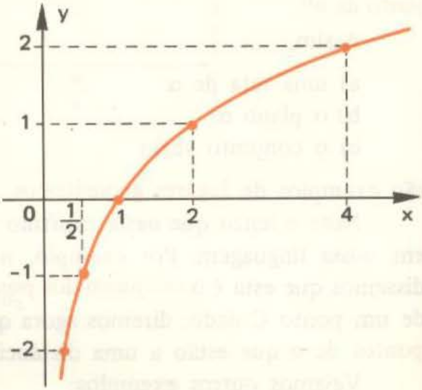


$\delta_{PF_1} + \delta_{PF_2} = cte$

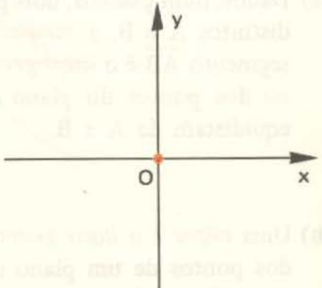
c) A região sombreada da figura ao lado é o *lugar geométrico* dos pontos P(x; y) do plano cartesiano que satisfazem a relação $-1 \leqslant x \leqslant 2$.



d) O *lugar geométrico* dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação $y = \log_2 x$ é o conjunto dos pontos que compõe a curva da figura ao lado.



e) O *lugar geométrico* dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 0$ é constituído apenas pela origem O do sistema (x = 0 e y = 0).



f) O *lugar geométrico* dos pontos do plano cartesiano que possuem a soma dos quadrados de suas coordenadas igual a –5 é o conjunto vazio.

$$\{(x; y) \mid x^2 + y^2 = -5\} = \emptyset$$

16.2 – DESCRIÇÃO DE UM LUGAR GEOMÉTRICO

De um modo geral, o tipo de problema que iremos agora enfrentar tem o seguinte enunciado:

"Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que satisfazem a condição: ..."

A grande variedade de curvas e regiões existentes na **Geometria Analítica**, e que podemos encontrar ao resolver tal problema, nos faz tomar uma posição cautelosa diante da questão de **descrever o lugar geométrico** obtido: o conjunto de pontos (a equação, a relação) que acharmos ao equacionar o problema corresponderá a uma figura sempre identificável com os nossos conhecimentos? Por outro lado, a uma figura dada qualquer, é sempre possível associarmos uma equação como $f(x; y) = 0$ ou uma desigualdade como $f(x; y) > 0$?

É evidente que a resposta a essas perguntas é "não, nem sempre". Por isso, o leitor perceberá que, ao darmos a solução de um problema, descreveremos em alguns casos (sempre que possível) o lugar geométrico obtido **detalhadamente**: sua equação (ou desigualdade), o nome da curva (ou região) e seus elementos principais; em outros casos, consideraremos satisfatório fornecer apenas uma relação ou até mesmo uma figura. Os exercícios resolvidos a seguir tornam mais clara essas situações.

Exercícios Resolvidos

16.1) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano cujo quadrado das suas distâncias ao ponto A(1; 2) é igual ao triplo do quadrado das suas distâncias ao ponto B(–3; 0).

Solução

Seja P(x; y) um ponto qualquer do lugar procurado. Devemos, então, ter:

$$\delta^2_{PA} = 3 \cdot \delta^2_{PB}$$

Assim:

$$\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = 3\left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2}\right)^2 \iff$$

$$\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 3(x^2 + 6x + 9 + y^2)$$

Reduzindo e simplificando esta última igualdade, obtemos a equação

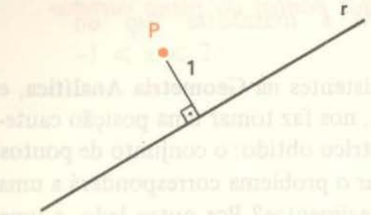
$$x^2 + y^2 + 10x + 2y + 11 = 0$$

Logo, o lugar geométrico é o conjunto dos pontos P(x; y) que satisfazem essa equação, ou seja, é a circunferência de centro (–5; –1) e raio $\sqrt{15}$.

16.2) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano cuja distância à reta (r) de equação $12x - 5y = 0$ é 1.

Solução

Seja P(X; Y) um ponto qualquer do lugar procurado. Devemos, então, ter:



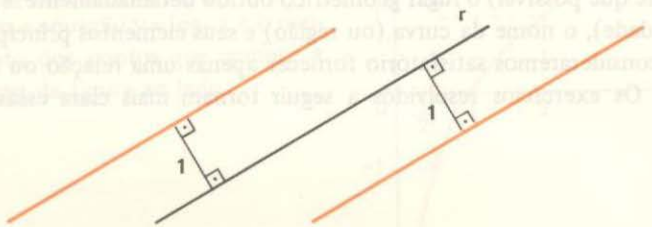
$$\delta_{Pr} = 1$$

Assim:

$$\left| \frac{12X - 5Y}{\sqrt{(12)^2 + (-5)^2}} \right| = 1 \iff$$

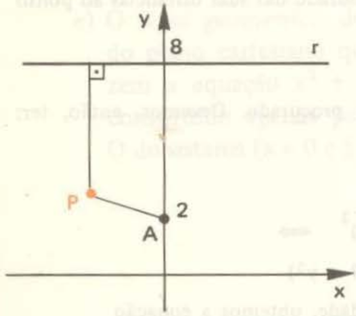
$$\iff \frac{12X - 5Y}{13} = \pm 1 \iff 12X - 5Y - 13 = 0 \text{ ou } 12X - 5Y + 13 = 0$$

Logo, o lugar geométrico é o conjunto dos pontos P(x; y) que satisfazem a equação $12x - 5y + 13 = 0$ ou a equação $12x - 5y - 13 = 0$, ou seja, é a *união* de duas retas, paralelas à reta dada, traçadas à distância 1:



16.3) Um ponto se move de modo que a sua distância à reta (r) de equação $y - 8 = 0$ é o dobro de sua distância ao ponto A(0; 2). Determine o lugar geométrico descrito pelo ponto.

Solução



Seja P(x; y) um ponto qualquer do lugar. Devemos, então, ter:

$$\delta_{Pr} = 2\,\delta_{PA}$$

$$\text{com} \begin{cases} \delta_{Pr} = |y - 8| \\ \delta_{PA} = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \end{cases}$$

Assim:

$$|y - 8| = 2\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \iff (y - 8)^2 = 4(x^2 + y^2 - 4y + 4)$$

Reduzindo e simplificando esta última igualdade, obtemos a equação

$$4x^2 + 3y^2 - 48 = 0$$

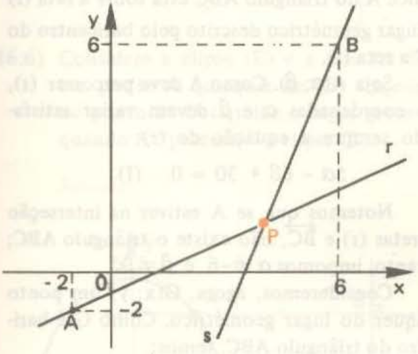
que pode também ser escrita como

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Logo, o lugar geométrico descrito pelo ponto P é o conjunto dos pontos que satisfazem a equação $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$, ou seja, é uma elipse. Comparando com a equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, temos $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$. Temos, portanto, a elipse de focos $F_1(0; -2)$ e $F_2(0; 2) = A$, eixo maior $2a = 8$, e excentricidade $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

16.4) Dados os pontos A(−2; −2) e B(6; 6), determine o lugar geométrico descrito por um ponto P que se "move" de modo que o coeficiente angular da reta $r = \overleftrightarrow{AP}$, acrescido de duas unidades, é igual ao coeficiente angular da reta $s = \overleftrightarrow{BP}$.

Solução



Sejam (x; y) as coordenadas genéricas do ponto P.

Os coeficientes angulares de r e s são:

$$m_r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - (-2)}{x - (-2)}, \quad (x \neq -2),$$

e

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - 6}{x - 6}, \quad (x \neq 6)$$

Como devemos ter $m_r + 2 = m_s$, vem:

$$\frac{y + 2}{x + 2} + 2 = \frac{y - 6}{x - 6}$$

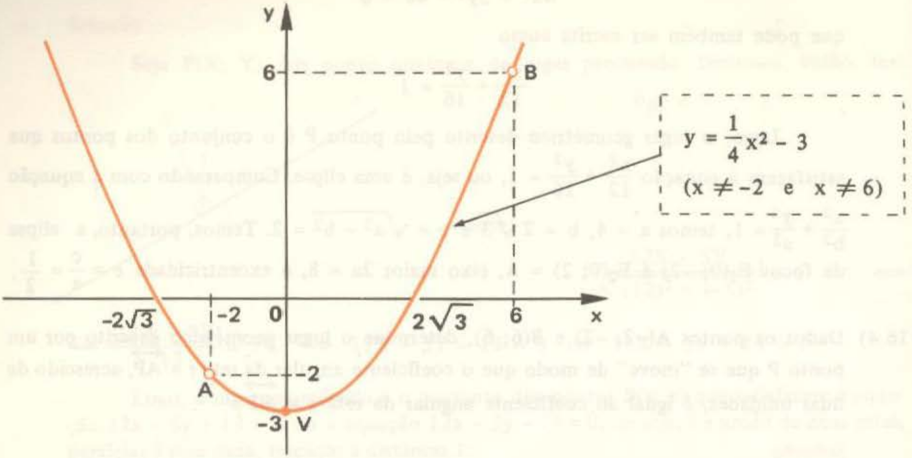
Reduzindo e simplificando essa igualdade, obtemos a equação

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 3$$

Comparando-a com o trinômio do 2º grau $y = ax^2 + bx + c$, sabemos que essa equação representa uma parábola.

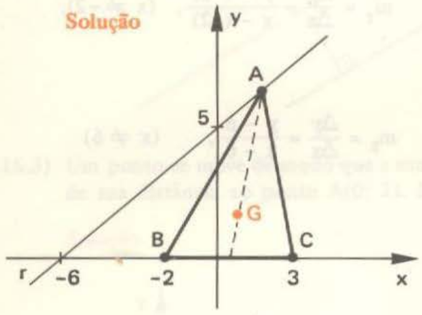
O seu vértice é $V(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a})$, isto é, V(0; −3). Mas, lembrando que $x \neq -2$ e $x \neq 6$, vemos que os pontos (−2; −2) = A e (6; 6) = B dessa parábola *não devem ser aceitos*.

Assim, o lugar geométrico procurado é a parábola da figura:



16.5) São dados os pontos B(−2; 0) e C(3; 0). O vértice A do triângulo ABC está sobre a reta (r) de equação $5x - 6y + 30 = 0$. Determine o lugar geométrico descrito pelo baricentro do triângulo ABC quando o vértice A "percorre" a reta (r).

Solução



Seja $A(\alpha; \beta)$. Como A deve percorrer (r), suas coordenadas α e β devem variar satisfazendo sempre a equação de (r):

$$5\alpha - 6\beta + 30 = 0 \quad \text{(I)}$$

Notemos que se A estiver na interseção das retas (r) e $\overleftrightarrow{BC}$, não existe o triângulo ABC; portanto, impomos $\alpha \neq -6$ e $\beta \neq 0$.

Consideremos, agora, G(x; y) um ponto qualquer do lugar geométrico. Como G é baricentro do triângulo ABC, temos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\alpha + (-2) + 3}{3} \Rightarrow x = \dfrac{\alpha + 1}{3} \quad \text{(II)} \\ y = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y = \dfrac{\beta + 0 + 0}{3} \Rightarrow y = \dfrac{\beta}{3} \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Se lembrarmos que $\alpha \neq -6$ e $\beta \neq 0$, temos também $x \neq -\frac{5}{3}$ e $y \neq 0$, ou seja, o ponto $G(-\frac{5}{3}; 0)$ *não deve ser aceito no lugar.*

Para obtermos a relação entre x e y, isto é, a equação do lugar descrito por G, devemos eliminar α e β.

Das equações (II) e (III), obtemos:

$$\alpha = 3x - 1 \quad \text{e} \quad \beta = 3y$$

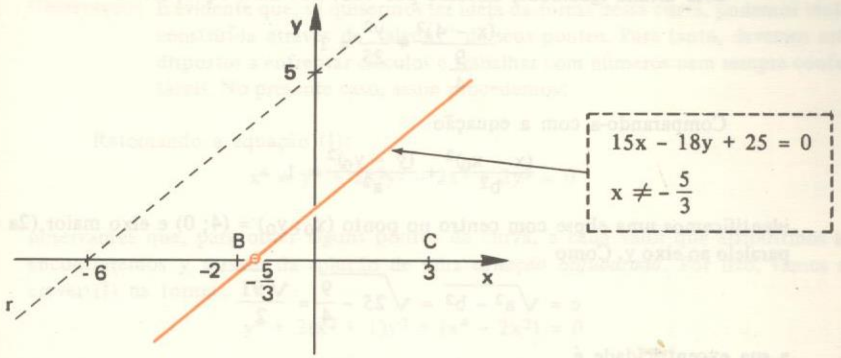
Substituindo em (I), vem:

$$5(3x - 1) - 6(3y) + 30 = 0$$

Simplificando, temos a equação

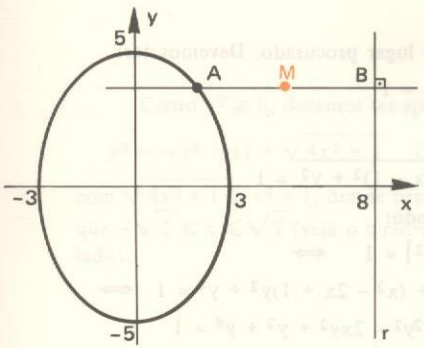
$$15x - 18y + 25 = 0$$

Logo, o lugar geométrico descrito pelo baricentro G do triângulo ABC é uma reta paralela a r, com exceção de um de seus pontos: $(-\frac{5}{3}; 0)$. Veja a figura:



16.6) Considere a elipse (E) e a reta (r) de equações $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ e $x - 8 = 0$. Por um ponto A qualquer de (E) traça-se uma reta, paralela ao eixo x, que intercepta (r) no ponto B. Determine o lugar geométrico descrito pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$ quando A "percorre" a elipse (E).

Solução



Seja $A(\alpha; \beta)$ um ponto qualquer da elipse. Como A deve percorrê-la, suas coordenadas α e β devem variar satisfazendo sempre a equação de (E):

$$25\alpha^2 + 9\beta^2 - 225 = 0 \quad \text{(I)}$$

As coordenadas de B são $x_B = 8$ (pois $B \in r$) e $y_B = y_A = \beta$ (pois a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é paralela a x). Então, $B(8; \beta)$.

Consideremos, agora, M(x; y) um ponto qualquer do lugar geométrico procurado. Como M é médio de $\overline{AB}$, temos:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\alpha + 8}{2} \quad \text{(II)} \\ y = \dfrac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y = \dfrac{\beta + \beta}{2} \Rightarrow y = \beta \quad \text{(III)} \end{cases}$$

Para obtermos a equação do lugar, devemos relacionar x e y. Assim, das equações (II) e (III), obtemos

$$\alpha = 2x - 8 \quad \text{e} \quad \beta = y$$

que substituídos em (I), nos dá:

$$25(2x - 8)^2 + 9y^2 - 225 = 0 \iff 25[2(x - 4)]^2 + 9y^2 - 225 = 0 \iff$$
$$\iff 100(x - 4)^2 + 9y^2 - 225 = 0.$$

Essa última igualdade, dividida por 225, nos dá a equação:

$$\frac{(x - 4)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Comparando-a com a equação

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1,$$

identificamos uma elipse com centro no ponto $(x_0; y_0) = (4; 0)$ e eixo maior $(2a = 10)$ paralelo ao eixo y. Como

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{91}}{2}$$

a sua excentricidade é

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{91}}{10}$$

16.7) São dados os pontos A(-1; 0) e B(1; 0). Determine o lugar geométrico dos pontos cujo produto das distâncias aos pontos A e B é igual a 1.

Solução

Seja P(x; y) um ponto qualquer do lugar procurado. Devemos ter:

$$\delta_{PA} \cdot \delta_{PB} = 1$$

Assim:

$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 1$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo:

$$[(x + 1)^2 + y^2][(x - 1)^2 + y^2] = 1 \iff$$
$$\iff [(x + 1)(x - 1)]^2 + (x^2 + 2x + 1)y^2 + (x^2 - 2x + 1)y^2 + y^4 = 1 \iff$$
$$\iff x^4 - 2x^2 + 1 + x^2y^2 + 2xy^2 + y^2 + x^2y^2 - 2xy^2 + y^2 + y^4 = 1$$

Reduzindo e ordenando, encontramos a equação

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 = 0 \quad \text{(I)}$$

Notando que $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$, podemos escrever essa equação como:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

ou ainda

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

Como essa equação não faz parte da lista de equações que conhecemos e estudamos, não podemos reconhecer a curva que ela representa. **Consideramos, então, satisfatório dar como resposta que o lugar geométrico procurado é o conjunto dos pontos (x; y) que satisfazem a equação:**

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

Observação: É evidente que, se quisermos ter idéia da forma dessa curva, podemos tentar construí-la através de "alguns" de seus pontos. Para tanto, devemos estar dispostos a enfrentar cálculos e trabalhar com números nem sempre confortáveis. No presente caso, assim procedemos:

Retomando a equação (I):

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 = 0$$

observamos que, para obter alguns pontos da curva, a cada valor que atribuírmos a x encontraremos y através da solução de uma *equação biquadrada*. Por isso, vamos escrever (I) na forma

$$y^4 + 2(x^2 + 1)y^2 + (x^4 - 2x^2) = 0$$

e resolvê-la genericamente em relação a y^2:

temos: $\Delta = [2(x^2 + 1)]^2 - 4(x^4 - 2x^2) = 4(4x^2 + 1)$

e $\quad y^2 = \dfrac{-2(x^2 + 1) \pm \sqrt{4(4x^2 + 1)}}{2} = -(x^2 + 1) \pm \sqrt{4x^2 + 1}$

Como $y^2 \geqslant 0$, devemos ter apenas

$$y^2 = -(x^2 + 1) + \sqrt{4x^2 + 1} \qquad \text{(II)}$$

com $\sqrt{4x^2 + 1} \geqslant x^2 + 1$, donde tiramos que $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ (veja o quadro ao lado).

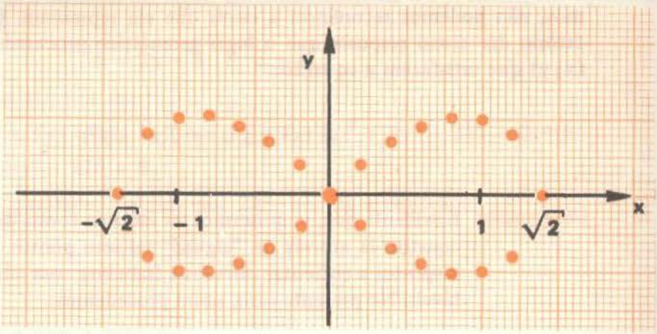
$$\sqrt{4x^2+1} \geqslant x^2+1 \ (\geqslant 0)$$
$$4x^2 + 1 \geqslant x^4 + 2x^2 + 1$$
$$x^4 - 2x^2 \leqslant 0$$

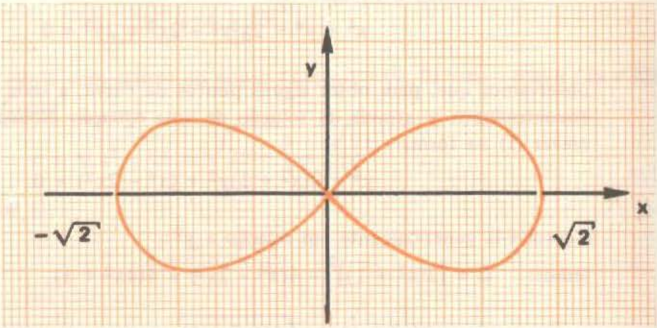
$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
+		−	−		+

$$-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

Nessas condições, podemos extrair da equação (II) uma tabela, atribuindo valores a x, e em seguida esboçarmos o gráfico.

x	y (≅)
0	0
$\sqrt{2}$	0
$-\sqrt{2}$	0
1,20	± 0,40
-1,20	± 0,40
1	± 0,48
-1	± 0,48
0,80	± 0,50
-0,80	± 0,50
0,60	± 0,45
-0,60	± 0,45
0,40	± 0,35
-0,40	± 0,35
0,20	± 0,20
-0,20	± 0,20





A curva que obtivemos é conhecida como ***lemniscata de Bernoulli***. Ela foi descrita na obra *Acta Eruditorum*, de **1690**, pelo matemático suíço Jacques Bernoulli (1654-1705).

16.8) São dados os pontos A(0; 0) e B(−2; 2), e o número real k > 0. Represente graficamente o lugar geométrico dos pontos **P** tais que a razão entre os quadrados das distâncias de P até A e B é maior ou igual ao quadrado de **k** nos seguintes casos:

a) $k = 1$ b) $k = \sqrt{2}$

Solução

Sendo (x; y) as coordenadas genéricas do ponto P, devemos ter

$$\frac{\delta_{PA}^2}{\delta_{PB}^2} \geqslant k^2, \text{ com } P \neq B \ (x \neq -2 \text{ e } y \neq 2)$$

Como δ_{PB}^2 é número positivo, podemos escrever

$$\delta_{PA}^2 \geqslant k^2 \cdot \delta_{PB}^2$$

Então:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 \geqslant k^2\left(\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 2)^2}\right)^2 \iff$$

$$\iff x^2 + y^2 \geqslant k^2(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4) \iff (k^2 - 1)x^2 +$$

$$+ (k^2 - 1)y^2 + 4k^2x - 4k^2y + 8k^2 \leqslant 0 \qquad \text{(I)}$$

Vamos estudar o comportamento dessa desigualdade nos dois casos pedidos.

1º caso: $k = 1$

A desigualdade (I) se escreve

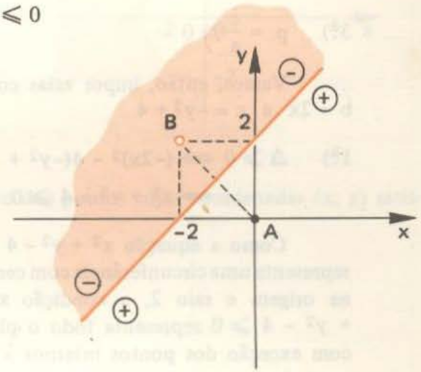
$$4x - 4y + 8 \leqslant 0$$

que é equivalente a

$$x - y + 2 \leqslant 0$$

A equação $x - y + 2 = 0$ representa uma reta. Em particular, notemos que é a **mediatriz** do segmento $\overline{AB}$, pois passa pelo ponto $(-1; 1)$ médio de $\overline{AB}$ e seu coeficiente angular é igual a menos o inverso do coeficiente angular de $\overleftrightarrow{AB}$ (isto é, são perpendiculares).

Assim, a representação gráfica do lugar $x - y + 2 \leqslant 0$ é a região da figura ao lado, da qual *excluímos* o ponto $B(-2; 2)$, pois $P \neq B$.



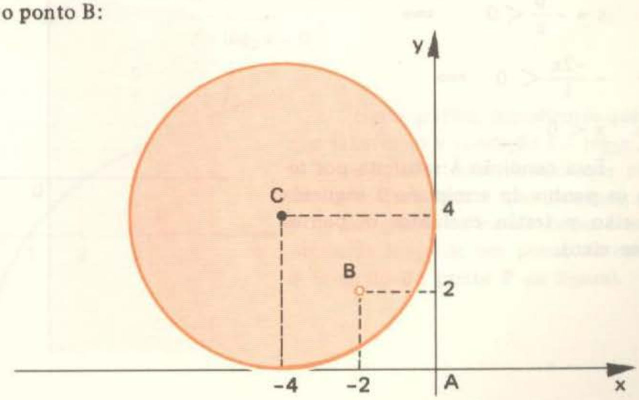
2º caso: $k = \sqrt{2}$

A desigualdade (I) se escreve

$$x^2 + y^2 + 8x - 8y + 16 \leqslant 0 \qquad \text{(II)}$$

A equação $x^2 + y^2 + 8x - 8y + 16 = 0$ representa uma circunferência de centro $C(-4; 4)$ e raio $r = 4$.

Assim, a representação gráfica do lugar (II) é o **círculo** da figura da qual também *excluímos* o ponto B:



16.9) Represente graficamente o lugar geométrico dos pontos P(x; y) para os quais a equação em α:

$$\alpha^2 - 2x\alpha - y^2 + 4 = 0$$

admite duas raízes negativas.

Solução

Lembremos que uma equação do 2º grau $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ admite duas raízes negativas quando estão satisfeitas, simultaneamente, as condições

1ª) $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$

2ª) $s = -\dfrac{b}{a} < 0$

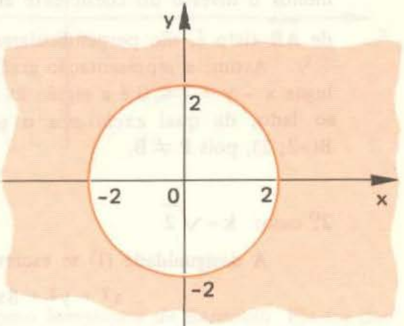
3ª) $p = \dfrac{c}{a} > 0$

Vamos, então, impor essas condições, observando que, na equação dada, $a = 1$, $b = 2x$ e $c = -y^2 + 4$

1ª) $\Delta \geqslant 0 \iff (-2x)^2 - 4(-y^2 + 4) \geqslant 0 \iff 4x^2 + 4y^2 - 16 \geqslant 0$

$\iff x^2 + y^2 - 4 \geqslant 0$

Como a equação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ representa uma circunferência com centro na origem e raio 2, a condição $x^2 + y^2 - 4 \geqslant 0$ representa todo o plano com exceção dos pontos internos à circunferência.

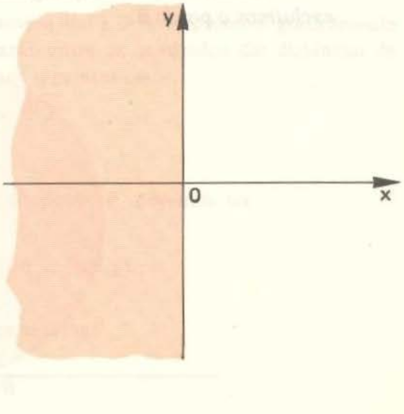


2ª) $s = -\dfrac{b}{a} < 0 \iff$

$\iff -\dfrac{-2x}{1} < 0 \iff$

$\iff x < 0$

Essa condição é satisfeita por todos os pontos do semiplano à esquerda do eixo y (estão excluídos os pontos desse eixo).



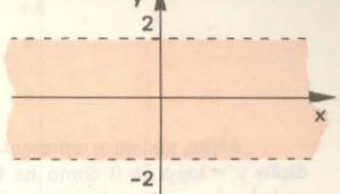
3ª) $p = \frac{c}{a} > 0 \iff$

$\iff -y^2 + 4 > 0 \iff$

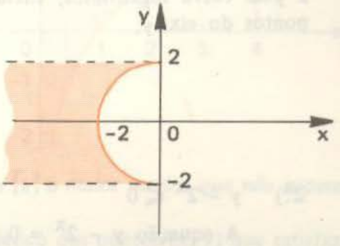
$\iff y^2 - 4 < 0 \iff$

$\iff -2 < y < 2$

Temos, então, a faixa do plano situada entre as retas $y = -2$ e $y = 2$.



A interseção das três figuras nos dá a representação gráfica, do lugar geométrico:



16.10) Situe no plano cartesiano o lugar geométrico dos pontos cujas coordenadas (x; y) satisfazem o sistema

$$\begin{cases} y - \log_2 x \geqslant 0 \\ y - 2^x \leqslant 0 \end{cases}$$

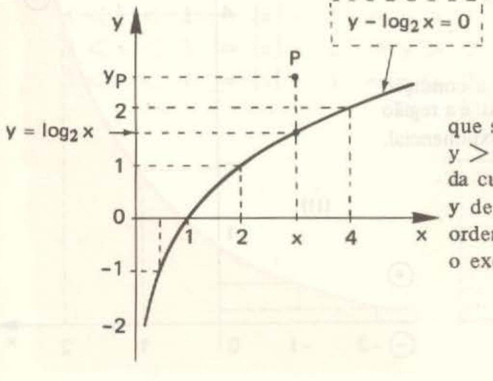
Solução

Vamos resolver separadamente as inequações do sistema

1º) $y - \log_2 x \geqslant 0$

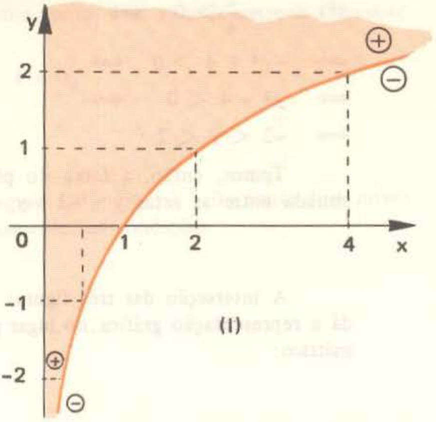
Como **condição de existência** de $\log_2 x$, devemos ter, sempre, $x > 0$. Isso já limita o nosso trabalho ao **semiplano** à direita do eixo y.

A **equação** $y - \log_2 x = 0$, ou seja, $y = \log_2 x$ é satisfeita pelos pontos da *curva logarítmica*:



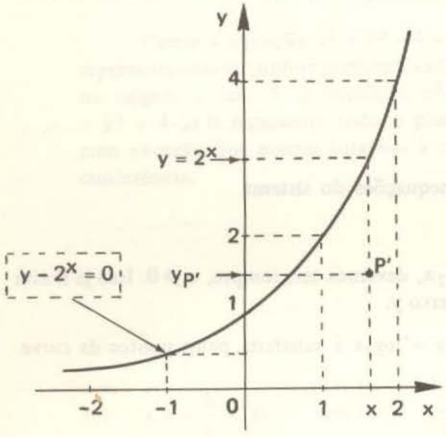
Neste gráfico, percebemos que os pontos que satisfazem a condição $y - \log_2 x > 0$, isto é, $y > \log_2 x$, são todos aqueles que estão **acima** da curva. Para cada x que fixarmos, a ordenada y de um ponto *acima da curva* é maior que a ordenada $\log_2 x$ de um ponto *da curva* (veja o o exemplo do ponto P da figura).

Assim, podemos representar a condição $y - \log_2 x \geqslant 0$ como na figura (I) ao lado: é a região delimitada pelo eixo y e pela curva logarítmica, *excluídos* os pontos do eixo y.



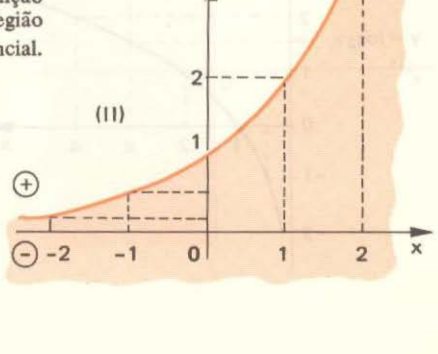
2ª) $y - 2^x \leqslant 0$

A equação $y - 2^x = 0$, ou seja, $y = 2^x$ é satisfeita pelos pontos da *curva exponencial*:

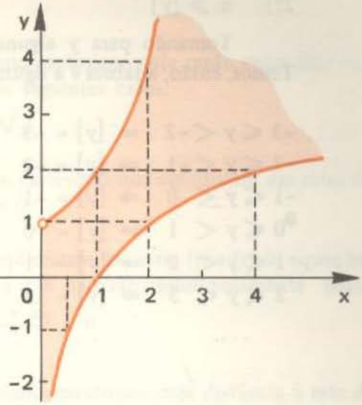


Neste gráfico percebemos que os pontos que satisfazem a condição $y - 2^x < 0$, isto é, $y < 2^x$, são todos aqueles situados **abaixo** da curva. Para cada x que fixarmos, a ordenada y de um ponto *abaixo da curva* é menor que a ordenada 2^x de um ponto *da curva* (veja o exemplo do ponto P' da figura).

Assim, podemos representar a condição $y - 2^x \leqslant 0$ como na figura (II) ao lado: é a região limitada superiormente pela curva exponencial.



Finalmente, obtemos a representação gráfica dos pontos que satisfazem o sistema dado estabelecendo a interseção entre as figuras (I) e (II):



16.11) Para todo número a real, indica-se pelo símbolo [a] o *maior inteiro que não supera* a. (Veja vol. I desta Coleção, página 235.)
Situe, então, no plano cartesiano, o lugar geométrico dos pontos (x; y) que satisfazem simultaneamente as inequações

$$\begin{cases} y \geqslant [x] \\ x \geqslant [y] \end{cases}$$

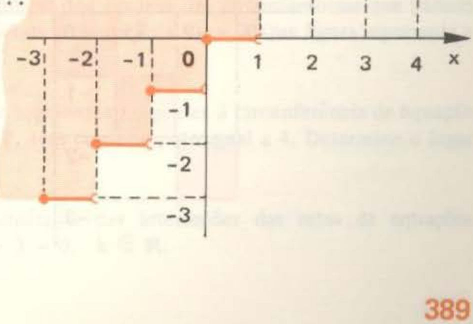
Solução

A exemplo do que fizemos no exercício anterior, vamos representar graficamente cada uma das condições:

1ª) $y \geqslant [x]$

Tomando para x alguns intervalos, obtemos os correspondentes valores de y. Temos, então, a tabela e a figura seguintes:

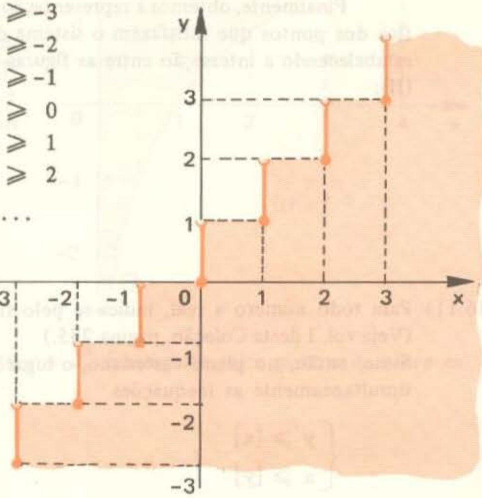
$-3 \leqslant x < -2 \Rightarrow [x] = -3 \Rightarrow y \geqslant -3$
$-2 \leqslant x < -1 \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow y \geqslant -2$
$-1 \leqslant x < 0 \Rightarrow [x] = -1 \Rightarrow y \geqslant -1$
$0 \leqslant x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y \geqslant 0$
$1 \leqslant x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y \geqslant 1$
$2 \leqslant x < 3 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow y \geqslant 2$
$3 \leqslant x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow y \geqslant 3$
... ...



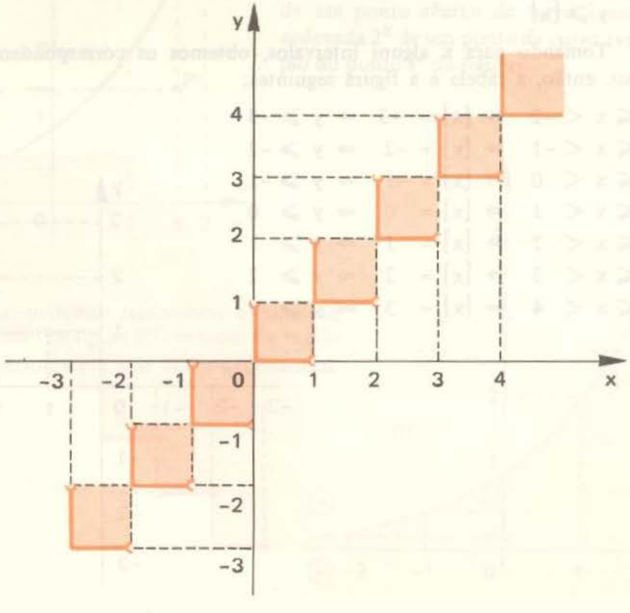
2ª) $x \geqslant [y]$

Tomando para y alguns intervalos, obtemos os correspondentes valores de x. Temos, então, a tabela e a figura seguintes:

$-3 \leqslant y < -2 \Rightarrow [y] = -3 \Rightarrow x \geqslant -3$
$-2 \leqslant y < -1 \Rightarrow [y] = -2 \Rightarrow x \geqslant -2$
$-1 \leqslant y < 0 \Rightarrow [y] = -1 \Rightarrow x \geqslant -1$
$0 \leqslant y < 1 \Rightarrow [y] = 0 \Rightarrow x \geqslant 0$
$1 \leqslant y < 2 \Rightarrow [y] = 1 \Rightarrow x \geqslant 1$
$2 \leqslant y < 3 \Rightarrow [y] = 2 \Rightarrow x \geqslant 2$
... ...



A interseção das duas figuras obtidas acima nos dá o lugar geométrico procurado:



Exercícios Propostos

16.12) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano cuja razão entre suas distâncias aos pontos A(2; 4) e B(0; 2) seja r, nos seguintes casos:

a) $r = 1$ b) $r = \sqrt{3}$

16.13) Descreva o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano que eqüidistam das retas de equações $2x - 3y + 6 = 0$ e $2x - 3y + 2 = 0$.

16.14) Mostre que o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam das retas (r) e (s) de equações $ax + by + k_1 = 0$ e $ax + by + k_2 = 0$ (onde a e b não são simultaneamente nulos e $k_1 \neq k_2$), é a reta de equação $ax + by + \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$

16.15) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano cuja distância à reta de equação $7x - 24y = 0$ é 5 unidades.

16.16) Descreva o lugar geométrico dos pontos cuja distância à reta (r) de equação $2x - y + 4 = 0$ é quatro vezes a distância à reta (s) de equação $4x + 2y - 1 = 0$.

16.17) Determine o lugar geométrico descrito por um ponto do plano cartesiano que se "move" de modo que o quadrado da sua distância à origem é igual ao dobro de sua distância ao eixo das ordenadas.

16.18) Determine o lugar geométrico descrito por um ponto do plano cartesiano que se "move" de modo que a metade do quadrado de sua distância à origem é igual à soma das suas distâncias aos eixos coordenados.

16.19) Um ponto se movimenta no plano cartesiano de modo que a sua distância à reta de equação $x - 6 = 0$ é igual a $\sqrt{2}$ vezes a sua distância ao ponto A(3; 0). Qual o lugar geométrico "descrito" por esse ponto?

16.20) Um ponto P se move no plano cartesiano de modo que sua distância ao ponto A(−16; 0) é o dobro da sua distância à reta de equação $x + 4 = 0$. Determine o lugar geométrico "descrito" por P.

16.21) Dados os pontos A(0; 0) e B(1; 12), determine o lugar geométrico dos pontos P tais que o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AP}$, acrescido de 4 unidades, é igual ao coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{BP}$.

16.22) Determine a equação do lugar geométrico dos centros das circunferências que passam pelo ponto A(−2; 0) e são tangentes à reta de equação $x - y = 0$. Que figura representa a equação obtida?

16.23) Um ponto P se move de modo que os segmentos tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$, traçados por P, têm comprimento igual a 4. Determine o lugar geométrico "descrito" por P.

16.24) Determine a equação do lugar geométrico das interseções das retas de equações $2x + 3y + k = 0$ e $4x - 6y + k - 3 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

16.25) Qual o lugar geométrico dos centros das circunferências de equação:

a) $x^2 + y^2 - 2mx - 2(3m - 1)y - 5 = 0$?

b) $x^2 + y^2 - 2(m - 3) - (m^2 - 4)y - 13 = 0$?

16.26) Um segmento de reta, de comprimento igual a 6 unidades, desloca-se no plano cartesiano de modo que suas extremidades estejam sempre sobre os eixos coordenados. Determine o lugar geométrico "descrito" pelo ponto médio do segmento.

16.27) Sejam A um ponto qualquer da elipse de equação $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$ e B(-6; 0). Determine o lugar geométrico "descrito" pelo ponto médio do segmento $\overleftrightarrow{AB}$ quando A "percorre" a elipse.

16.28) São dadas a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 16 = 0$ e a reta (r) de equação $y - 8 = 0$. Por um ponto A da circunferência traça-se uma reta paralela ao eixo y, obtendo-se, na sua interseção com (r), o ponto B. Determine o lugar geométrico "descrito" pelo ponto médio de $\overleftrightarrow{AB}$ quando A "percorre" a circunferência.

16.29) Um triângulo ABC é tal que: A(0; 0), B(1; 0) e C "desloca-se" no plano de modo que o perímetro do triângulo seja, sempre, igual a 4. Nessas condições, pede-se determinar:

a) a equação do lugar geométrico "descrito" pelo ponto C. Que figura representa essa equação?

b) a equação do lugar geométrico "descrito" pelo baricentro do triângulo ABC quando C percorre o lugar obtido no item a). Que figura representa essa nova equação?

16.30) Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (onde $a > b > 0$), e escolha uma das extremidades do seu eixo maior. Qual o lugar geométrico dos pontos médios das cordas dessa elipse traçadas a partir dessa extremidade?

O que ocorre com esse lugar no caso de você escolher a outra extremidade do eixo maior?

16.31) Determine o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano pelos quais as duas tangentes à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 16 = 0$ são perpendiculares.

16.32) Represente graficamente o lugar geométrico dos pontos do plano dados pelas equações paramétricas, sendo θ um número real:

a) $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} \theta \\ y = 1 - 4 \operatorname{sen} \theta \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 1 + \operatorname{sen} \theta \\ y = 2 + \cos \theta \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 5 \operatorname{sen} \theta \\ y = 3 \cos \theta \end{cases} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$

16.33) Represente graficamente o lugar geométrico dos pontos (x; y) que satisfazem as condições:

a) $y - (\frac{1}{2})^x \geqslant 0$ b) $y - \log_2 x \leqslant 0$

16.34) Represente graficamente o lugar geométrico dos pontos (x; y) que satisfazem a inequação

$$(y - \log_{\frac{1}{2}} x)(y - \frac{1}{2^x}) \leqslant 0$$

16.35) Situe, no plano cartesiano, o lugar geométrico dos pontos (x; y) para os quais a equação em α:

$$\alpha^2 - 4(x - 1)\alpha - 4y^2 + 4 = 0$$

não admite raízes reais.

16.36) Situe, no plano cartesiano, o lugar geométrico dos pontos (x; y) para os quais a equação em α:

$$\alpha^2 - x\alpha - y^2 + 4 = 0$$

admite duas raízes positivas.

16.37) Situe, no plano cartesiano, o lugar geométrico dos pontos (x; y) para os quais a equação em α:

$$\alpha^2 - (x - 2y)\alpha - xy + 1 = 0$$

admite duas raízes de mesmo sinal.

16.38) Represente graficamente o complementar do lugar geométrico dos pontos P(x; y) tais que o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AP}$ seja menor ou igual ao inverso do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{BP}$ com seu sinal trocado. São dados A(3; −4) e B(−3; 4).

Exercícios Suplementares

V.1) Num plano α dão-se um ponto **P** e uma reta **d**, $P \notin d$. Qual é o lugar geométrico dos pontos M(x; y) de α tais que:

$$\frac{\delta^2_{MP}}{\delta_{Md}} = 2k, \quad k \text{ positivo dado?}$$

V.2) Seja o sistema cartesiano ortogonal xOy, e no plano do sistema considere o ponto P(a; b). Por esse ponto traçam-se duas retas, perpendiculares, uma das quais encontra o eixo Ox no ponto A e a outra encontra o eixo Oy no ponto B. Determine o lugar geométrico da projeção do ponto P sobre $\overleftrightarrow{AB}$.

V.3) Qual é o lugar geométrico dos centros dos retângulos inscritos em um triângulo dado, um dos lados do retângulo repousando sobre um lado do triângulo?

V.4) O foco **F** e a diretriz **d** de uma parábola são respectivamente: F(1; 2) e **d**: $x + y - 7 = 0$. Sobre a parábola toma-se o ponto T(2; −5). Por **T** traça-se uma perpendicular à diretriz; a interseção dessas duas retas é **D**. Determine a bissetriz do ângulo $F\hat{T}D$ e verifique que ela é tangente à parábola em **T**.

V.5) Seja **m** o coeficiente angular de uma tangente comum às elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$; calcule m^2 em função de a, b, p e q.

V.6) Obtenha a condição para que a reta $y = mx + c$ seja uma **normal** à elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (*A normal é definida como a reta perpendicular à tangente no ponto de tangência.*)

V.7) Obtenha a condição para que a reta $\ell x + my + n = 0$ seja normal à hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

V.8) Calcule a distância da reta $2x - y - 19 = 0$ à parábola $x^2 - 4x - 4y + 20 = 0$.

V.9) No plano α, considere um sistema cartesiano ortogonal xOy. Determine o parâmetro **m** para que o subconjunto de α:

$$\{P(x; y) \mid x^2 + 2mxy + my^2 + 2mx + 2y + m + 1 = 0\}$$

seja uma hipérbole.

V.10) Dadas a elipse de equação $1521x^2 + 225y^2 = 4225$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 30x + 8y - 48 = 0$, determine a posição dos focos da elipse em relação ao círculo determinado pela circunferência.

V.11) No plano α fixa-se um sistema cartesiano ortogonal. Determine o subconjunto de α, de pontos P(x; y), tais que:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} > 1 \end{cases}$$

V.12) Resolva graficamente a inequação: $\log_y (3x - x^2 - 2) < 1$.

V.13) Considere a equação na incógnita **a**:

$$a^4 - (x + 1)a^2 + x^2 - y = 0$$

Determine no plano cartesiano xOy o lugar geométrico dos pontos P(x; y), sabendo-se que a equação possui 4 raízes reais distintas.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1.5) a) $x_A = 5$ b) $x_A = \frac{-13}{2}$

1.6) a) $x_P = -\frac{3}{2}$ b) $x_P = 0$ ou $x_P = -1$

1.7) a) $x_A = \frac{7}{5}$ ou $x_A = \frac{17}{3}$

b) $-21 < x_A < 11$

c) $x_A \leqslant -17$ ou $x_A \geqslant 23$

1.8) $m \neq -1$: A e B coincidem; $m = -1$: A e B são quaisquer sobre e.

1.9) $x = \dfrac{a + \sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

1.13) $\frac{16 - 5\sqrt{3}}{20}$ 1.14) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.15) $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$ e $x_N = \dfrac{x_C + x_D}{2}$

$$\overline{MN} = x_N - x_M = \frac{x_C + x_D}{2} - \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_C + x_D - x_A - x_B}{2} \quad \text{(I)}$$

$$\frac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2} = \frac{(x_C - x_A) + (x_D - x_B)}{2} = \frac{x_C + x_D - x_A - x_B}{2} \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) tiramos:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2}$$

De modo análogo prova-se que $\dfrac{\overline{AC} + \overline{BD}}{2} = \dfrac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$.

1.16) $x_E = \frac{-21}{10}$

1.17) $x = -4$

1.23) $-\frac{20}{33}$

1.24) $\frac{34}{9}$

1.25) 0; 4; 8

1.26) $x = -9$

1.27) $x_A = \frac{-13}{2}$ e $x_B = \frac{19}{2}$

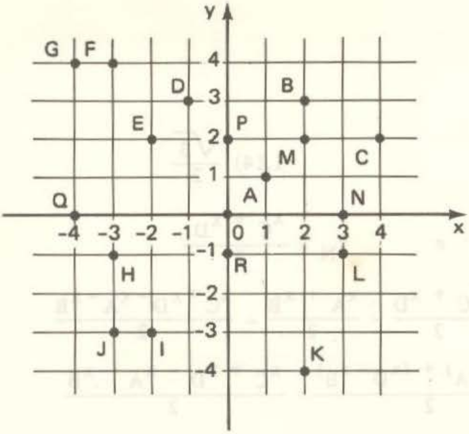
1.28) $x_D = -\frac{1}{2}$

1.29) $c \neq \frac{a + b}{2}$ (C não é médio de $\overline{AB}$): $x = \frac{2ab - ac - bc}{a + b - 2c}$

$c = \frac{a + b}{2}$: não existe D

1.30) Verifique que (ABC) + (ABD) = 0, usando as expressões que dão a soma e o produto das raízes de uma equação do 2º grau.

2.7)

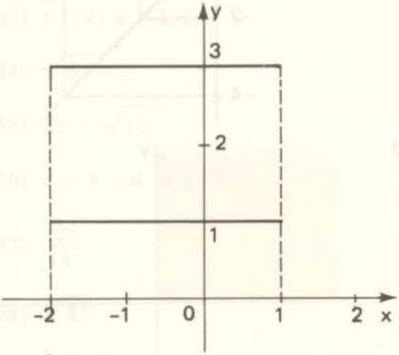


2.8) a) Q e N
b) P e R
c) A, B, C e M
d) D, E, F e G
e) H, I e J
f) L e K
g) A, M e J
h) E e G

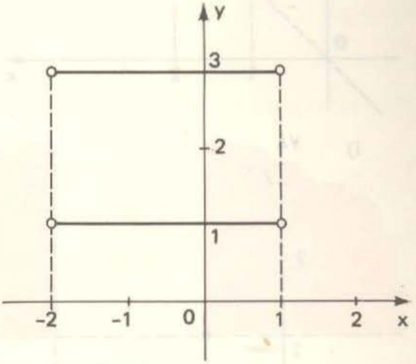
2.9) a) ordenada
b) abscissa
c) 2º
d) 1º
e) 4º
f) 3º

2.10) a) $-\frac{6}{5}$ b) $t < -\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2} < t < \frac{2}{3}$

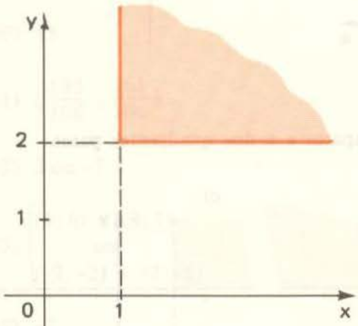
2.11) a)



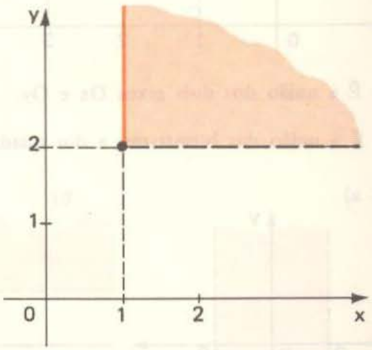
b)



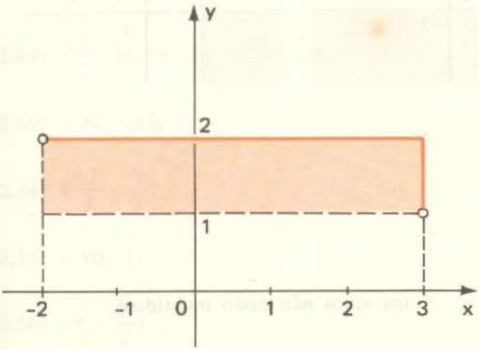
c)



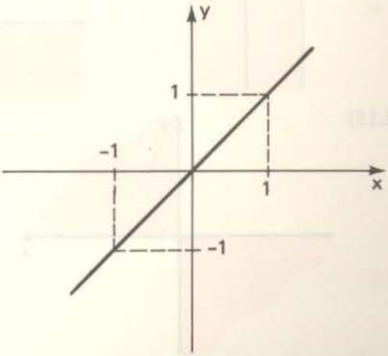
d)



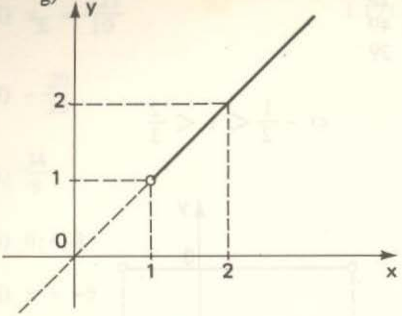
e)



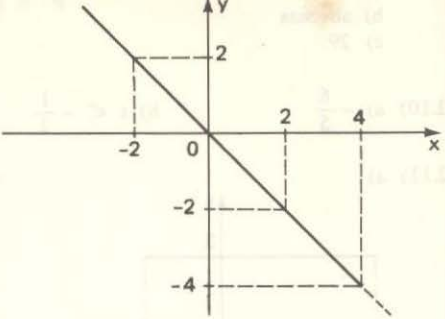
f)



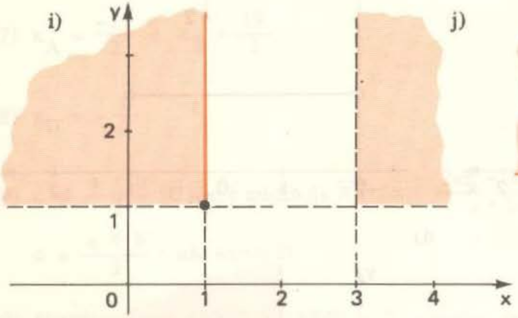
g)



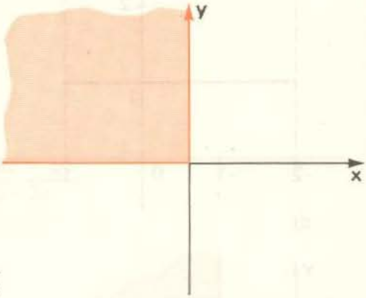
h)



i)



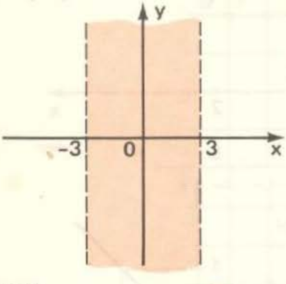
j)



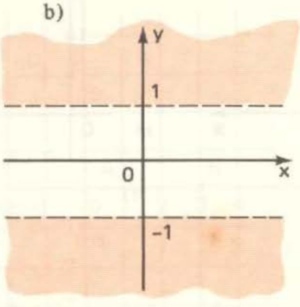
2.12) É a **união** dos dois eixos Ox e Oy.

2.13) É a **união** das bissetrizes: a dos quadrantes ímpares e a dos quadrantes pares.

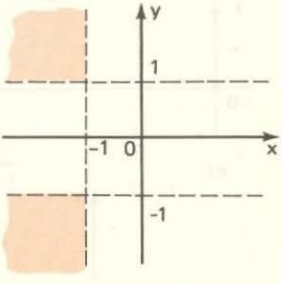
2.14) a)



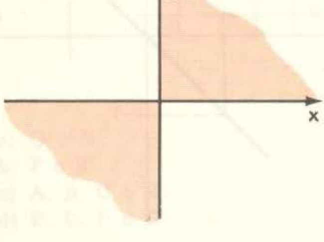
b)



c)



2.15)



(os eixos não estão incluídos)

2.30) $(\frac{11}{4}; \frac{1}{4})$

2.31) $(\frac{19}{4}; \frac{5}{2})$

2.32) (-14; 11)

2.33) (-1; 4) e (-3; 1)

2.34) $\sqrt{65}$

2.35) $28 + \sqrt{10}$

2.36) a = 4 ou a = -2

2.37) $\frac{-26}{16}$

2.38) $\sqrt{85}$

2.39) a) retângulo b) acutângulo c) obtusângulo

2.40) 13

2.41) $(\frac{133}{106}; \frac{261}{106})$

2.42) 3 ou -7

2.43) $\begin{cases} (4; 6) \text{ e } (8; 3) \\ \text{ou} \\ (-2; -2) \text{ e } (2; -5) \end{cases}$

2.47) -2

2.48) (12; 32)

2.49) $(\frac{7}{2}; 1)$, (5; -1), $(\frac{13}{2}; -3)$

2.50) (-34; -23)

2.54) $(\frac{11}{3}; \frac{5}{3})$

2.55) (-10; 2)

2.56) $(\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$

3.4) a) não b) sim

3.5) -3 ou 5

3.6) (0; -2)

3.7) (2; -2)

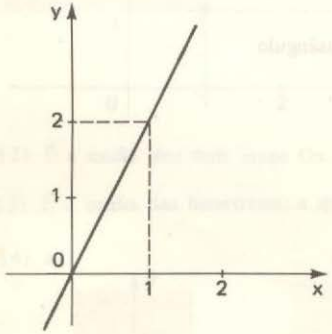
3.8) $k \neq 3$ e $k \neq -1$

3.9) Calculamos o determinante $D = \begin{vmatrix} a-1 & a & 1 \\ -a & 1-a & 1 \\ a-2 & a-1 & 1 \end{vmatrix}$

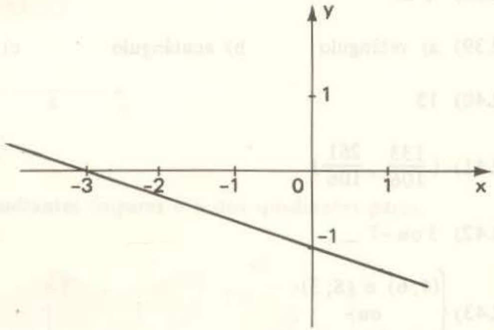
e verificamos que D = 0 para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

3.31) $13x + 33y + 47 = 0$

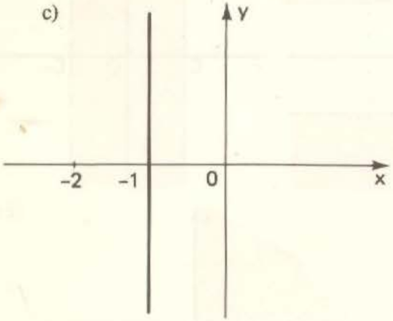
3.32) a)



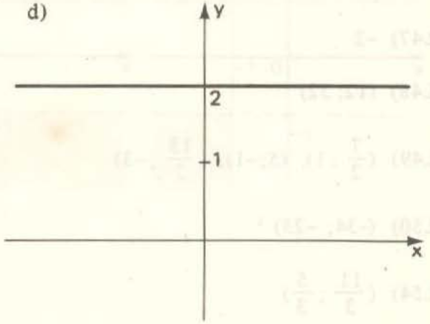
b)



c)



d)



3.33) $(0; \frac{12}{7})$ e $(-3; 0)$

3.34) a) $4x + 9y - 36 = 0$ b) $3x - 4y - 5 = 0$

3.35) $17x - 3y + 7 = 0$

3.36) $k = \frac{22}{17}$

3.37) $c = 0$

3.38) $x + y - 11 = 0$

3.39) $(\frac{4}{5}; \frac{7}{5})$

3.40) $a = 5$ e $b = 2$

3.41) Em primeiro lugar determinamos a interseção das retas de equações $x + y - 4 = 0$ e $2x + y - 5 = 0$, obtendo o ponto $P(1; 3)$. Em seguida substituímos as coordenadas de P na equação

$$(a-3)x + (1-a)y + 2a = 0$$

concluindo que esta última se transforma sempre numa sentença verdadeira.

3.42) $-4 < k < -1$

3.43) $13x - 5y - 5 = 0$

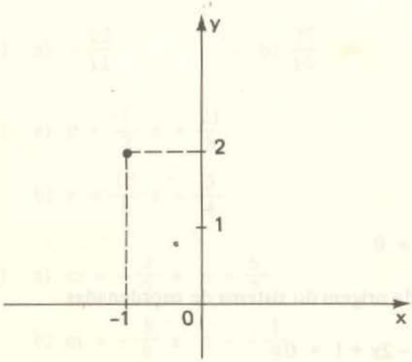
3.44) $(\frac{45}{7}; \frac{87}{14})$

3.45) $(7; 5)$ e $(3; -1)$

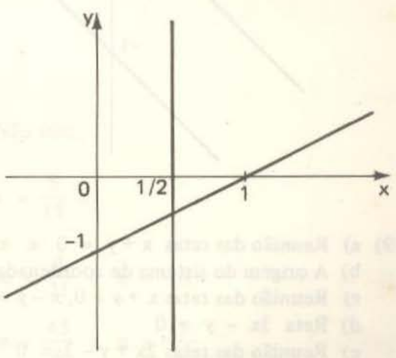
3.46) $(1; 6)$

3.47) $\frac{20}{11}$

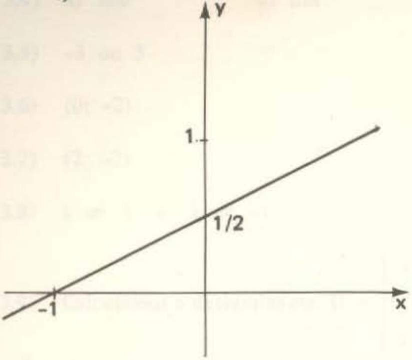
3.48) a)



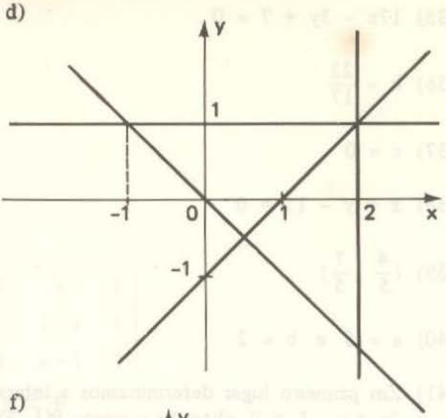
b)



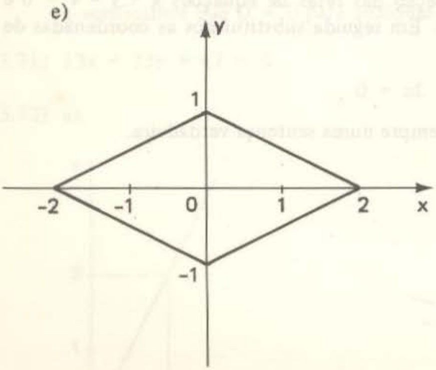
c)



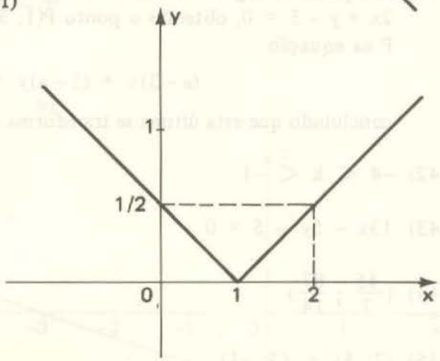
d)



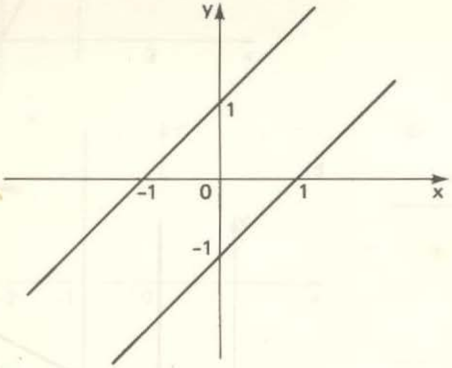
e)



f)



g)



3.49) a) Reunião das retas $x + y = 0$ e $x - y = 0$

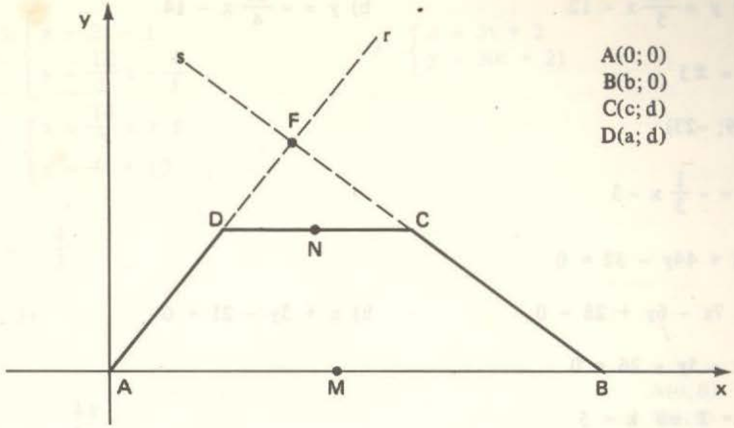
b) A origem do sistema de coordenadas

c) Reunião das retas $x + y = 0$, $x - y = 0$ e da origem do sistema de coordenadas

d) Reta $3x - y = 0$

e) Reunião das retas $2x + y - 3 = 0$ e $x - 2y + 1 = 0$

3.50)



$M(\frac{b}{2}\ ;0)$ $\quad$ $N(\frac{a+c}{2}\ ;d)$

equação de s: $dx + (b-c)y - bd = 0$

equação de r: $dx - ay = 0$

ponto F: $F(\frac{ab}{a+b-c}\ ;\ \frac{bd}{a+b-c})$

$$\begin{vmatrix} \frac{b}{2} & 0 & 1 \\ \frac{a+c}{2} & d & 1 \\ \frac{ab}{a+b-c} & \frac{bd}{a+b-c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

4.5) a) $-\frac{12}{11}$ $\quad$ b) $\frac{27}{10}$

4.6) a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{21}{8}$ $\quad$ c) Não tem.

b) $y = \frac{15}{8}x - \frac{5}{4}$ $\quad$ d) $y = \frac{8}{15}x$

4.7) a) $m = -\frac{3}{7}$ e $n = \frac{6}{7}$ $\quad$ c) $m = \frac{4}{21}$ e $n = -6$

b) $m = -\frac{5}{9}$ e $n = -\frac{1}{9}$ $\quad$ d) $m = \frac{45}{4}$ e $n = \frac{15}{2}$

4.8) a) $y = \frac{12}{5}x - 12$ b) $y = -\frac{21}{4}x - 14$

4.9) $a = \pm 3$

4.10) $(-9; -23)$

4.16) $y = -\frac{1}{3}x - 3$

4.17) $9x + 44y - 32 = 0$

4.18) a) $7x - 6y + 28 = 0$ b) $x + 3y - 21 = 0$

4.19) $2x - 5y - 26 = 0$

4.20) $k = 2$ ou $k = 5$

4.21) $2x - 3y + 6 = 0$

4.22) $x + y - 4 - \sqrt{3} = 0$

4.23) Sejam m_1 e m_2 os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, respectivamente. Temos:

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-(-5)}{2-(-2)} = \frac{11}{4}$$

$$m_2 = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-4-7}{0-4} = \frac{11}{4}$$

Sendo $m_1 = m_2$ temos $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

De modo análogo prova-se que $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

4.24) $C(\frac{-19}{13}; \frac{-35}{13})$, $A(\frac{-2}{13}; \frac{36}{13})$

4.27) a) $\frac{x}{7} + \frac{y}{4} = 1$ c) $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-1} = 1$

b) $\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{-\frac{1}{10}} = 1$ d) Não existe.

4.28) a) $3x - 4y + 12 = 0$ b) $5x + 6y + 4 = 0$

4.29) a) $\frac{x}{7} + \frac{y}{-4} = 1$ b) $\frac{x}{-10} + \frac{y}{-2} = 1$

4.35) a) $4x + 5y - 23 = 0$ b) $y + 7 = 0$

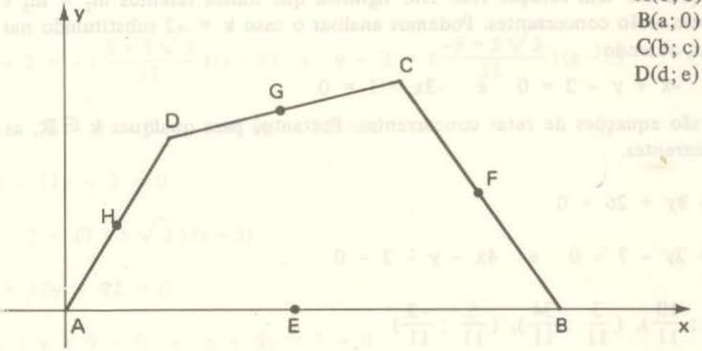
a) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = \dfrac{12}{5}t - \dfrac{4}{5} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 30t + 21 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{10}{3}t + 8 \\ y = 4t + 10 \end{cases}$

4.37) $m = -\dfrac{4}{3}$

4.38) (1; 3)

4.39)



A(0; 0)
B(a; 0)
C(b; c)
D(d; e)

$E(\frac{a}{2} ; 0)$ $G(\frac{b+d}{2} ; \frac{c+e}{2})$

$F(\frac{a+b}{2} ; \frac{c}{2})$ $H(\frac{d}{2} ; \frac{e}{2})$

Calcule os coeficientes angulares das retas $\overleftrightarrow{EF}$, $\overleftrightarrow{FG}$, $\overleftrightarrow{GH}$ e $\overleftrightarrow{HE}$ e verifique que:

$m_{EF} = m_{HG}$ e $m_{HE} = m_{GF}$

5.7) a) concorrentes
b) paralelas
c) concorrentes
d) $\begin{cases} \text{se } a = 1\text{, coincidentes} \\ \text{se } a \neq 1\text{, paralelas} \end{cases}$

5.8) $a = -6$

5.9) $k \neq -2$

5.10) $\begin{cases} k = 4 \text{ ou } k = -1: \text{paralelas} \\ k \neq 4 \text{ e } k \neq -1: \text{concorrentes} \end{cases}$

5.11) $\begin{cases} k = 4: \text{coincidentes} \\ k = -4: \text{paralelas} \\ k \neq 4 \text{ e } k \neq -4: \text{concorrentes} \end{cases}$

5.12) Supondo inicialmente $k + 2 \neq 0$ (isto é, $k \neq -2$) temos:

$$m_r = -(k+1) \quad \text{e} \quad m_s = -\frac{2k+1}{k+2}$$

$$m_r = m_s \iff -(k+1) = -\frac{2k+1}{k+2} \iff k^2 + k + 1 = 0$$

O discriminante da equação $k^2 + k + 1 = 0$ é $\Delta = -3$, isto é, $\Delta < 0$ e portanto a equação não tem solução real. Isto significa que nunca teremos $m_r = m_s$ e portanto as retas serão concorrentes. Podemos analisar o caso $k = -2$ substituindo nas equações dadas, obtendo:

$$-x + y - 2 = 0 \quad \text{e} \quad -3x - 1 = 0$$

que são equações de retas concorrentes. Portanto, para qualquer $k \in \mathbb{R}$, as retas são concorrentes.

5.14) $4x - 9y + 26 = 0$

5.15) $3x + 2y - 7 = 0$ e $4x - y - 2 = 0$

5.16) $(\frac{-3}{11} ; \frac{10}{11})$, $(\frac{3}{11} ; \frac{34}{11})$, $(\frac{5}{11} ; \frac{-2}{11})$

5.31) a) sim b) sim c) não d) não e) sim

5.32) $k = 1$

5.33) $3x + y - 4 = 0$

5.34) $4x + 3y - 16 = 0$

5.35) $(-1; 4)$

5.36) $(-2; -1)$

5.37) $(\frac{-21}{5} ; \frac{2}{5})$ e $(-8; -3)$

5.38) $3x - 11y - 2 = 0$

5.39) $4x + 3y - 21 = 0$

5.40) $(-1; 4)$

5.41) $4\sqrt{5}$

5.42) (-2; 1), (1; 3), (4; -1)

5.43) (2; -1)

5.44) C(-5; -4), D(2; 2)

5.45) B(-1; 5), C(1; 0)

5.46) $(\frac{43}{22} ; \frac{61}{44})$

5.51) a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{1}{2}$

5.52) $y - 2 = -(\frac{8 + 5\sqrt{3}}{11})(x - 3)$ e $y - 2 = (\frac{-8 + 5\sqrt{3}}{11})(x - 3)$

5.53) $4x - 7y - 5 = 0$ e $x + 8y - 11 = 0$

5.54) $3x - 11y - 2 = 0$

5.55) $y - 2 = (7 \pm 5\sqrt{2})(x - 3)$

5.56) $x + 10y - 42 = 0$

5.57) $3x - y + 9 = 0$ e $x + 3y - 7 = 0$

5.58) A(3; 11), B(1; 5)

5.59) $x - 3y + 14 = 0$

5.60) a) $\frac{35}{72}$ b) 26°

5.65) a) 140° b) 29°

5.66) a) $\text{tg}\,\widehat{A} = -3$ b) $\widehat{A} \cong 108°$
$\text{tg}\,\widehat{B} = 1$ $\widehat{B} = 45°$
$\text{tg}\,\widehat{C} = \frac{1}{2}$ $\widehat{C} \cong 27°$

5.67) a) $\text{tg}\,\widehat{A} = \frac{1}{2}$ b) $\widehat{A} \cong 27°$
$\text{tg}\,\widehat{C} = 2$ $\widehat{B} = 90°$
$\text{tg}\,\widehat{B}$ não existe $\widehat{C} \cong 63°$

5.68) a) $\operatorname{tg}\hat{A} = \frac{23}{7}$ b) $\hat{A} \cong 73°$

$\operatorname{tg}\hat{B} = -13$ $\hat{B} \cong 95°$

$\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{11}{7}$ $\hat{C} \cong 57°$

$\operatorname{tg}\hat{D} = -1$ $\hat{D} = 135°$

5.77) $(\frac{2}{3} ; \frac{1}{4})$

5.78) $5x - 8y - 21 = 0$

5.79) $x - y + 2 = 0$

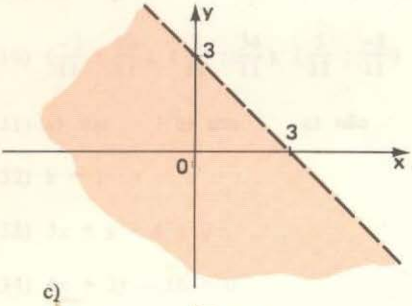
5.80) $(\sqrt{2}; 4)$

5.85) $5x - 12y + k = 0, k \in \mathbb{R}$

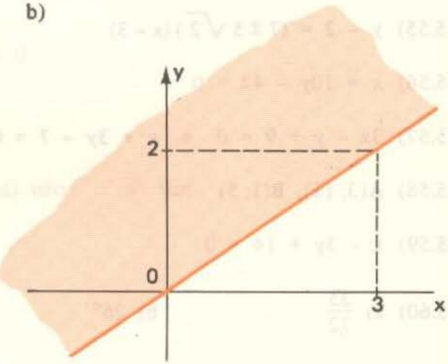
5.86) Um conjunto de retas paralelas de equação $y = x + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{R}$.

5.87) a) $x + 2y + k = 0, k \in \mathbb{R}$ b) $x + 2y + 21 = 0$

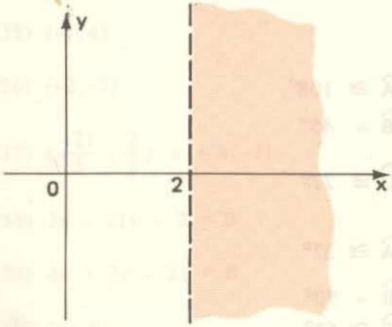
6.6) a)



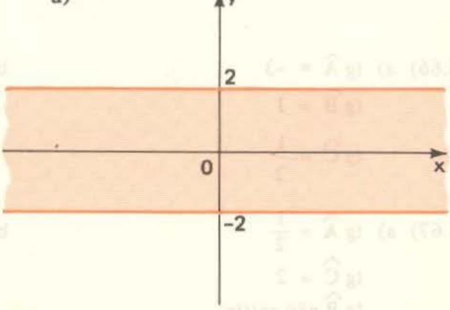
b)



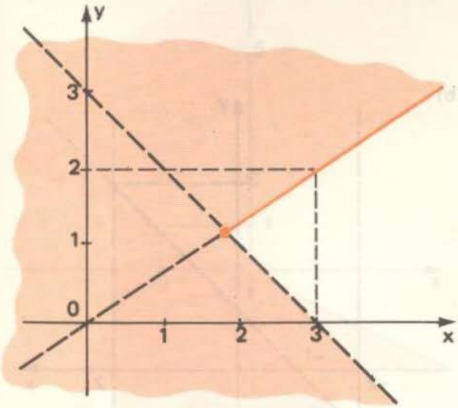
c)



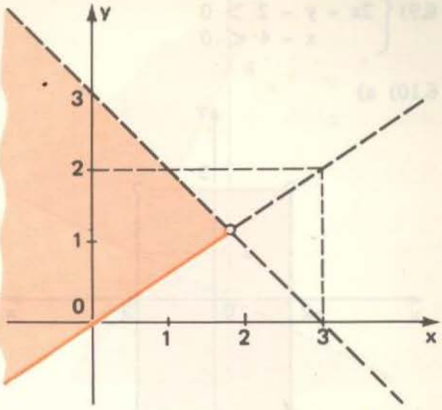
d)



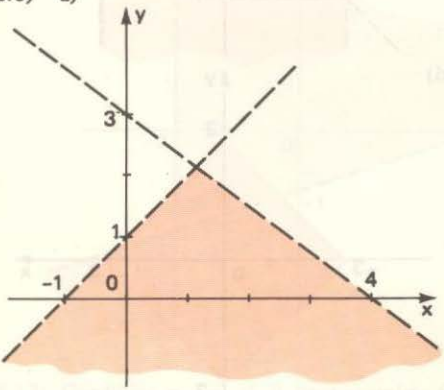
6.7) a)



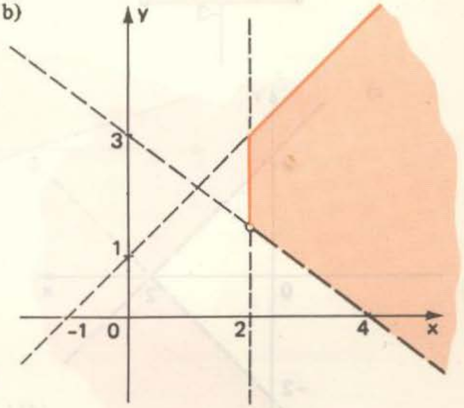
b)



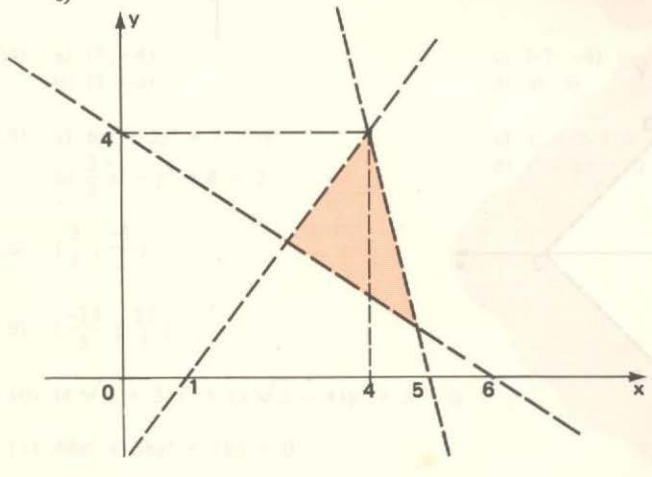
6.8) a)



b)

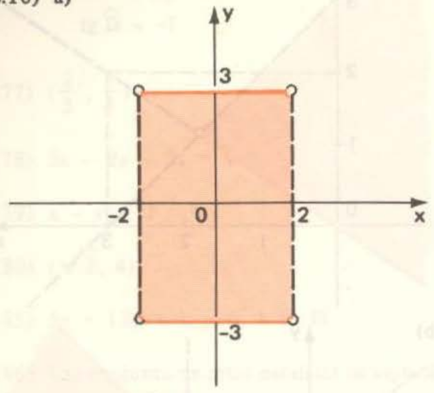


c)

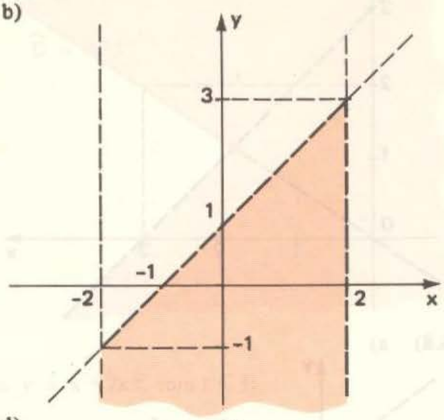


$$6.9)\ \begin{cases} x + 5y - 5 > 0 \\ 2x - y - 2 > 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

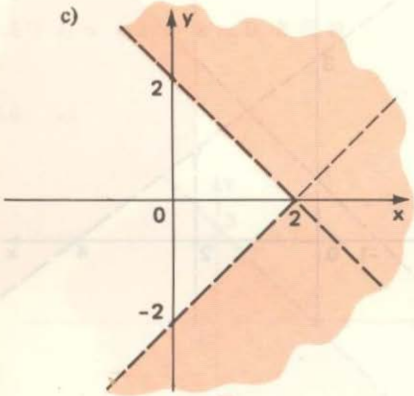
6.10) a)



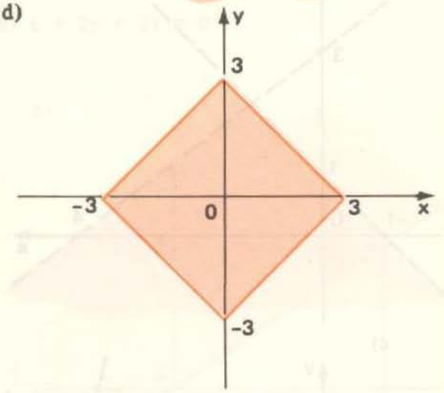
b)



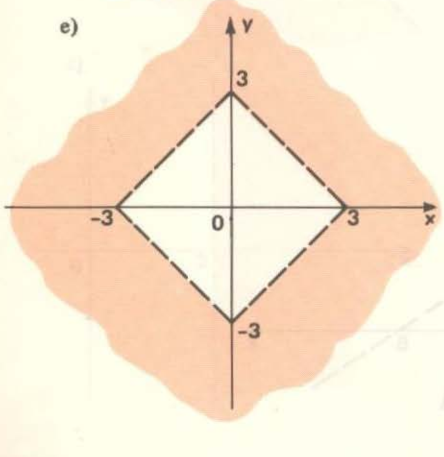
c)



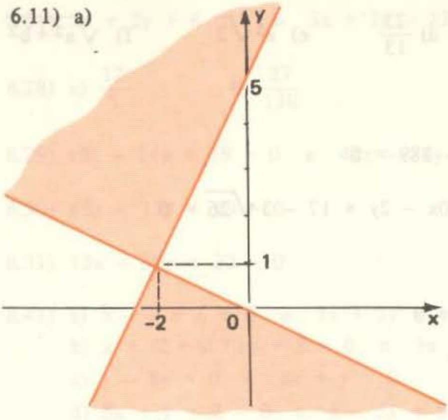
d)



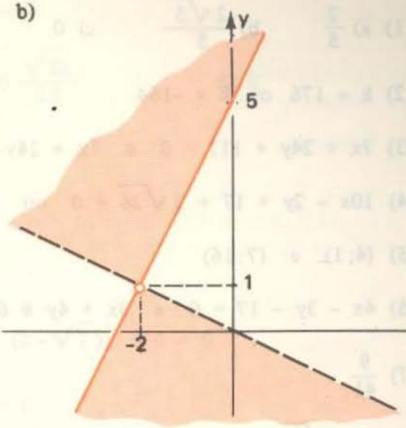
e)



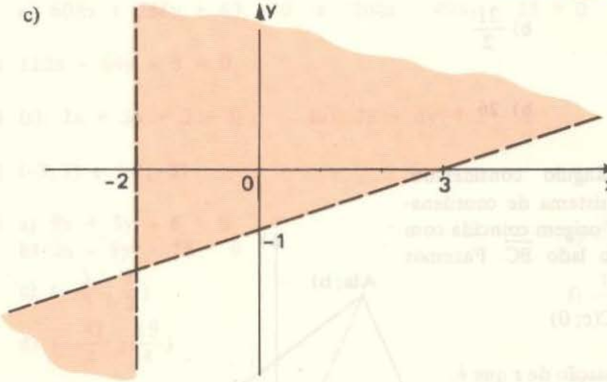
6.11) a)



b)



c)



6.12) Condição: $p = \frac{c}{a} < 0$ (veja exercício 6.11b)

7.4) a) (9; −4) c) (−7; −4)
b) (5; −3) d) (0; 3)

7.5) a) $6x' + 2y' + 7 = 0$ c) $x' + 7 = 0$
b) $\frac{3}{2}x' - y' + 4 = 0$ d) $y' - 15 = 0$

7.6) $(\frac{3}{4}; \frac{-1}{2})$

7.9) $(\frac{-14}{5}; \frac{23}{5})$

7.10) $(4\sqrt{3} + 3)x' + (3\sqrt{3} - 4)y' + 3 = 0$

7.11) $44x' + 38y' + 185 = 0$

8.11) a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ c) 0 d) $\frac{23}{13}$ e) $a^2\sqrt{2}$ f) $\sqrt{a^2+b^2}$

8.12) $k = 176$ ou $k = -164$

8.13) $7x + 24y + 111 = 0$ e $7x + 24y - 289 = 0$

8.14) $10x - 2y + 17 + 3\sqrt{26} = 0$ ou $10x - 2y + 17 - 3\sqrt{26} = 0$

8.15) $(4; 1)$ e $(7; 16)$

8.16) $4x - 3y - 17 = 0$ e $3x + 4y + 6 = 0$

8.17) $\frac{9}{41}$

8.18) a) $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{21}{2}$

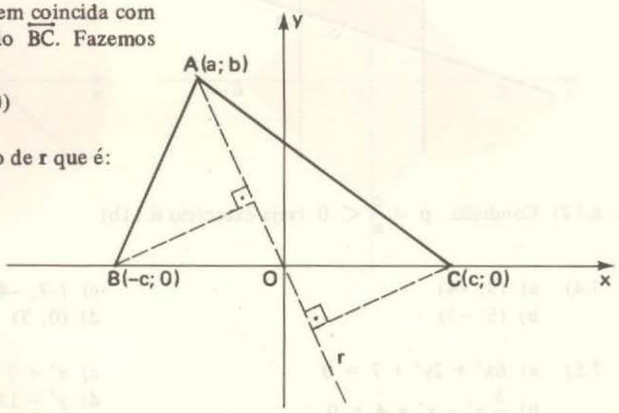
8.19) a) $\frac{13\sqrt{10}}{10}$ b) 26

8.20) Seja ABC o triângulo considerado. Vamos escolher o sistema de coordenadas de modo que a origem coincida com o ponto médio do lado $\overline{BC}$. Fazemos então:

A(a; b), B(-c; 0), C(c; 0)

Determinamos a equação de **r** que é:

$$bx - ay = 0$$



Em seguida calculamos as distâncias de **B** e **C** à reta **r**:

$$\delta_{Br} = \frac{|b(-c) - a(0)|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = \frac{|-bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\delta_{Cr} = \frac{|b(c) - a(0)|}{\sqrt{b^2 + (-a)^2}} = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Portanto $\delta_{Br} = \delta_{Cr}$

8.21) $3x + 2y + 6 = 0$ e $3x + 2y - 22 = 0$

8.28) a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{27}{130}$ c) $\frac{\sqrt{26}}{13}$ d) 0

8.29) $48x - 14y + 79 = 0$ e $48x - 14y - 71 = 0$

8.30) $48x - 72y + 19 = 0$

8.31) $15x - 30y + 22 = 0$

8.41) a) $x - y + 6 = 0$ e $7x + 7y + 4 = 0$
b) $x + (2+\sqrt{7})y + 8 = 0$ e $3x + (2-\sqrt{7})y + 4 = 0$
c) $x - 8y = 0$ e $8x + y = 0$
d) $5x + y + 2 = 0$ e $x - 5y + 6 = 0$
e) $608x + 256y + 67 = 0$ e $208x - 494y - 33 = 0$

8.42) $112x - 64y - 3 = 0$

8.43) (r): $2x + 5y + 3 = 0$ (u): $7x + 3y + 2 = 0$

8.44) $(-3; 7)$ e $(-1; -3)$

8.45) a) $9x + 3y - 6 = 0$
b) $3x - 9y + 78 = 0$
c) $(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2})$
d) $(-\frac{47}{4}; \frac{19}{4})$
e) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$
f) $\frac{13\sqrt{10}}{4}$

8.46) a) $(\frac{169}{27}; \frac{118}{27})$ b) $(-\frac{101}{7}; \frac{18}{7})$

8.47) a) $(12; 11)$
b) 5

9.12) a) 18 b) $\frac{19}{2}$

9.13) 19

9.14) $k = 3$ ou $k = -1$

9.15) $\sqrt{2}$

9.16) 8

9.17) 24

9.18) 17

9.19) a) 10 b) 10 c) 10

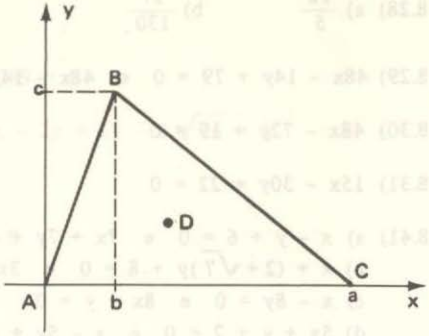
9.20) Fazendo A(0; 0), B(b; c) e C(a; 0), calculamos as coordenadas do baricentro D.

Obtemos: $D(\frac{a+b}{3}; \frac{c}{3})$

Sendo S_1, S_2 e S_3 as áreas dos triângulos ABD, ACD e BCD, respectivamente, após os cálculos obtemos:

$S_1 = \frac{|ac|}{6}$, $S_2 = \frac{|ac|}{6}$, $S_3 = \frac{|ac|}{6}$

Portanto, $S_1 = S_2 = S_3$



9.21) $y = 7x - 12$, ou

$$y = \frac{-1 + 20\sqrt{2}}{17}x + \frac{36 - 40\sqrt{2}}{17}, \text{ ou}$$

$$y = \frac{-1 - 20\sqrt{2}}{17}x + \frac{36 + 40\sqrt{2}}{17}$$

9.22) $(3; 0)$ ou $(\frac{3}{2}; 0)$

9.23) $2x - 3y + 1 = 0$ ou $2x - 3y + 27 = 0$

9.24) $\frac{560}{23}$ e $\frac{728}{23}$

9.25) $\frac{5}{2}$

9.26) $\frac{25}{2}$

9.27) $\frac{25}{4}$

9.28) $30 - 5\pi$

9.29) $\frac{37}{2}$

9.35) $\frac{73}{2}$

9.36) $\frac{45}{2}$ b) $\frac{49}{2}$

9.37) $\frac{47}{2}$

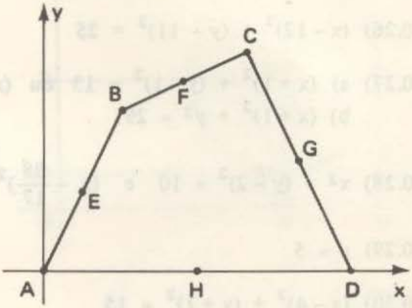
9.38) 48

9.39) 11

9.40) P(4; 5)

9.41) Seja o quadrilátero ABCD, tal que:
A(0; 0), B(b; c), C(d; e), D(a; 0)
Fazendo o percurso no sentido anti-horário, calculamos a área S desse quadrilátero obtendo:

$$S = \frac{cd + ea - eb}{2} \qquad (I)$$



Sendo E, F, G e H os pontos médios dos lados (como mostra a figura), temos:

$E(\frac{b}{2} ; \frac{c}{2})$ $\qquad$ $G(\frac{a+d}{2} ; \frac{e}{2})$

$F(\frac{b+d}{2} ; \frac{c+e}{2})$ $\qquad$ $H(\frac{a}{2} ; 0)$

Calculamos a área S' do quadrilátero EFGH, fazendo o percurso no sentido anti-horário, e obtemos:

$$S' = \frac{cd + ea - eb}{4} \qquad (II)$$

Comparando I e II, concluímos: $S' = \frac{S}{2}$

10.19) a) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 10 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 2x - 11 = 0$
d) $9x^2 + 9y^2 - 12x - 18y - 59 = 0$
e) $x^2 + y^2 = 64$

10.20) a) C(3; 4) e r = 7
b) C(-6, 1) e r = 6
c) $C(-\frac{2}{3} ; \frac{1}{5})$ e $r = \sqrt{7}$
d) $C(-2; \sqrt{2})$ e $r = 4\sqrt{5}$
e) C(0; 0) e r = 4
f) C(0; 0) e $r = \sqrt{6}$

10.21) a) não b) sim c) não

10.22) $k = -1$ ou $k = 7$

10.23) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 113 = 0$

10.24) $x^2 + y^2 - 2x - 14y + 21 = 0$

10.25) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 9 = 0$

10.26) $(x - 12)^2 + (y - 11)^2 = 25$

10.27) a) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 13$ ou $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 13$
b) $(x + 1)^2 + y^2 = 29$

10.28) $x^2 + (y - 2)^2 = 10$ e $(x - \frac{88}{17})^2 + (y - \frac{12}{17})^2 = 10$

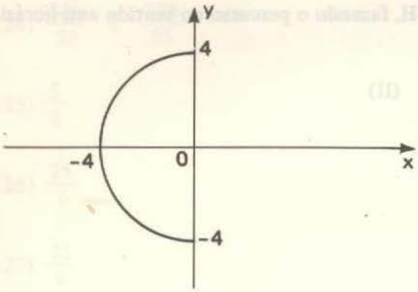
10.29) $r = 5$

10.30) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 15$

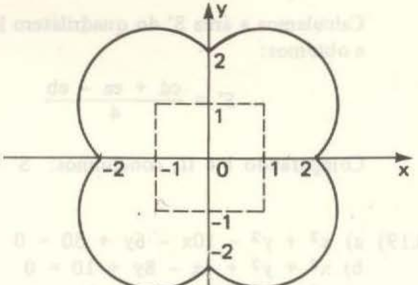
10.31) $(x - 3)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$

10.32) $x^2 + (y - 1)^2 = 10$ ou $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 10$

10.33) a)



b)



10.40) a) $C(-1; 3)$ e $r = 4$
b) $C(-7; 0)$ e $r = 3$
c) $C(0; 3)$ e $r = 1$
d) não é circunferência
e) não é circunferência
f) $C(\frac{2}{3}; 1)$ e $r = 1$
g) não é circunferência
h) não é circunferência
i) não é circunferência

10.41) $k > -4$

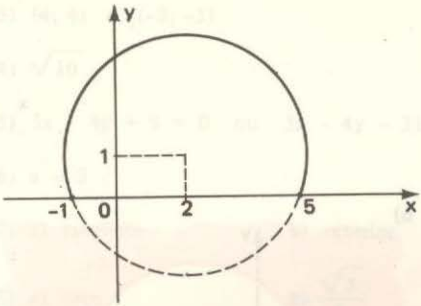
10.42) $k = -\frac{3}{4}$; $n^2 + 3s + 16 > 0$

10.43) k = -20; s = 0; m = 32; n = 72; $t \geq -52$

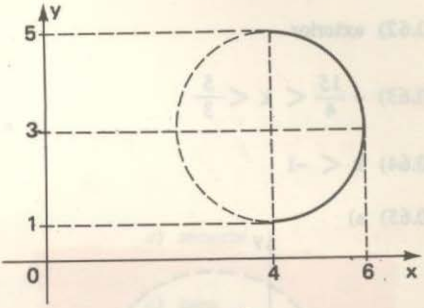
10.44) 5k + m + 22 = 0 (neste caso, esta condição já é suficiente)

10.45) k = -6; m = 8; t = -11

10.46) a)



b)



10.47) 36x - 16y - 47 = 0

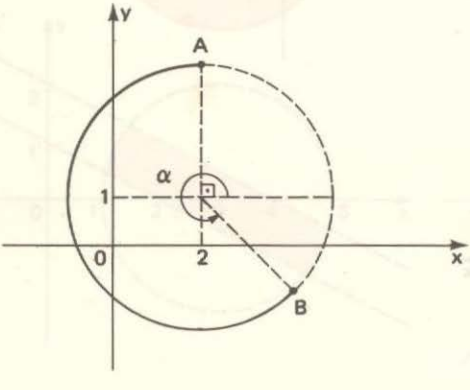
10.48) a) $5 - 3\sqrt{2}$
b) 0
c) $\sqrt{2}$
d) $3\sqrt{2}$

10.53) a) $\begin{cases} x = 4 + 7\cos\theta \\ y = -5 + 7\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\theta \in \mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x = \sqrt{6}\cos\theta \\ y = \sqrt{6}\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$ $\theta \in \mathbb{R}$

10.54) a) $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$
b) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 40y + 65 = 0$
c) $x^2 + y^2 = 9$

10.55)



$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{7\pi}{4} \\ A(2;\ 4) \\ B\left(\dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{2 - 3\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$$

10.56) $x^2 + y^2 = 4$

10.57) $\begin{cases} x = 3 + 2\cos\theta \\ y = 2 + 2\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \pi \leqslant \theta \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$

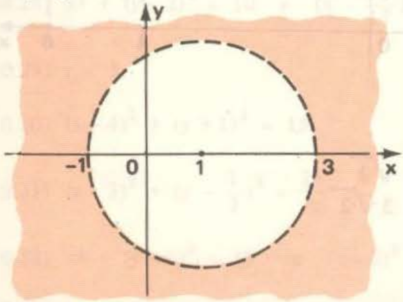
10.61) a) interior
b) sobre
c) interior
d) exterior

10.62) exterior

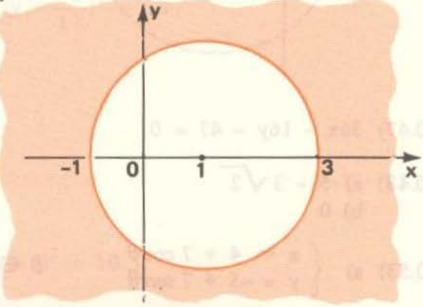
10.63) $-\dfrac{15}{4} < k < \dfrac{5}{3}$

10.64) $k < -1$

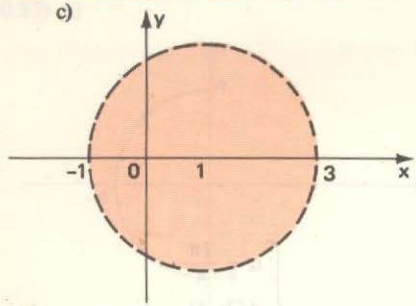
10.65) a)



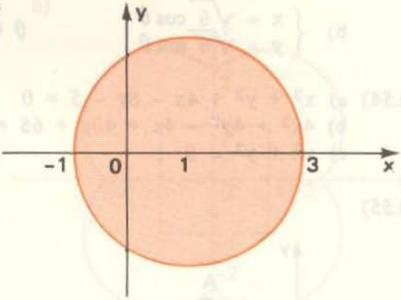
b)



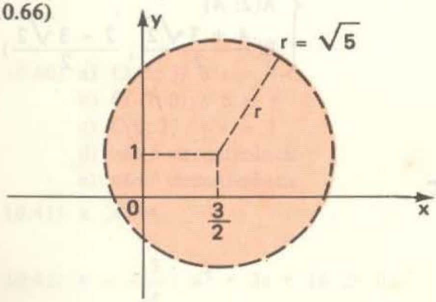
c)



d)



10.66)



11.20) a) (1; -1) e (2; 2)
b) (0; 1)
c) Não se cortam.

11.21) (-3; 0) e (5; 2)

11.22) (1; 0) e (5; 0)

11.23) (4; 4) e (-3; -3)

11.24) $\sqrt{10}$

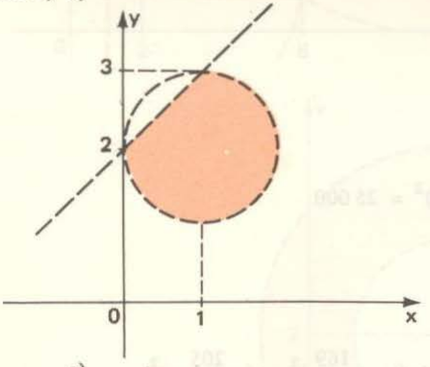
11.25) $3x - 4y + 9 = 0$ ou $3x - 4y - 31 = 0$

11.26) $a = 3$

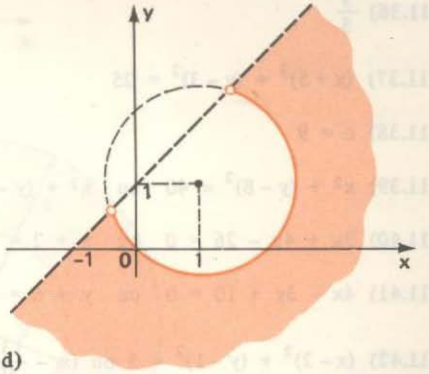
11.27) a) tangente b) exterior c) secante

11.28) a) zero b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) zero

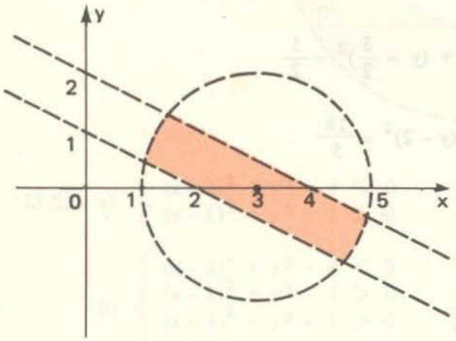
11.29) a)



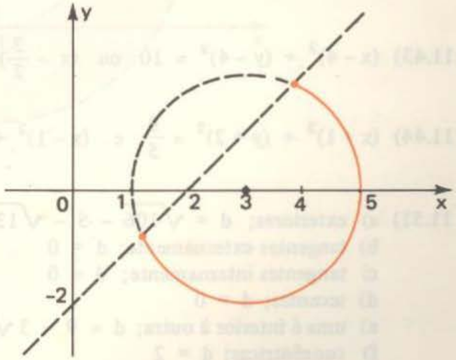
b)



c)



d)



11.30) a) $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 < 9 \\ xy > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 1 \\ (\sqrt{2}+1)x + y - 1 < 0 \\ (\sqrt{2}+1)x - y + 1 > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

11.31) $\sqrt{3}$

11.32) a) $k = 7$ ou $k = -51$
b) $-51 < k < 7$
c) $k > 7$ ou $k < -51$
d) $-51 \leq k \leq 7$

11.33) $2x - y + 3 = 0$ e $2x - y - 7 = 0$

11.34) $2x + y = 0$ ou $2x + 11y + 20 = 0$

11.35) $2x - 3y - 12 = 0$

11.36) $\frac{9}{5}$

11.37) $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 25$

11.38) $c = 9$

11.39) $x^2 + (y-8)^2 = 40$ ou $x^2 + (y-168)^2 = 25\,000$

11.40) $3x + 4y - 26 = 0$ ou $x + 2 = 0$

11.41) $4x - 3y + 10 = 0$ ou $y + 6 = 0$

11.42) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ou $(x - \frac{138}{49})^2 + (y - \frac{169}{49})^2 = (\frac{205}{49\sqrt{5}})^2$

11.43) $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 10$ ou $(x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{2}$

11.44) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = \frac{8}{5}$ e $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \frac{18}{5}$

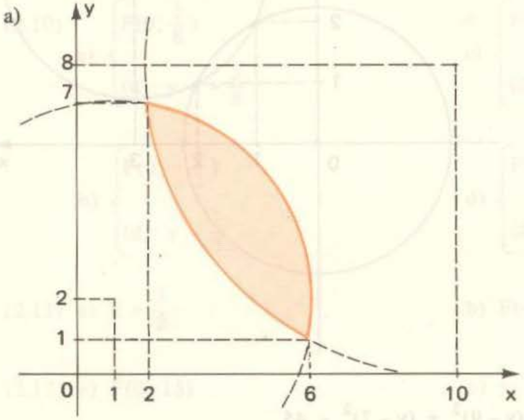
11.51) a) exteriores; $d = \sqrt{106} - 5 - \sqrt{13}$
b) tangentes externamente; $d = 0$
c) tangentes internamente; $d = 0$
d) secantes; $d = 0$
e) uma é interior à outra; $d = 9 - 3\sqrt{5}$
f) concêntricas; $d = 2$

11.52) a) $r = 2$
b) $r = 8$
c) $2 < r < 8$
d) $0 < r < 2$

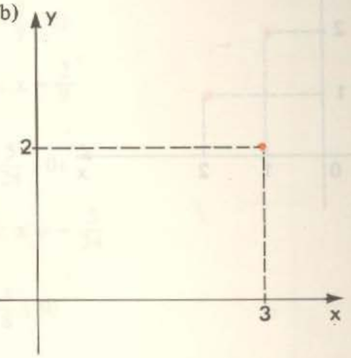
11.53) a) $(2; 7)$ e $(6; 1)$
b) $2\sqrt{13}$

11.54)

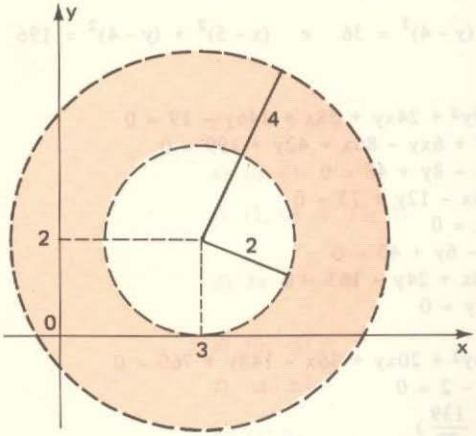
a)



b)



c)

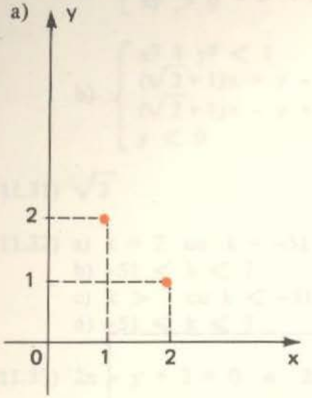


11.55) a) $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 - 4 < 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 > 0 \end{cases}$

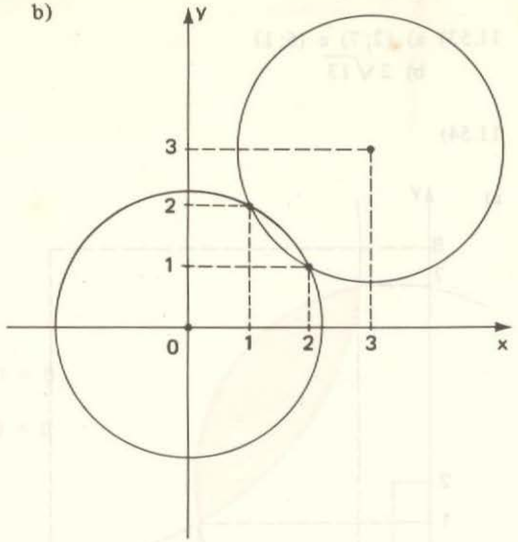
b) $\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 - 4 < 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 1 > 0 \\ (x-3)^2 + y^2 - 1 > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

11.56)

a)



b)



11.57) $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 45$ e $(x-9)^2 + (y-7)^2 = 45$

11.58) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 36$ e $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 196$

12.3) a) $16x^2 + 9y^2 + 24xy + 28x + 146y - 19 = 0$
b) $x^2 + 9y^2 + 6xy - 86x + 42y + 199 = 0$
c) $y^2 - 16x - 8y + 48 = 0$
d) $4y^2 + 64x - 12y + 73 = 0$
e) $y^2 - 12x = 0$
f) $x^2 - 4x - 6y + 43 = 0$
g) $9x^2 + 18x + 24y - 103 = 0$
h) $3x^2 - 28y = 0$

12.4) a) $25x^2 + 4y^2 + 20xy + 36x - 148y + 760 = 0$
b) $5x + 2y - 2 = 0$
c) $(\frac{-44}{29}; \frac{139}{29})$

12.5) a) $x^2 - 10x + 10y - 30 = 0$
b) $x - 5 = 0$
c) $(5; \frac{11}{2})$

12.6) a) $4x - 5y + 14 = 0$
b) $5x + 4y + 38 = 0$

12.7) a) $4x + 3y + 11 = 0$

b) $(\frac{-4}{5}; \frac{-13}{5})$

12.9) a) $y = \frac{1}{40}x^2$

b) $y = -\frac{1}{36}x^2$

c) $x = \frac{1}{80}y^2$

d) $x = -\frac{1}{48}y^2$

12.10) a) $\begin{cases} F(0; \frac{5}{8}) \\ (d): y = -\frac{5}{8} \end{cases}$

b) $\begin{cases} F(0; -\frac{1}{3}) \\ (d): y = \frac{1}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} F(-\frac{2}{9}; 0) \\ (d): x = \frac{2}{9} \end{cases}$

d) $\begin{cases} F(\frac{5}{24}; 0) \\ (d): x = -\frac{5}{24} \end{cases}$

12.11) a) $k = \frac{3}{2}$

b) $F(-\frac{3}{8}; 0)$

12.12) a) F(0; 15)

b) $y = \frac{1}{60}x^2$

12.13) (2; 8) e (-1; 2)

12.14) (1; 3) e (-1; 3)

12.20) a) V(2; -2)

b) $F(2; -\frac{15}{8})$

c) $8y + 17 = 0$

d) $x - 2 = 0$

e) (0; 6)

f) (1; 0) e (3; 0)

12.21) a) $V(\frac{1}{3}; \frac{-14}{3})$

b) $F(\frac{1}{3}; \frac{-19}{4})$

c) $12y + 55 = 0$

d) $3x - 1 = 0$

e) (0; -5)

f) não há

12.22) a) (0; 16)

b) (4; 0)

12.23) a) $V(\frac{1}{4}; \frac{19}{4})$ e $F(\frac{1}{4}; \frac{77}{16})$

b) V(4; -8) e $F(4; \frac{-15}{2})$

c) V(0; -6) e F(0; -4)

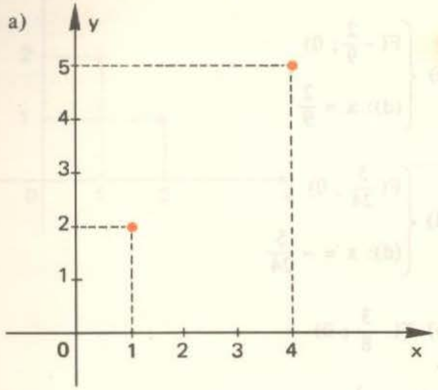
d) V(0; 6) e $F(0; \frac{71}{12})$

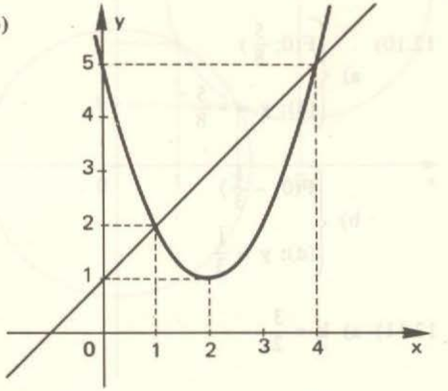
e) V(1; 3) e $F(1; \frac{35}{12})$

f) V(3; -4) e $F(3; \frac{-15}{4})$

12.24) a) (0; 3) e (5; 8)
b) (2; 3)
c) não há
d) $(-3; -\frac{5}{2})$

12.25)

a) 

b) 

12.26) (2; 3) e (3; 6)

12.27) $y = -x^2 + 4x$

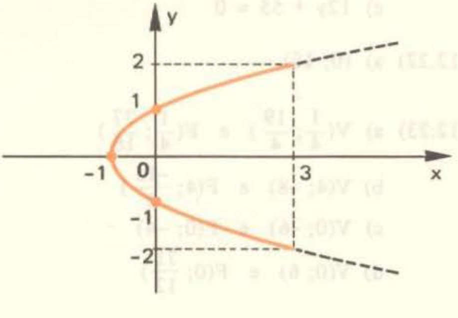
12.28) c = 4

12.31) a) $V(\frac{-11}{8}; \frac{3}{4})$ c) $x = -\frac{17}{12}$
b) $F(-\frac{4}{3}; \frac{3}{4})$ d) $y = \frac{3}{4}$

12.32) a) V(3; 1) b) $F(\frac{23}{8}; 1)$

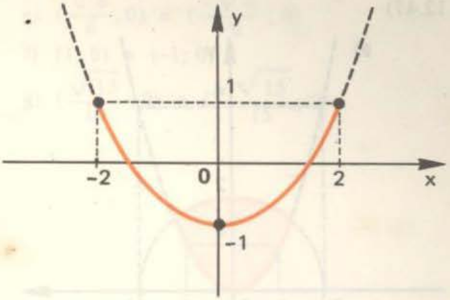
12.36) Parábola de equação $x = \frac{1}{4}y^2 - y - \frac{21}{4}$

12.37) Arco de parábola, de equação
$x = y^2 - 1$, para $-2 \leqslant y \leqslant 2$.



12.38) Arco de parábola de equação

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1, \text{ para } -2 \leqslant x \leqslant 2.$$



12.41) a) $y = 3x - 10$ ou $y = -x + 2$

b) $y = -x$ ou $y = \frac{1}{3}x + 4$

c) $y = -x$

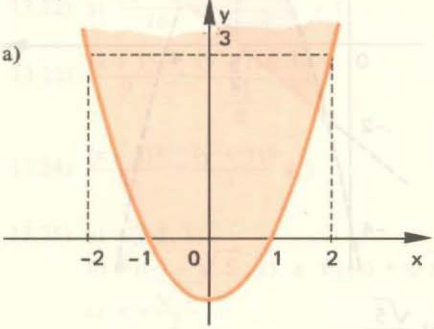
d) $x + 12y - 15 = 0$ ou $x - 3 = 0$

12.42) impossível

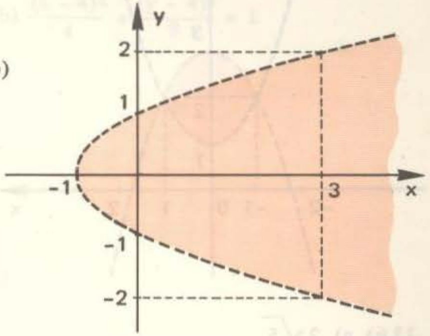
12.43) $5x + y + 2 = 0$

12.46)

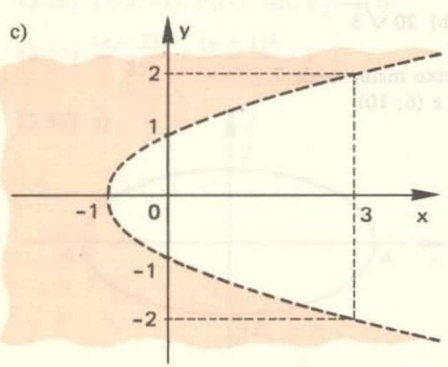
a)



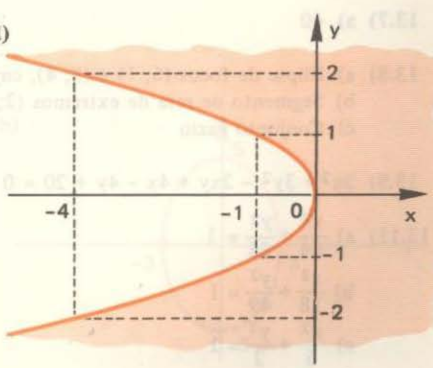
b)



c)

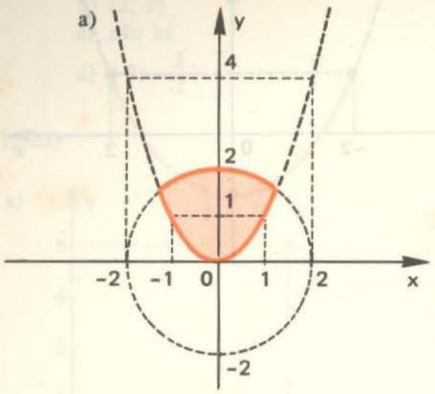


d)

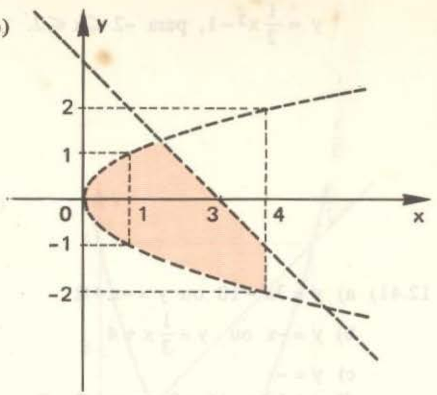


12.47)

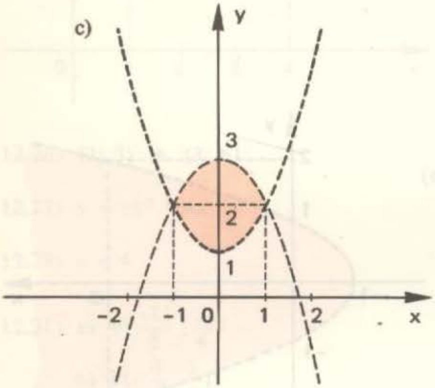
a)



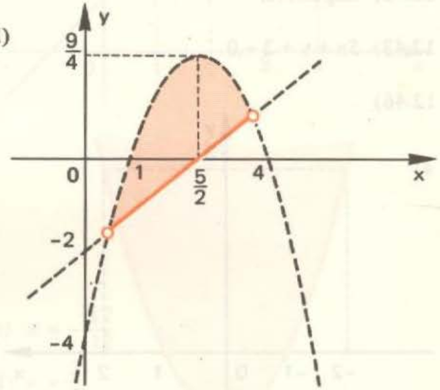
b)



c)



d)



13.6) a) $2\sqrt{5}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

13.7) a) 40 b) $20\sqrt{3}$

13.8) a) Elipse de focos (6; 1) e (8; 4), cujo eixo maior mede 7.
b) Segmento de reta de extremos (2; 7) e (6; 10)
c) Conjunto vazio

13.9) $3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x - 4y + 20 = 0$

13.11) a) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

b) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{49} = 1$

c) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

13.12) a) $(\sqrt{13}\,; 0)$ e $(-\sqrt{13}\,; 0)$
b) $(0; \sqrt{17})$ e $(0; -\sqrt{17})$
c) $(\sqrt{3}\,; 0)$ e $(-\sqrt{3}\,; 0)$
d) $(0; 1)$ e $(0; -1)$
e) $(\frac{\sqrt{6}}{6}; 0)$ e $(\frac{-\sqrt{6}}{6}\,; 0)$
f) $(1; 0)$ e $(-1; 0)$
g) $(\frac{\sqrt{15}}{15}\,; 0)$ e $(\frac{-\sqrt{15}}{15}\,; 0)$

13.13) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

13.14) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

13.15) $e = \frac{3}{7}$

13.16) $(0; -3)$ e $(4; 0)$

13.17) $3x - 8y + 10 = 0$ e $x - 2 = 0$

13.18) $y - 2 = \frac{6 + \sqrt{21}}{5}(x - 3)$ e $y - 2 = \frac{6 - \sqrt{21}}{5}(x - 3)$

13.19) $x - 2y + 5 = 0$ e $x - 2y - 5 = 0$

13.22) a) $\frac{(x-8)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ b) $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

13.23) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{\frac{81}{8}} = 1$

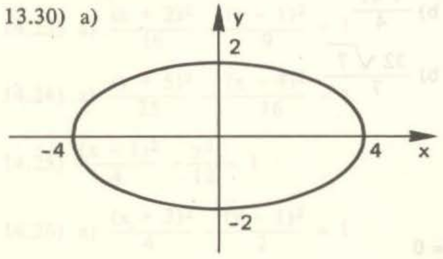
13.24) $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$

13.25) a) $C'(-1; 1)$
b) $F_1(-1 - \sqrt{5}\,; 1)$ e $F_2(-1 + \sqrt{5}\,; 1)$
c) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

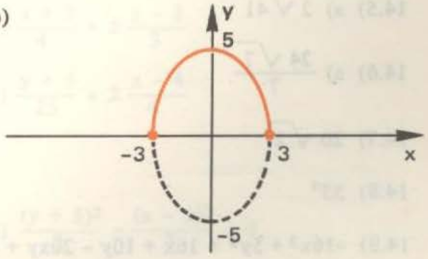
13.26) $C(-2; -1)$, $F_1(-2; -2)$, $F_2(-2; 0)$

13.27) $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

13.30) a)



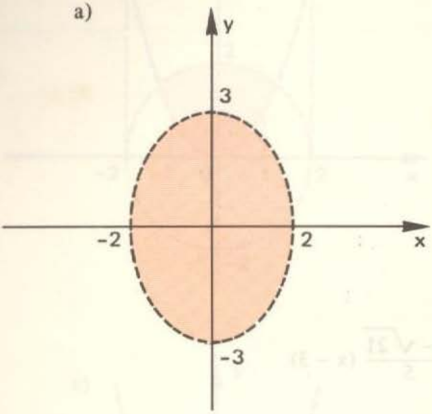
b)



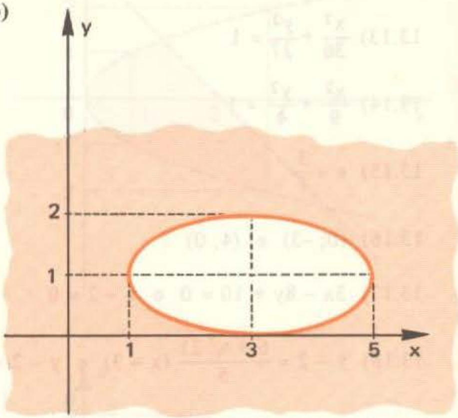
13.31) a) $\frac{(x+4)^2}{64} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$ b) $\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y-10)^2}{81} = 1$

13.34)

a)

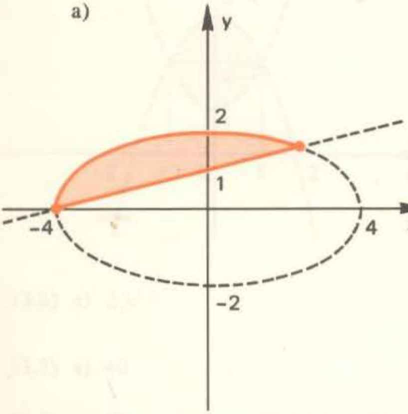


b)

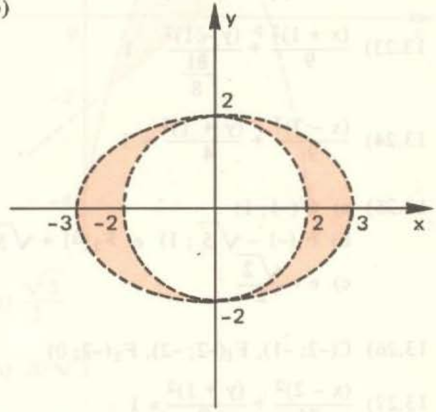


13.35)

a)



b)



14.5) a) $2\sqrt{41}$ b) $\frac{\sqrt{41}}{4}$

14.6) a) $\frac{24\sqrt{7}}{7}$ b) $\frac{32\sqrt{7}}{7}$

14.7) $20\sqrt{2}$

14.8) 53°

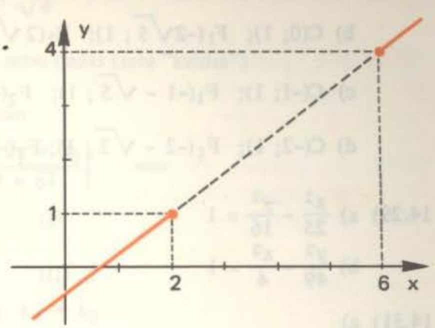
14.9) $-16x^2 + 5y^2 + 16x + 10y - 20xy + 41 = 0$

14.10) a) Hipérbole de focos $F_1(2; 1)$ e $F_2(6; 4)$, com eixo real medindo 4.

b) É o conjunto das duas semi-retas representadas na figura ao lado.

c) conjunto vazio

d) É a mediatriz do segmento $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, onde $F_1(2; 1)$ e $F_2(6; 4)$.



14.13) a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{56} = 1$ b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{56} = 1$

14.14) a) $y = \pm \frac{2\sqrt{14}}{5} x$ b) $y = \pm \frac{5\sqrt{6}}{12} x$

14.15) $\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{25} = 1$

14.16) $2x^2 - 2y^2 - 9 = 0$

14.17) $\frac{\sqrt{53}}{7}$

14.18) a) $\begin{cases} e = \frac{3}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x \end{cases}$ c) $\begin{cases} e = \sqrt{\frac{5}{3}} \\ y = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \end{cases}$

b) $\begin{cases} e = \sqrt{2} \\ y = \pm x \end{cases}$ d) $\begin{cases} e = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ y = \pm \sqrt{3}\, x \end{cases}$

14.19) $\left(\frac{2 + 2\sqrt{7}}{3}; \frac{4 + \sqrt{7}}{3}\right)$ e $\left(\frac{2 - 2\sqrt{7}}{3}; \frac{4 - \sqrt{7}}{3}\right)$

14.20) $3x - y + \sqrt{7} = 0$ e $3x - y - \sqrt{7} = 0$

14.23) a) $\frac{(x + 2)^2}{16} - \frac{(y - 1)^2}{9} = 1$ b) $\frac{x + 2}{4} = \pm \frac{y - 1}{3}$

14.24) a) $\frac{(y + 5)^2}{25} - \frac{(x - 4)^2}{16} = 1$ b) $\frac{y + 5}{25} = \pm \frac{x - 4}{4}$

14.25) $\frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

14.26) a) $\frac{(x + 3)^2}{4} - \frac{(y - 1)^2}{2} = 1$ b) $\frac{(y + 5)^2}{2} - \frac{(x - 1)^2}{3} = 1$

14.27) a) $C(-1;\ 0)$; $F_1(-1 - 2\sqrt{2}\ ;\ 0)$; $F_2(-1 + 2\sqrt{2}\ ;\ 0)$; $y = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}(x + 1)$

b) $C(0;\ 1)$; $F_1(-2\sqrt{5}\ ;\ 1)$; $F_2(2\sqrt{5};\ 1)$; $y - 1 = \pm\frac{x}{2}$

c) $C(-1;\ 1)$; $F_1(-1 - \sqrt{5}\ ;\ 1)$; $F_2(-1 + \sqrt{5}\ ;\ 1)$; $y - 1 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}(x + 1)$

d) $C(-2;\ 1)$; $F_1(-2 - \sqrt{3}\ ;\ 1)$; $F_2(-2 + \sqrt{3}\ ;\ 1)$; $y - 1 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x + 2)$

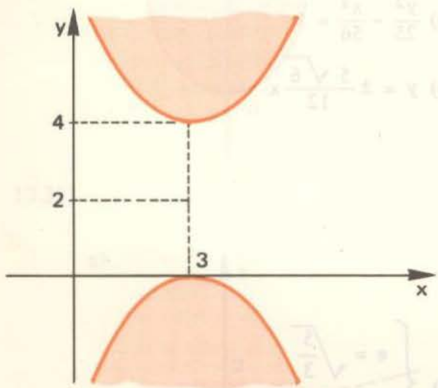
14.29) a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{y^2}{49} - \frac{x^2}{4} = 1$

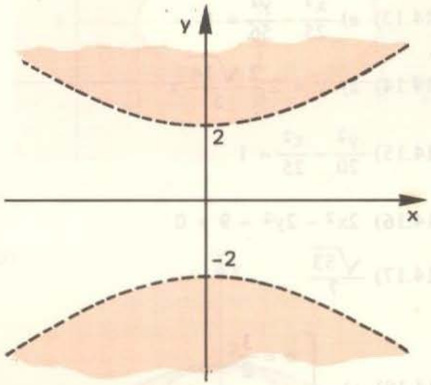
c) $\frac{(x - 4)^2}{36} - \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$

d) $\frac{(y - 1)^2}{81} - \frac{(x + 3)^2}{16} = 1$

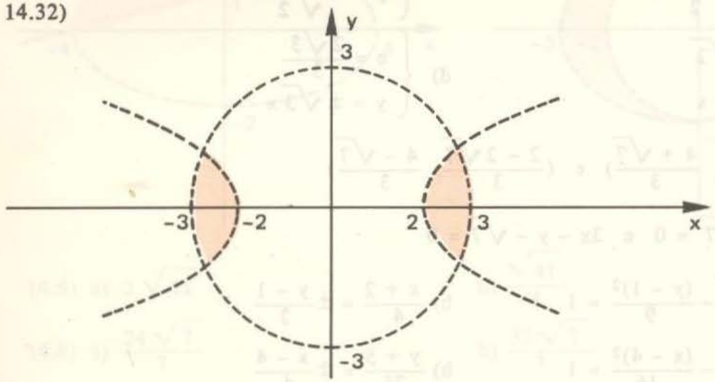
14.31) a)



b)



14.32)



15.4) a) parábola
b) circunferência
c) elipse
d) hipérbole
e) conjunto vazio

15.5) $k = 6$

16.12) a) reta de equação $x + y - 4 = 0$, mediatriz de $\overline{AB}$
b) circunferência de centro (-1; 1) e raio $\sqrt{6}$

16.13) reta de equação $2x - 3y + 4 = 0$, paralela às retas dadas (reta "média")

16.14) Seja P(x; y) um ponto qualquer do lugar; então:

$$\delta_{Pr} = \delta_{Ps} \iff \left|\frac{ax + by + k_1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| = \left|\frac{ax + by + k_2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \iff$$

$$\iff \begin{cases} ax + by + k_1 = +(ax + by + k_2) & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ ax + by + k_2 = -(ax - by + k_2) & \text{(II)} \end{cases}$$

A possibilidade (I) não nos convém, pois $k_1 \neq k_2$
A possibilidade (II) nos dá a equação:

$$2ax + 2by + (k_1 + k_2) = 0$$

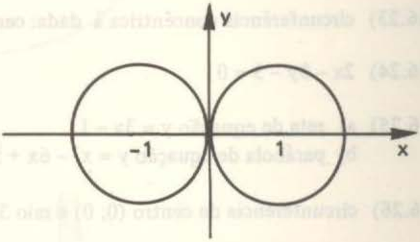
Dividindo por 2, vem a equação de uma reta, conforme a nossa tese:

$$ax + by + \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$$

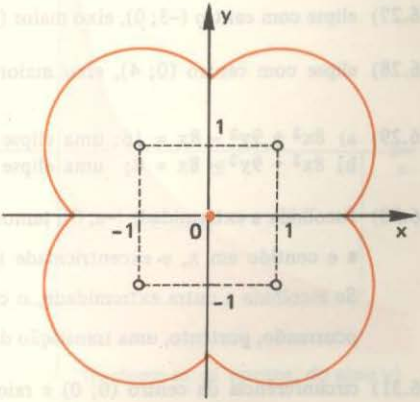
16.15) Reunião de duas retas, paralelas à reta dada, cujas equações são $7x - 24y - 125 = 0$ e $7x - 24y + 125 = 0$.

16.16) Reunião das duas retas de equações $6x - 5y - 6 = 0$ e $10x + 3y + 2 = 0$, ambas passando pela interseção de (r) e (s).

16.17) Reunião de duas circunferências de centros (-1; 0) e (1; 0), e raio 1:



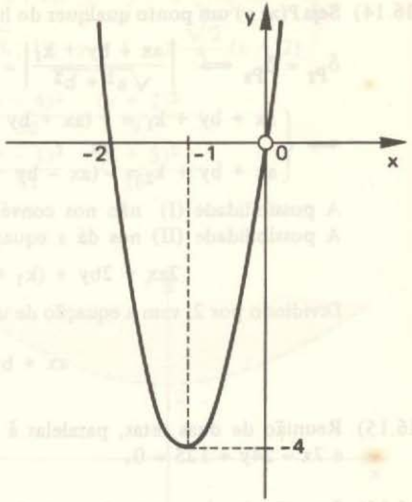
16.18) Reunião de 4 arcos de circunferências de raio $\sqrt{2}$ (conforme a figura) com a origem do sistema.



16.19) uma elipse com focos (-3; 0) e A(3; 0) e excentricidade $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

16.20) uma hipérbole com focos (16; 0) e A(-16; 0) e excentricidade e = 2

16.21) uma parábola, de equação $y = 4x^2 + 8x$ como mostra a figura, excluídos os pontos (0; 0) e (1; 12).



16.22) $x^2 + y^2 - 2xy + 8x + 8 = 0$; uma parábola

16.23) circunferência concêntrica à dada: centro (2; 0) e raio 5

16.24) $2x - 9y - 3 = 0$

16.25) a) reta de equação $y = 3x - 1$
b) parábola de equação $y = x^2 - 6x + 5$

16.26) circunferência de centro (0; 0) e raio $3\sqrt{2}$

16.27) elipse com centro (-3; 0), eixo maior (2a = 5) paralelo a y, e excentricidade e = 0,6

16.28) elipse com centro (0; 4), eixo maior (2a = 8) paralelo a x, e excentricidade $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

16.29) a) $8x^2 + 9y^2 - 8x = 16$; uma elipse
b) $8x^2 + 9y^2 - 8x = 0$; uma elipse

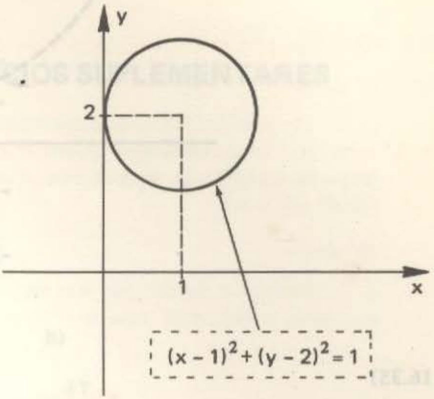
16.30) Escolhida a extremidade (-a; 0), temos uma elipse com centro $(-\frac{a}{2}, 0)$, eixo maior igual a a e contido em x, e excentricidade igual à da elipse dada.

Se escolhida a outra extremidade, o centro dessa elipse se desloca para o ponto $(\frac{a}{2}; 0)$, ocorrendo, portanto, uma translação do lugar.

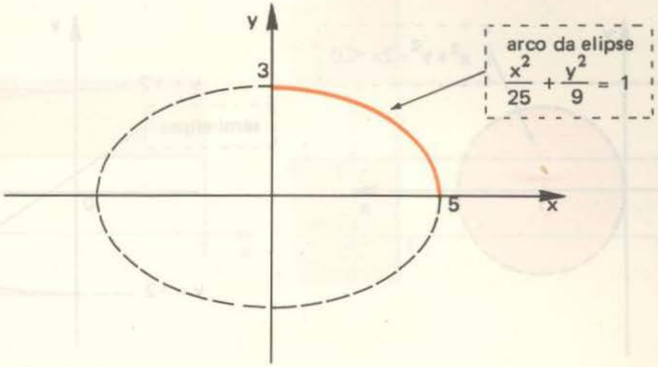
16.31) circunferência de centro (0; 0) e raio $4\sqrt{2}$

16.32) a)

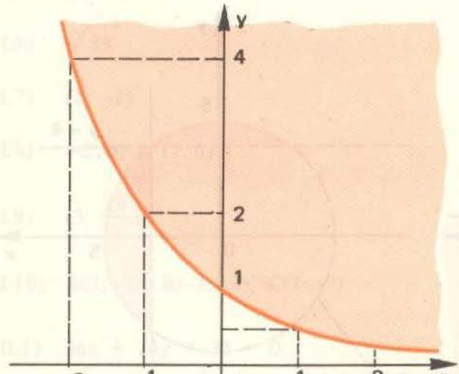
b)



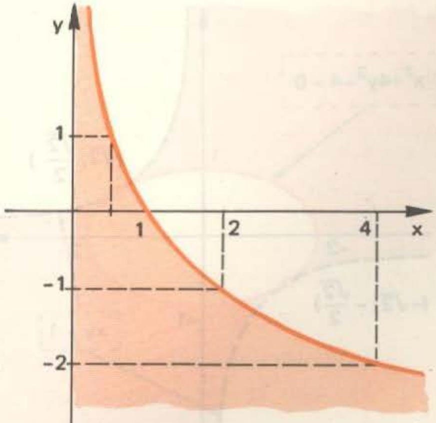
c)



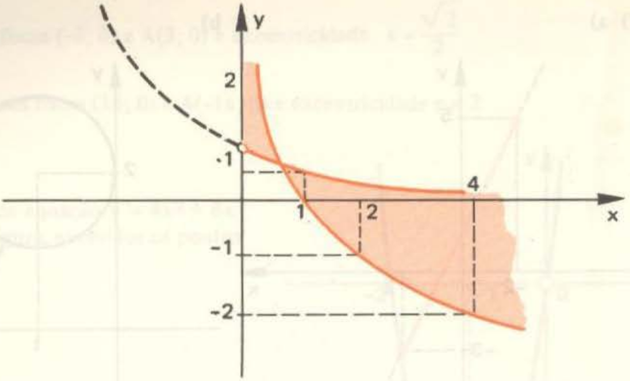
16.33) a)



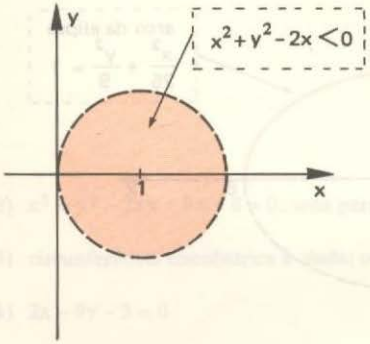
b)



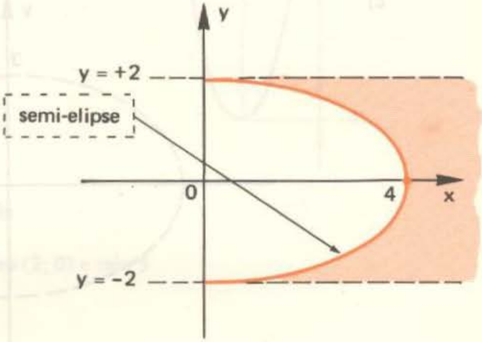
16.34)



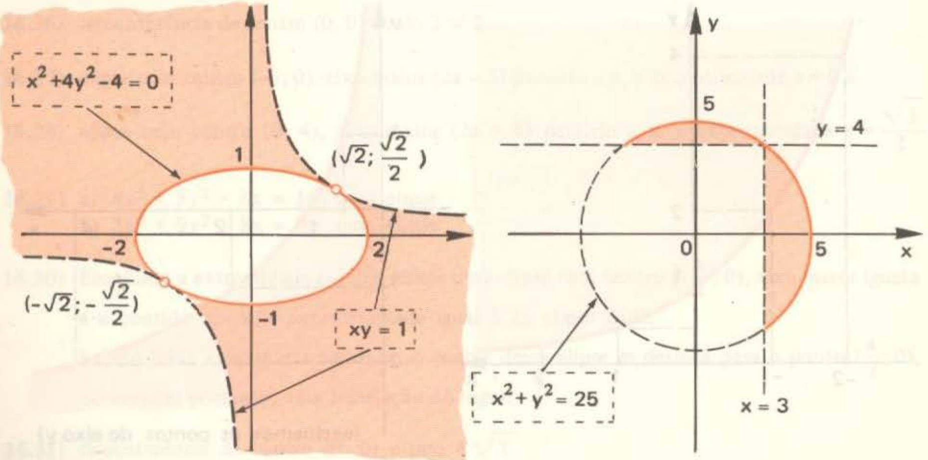
16.35)



16.36)



16.37)



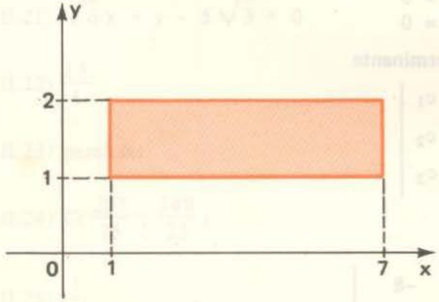
RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) $x_A = -4$ e $x_B = 17$

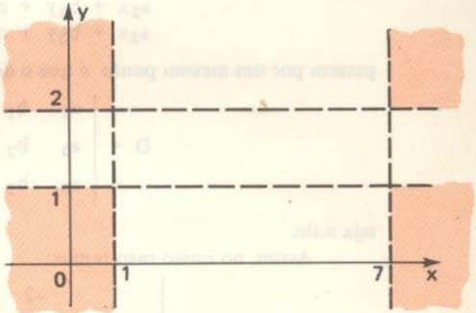
ou

$x_A = 10$ e $x_B = -11$

I.2) a)



b)



I.3) $r = 10$

I.4) $(-4; 4)$, $(0; 12)$, $(8; 0)$

I.5) $(4; -2)$

I.6) $\sqrt{39}$

I.7) $(1; -2)$

I.8) $(-5; 0)$ e $(7; 6)$

I.9) $(3; \frac{28}{5})$

I.10) $A(3; -3)$, $B(-7; 13)$, $C(7; -7)$

II.1) $36x + 24y + 35 = 0$

II.2) $(m - 1; 1 - m)$

II.3) $8x + 3y - 23 = 0$

II.4) $3x - 4y + 15 = 0$

II.5) $3x - 5y - 21 = 0$

II.6) 1º modo

Em primeiro lugar, determinamos a interseção das retas de equações $x - 2y - 8 = 0$ e $3x + y - 3 = 0$, obtendo o ponto $P(2; -3)$. Em seguida, substituímos as coordenadas de P na equação da terceira reta, obtendo uma sentença verdadeira para quaisquer valores de a e b.

2º modo

Usando a teoria dos sistemas lineares, pode-se demonstrar que a condição necessária e suficiente para que as retas de equações

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

passem por um mesmo ponto é que o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

seja nulo.

Assim, no nosso caso temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ a + 3b & b - a & -5a - 3b \end{vmatrix} = 0$$

II.7) $(3; 5)$

II.8) $(-1; 3)$

II.9) $(2; \frac{13}{3})$

II.10) $a = 6$ e $b = -8$

II.11) $\frac{4}{7}$

II.12) $\frac{21}{2}$

II.13) Fatorando a expressão "$x^3 - 3x^2 - 4x + 12$", obtemos:

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = x^2(x - 3) - 4(x - 3) = (x - 3)(x^2 - 4) = (x - 3)(x + 2)(x - 2)$$

Assim, a equação dada representa a reunião das retas de equações $x - 3 = 0$, $x + 2 = 0$ e $x - 2 = 0$.

II.14) $k = \frac{8}{3}$ ou $k = -\frac{8}{3}$

II.15) $(1; -1)$

II.16) $-\frac{2}{3}$

II.17) $(4\sqrt{3} - 6; 0)$ ou $(4\sqrt{3} + 6; 0)$

II.18) $5x - 9y + 57 = 0$

II.19) retângulo

II.20) $\sqrt{3}x - 3y - 5\sqrt{3} = 0$

II.21) $\sqrt{3}x + y - 5\sqrt{3} = 0$

II.22) $\frac{13}{4}$

II.23) paralelas

II.24) $C(\frac{207}{25}; \frac{149}{25})$

II.25) $\frac{1}{13}$

II.26) $5x + 2y + 20 = 0$ ou $5x + 2y - 20 = 0$

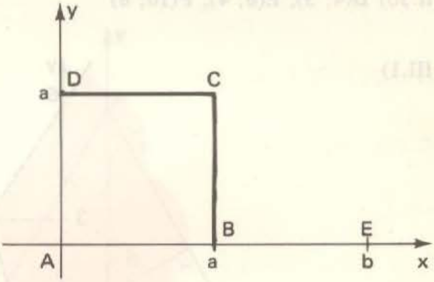
II.27) $y = 2x - 4$ e $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

ou

$y = -2x + 8$ e $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

II.28) Adotamos um sistema de coordenadas tal que $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(a; a)$, $D(0; a)$ e $E(b; 0)$.

Equação de $\overleftrightarrow{DE}$: $y = a - \frac{a}{b}x$



Procuramos a interseção de $\overleftrightarrow{DE}$ com $\overleftrightarrow{BC}$ obtendo:

$$F(a; \frac{ab - a^2}{b})$$

Equação de $\overleftrightarrow{AF}$: $y = (\frac{b-a}{b})x$

Equação de $\overleftrightarrow{CE}$: $y = \left(\frac{a}{a-b}\right)(x-b)$

Interseção de $\overleftrightarrow{AF}$ e $\overleftrightarrow{CE}$: $G\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2-ab}; \frac{ab^2-a^2b}{a^2+b^2-ab}\right)$

Coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{BG}$: $m_1 = \frac{b}{a}$

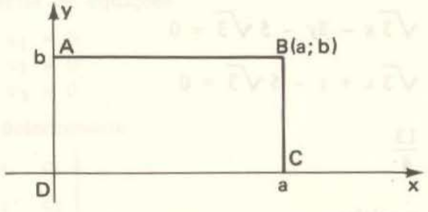
Coeficiente angular de $\overleftrightarrow{DE}$: $m_2 = \frac{-a}{b}$

$m_1 \cdot m_2 = -1 \Rightarrow \overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são perpendiculares

II.29) Determinamos as projeções de D e B sobre $\overleftrightarrow{AC}$, obtendo:

$F\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}; \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$ e

$E\left(\frac{a^3}{a^2+b^2}; \frac{b^3}{a^2+b^2}\right)$



Os segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{BE}$ são perpendiculares a $\overline{AC}$ e portanto são paralelos entre si. Portanto, falta apenas demonstrar que $\overline{DE}$ e $\overline{FB}$ são paralelos.

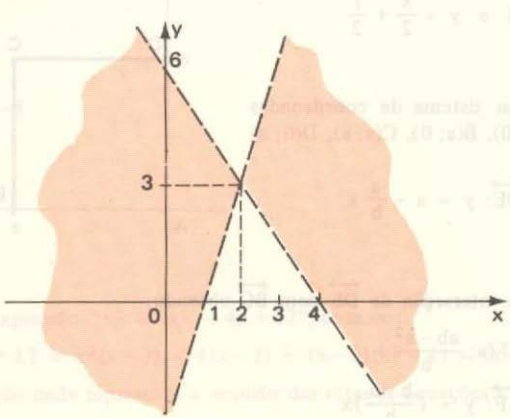
$$m_1 = \text{coeficiente angular de } \overline{FB} = \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} = \frac{b^3}{a^3}$$

$$m_2 = \text{coeficiente angular de } \overline{DE} = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{b^3}{a^3}$$

$m_1 = m_2 \Longrightarrow \overline{FB}$ e $\overline{DE}$ são paralelos.

II.30) D(4; 3), E(6; 4), F(10; 6)

III.1)



III.2) (-1; 7) e (7; -1)

III.3) $\sqrt{a + b}$

III.4) $a = 1$ ou $a = \frac{-23}{27}$

III.5) $2ax - 2by + a + b = 0$ e $2bx + 2ay + a - b = 0$

III.6) $\frac{13}{5}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$

III.7) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$, $4\sqrt{2}$ e $\frac{12\sqrt{34}}{17}$

III.8) $\frac{\sqrt{5}}{30}$

III.9) zero

III.10) $(\frac{-10}{3}; \frac{-10}{3})$ e $(-2; 2)$

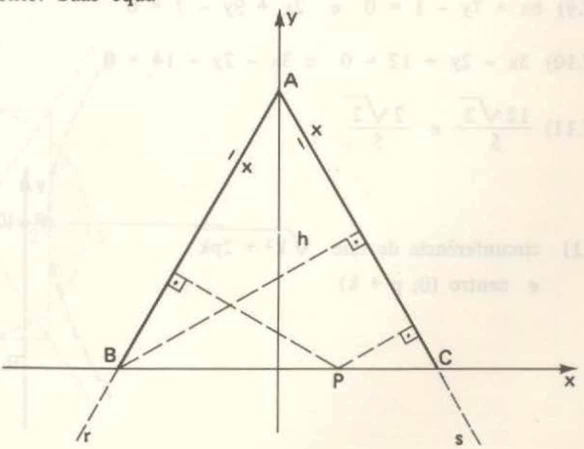
III.11) $3x - y - 2 = 0$ ou $5x - 3y - 2 = 0$

III.12) $2\sqrt{3}$

III.13) (1; 8) ou $(\frac{-107}{7}; \frac{-58}{7})$

III.14) Façamos: A(0; b), B(-a; 0), C(a; 0) e P(c; 0).
Sejam r e s as retas-suportes dos lados $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, respectivamente. Suas equações são:

(r): $bx - ay + ab = 0$
(s): $bx + ay - ab = 0$



Fazemos a sinalização dos semiplanos determinados por r e s (ver figura).

$$\delta_{Pr} = \frac{|bc + ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{bc + ab}{\sqrt{b^2 + a^2}} \qquad \text{(I)}$$

$$\delta_{Ps} = \frac{|bc - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{ab - bc}{\sqrt{b^2 + a^2}} \qquad \text{(II)}$$

$$\delta_{Bs} = \frac{|-ab - ab|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + a^2}} \qquad \text{(III)}$$

Comparando I, II e III, concluímos:

$$\delta_{Pr} + \delta_{Ps} = \delta_{Bs}$$

IV.1) $k = 4$ ou $k = -2$

IV.2) $\frac{19}{2}$

IV.3) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y + 1 = 0$

IV.4) $(0; \sqrt{3})$, $(3; 0)$, $(1; 0)$

IV.5) $(1; 1)$ e $(-1; 2)$

IV.6) $2\sqrt{2}$

IV.7) $(2; 0)$ e $(6; 0)$

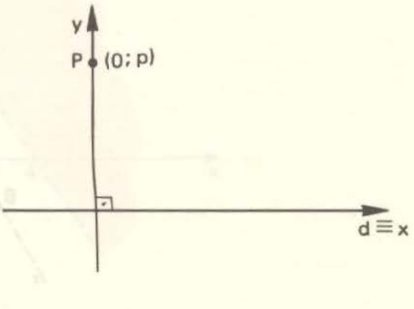
IV.8) $r = 1$

IV.9) $6x + 7y - 1 = 0$ e $2x + 9y - 7 = 0$

IV.10) $3x - 2y + 12 = 0$ e $3x - 2y - 14 = 0$

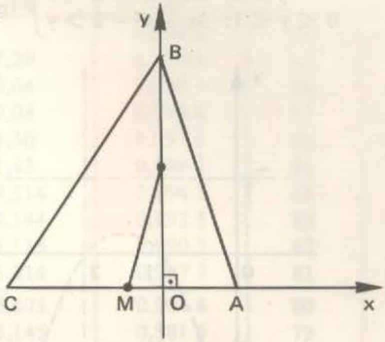
IV.11) $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ e $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

V.1) circunferência de raio $\sqrt{k^2 + 2pk}$ e centro $(0; p + k)$



V.2) Reta de equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, que passa pelas projeções do ponto P sobre Ox e Oy.

V.3) Segmento de reta que liga o ponto médio de CA e o ponto médio da altura BO.



V.4) Equação da parábola: $x^2 - 2xy + y^2 + 10x + 6y - 39 = 0$; equação da perpendicular por T a d: $x - y - 7 = 0$; interseção D(7; 0); equação de FT: $7x + y - 9 = 0$; bissetriz do ângulo $F\hat{T}D$: $3x - y - 11 = 0$.

V.5) $\frac{q^2 - b^2}{a^2 - p^2}$

V.6) $c^2(a^2 + m^2b^2) = m^2(a^2 - b^2)^2$

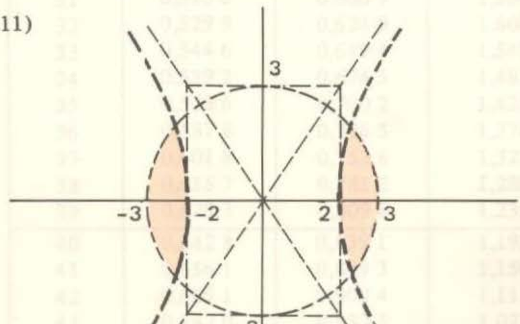
V.7) $\frac{a^2}{\ell^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{n^2}$

V.8) Obtenha a equação da tangente paralela à reta dada. Determine o ponto T de tangência. A distância de T à reta dada é a resposta ($3\sqrt{5}$).

V.9) $(m < 0 \text{ ou } m > 1)$ e $m \neq \frac{-\sqrt{2}}{2}$

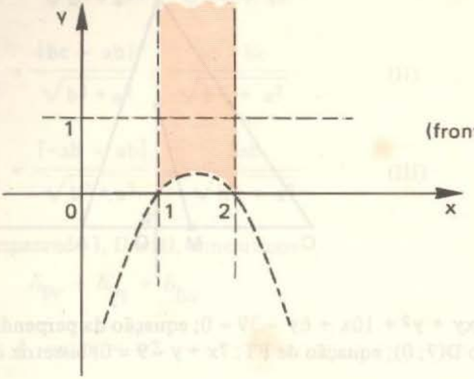
V.10) Um deles é externo e o outro pertence à circunferência.

V.11)



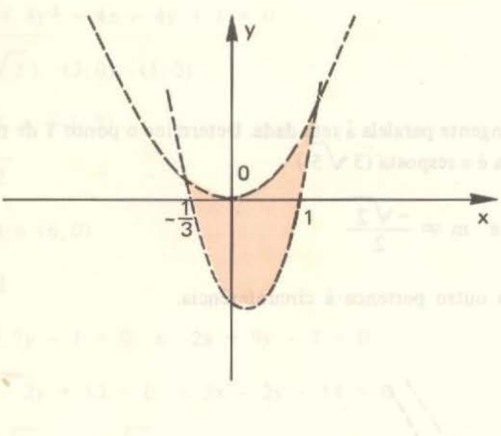
V.12) condição de existência: $y > 0$ e $y \neq 1$ e $1 < x < 2$

$$\left.\begin{array}{l} y > 1:\ 3x - x^2 - 2 < y \\ 0 < y < 1:\ 3x - x^2 - 2 > y \end{array}\right\} \text{(parábola)}$$



(fronteiras excluídas)

V.13) $a^2 = b$: $b^2 - (x + 1)b + x^2 - y = 0$; $\Delta > 0$, $p > 0$, $s > 0$



RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

g°	sen	tg	cotg	cos	
0	0,000 0	0,000 0		1,000 0	90
1	0,017 5	0,017 5	57,29	0,999 8	89
2	0,034 9	0,034 9	28,64	0,999 4	88
3	0,052 3	0,052 4	19,08	0,998 6	87
4	0,069 8	0,069 9	14,30	0,997 6	86
5	0,087 2	0,087 5	11,43	0,996 2	85
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5	84
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5	83
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3	82
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7	81
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8	80
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6	79
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1	78
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4	77
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3	76
15	0,258 8	0,267 9	3,732	0,965 9	75
16	0,275 6	0,286 7	3,487	0,961 3	74
17	0,292 4	0,305 7	3,271	0,956 3	73
18	0,309 0	0,324 9	3,078	0,951 1	72
19	0,325 6	0,344 3	2,904	0,945 5	71
20	0,342 0	0,364 0	2,747	0,939 7	70
21	0,358 4	0,383 9	2,605	0,933 6	69
22	0,374 6	0,404 0	2,475	0,927 2	68
23	0,390 7	0,424 5	2,356	0,920 5	67
24	0,406 7	0,445 2	2,246	0,913 5	66
25	0,422 6	0,466 3	2,145	0,906 3	65
26	0,438 4	0,487 7	2,050	0,898 8	64
27	0,454 0	0,509 5	1,963	0,891 0	63
28	0,469 5	0,531 7	1,881	0,882 9	62
29	0,484 8	0,554 3	1,804	0,874 6	61
30	0,500 0	0,577 4	1,732	0,866 0	60
31	0,515 0	0,600 9	1,664	0,857 2	59
32	0,529 9	0,624 9	1,600	0,848 0	58
33	0,544 6	0,649 4	1,540	0,838 7	57
34	0,559 2	0,674 5	1,483	0,829 0	56
35	0,573 6	0,700 2	1,428	0,819 2	55
36	0,587 8	0,726 5	1,376	0,809 0	54
37	0,601 8	0,753 6	1,327	0,798 6	53
38	0,615 7	0,781 2	1,280	0,788 0	52
39	0,629 3	0,809 8	1,235	0,777 1	51
40	0,642 8	0,839 1	1,192	0,766 0	50
41	0,656 1	0,869 3	1,150	0,754 7	49
42	0,669 1	0,900 4	1,111	0,743 1	48
43	0,682 0	0,932 5	1,072	0,731 4	47
44	0,694 7	0,965 7	1,036	0,719 3	46
45	0,707 1	1,000 0	1,000	0,707 1	45
	cos	cotg	tg	sen	g°

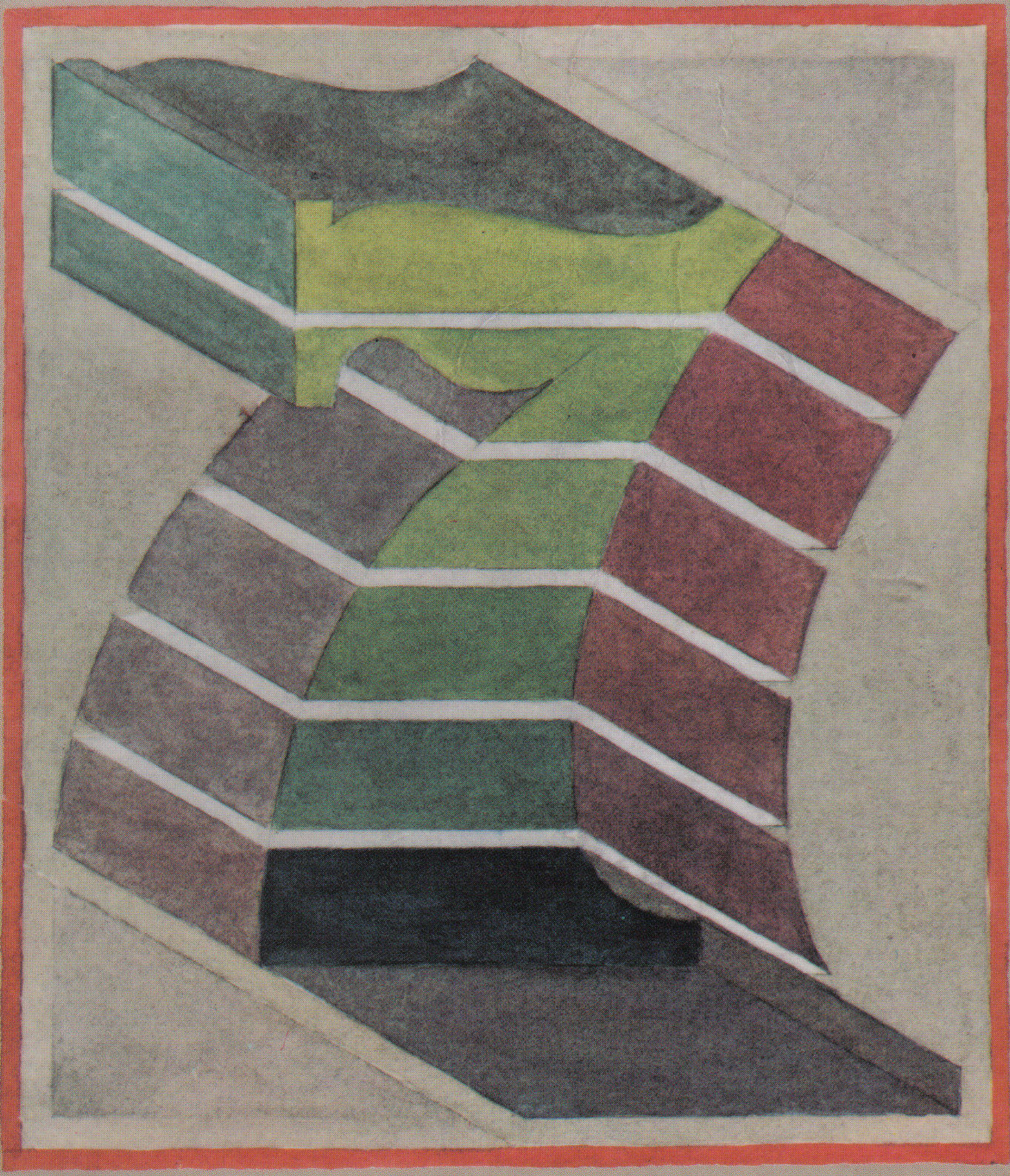
NOÇÕES DE MATEMÁTICA
(plano da obra)

Volume 1 — Conjuntos e funções
Volume 2 — Progressões e logaritmos
Volume 3 — Trigonometria
Volume 4 — Combinatória, matrizes e determinantes
Volume 5 — Geometria
Volume 6 — Geometria analítica
Volume 7 — Números complexos, polinômios e equações algébricas
Volume 8 — Introdução à análise matemática

EDITORA
MODERNA

NÚMEROS COMPLEXOS POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

AREF ANTAR NETO
NILTON LAPA
JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO
SIDNEY LUIZ CAVALLANTTE



NOÇÕES DE MATEMÁTICA VOLUME 7

Aref Antar Neto
José Luiz Pereira Sampaio
Nilton Lapa
Sidney Luiz Cavallante

NÚMEROS COMPLEXOS, POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Noções de Matemática

VOLUME 7

SEGUNDO GRAU

1.ª edição

EDITORA MODERNA

Capa:
Ricardo Van Steen

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

N916 Números complexos, polinômios, equações algébricas : 2º grau / Aref Antar Neto . . . [et al.]. – – São Paulo : Ed. Moderna, 1982.
(Noções de matemática ; v. 7)

1. Equações 2. Matemática (2º grau) 3. Números complexos 4. Polinômios I. Antar Neto, Aref, 1949– II. Série.

17. CDD-510.07
18. -510.7
17. -512.2
18. -512.94
17. -512.21
18. -512.942
17. -512.81
82-0032 18. -512.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Equações algébricas 512.2 (17.) 512.94 (18.)
2. Matemática : Estudo e ensino 510.07 (17.) 510.7 (18.)
3. Números complexos : Álgebra 512.81 (17.) 512.7 (18.)
4. Polinômios : Álgebra 512.21 (17.) 512.942 (18.)

Todos os direitos reservados
EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tel.: 531-5099
CEP 04511 - São Paulo - SP - Brasil

1982

Impresso no Brasil

2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

Índice

Parte I

Capítulo 1 — **O conjunto dos números complexos** 3

1.1 — Introdução 3
1.2 — Números complexos 8
1.3 — O conjunto dos números complexos 11

Capítulo 2 — **Forma algébrica dos números complexos** 17

2.1 — Introdução 17
2.2 — Descobrindo que os números reais são complexos ... 17
2.3 — Unidade imaginária 18
2.4 — Forma algébrica 19
2.5 — As potências naturais de *i* 27
2.6 — Conjugado de um número complexo 30
2.7 — Divisão 31

Capítulo 3 — **A geometria dos números complexos** 35

3.1 — O plano de Argand-Gauss 35
3.2 — Módulo de um número complexo 38
3.3 — Propriedades imediatas do módulo 40
3.4 — Outra propriedade do módulo: a desigualdade triangular 44

Capítulo 4 — **A trigonometria dos números complexos** 48

4.1 — Argumento de um número complexo 48
4.2 — A forma trigonométrica dos números complexos 50

Capítulo 5 — **Operações na forma trigonométrica** 53

5.1 — Introdução 53
5.2 — Multiplicação e Divisão 53
5.3 — Potenciação 55
5.4 — Radiciação 60
Exercícios Suplementares 68

Parte II

Capítulo 6 — **O conceito de polinômio. Igualdade** 71

6.1 — O conceito 71
6.2 — Valor numérico de um polinômio 71
6.3 — Definição — Polinômio nulo 72
6.4 — Quando um polinômio é nulo — Teorema 72
6.5 — Definição — Polinômios Iguais 73
6.6 — Quando polinômios são iguais — Teorema 74

Capítulo 7 — **Operações com os polinômios. Grau** 77

7.1 — Adição de polinômios 77
7.2 — Multiplicação de polinômios 80
7.3 — Grau de um polinômio 82

Capítulo 8 — **A divisão de polinômios** 91

8.1 — Divisão euclidiana 91
8.2 — Método de Descartes para a divisão de polinômios 96

Capítulo 9 — **A divisão de polinômios em que o divisor é de grau 1** 103

9.1 — Teorema do resto 103
9.2 — O dispositivo de Briot-Ruffini 104
9.3 — Observações sobre o dispositivo 106
9.4 — A divisibilidade pelo produto — Teorema 107
9.5 — A divisibilidade por $(x - c)^m$ — Teorema 108

Capítulo 10 — **Outros temas importantes** 118

10.1 — Polinômio derivado 118
10.2 — Máximo divisor comum 125
10.3 — Mínimo múltiplo comum 131
10.4 — Uma observação importante 133
Exercícios Suplementares 134

Parte III

Capítulo 11 – **Equações algébricas** 139

11.1 – Introdução 139
11.2 – Equação algébrica do primeiro grau 141
11.3 – Equação algébrica do segundo grau 142
11.4 – Teorema Fundamental da Álgebra 142
11.5 – Teorema da decomposição 143
11.6 – Demonstração do teorema da decomposição 145
11.7 – Alguns artifícios 154
11.8 – Polinômios de mesmas raízes 161

Capítulo 12 – **Raízes múltiplas** 162

12.1 – Raízes múltiplas e derivadas – Teorema 162
12.2 – Demonstração do teorema 164

Capítulo 13 – **Raízes imaginárias** 170

13.1 – Teorema das raízes conjugadas 170
13.2 – Conseqüência 172

Capítulo 14 – **Relações de Girard** 179

14.1 – Introdução 179
14.2 – Equação do segundo grau 179
14.3 – Equação do terceiro grau 180
14.4 – Equação do quarto grau 181
14.5 – Caso geral 182

Capítulo 15 – **Raízes racionais** 204

15.1 – Teorema das raízes racionais 204
15.2 – Demonstração do teorema 206
15.3 – Conseqüências 207
15.4 – Propriedades 213

Capítulo 16 – **Equações recíprocas** 215

16.1 – Definição 215
16.2 – Reconhecimento de uma equação recíproca 216
16.3 – Resolução de uma equação recíproca 218
16.4 – Resolução da equação recíproca normal 220

Capítulo 17 — **Raízes comuns** 225

17.1 — Introdução 225
17.2 — Raízes comuns e MDC 225
17.3 — Raízes múltiplas e MDC 227

Capítulo 18 — **Raízes reais** 229

18.1 — Introdução 229
18.2 — Gráfico da função polinomial 229
18.3 — Teorema de Bolzano 237
Exercícios Suplementares 240

Testes de vestibulares 242
Respostas dos exercícios propostos 271
Respostas dos exercícios suplementares 293
Respostas dos testes de vestibulares 297
Tabela de razões trigonométricas 298

Hamilton Fábio Mota Medeiros.
Belém-Pa, 27 de Maio de 2008

PARTE I

Capítulo 1 — **O conjunto dos números complexos**

Capítulo 2 — **Forma algébrica dos números complexos**

Capítulo 3 — **A geometria dos números complexos**

Capítulo 4 — **A trigonometria dos números complexos**

Capítulo 5 — **Operações na forma trigonométrica**

Hamilton Fábio Mota Medeiros.

Belém-Pa, 27 de Maio de 2008

Capítulo 1

O conjunto dos números complexos

1.1 — INTRODUÇÃO

A criação dos números complexos teve estímulo na necessidade, sentida pelos matemáticos, de ampliar o campo numérico de seu trabalho, dando significado, principalmente, às raízes quadradas de números negativos.

Por que razão, quando se trabalha com números reais, algumas equações do segundo grau têm duas raízes, enquanto que outras não têm nenhuma?

Como sabemos, isso acontece porque não existe, entre os reais, um número que elevado ao quadrado dê resultado negativo:

$$(?)^2 = -25$$

$$(?)^2 = -\frac{2}{9}$$

e isso se confirma quando a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ é escrita na forma:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

onde vemos que não existe valor real de x capaz de satisfazer a equação no caso em que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ é negativo.

Ora, como todo número negativo pode ser escrito como o produto de seu simétrico por -1:

$$-25 = 25 \cdot (-1) = 5^2 \cdot (?)^2$$

$$-\frac{2}{9} = \frac{2}{9} \cdot (-1) = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\right]^2 \cdot (?)^2$$

a questão de ampliar o campo numérico reside, portanto, em *criar* algum ente que verifique a igualdade:

$$(?)^2 = -1$$

Observa-se, assim, a necessidade de ampliação do universo numérico.

Essa necessidade não é nova: **Diofante de Alexandria** (cerca de 250 d.C.) esteve às voltas com o seguinte problema:

Determinar os lados de um triângulo retângulo de perímetro 12 e área 7.

A montagem desse problema nos traz a equação:

$$6x^2 - 43x + 84 = 0$$

onde x é a medida de um dos catetos.

O discriminante dessa equação é negativo ($\Delta = -167$), o que nos leva a concluir que *não existe o triângulo procurado.* Não teria Diofante despertado sua atenção para **equações que,** como essa, **têm** $\Delta < 0$?

Em 1545, o médico italiano **Girolamo Cardano** (1501-1576) propôs e resolveu o problema seguinte:

Dividir 10 em duas partes tais que seu produto seja 40.

A equação representativa desse problema é:

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

tendo Cardano encontrado as respostas $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ e, sobre isso, teria dito que o resultado é *tão sutil quanto inútil,* no que, ao menos quanto à utilidade, estava inequivocamente enganado, já que hoje a teoria dos números complexos tem larga aplicação na Física e na Engenharia.

Ele próprio, sem o saber, teve uma mostra de que o fato de se dar uma interpretação à raiz quadrada de números negativos seria útil, pois, ao estudar a solução de equações da forma:

$$x^3 = ax + b$$

encontrou resultados que, em certos casos, incluíam tais raízes quadradas e, nesses mesmos casos, ele sabia existir uma solução **real**. Por exemplo, o resultado que se obtém para a equação $x^3 = 15x + 4$, utilizando o método de Cardano, é dado pela expressão:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Uma verificação direta mostra-nos que $x = 4$ é raiz dessa equação, o que levaria a supor, num raciocínio simples, que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

Ora, se *não existe* $\sqrt{-121}$, como poderia tal expressão apresentar um valor real?

Inventando um novo número

Suponha-se, então, que convencidos da necessidade, resolvamos *inventar* um número cujo quadrado seja -1.

Imediatamente surge a questão: como operar com esse novo número?

É claro que essa criação nos será útil apenas se pudermos usar os mesmos processos operacionais a que estamos acostumados.

Assim, sem ter, por enquanto, a preocupação de *formalizar uma estrutura numérica nova*, procurando apenas ganhar intimidade com a idéia, consideremos um novo número que, por falta de outro melhor, representaremos pelo símbolo **i**, e formulemos duas hipóteses:

> **1.ª) $i^2 = -1$**
> **2.ª) i obedece às principais propriedades operacionais da Álgebra.***

Com isso, podemos já completar as igualdades questionadas no início deste item:

$$-25 = 25 \cdot (-1) = 5^2 \cdot i^2$$

$$-\frac{2}{9} = \frac{2}{9} \cdot (-1) = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}\right]^2 \cdot i^2$$

e também podemos encontrar soluções para equações antes impossíveis. Optamos por exemplificar esse fato por meio de exercícios para que, durante a leitura, as eventuais dúvidas que o leitor tenha sobre a consistência das hipóteses feitas (e o modo de operar), sirvam de estímulo para o estudo do próximo item, onde daremos tratamento mais formal e rigoroso aos números complexos.

Exercícios Resolvidos

1.1) Resolva a equação $x^2 + 1 = 0$.

Solução

Este é um exemplo típico de equação cujo conjunto-verdade, no campo dos números reais, é vazio.

Agora, com base nas hipóteses adotadas, podemos escrever:

$$\begin{aligned} & x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - (-1) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (x + i)(x - i) = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x + i = 0 \text{ ou } x - i = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow x = -i \text{ ou } x = i \end{aligned}$$

Logo: $S = \{-i; i\}$.

* Comutativa (da adição e da multiplicação), associativa (da adição e da multiplicação) e distributiva.

1.2) Resolva a equação $x^2 - 4x + 13 = 0$.

Solução

O discriminante dessa equação é:

$$\Delta = 16 - 52 = -36$$

Baseados nas hipóteses adotadas, escrevemos:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36(-1)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36i^2}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

Logo: $S = \{2 + 3i;\ 2 - 3i\}$.

O leitor pode verificar que, realmente, qualquer um dos números obtidos satisfaz a equação; por exemplo, substituindo em $x^2 - 4x + 13$, **x** por $2 + 3i$, temos:

$$(2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13 = (4 + 12i + 9\underbrace{i^2}_{-1}) - (8 + 12i) + 13 =$$
$$= 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13 =$$
$$= 0$$

1.3) Resolva a equação $x^3 + 8 = 0$.

Solução

Trabalhando no campo dos números reais, faríamos simplesmente:

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

No entanto, com as hipóteses adotadas, podemos verificar a *existência* de duas outras soluções; lembrando a fatoração:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

escrevemos:

$$x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{12i^2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3} \end{cases}$$

Logo: $S = \{-2;\ 1 + i\sqrt{3};\ 1 - i\sqrt{3}\}$.

1.4) Verifique que o número **i** é raiz da equação $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$.

Solução

Substituindo, no primeiro membro da equação, **x** por **i**, vem:

$$i^3 - 2i^2 + i - 2 = \underbrace{i^2}_{-1} \cdot i - 2\underbrace{i^2}_{-1} + i - 2 = -i + 2 + i - 2 = 0$$

Logo: **i** é raiz.

1.5) Mostre, com base nas hipóteses adotadas, que o número **i** não é positivo, não é negativo e não é igual a zero, isto é, que as **relações** $i > 0$, $i < 0$ e $i = 0$ não têm significado.

Solução

Lembrando que:

$$\begin{aligned} &1.^{\circ})\ a > 0 \Rightarrow a^2 > 0 \\ &2.^{\circ})\ a < 0 \Rightarrow a^2 > 0 \\ &3.^{\circ})\ a = 0 \Leftrightarrow a^2 = 0 \end{aligned}$$

mostremos que qualquer uma das hipóteses: $i > 0$, $i < 0$ ou $i = 0$ nos conduz a um absurdo.

I) Supondo $i > 0$, vem:

$$i > 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0 \text{ (!!!)}$$

II) Supondo $i < 0$, vem:

$$i < 0 \Rightarrow i^2 > 0 \Rightarrow -1 > 0 \text{ (!!!)}$$

III) Supondo $i = 0$, vem:

$$i = 0 \Rightarrow i^2 = 0 \Rightarrow -1 = 0 \text{ (!!!)}$$

Assim, não valem as relações $i > 0$, $i < 0$ e $i = 0$.

1.6) Talvez o fato de termos *inventado* um número (**i**), e trabalhado com relativo sucesso apenas *supondo* que ele obedece às principais propriedades operacionais, leve-nos a querer usar esse procedimento em outras situações.

Por exemplo, sabemos que não se define **divisão por zero**. Teríamos sucesso se inventássemos um resultado nesse caso?

Suponha, então, um novo *número*, representado pelo símbolo $\square\!\square$, tal que:

I) $\dfrac{1}{0} = \square\!\square$

II) $\square\!\square$ satisfaz as principais propriedades operacionais da Álgebra. (Veja nota de rodapé anterior.)

Mostre que I e II conduzem a absurdos como a afirmação:

Números diferentes são iguais.

Solução

Sejam **x** e **y** números tais que $x \neq y$.

Sabemos que $0 \cdot x = 0 \cdot y$. Multiplicando ambos os membros por $\square\!\square$:

$$\square\!\square \cdot (0 \cdot x) = \square\!\square \cdot (0 \cdot y)$$

Como estamos supondo válida a propriedade associativa, podemos escrever:

$$(\square\!\square \cdot 0) \cdot x = (\square\!\square \cdot 0) \cdot y \quad (1)$$

Como, de I e II temos $\dfrac{1}{0} = \square\!\square \Rightarrow \square\!\square \cdot 0 = 1$, a igualdade (1) fica:

$$1 \cdot x = 1 \cdot y$$

Donde: $x = y$ (!!!)

Exemplificando numericamente:

$$0 \cdot \sqrt{5} = 0 \cdot 8$$
$$\square\square \cdot (0 \cdot \sqrt{5}) = \square\square \cdot (0 \cdot 8)$$
$$(\square\square \cdot 0) \cdot \sqrt{5} = (\square\square \cdot 0) \cdot 8$$
$$1 \cdot \sqrt{5} = 1 \cdot 8$$
$$\sqrt{5} = 8 \text{ (!!!)}$$

Isso nos mostra que não basta criar uma nova proposta numérica apenas na *esperança* de que as regras sejam obedecidas. É preciso montar uma estrutura consistente e compatível com o rigor matemático.

Exercícios Propostos

1.7) Resolva as equações:

a) $x^2 + 9 = 0$
b) $x^2 + 5 = 0$
c) $x^4 - 1 = 0$
d) $x^4 - 256 = 0$

(*Sugestão*: fatore as expressões usando diferença de quadrados nos itens *c* e *d*.)

1.8) Resolva as equações:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$
b) $4x^2 - 16x + 17 = 0$
c) $x^2 - 6x + 17 = 0$
d) $x^2 - 10x + 40 = 0$

1.9) Resolva a equação $x^3 + 1 = 0$.

1.10) Verifique que o número ω é raiz da equação (E) nos seguintes casos:

a) $\omega = -i$; (E): $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
b) $\omega = 2i$; (E): $x^4 - 2x^3 - 8x - 16 = 0$
c) $\omega = 2 + i$; (E): $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$

1.2 — NÚMEROS COMPLEXOS

Há, em Matemática, mais de uma maneira de se conceituar, formalmente, número complexo. Preferimos aqui adotar a seguinte **definição**:

> Chama-se **número complexo** a qualquer **par ordenado** $(x; y)$ **de números reais.**

É usual indicar um número complexo pela letra **z**. Assim, $z_1 = (-2; 3)$, $z_2 = (0; -1)$, $z_3 = \left(\frac{5}{3}; 0\right)$ e $z_4 = (\sqrt{2}; \pi)$ são exemplos de números complexos.

Já com vistas a introduzir uma estrutura operatória aos números complexos, estabelecemos, também, as seguintes definições, onde **a**, **b**, **c** e **d** são números reais:

> **I) Igualdade de números complexos**
>
> $(a;\ b) = (c;\ d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$

> **II) Adição de números complexos**
>
> $(a;\ b) + (c;\ d) = (a + c;\ b + d)$

> **III) Multiplicação de números complexos**
>
> $(a;\ b) \cdot (c;\ d) = (ac - bd;\ ad + bc)$

Exemplos

a) Se $(x;\ y) = (-2;\ 3)$, então $x = -2$ e $y = 3$.

b) Se $z_1 = (2;\ 3)$ e $z_2 = (4;\ 5)$, então:

$$z_1 + z_2 = (2;\ 3) + (4;\ 5) = (2 + 4;\ 3 + 5) = (6;\ 8) \text{ e}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2;\ 3) \cdot (4;\ 5) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5;\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4) = (-7;\ 22)$$

c) Sendo **z** um número complexo qualquer, temos:

$$z^2 = z \cdot z$$

Assim, se $z = \left(\frac{1}{2};\ -2\right)$, então:

$$z^2 = z \cdot z = \left(\frac{1}{2};\ -2\right) \cdot \left(\frac{1}{2};\ -2\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - [-2] \cdot [-2];\ \frac{1}{2} \cdot [-2] + [-2] \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{15}{4};\ -2\right)$$

Para quem está tomando contato pela primeira vez com esta teoria, é intrigante observar que as definições de igualdade e adição dadas são, digamos, *intuitivas*, enquanto que a da multiplicação foge completamente a essa intuição: por que não definir $(a;\ b) \cdot (c;\ d)$ por $(a \cdot c;\ b \cdot d)$?

A isso respondemos com a lembrança de que estamos procurando criar um campo onde existam números cujo quadrado seja negativo e, como veremos mais adiante, será justamente esse modo de multiplicar, estabelecido na definição (III), que nos fornecerá tais resultados.

Exercícios Resolvidos

1.11) Determine os reais **x** e **y** para que $(x - 3y; x + y) = (1; -4)$.

Solução

Da igualdade de números complexos vem:

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ x + y = -4 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos:

$$x = -\frac{11}{4} \text{ e } y = -\frac{5}{4}$$

1.12) Determine o número complexo **z** tal que $(-2; 8) + z = (2; 0) \cdot z$.

Solução

Seja $z = (x; y)$; então:

$$(-2; 8) + (x; y) = (2; 0) \cdot (x; y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 + x; 8 + y) = (2 \cdot x - 0 \cdot y; 2 \cdot y + 0 \cdot x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 + x; 8 + y) = (2x; 2y) \Rightarrow \begin{cases} -2 + x = 2x \\ 8 + y = 2y \end{cases}$$

Logo, $x = -2$ e $y = 8$, e daí $z = (-2; 8)$.

1.13) Resolva a equação $z^2 = (0; 1)$.

Solução

Seja $z = (x; y)$; então:

$$z^2 = (0; 1) \Rightarrow z \cdot z = (0; 1) \Rightarrow (x; y) \cdot (x; y) = (0; 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x \cdot x - y \cdot y; x \cdot y + y \cdot x) = (0; 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 - y^2; 2xy) = (0; 1) \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema (lembrando que **x** e **y** são números **reais**), obtemos:

$$\left(x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ ou } \left(x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Logo, $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $z = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, e o conjunto-solução da equação é:

$$S = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

Exercícios Propostos

1.14) Dados $z_1 = (1; 4)$, $z_2 = (-2; -2)$ e $z_3 = (0; 3)$, calcule:

a) $z_1 + z_2$
b) $z_1 + z_2 + z_3$
c) $z_1 \cdot z_2$
d) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
e) $z_2 \cdot (z_1 + z_3)$
f) $z_1^2 + z_3^2$
g) $(z_1 + z_2)^2$

1.15) Determine os reais **x** e **y** para que se tenha:

a) $(x + 2; y - 3) = \left(2; -\frac{1}{2}\right)$

b) $(2x - 3y; 3x + 2y) = \left(8; \frac{11}{2}\right) \cdot (2; 0)$

1.16) Dados $z_1 = (5; -5)$ e $z_2 = \left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$, determine **z** tal que:

a) $z + z_1 = (0; 0)$
b) $z \cdot z_2 = (1; 0)$
c) $z + z_2 = z_1$
d) $z \cdot z_1 = z_2$

1.17) Resolva a equação $z^2 = (0; -8)$.

1.3 — O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Com a definição de número complexo, seguida dos conceitos de igualdade, adição e multiplicação, dados no item 1.2, podemos agora definir **conjunto dos números complexos** como sendo o **conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais:**

$$\mathbb{C} = \{z = (x; y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$$

É importante notar que, desta forma, estamos definindo o conjunto dos números complexos como o **produto cartesiano** do conjunto dos números reais por ele mesmo, isto é:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

Estando, então, definidas em $\mathbb{C}$ a igualdade (I), a adição (II) e a multiplicação (III), conforme o item anterior, é bastante simples provar que, nesse novo conjunto, são verdadeiras as nove propriedades operacionais da Álgebra, a saber:

1. Propriedade comutativa da adição

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$ e $z_2 = (c; d)$, temos:

$$z_1 + z_2 = (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d) =$$
$$= (c + a; d + b) = (c; d) + (a; b) = z_2 + z_1$$

2. Propriedade associativa da adição

$$z_1 + [z_2 + z_3] = [z_1 + z_2] + z_3, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ \forall z_3 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$, $z_2 = (c; d)$ e $z_3 = (p; q)$, temos:

$$z_1 + [z_2 + z_3] = (a; b) + [(c; d) + (p; q)] = (a; b) + (c + p; d + q) =$$
$$= (a + [c + p]; b + [d + q]) = ([a + c] + p; [b + d] + q) =$$
$$= (a + c; b + d) + (p; q) = [(a; b) + (c; d)] + (p; q) =$$
$$= [z_1 + z_2] + z_3$$

3. Existência do elemento neutro da adição

$$\exists \eta_a \in \mathbb{C} \mid z + \eta_a = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Sendo $z = (a; b)$, vamos mostrar que existe $\eta_a = (x; y)$ tal que $z + \eta_a = z$:

$$(a; b) + (x; y) = (a; b) \Leftrightarrow (a + x; b + y) = (a; b)$$

Da igualdade, vem $\begin{cases} a + x = a \\ b + y = b \end{cases}$

donde $x = 0$ e $y = 0$. Existe, portanto, o **elemento neutro** $\eta_a = (0; 0)$, que **somado** a qualquer número complexo **z** dá como resultado o próprio **z.**

4. Existência do elemento simétrico

$$\exists z' \in \mathbb{C} \mid z + z' = \eta_a, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Sendo $z = (a; b)$, vamos mostrar que existe $z' = (x; y)$ tal que $z + z' = \eta_a$. Como $\eta_a = (0; 0)$, escrevemos:

$$(a; b) + (x; y) = (0; 0) \Leftrightarrow (a + x; b + y) = (0; 0)$$

Da igualdade, vem $\begin{cases} a + x = 0 \\ b + y = 0 \end{cases}$

donde $x = -a$ e $y = -b$. Existe, portanto, o **elemento simétrico** $z' = (-a; -b)$.

Observação: Indicando **z'** por **−z**, temos $z' = (-a; -b) = -z = -(a; b)$.

Com isso, sendo $z_1 = (m; n)$ e $z_2 = (p; q)$, ao efetuarmos a adição $z_1 + z'_2$, escrevemos:

$$z_1 + z'_2 = z_1 + (-z_2) = (m; n) + (-p; -q) = (m-p; n-q)$$

dando assim um significado para o que chamamos de *subtração* de números complexos. Por exemplo:

$$(5; 8) - (9; 3) = (5 - 9; 8 - 3) = (-4; 5)$$
$$(-13; 5) - (2; -4) = (-15; 9)$$

5. Propriedade comutativa da multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$ e $z_2 = (c; d)$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$
$$z_2 \cdot z_1 = (c; d) \cdot (a; b) = (ca - db; da + cb)$$

Logo: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

6. Propriedade associativa da multiplicação

$$z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3] = [z_1 \cdot z_2] \cdot z_3, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ \forall z_3 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$, $z_2 = (c; d)$ e $z_3 = (p; q)$, temos:

$$z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3] = (a; b)\,[(c; d) \cdot (p; q)] = (a; b) \cdot (cp - dq; cq + dp) =$$
$$= (a[cp - dq] - b[cq + dp]; a[cq + dp] + b\,[cp - dq]) =$$
$$= (acp - adq - bcq - bdp; acq + adp + bcp - bdq)$$
$$[z_1 \cdot z_2] \cdot z_3 = [(a; b) \cdot (c; d)] \cdot (p; q) = (ac - bd; ad + bc) \cdot (p \cdot q) =$$
$$= ([ac - bd]p - [ad + bc]q; [ac - bd]q + [ad + bc]p) =$$
$$= (acp - bdp - adq - bcq; acq - bdq + adp + bcp)$$

Logo: $z_1 \cdot [z_2 \cdot z_3] = [z_1 \cdot z_2] \cdot z_3$

7. Existência do elemento neutro da multiplicação

$$\exists \eta_m \in \mathbb{C} \mid z \cdot \eta_m = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

Sendo $z = (a; b)$, vamos mostrar que existe $\eta_m = (x; y)$ tal que $z \cdot \eta_m = z$:

$$(a; b) \cdot (x; y) = (a; b) \Leftrightarrow (ax - by; ay + bx) = (a; b)$$

Da igualdade, vem $\begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases}$

A resolução do sistema fornece x = 1 e y = 0. Existe, portanto, o **elemento neutro**

$$\eta_m = (1;\ 0)$$

que **multiplicado** por qualquer número complexo **z** dá como resultado o próprio **z**.

Exemplificando numericamente:

$$(5;\ 3) \cdot (1;\ 0) = (5 \cdot 1 - 3 \cdot 0;\ 5 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = (5;\ 3)$$

$$(1;\ 0) \cdot (3;\ -\sqrt{2}) = (1 \cdot 3 - 0 \cdot [-\sqrt{2}];\ 1 \cdot [-\sqrt{2}] + 0 \cdot 3) = (3;\ -\sqrt{2})$$

8. Existência do elemento inverso

$$\exists z^{-1} \in \mathbb{C} \mid z \cdot z^{-1} = \eta_m,\ \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Seja $z = (a;\ b) \neq (0;\ 0)$, isto é, $z \in \mathbb{C} - \{(0;\ 0)\} = \mathbb{C}^*$. Vamos mostrar que existe o número complexo (x; y), indicado por z^{-1}, tal que $z \cdot z^{-1} = \eta_m$:

$$(a;\ b) \cdot (x;\ y) = (1;\ 0) \Leftrightarrow (ax - by;\ ay + bx) = (1;\ 0)$$

Da igualdade, vem $\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases}$

A resolução do sistema fornece $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$ e $y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$. Existe, portanto, o elemento inverso de z = (a; b) (também chamado inverso multiplicativo):

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2};\ \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$$

Exemplos

1.º) O inverso de $z_1 = \left(\frac{4}{5};\ \frac{2}{5}\right)$ é:

$$z_1^{-1} = \left(\frac{\frac{4}{5}}{\left[\frac{4}{5}\right]^2 + \left[\frac{2}{5}\right]^2};\ \frac{-\frac{2}{5}}{\left[\frac{4}{5}\right]^2 + \left[\frac{2}{5}\right]^2}\right) = \left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$$

2.º) O inverso de $z_2 = (-3;\ 0)$ é:

$$z_2^{-1} = \left(\frac{-3}{[-3]^2 + 0^2};\ \frac{0}{[-3]^2 + 0^2}\right) = \left(-\frac{1}{3};\ 0\right)$$

3.º) O inverso de $z_3 = (0; -4)$ é:

$$z_3^{-1} = \left(\frac{0}{0^2 + [-4]^2}; \frac{-[-4]}{0^2 + [-4]^2}\right) = \left(0; \frac{1}{4}\right)$$

9. Propriedade distributiva

$$z_1 \cdot [z_2 + z_3] = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \ \forall z_1 \in \mathbb{C}, \ \forall z_2 \in \mathbb{C}, \ \forall z_3 \in \mathbb{C}$$

Sendo $z_1 = (a; b)$, $z_2 = (c; d)$ e $z_3 = (p; q)$, temos:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot [z_2 + z_3] &= (a; b) \cdot [(c; d) + (p; q)] = \\ &= (a; b) \cdot (c + p; d + q) = \\ &= (a[c + p] - b[d + q]; a[d + q] + b[c + p]) = \\ &= (ac + ap - bd - bq; ad + aq + bc + bp) \\ z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 &= (a; b) \cdot (c; d) + (a; b) \cdot (p; q) = \\ &= (ac - bd; ad + bc) + (ap - bq; aq + bp) = \\ &= ([ac - bd] + [ap - bq]; [ad + bc] + [aq + bp]) = \\ &= (ac - bd + ap - bq; ad + bc + aq + bp) \end{aligned}$$

Logo: $z_1 \cdot [z_2 + z_3] = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Exercício Resolvido

1.18) **Divisão de números complexos** – A existência do elemento inverso (propriedade 8) permite-nos definir divisão de dois números complexos como sendo o produto do primeiro pelo inverso do segundo. Assim, sendo z_1 e z_2, com $z_2 \neq (0; 0)$, dois elementos de $\mathbb{C}$, a divisão de z_1 por z_2 é indicada e definida por:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$$

Nessas condições, efetue:

a) $\dfrac{(2; -3)}{(3; 2)}$

b) $\dfrac{(-1; 1)}{(1; -1)}$

Solução

a) O inverso de (3; 2) é:

$$(3; 2)^{-1} = \left(\frac{3}{3^2 + 2^2}; \frac{-2}{3^2 + 2^2}\right) = \left(\frac{3}{13}; -\frac{2}{13}\right)$$

Então:

$$\frac{(2; -3)}{(3; 2)} = (2; -3) \cdot (3; 2)^{-1} = (2; -3) \cdot \left(\frac{3}{13}; -\frac{2}{13}\right) =$$

$$= \left(2 \cdot \frac{3}{13} - [-3] \cdot \left[-\frac{2}{13}\right]; 2 \cdot \left[-\frac{2}{13}\right] + [-3] \cdot \frac{3}{13}\right) = (0; -1)$$

b) O inverso de $(1;\ -1)$ é:

$$(1;\ -1)^{-1} = \left(\frac{1}{1^2 + [-1]^2};\ \frac{-[-1]}{1^2 + [-1]^2}\right) = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$$

Então:

$$\frac{(-1;\ 1)}{(1;\ -1)} = (-1;\ 1)\cdot(1;\ -1)^{-1} = (-1;\ 1)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left([-1]\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{1}{2};\ [-1]\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2}\right) = (-1;\ 0)$$

Exercícios Propostos

1.19) Determine os inversos multiplicativos dos números complexos:

a) $\left(\frac{12}{13};\ \frac{5}{13}\right)$ b) $(5;\ 0)$ c) $(0;\ 3)$

1.20) Efetue as divisões:

a) $\dfrac{(1;\ 1)}{\left(\frac{12}{13};\ \frac{5}{13}\right)}$ b) $\dfrac{(0;\ -5)}{(5;\ 0)}$ c) $\dfrac{(-3;\ 0)}{(0;\ 3)}$

1.21) Seja $z = (a;\ b) \in \mathbb{C}^*$. Se o inverso multiplicativo de z é $z^{-1} = (c;\ d)$, mostre que:

$$[a^2 + b^2]\cdot[c^2 + d^2] = 1$$

1.22) **Potências de expoentes inteiros** – Tendo como fundo de consistência a *propriedade associativa*, para todo $z \in \mathbb{C}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, definimos:

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot z\cdot\ldots z}_{n \text{ fatores}}$$

Por exemplo, se $z = (2;\ 1)$ e $n = 3$, temos:

$$z^3 = (2;\ 1)^3 = (2;\ 1)\cdot(2;\ 1)\cdot(2;\ 1) = (3;\ 4)\cdot(2;\ 1) = (2;\ 11)$$

Adotando, também, as definições:

$$z^0 = \eta_m = (1;\ 0)$$

$$z^1 = z$$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = (z^n)^{-1},\quad \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

ficam completamente caracterizadas as potências de expoentes inteiros dos números complexos, valendo para elas as *propriedades* usuais, como, por exemplo:

$$z^{n_1}\cdot z^{n_2} = z^{n_1 + n_2} \quad \text{e} \quad (z^{n_1})^{n_2} = z^{n_1\cdot n_2}$$

Assim sendo, calcule z tal que:

$$z = \frac{(1;\ 3)^5}{(1;\ 3)^3} + (1;\ 0)^7 - \frac{(-3;\ 5)^5}{(3;\ -5)^5}$$

Capítulo

2

Forma algébrica dos números complexos

2.1 – INTRODUÇÃO

Desde que nos habituemos à regra de multiplicação, o trabalho algébrico com números complexos não apresenta maiores dificuldades. No entanto, não podemos dizer que seja um trabalho confortável, principalmente quando comparado ao que usualmente temos ao operar com números reais.

Por isso, visando *agilizar* o modo de operar com números $z \in \mathbb{C}$, vamos introduzir algumas **notações** novas.

2.2 – DESCOBRINDO QUE OS NÚMEROS REAIS SÃO COMPLEXOS

Comecemos por considerar o subconjunto $\mathbb{C}_r$ de $\mathbb{C}$, formado pelos complexos da forma **(x; y)**, isto é:

$$\mathbb{C}_r = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y = 0\}$$

Assim, $(0; 0)$, $(1; 0)$, $(-1; 0)$, $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ e $(\sqrt{2}; 0)$ são exemplos de elementos de $\mathbb{C}_r$.

Efetuando a **adição** e a **multiplicação** de dois elementos, $(a; 0)$ e $(c; 0)$, de $\mathbb{C}_r$:

$$(a; 0) + (c; 0) = (a + c; 0 + 0) = (a + c; 0)$$
$$(a; 0) \cdot (c; 0) = (a \cdot c - 0 \cdot 0; a \cdot 0 + 0 \cdot c) = (a \cdot c; 0)$$

notamos que as **segundas componentes** (y) dos resultados continuam sendo **zero** (portanto esses resultados pertencem a $\mathbb{C}_r$), e as **primeiras componentes** são obtidas como se tivéssemos usado a **adição** e a **multiplicação dos números reais**.

Exemplos

em $\mathbb{C}_r$	em $\mathbb{R}$
$(2;0) + (5;0) = (7;0)$	$2 + 5 = 7$
$(12;0) - \left(\frac{1}{2};0\right) = \left(\frac{23}{2};0\right)$	$12 - \frac{1}{2} = \frac{23}{2}$
$(2;0) \cdot (5;0) = (10;0)$	$2 \cdot 5 = 10$
$(-12;0) \cdot \left(\frac{1}{2};0\right) = (-6;0)$	$(-12) \cdot \frac{1}{2} = -6$

Vemos, então, que **os elementos de $\mathbb{C}_r$, obedecendo às definições de igualdade, adição e multiplicação de complexos, têm comportamento idêntico ao dos números reais**. (Num ramo da Matemática, chamado Álgebra Moderna, os conjuntos $\mathbb{C}_r$ e $\mathbb{R}$ são ditos **isomorfos**.)

Ora, já que podemos operar com os complexos da forma **(x; 0)** do mesmo modo que operamos com o real **x**, vamos adotar a **notação**:

$$(x;0) = x$$

para todo x real. Podemos, portanto, escrever:

$$(0;0) = 0,\ (1;0) = 1,\ (-1;0) = -1,\ (\sqrt{2};0) = \sqrt{2}$$

Admitida a igualdade $(x;0) = x$, é evidente que $\mathbb{C}_r = \mathbb{R}$; passamos, então, a considerar o conjunto dos números reais como **subconjunto** do conjunto dos números complexos:

$$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

podendo, por isso, afirmar que **todo número real é complexo**.

2.3 — UNIDADE IMAGINÁRIA

A igualdade $(1;0) = 1$ define, em $\mathbb{C}$, o número complexo $(1;0)$ como **unidade real**.

Definimos como **unidade imaginária o número complexo (0; 1)**, que passamos a indicar pelo símbolo i:

$$\boxed{i = (0;1)}$$

Era nossa intenção conseguir um número cujo quadrado fosse negativo. Agora, já o temos! Observando que:

$$i^2 = i \cdot i = (0; 1) \cdot (0; 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1; 0)$$

e utilizando a notação adotada no item 2.2, obtemos a **propriedade fundamental da unidade imaginária**:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Imaginários puros – Todos os números complexos da forma **(0; y), com y ≠ 0**, são denominados **imaginários puros**.

Notemos que:

$$(y; 0) \cdot (0; 1) = (y \cdot 0 - 0 \cdot 1; y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0; y)$$

Assim, por exemplo:

$$(0; 3) = (3; 0) \cdot (0; 1)$$
$$(0; -5) = (-5; 0) \cdot (0; 1)$$

Como $(y; 0) = y$ e $(0; 1) = i$, podemos escrever:

$$(0; y) = (y; 0) \cdot (0; 1) = y \cdot i$$

ou seja, para todo imaginário puro vale a notação:

$$(0; y) = yi$$

Portanto, $(0; 3) = 3i$, $(0; -5) = -5i$, $(0; -1) = -i$ são exemplos de imaginários puros.

2.4 – FORMA ALGÉBRICA

Com as novas notações e definições vistas, podemos representar um número complexo qualquer $z = (x; y)$ numa outra forma que, como veremos, tornará bem mais práticas e simples as operações.

Notando que sempre podemos escrever:

$$z = (x; y) = (x; 0) + (0; y)$$

como $(x; 0) = x$ e $(0; y) = yi$, temos:

$$\boxed{z = (x; y) = x + yi}$$

que é a chamada **forma algébrica de z**.

Observação: Se $z = (x; y) = x + yi$ apresenta $y \neq 0$, **z** é chamados **número imaginário**.

Exemplos

a) $(2; 7) = 2 + 7i$

b) $(-3; 5) = -3 + 5i$

c) $\left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}i$

d) $(-10; 0) = -10 + 0i = -10$

e) $(0; 7) = 0 + 7i = 7i$

f) $(0; 0) = 0 + 0i = 0$

Os números reais **x** e **y** são, respectivamente, denominados **parte real de z** e **parte imaginária de z**. É usual representá-los pelos símbolos:

$$\boxed{x = \mathrm{IR_e}(z)} \quad \text{e} \quad \boxed{y = \mathrm{I_m}(z)}$$

Operações na forma algébrica — Examinando alguns exemplos, vejamos como se aplicam com a forma $x + yi$ a igualdade, a adição e a multiplicação de complexos.

Exemplos

1.º) $\begin{cases} (x; y) = (-2; 13) \Leftrightarrow x = -2 \text{ e } y = 13 \\ x + yi = -2 + 13i \Leftrightarrow x = -2 \text{ e } y = 13 \end{cases}$

Vemos aqui que, para igualarmos dois complexos na forma algébrica, basta identificar as partes reais e as partes imaginárias, isto é:

$$\boxed{a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{d} \text{ reais})$$

2.º) $\begin{cases} (2; 13) + (5; 1) = (7; 14) \\ 2 + 13i + 5 + i = 7 + 14i \end{cases}$

Para somarmos dois complexos na forma algébrica, somamos as partes reais e as partes imaginárias, ou seja:

$$\boxed{[a + bi] + [c + di] = [a + c] + [b + d]\,i} \quad (\mathbf{a}\ \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{d} \text{ reais})$$

3.º) $\begin{cases} (7;3) \cdot (5;6) = (7 \cdot 5 - 3 \cdot 6;\ 7 \cdot 6 + 3 \cdot 5) = (17;57) \\ [7 + 3i] \cdot [5 + 6i] = 35 + 42i + 15i + 18\underset{-1}{(i^2)} = 17 + 57i \end{cases}$

Para multiplicarmos dois complexos na forma algébrica, aplicamos a **propriedade distributiva**, como se estivéssemos trabalhando com expressões reais da forma a + bx, mas lembrando sempre que $i^2 = -1$. Em termos gerais:

$$[a + bi] \cdot [c + di] = ac + adi + bci + bdi^2 = [ac - bd] + [ad + bc]\, i$$

(**a**, **b**, **c** e **d** reais)

Resumo da nomenclatura — O quadro a seguir nos dá uma visão da nomenclatura introduzida neste capítulo. Nele acrescentamos algumas denominações que não foram citadas anteriormente.

Símbolo	*Denominação*
$(1;0) = 1$	unidade real
$(0;1) = i$	unidade imaginária
$z = (x;y)$	forma cartesiana de **z**
$z = x + yi$	forma algébrica de **z**
$R_e(z)$	parte real de **z**
$I_m(z)$	parte imaginária de **z**

Se $y = 0$, então $z = x + yi = x$ é real.
Se $y \neq 0$, então $z = x + yi$ é imaginário.
Se $x = 0$ e $y \neq 0$, então $z = x + yi = yi$ é imaginário puro.

Exercícios Resolvidos

2.1) Sendo $z_1 = 1 + 4i$, $z_2 = 3 - 3i$ e $z_3 = 5i$, efetue:

a) $z_1 + z_2 - z_3$

b) $z_1 \cdot z_2 + z_3$

c) $(z_1 + z_2)^2$

d) $(z_1 - z_2)^2 - z_3^3$

Solução

Lembrando que as operações com números complexos na forma algébrica se processam de modo análogo ao que utilizamos com expressões algébricas, e que $i^2 = -1$, temos:

a) $z_1 + z_2 - z_3 = (1 + 4i) + (3 - 3i) - (5i) = 1 + 4i + 3 - 3i - 5i = 4 - 4i$

b) $z_1 \cdot z_2 + z_3 = (1 + 4i) \cdot (3 - 3i) + 5i = (3 - 3i + 12i - 12i^2) + 5i =$
$= 3 - 3i + 12i + 12 + 5i = 15 + 14i$

c) $(z_1 + z_2)^2 = (1 + 4i + 3 - 3i)^2 = (4 - i)^2 = 16 - 8i + i^2 = 16 - 8i - 1 = 15 - 8i$

d) $(z_1 - z_2)^2 - z_3^3 = (1 + 4i - 3 + 3i)^2 - (5i)^3 = (-2 + 7i)^2 - 125i^3 =$
$= (4 - 28i + 49i^2) - 125i^2 \cdot i = 4 - 28i - 49 + 125i = -45 + 97i$

2.2) Calcule $(1 - i)^6$.

Solução

É claro que poderíamos calcular $(1 - i)^6$ efetuando o produto de 6 fatores $(1 - i)(1 - i) \ldots (1 - i)$ ou utilizando a fórmula de desenvolvimento do binômio de Newton $(x - a)^n$.* Porém, neste caso, podemos fazer:

$(1 - i)^6 = [(1 - i)^2]^3 = [1 - 2i + i^2]^3 = [1 - 2i - 1]^3 = [-2i]^3 = -8i^3 = -8i^2 \cdot i = 8i$

2.3) Determine o real **x** para que o número complexo $z = 2 + (x - 4i) \cdot (2 + xi)$ seja:

a) real

b) imaginário

c) imaginário puro

Solução

Vamos, inicialmente, escrever **z** na forma algébrica $a + bi$:

$z = 2 + (x - 4i)(2 + xi) = 2 + 2x + x^2 i - 8i - 4xi^2 = 2 + 2x + x^2 i - 8i + 4x$

Assim, $z = (2 + 6x) + (x^2 - 8)i$.

a) Para que **z** seja real é necessário que sua parte imaginária seja nula:

$$I_m(z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

b) Para que **z** seja imaginário é necessário que sua parte imaginária não seja nula:

$$I_m(z) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 2\sqrt{2} \text{ e } x \neq -2\sqrt{2})$$

c) Para que **z** seja imaginário puro é necessário que sua parte real seja nula e sua parte imaginária não seja nula:

$$R_e(z) = 0 \Leftrightarrow 2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

(Note que, se $x = -\frac{1}{3}$, $R_e(z) = 0$ e $I_m(z) \neq 0$.)

* No capítulo 5 estudaremos um processo geral para o cálculo de potências da forma $(a + bi)^n$.

2.4) Sendo $z_1 = 3x - 2yi$, $z_2 = x + 5yi$ e $z_3 = 6 - 6i$, determine os reais **x** e **y** para que $z_1 + z_2 = z_3$.

Solução

$$z_1 + z_2 = z_3 \Leftrightarrow 3x - 2yi + x + 5yi = 6 - 6i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3yi = 6 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 6 \\ 3y = -6 \end{cases}$$

Logo: $x = \frac{3}{2}$ e $y = -2$.

2.5) Determine os reais **x** e **y** para que se tenha $(2x - 3yi) \cdot (2 + i) = -30i$.

Solução

Efetuando o produto indicado no primeiro membro da igualdade, temos:

$$4x + 2xi - 6yi - 3yi^2 = -30i$$
$$4x + 2xi - 6yi + 3y = -30i$$

É importante que, para igualarmos dois números complexos, escrevamos em destaque a parte real e a parte imaginária de cada um. Assim, a última igualdade acima se escreve:

$$(4x + 3y) + (2x - 6y) = 0 - 30i$$

e dela tiramos o sistema $\begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 2x - 6y = -30 \end{cases}$

que resolvido fornece $x = -3$ e $y = 4$.

2.6) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = 8$.

Solução

Para que possamos utilizar a igualdade de complexos, fazemos $z = x + yi$ (**x** e **y** reais). Então, $z^3 = 8$ se escreve:

$$(x + yi)^3 = 8$$
$$x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 8$$
$$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 + y^3i^2 \cdot i = 8$$

Destacando a parte real e a parte imaginária de cada membro, temos:

$$(x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = 8 + 0i$$

e daí o sistema $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 8 & \text{(I)} \\ 3x^2y - y^3 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$

Fatorando a equação (II):

$$y(3x^2 - y^2) = 0$$

obtemos $y = 0$ ou $y^2 = 3x^2$.

Fazendo, em (I), $y = 0$, vem $x = 2$.

Substituindo, em (I), y^2 por $3x^2$, vem $x = -1$ e, portanto, $y = \pm\sqrt{3}$.
Logo, os valores de $z = x + yi$ são:

$$(x = 2;\ y = 0) \Leftrightarrow z = 2$$
$$(x = -1;\ y = \sqrt{3}) \Leftrightarrow z = -1 + \sqrt{3}\,i$$
$$(x = -1;\ y = -\sqrt{3}) \Leftrightarrow z = -1 - \sqrt{3}\,i$$

2.7) Determine $z \in \mathbb{C}$ para que se tenha $z^2 + 5 = 2z$.

Solução

Fazendo a substituição $z = x + yi$ (x e y reais), temos:

$$z^2 + 5 = 2z \Leftrightarrow (x + yi)^2 + 5 = 2(x + yi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2xyi + y^2i^2 + 5 = 2x + 2yi \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 5) + 2xyi = 2x + 2yi$$

Desta igualdade tiramos o sistema:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 5 = 2x & \text{(I)} \\ 2xy = 2y & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (II), $y(x - 1) = 0$, obtemos $y = 0$ ou $x = 1$.
Para $y = 0$, a equação (I) não apresenta soluções reais para **x**.
Para $x = 1$, a equação (I) fornece $y = \pm 2$.
Logo, o número $z = x + yi$ é $z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$.

Outro modo – A equação $z^2 + 5 = 2z$ pode ser escrita:

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

Trata-se, então, de uma equação do 2.º grau de **coeficientes reais**, podendo, por isso, ser resolvida como segue:

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16i^2}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

Assim, $z = 1 + 2i$ ou $z = 1 - 2i$.

O leitor deve entender que este processo só foi utilizado no momento pela facilidade de calcularmos a raiz quadrada do discriminante Δ, que, neste exemplo, é um número real ($\Delta = -16$).

No caso em que Δ resultasse um número imaginário — e isso pode ocorrer quando os coeficientes da equação não são reais — teríamos alguma dificuldade em calcular a raiz quadrada de Δ. No capítulo 5, exercício 5.14, mostraremos como enfrentar o problema.

2.8) Sabendo que a equação em **x**:

$$x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$$

(onde **a**, **b**, **c** e **d** são reais não nulos), admite uma raiz real, mostre que $abd = d^2 + b^2c$.

Solução

Seja $x = \alpha$ a raiz real da equação. Então:

$$\alpha^2 + (a + bi)\alpha + c + di = 0 \quad \text{ou}$$

$$\alpha^2 + a\alpha + b\alpha i + c + di = 0 \quad \text{ou}$$

$$(\alpha^2 + a\alpha + c) + (b\alpha + d)i = 0 + 0i$$

Da igualdade de complexos, tiramos:

$$\begin{cases} \alpha^2 + a\alpha + c = 0 & \text{(I)} \\ b\alpha + d = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II) vem $\alpha = -\dfrac{d}{b}$; substituindo em (I), obtemos:

$$\left(-\frac{d}{b}\right)^2 + a\left(-\frac{d}{b}\right) + c = 0$$

$$\frac{d^2}{b^2} - \frac{ad}{b} + c = 0$$

$$d^2 - abd + b^2c = 0$$

Logo: $d^2 + b^2c = abd$.

2.9) Considere os complexos $z_1 = \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha$ e $z_2 = \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha$, onde α é um real qualquer. Mostre que, se $z = z_1 \cdot z_2$, então $-1 \leqslant R_e(z) \leqslant 1$ e $-1 \leqslant I_m(z) \leqslant 1$.

Solução

$$z = z_1 \cdot z_2 = (\operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)$$
$$z = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - i\operatorname{sen}^2\alpha + i\cos^2\alpha - i^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$
$$z = (2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)i$$

$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}2\alpha$
$\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha$

As fórmulas trigonométricas do quadro ao lado permitem escrever:

$$z = \underbrace{\operatorname{sen}2\alpha}_{R_e(z)} + i\underbrace{\cos 2\alpha}_{I_m(z)}$$

Como $R_e(z) = \operatorname{sen}2\alpha$ e $-1 \leqslant \operatorname{sen}2\alpha \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant R_e(z) \leqslant 1$.
Como $I_m(z) = \cos 2\alpha$ e $-1 \leqslant \cos 2\alpha \leqslant 1$, temos $-1 \leqslant I_m(z) \leqslant 1$.

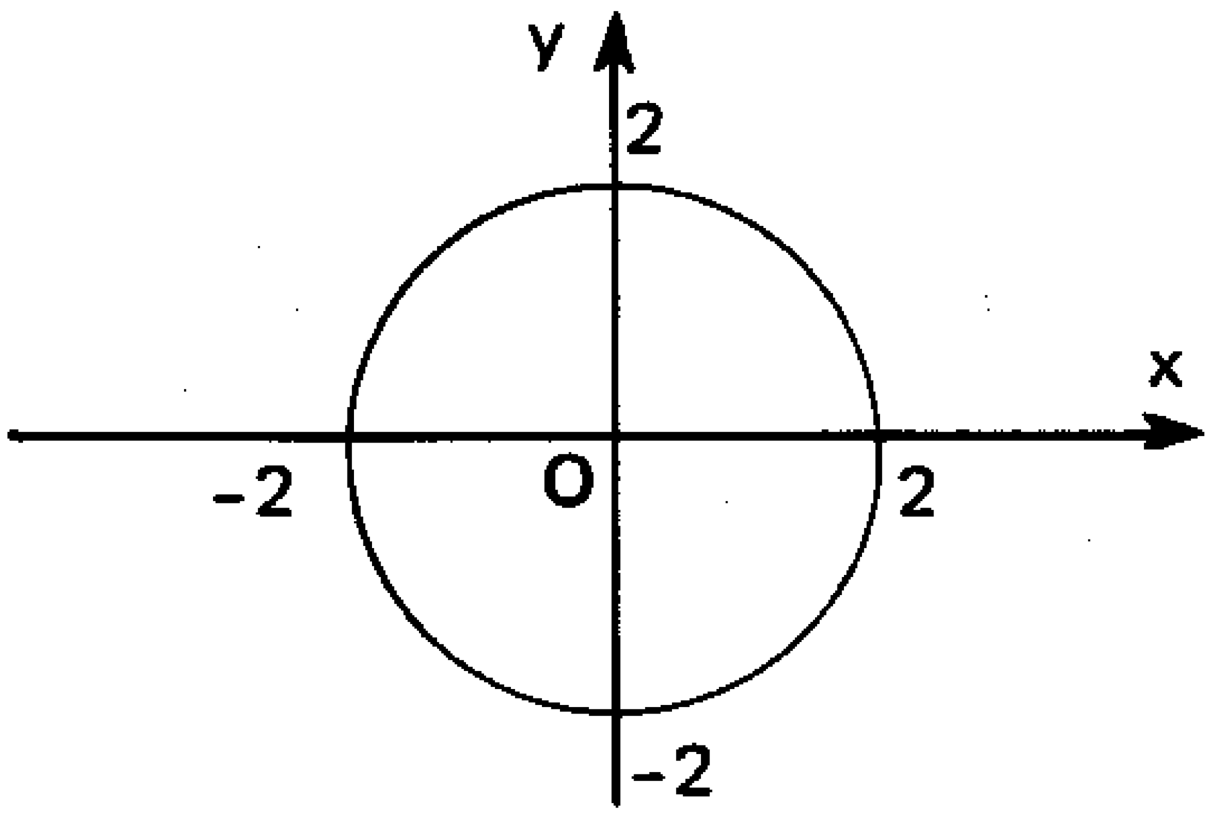
2.10) Determine o lugar geométrico dos pontos P(x; y) do plano cartesiano para os quais o produto de números complexos $(x + yi)(y + xi)$ seja $4i$.

Solução

$$(x + yi)(y + xi) = 4i$$
$$xy + x^2i + y^2i + xyi^2 = 4i$$
$$xy + x^2i + y^2i - xy = 4i$$
$$0 + (x^2 + y^2)i = 0 + 4i$$

Temos, então, que $x^2 + y^2 = 4$.

Da Geometria Analítica, sabemos que uma equação da forma $x^2 + y^2 = r^2$ representa uma circunferência com centro na origem (0; 0) e raio $|r|$. Portanto, o lugar geométrico procurado é a circunferência de centro O (0; 0) e raio 2.



Exercícios Propostos

2.11) Sendo $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 + 5i$ e $z_3 = -1 + i$, calcule:

a) $z_1 + z_2 + z_3$
c) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
e) $(z_1 + z_2)^2 + z_3^2$
b) $z_1 - 3z_2 + iz_3$
d) $iz_1 + z_2 \cdot z_3$
f) $z_1^2 - z_2^2 + z_3^3$

2.12) Calcule:

a) $(-3i)^5$ b) $(1 + i)^4$ c) $(-1 - i)^6$ d) $(1 - i)^{10}$

2.13) Determine o real **x** de modo que o complexo $z = (13i - 6) + (2x + i) \cdot (3 - 2xi)$ seja:

a) real b) imaginário c) imaginário puro

2.14) A que condição devem obedecer os reais **x** e **y** para que $z = (x + yi) \cdot (y + xi)$ seja um imaginário puro?

2.15) Seja $z = ai(a - 2i) - (10 + 9i)$, $a \in \mathbb{R}$. Determine **a** para que se tenha:

a) $R_e(z) \geqslant 0$ b) $I_m(z) < 0$ c) $R_e(z) < 0$ e $I_m(z) \geqslant 0$

2.16) Sendo $z_1 = 2x + yi$, $z_2 = y - 2xi$ e $z_3 = 1 - i$, determine os reais **x** e **y** tais que:

a) $z_1 + z_2 = 23z_3 - 2$ b) $z_1 \cdot z_2 = z_3 + (1 + i)$

2.17) Determine o real **x** para que:

a) $x(2 + xi) - 6i^2 = 9i$ b) $(x - 5i)(2 + xi) = 14$

2.18) Determine $z \in \mathbb{C}$, tal que:

a) $z^2 = 3 + 4i$ b) $z^3 = -27$

2.19) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:

a) $z^2 = 2z - 3$ b) $z^2 + 14z + 50 = 0$

2.20) Sejam os reais **a**, **b**, **c** e **d** não nulos. Sabendo que a equação em **x**:

$$x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$$

admite um número imaginário puro como raiz, mostre que $abd = d^2 - a^2c$.

2.21) Escreva na forma algébrica $a + bi$ os seguintes números complexos:

a) $\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)^2$ b) $2\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

2.22) Sendo **a** e **b** números reais e $a + bi = (\operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha)(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)$, mostre que $a^2 + b^2 = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2.23) Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Se $z = (1 + i\operatorname{tg}\alpha)(1 - i\operatorname{tg}\alpha)$, mostre que $R_e(z) \geqslant 1$ e $I_m(z) = 0$.

2.5 — AS POTÊNCIAS NATURAIS DE i

Consideremos as potências do tipo i^n, onde **n** é natural. Vejamos alguns exemplos:

$$i^0 = 1 \qquad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$
$$i^1 = i \qquad i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^2 = -1 \qquad i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \qquad i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

Começamos então a perceber que, à medida que **n** cresce, os resultados de i^n vão-se repetindo periodicamente, assumindo sempre um dos valores da seqüência:

$$1,\ i,\ -1,\ -i$$

sendo, pois, de **4 unidades** o período de repetição; isto nos sugere que, para calcular o valor de i^n, basta **elevar i ao resto da divisão euclidiana de n por 4.**

De fato, se dividindo **n** por **4** encontramos quociente **q** e resto **r**, temos:

$$\begin{array}{l|l} n & 4 \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \Leftrightarrow n = 4q + r \text{ e } r < 4$$

Então:

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = (1)^q \cdot i^r$$

e, portanto:

$$\boxed{i^n = i^r}$$

Exemplos

a) Calculemos i^{67}.

$$\begin{array}{r|l} 67 & 4 \\ \cline{2-2} 27 & 16 \\ \textcircled{3} & \end{array}$$

Como $r = 3$, temos:

$$i^{67} = i^{\textcircled{3}} = -i$$

b) Calculemos i^{726}.

$$\begin{array}{r|l} 726 & 4 \\ \cline{2-2} 32 & 181 \\ 06 & \\ \textcircled{2} & \end{array}$$

Como $r = 2$, temos:

$$i^{726} = i^{\textcircled{2}} = -1$$

Quando o expoente **n** é maior que 99, podemos facilitar a regra acima utilizando um resultado da Aritmética que nos diz:

> *O resto da divisão euclidiana de um número natural* **n** *($n \geqslant 100$) por 4 pode ser obtido dividindo por 4 apenas o número formado pelos* **dois últimos** *algarismos de* **n**.

Assim, no caso do exemplo *b* acima, podemos fazer:

$$\begin{array}{r|l} 726 & 4 \\ \cline{2-2} 32 & 181 \\ 06 & \\ \textcircled{2} & \end{array} \qquad \text{ou, simplesmente,} \qquad \begin{array}{r|l} 26 & 4 \\ \cline{2-2} \textcircled{2} & 6 \end{array}$$

c) Calculemos $i^{836\,753}$.

Como o número formado pelos dois últimos algarismos do expoente é 53, fazemos:

$$\begin{array}{r|l} 53 & 4 \\ \cline{2-2} 13 & 13 \\ \textcircled{1} & \end{array} \qquad i^{836\,753} = i^{\textcircled{1}} = i$$

Em resumo, temos as seguintes igualdades, para todo **k** $\in \mathbb{N}$:

$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i$	$i^{4k+2} = -1$	$i^{4k+3} = -i$

Observação: Na realidade, as quatro igualdades acima são válidas para todo $k \in \mathbb{Z}$. Basta notar que, independentemente de **k** ser **positivo ou não**, temos:

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$$
$$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i$$
$$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$
$$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

Exercícios Resolvidos

2.24) Quantos valores distintos assume a expressão $A = i^n + i^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$?

Solução

$$A = i^n + i^{-n} = i^n + \frac{1}{i^n} = \frac{i^{2n}+1}{i^n} = \frac{(i^2)^n + 1}{i^n} = \frac{(-1)^n + 1}{i^n}$$

Se **n** é par, temos $\begin{cases} (-1)^n = 1 \\ i^n = \pm 1 \end{cases}$

e, portanto:

$$A = \frac{1+1}{\pm 1} = \pm 2$$

Se **n** é ímpar, temos $(-1)^n = -1$ e, portanto, $A = \dfrac{-1+1}{i^n} = 0$

Logo, A assume três valores distintos: $-1, 0, 1$.

2.25) Determine a relação entre os naturais **m** e **n** para que $i^m = i^n$.

Solução

Dividindo a igualdade dada por i^n, temos:

$$\frac{i^m}{i^n} = \frac{i^n}{i^n}$$

ou seja, $i^{m-n} = 1$.

Como $1 = i^{4k}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, vem:

$$m - n = 4k \qquad (m - n \text{ é múltiplo de } 4)$$

Exercícios Propostos

2.26) Calcule:

a) i^{38}
b) i^{507}
c) $i^{1\,348}$
d) $i^{307\,533}$
e) $i^{32} - i^5 + i^7 - i^{17} - i^{42}$
f) $(1+i)^{28}$

2.27) Sendo $n \in \mathbb{N}$, calcule:

a) $A = \dfrac{i^n}{i^{-n}}$ b) $A = i^n + i^{n+1}$ c) $A = \dfrac{i^n \cdot i^n}{\dfrac{1}{i}}$

2.28) Quantos valores distintos assume a expressão $A = i^{3n+2} - i^{2-n}$, $n \in \mathbb{N}$?

2.29) Determine a relação entre os naturais **m** e **n** para que se tenha:

a) $i^m = i^{-n}$ b) $i^m = i^{n+3}$

2.6 – CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja $z = a + bi$ (**a** e **b** reais) um número complexo. Chama-se **conjugado** de z o número complexo:

$$\bar{z} = a - bi$$

Exemplos

a) Se $z = 5 + 11i$, seu conjugado é $\bar{z} = 5 - 11i$.
b) Se $z = 1 - 6i$, seu conjugado é $\bar{z} = 1 + 6i$.
c) $z = 3i \Leftrightarrow \bar{z} = -3i$
d) $z = 5 \Leftrightarrow \bar{z} = 5$
e) $\overline{-7 + 5i} = -7 - 5i$
f) $z = 3 + 4i \Leftrightarrow \bar{z} = 3 - 4i \Leftrightarrow \overline{(\bar{z})} = 3 + 4i$

É imediato que:

1.º) Se $z = \bar{z}$, então z é real (veja exemplo *d* acima).
2.º) $\overline{(\bar{z})} = z$ (Veja exemplo *f* acima.)

Um resultado muito importante é dado pelo produto de um número complexo pelo seu conjugado:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2$$

ou seja, o **produto** $z \cdot \bar{z}$ **é sempre um número real não negativo**:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Exemplos

g) $(3+4i)(3-4i) = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
h) $(2-5i)(2+5i) = 2^2 + (-5)^2 = 4 + 25 = 29$
i) $(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i) = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 2 + 1 = 3$

2.7 – DIVISÃO

No exercício 1.18 aprendemos a dividir dois números complexos multiplicando o primeiro pelo inverso do segundo. Agora, utilizando o resultado do produto $z \cdot \bar{z}$, visto no item anterior, podemos efetuar a divisão de forma bem mais prática. Acompanhemos o exemplo:

$$\frac{2+i}{5+3i} = \frac{2+i}{5+3i} \cdot \frac{5-3i}{5-3i} = \frac{10-6i+5i-3i^2}{5^2+3^2} = \frac{13-i}{34} = \frac{13}{34} - \frac{1}{34}i$$

Assim, temos que: para se efetuar a divisão $\frac{z_1}{z_2}$, basta **multiplicar** numerador e denominador **pelo conjugado do denominador**.

Exercícios Resolvidos

2.30) Calcule $\frac{3i}{2-i}$.

Solução

$$\frac{3i}{2-i} = \frac{3i}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{6i+3i^2}{2^2+(-1)^2} = \frac{-3+6i}{5} = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$$

2.31) Determine o inverso de **z** nos seguintes casos:

a) $z = 1 + \frac{1}{2}i$ b) $z = i$

Solução

a) $z = 1 + \frac{1}{2}i \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}i} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}i} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}i}{1-\frac{1}{2}i} =$

$$= \frac{1-\frac{1}{2}i}{1+\frac{1}{4}} = \frac{1-\frac{1}{2}i}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$$

b) $z = i \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i}{1} = -i$

2.32) Determine $x \in \mathbb{R}$ para que $z = \dfrac{2x + i}{3 + xi}$ seja:

a) real b) imaginário não puro

Solução

Vamos determinar as partes real e imaginária de **z**, efetuando a divisão:

$$z = \frac{2x + i}{3 + xi} = \frac{2x + i}{3 + xi} \cdot \frac{3 - xi}{3 - xi} = \frac{6x - 2x^2i + 3i - xi^2}{9 + x^2} = \frac{7x}{9 + x^2} + \frac{3 - 2x^2}{9 + x^2}i$$

Assim, $R_e(z) = \dfrac{7x}{9 + x^2}$ e $I_m(z) = \dfrac{3 - 2x^2}{9 + x^2}$

a) Para que **z** seja real, devemos ter $I_m(z) = 0$. Então:

$$\frac{3 - 2x^2}{9 + x^2} = 0 \Rightarrow 3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$$

b) Para que **z** seja imaginário não puro, devemos ter $R_e(z) \neq 0$ e $I_m(z) \neq 0$:

$$R_e(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{7x}{9 + x^2} \neq 0 \Rightarrow 7x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$I_m(z) \neq 0 \Rightarrow \frac{3 - 2x^2}{9 + x^2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ e } x \neq -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Então: $x \neq 0$ e $x \neq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ e $x \neq -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

2.33) Seja $z = \dfrac{a + bi}{c + di}$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são reais e $c + di \neq 0$. Mostre que, se $z \in \mathbb{R}$, então $bc = ad$.

Solução

$$z = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

$$z \in \mathbb{R} \Rightarrow I_m(z) = 0 \Rightarrow \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} = 0 \Rightarrow bc - ad = 0 \Rightarrow bc = ad$$

2.34) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $iz + 2\bar{z} = -3 - 3i$.

Solução

Fazendo $z = x + yi$ (x e y reais), a equação fica:

$$i(x + yi) + 2(x - yi) = -3 - 3i$$
$$xi + yi^2 + 2x - 2yi = -3 - 3i$$
$$(2x - y) + (x - 2y)i = -3 - 3i$$

Então: $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

Resolvendo este sistema, encontramos $x = -1$ e $y = 1$. Portanto, $z = x + yi = -1 + i$.

2.35) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $(1 + i)z + 2 - 3i = 3 + i$.

Solução

É evidente que podemos resolver esta equação fazendo, como no exercício anterior, $z = x + yi$. Vamos, no entanto, cuidar deste caso apenas isolando **z**:

$$\begin{aligned}(1 + i)z + 2 - 3i &= 3 + i \\ (1 + i)z &= 3 + i - 2 + 3i \\ (1 + i)z &= 1 + 4i \\ z &= \frac{1 + 4i}{1 + i}\end{aligned}$$

Efetuando a divisão:

$$z = \frac{(1 + 4i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - i + 4i + 4}{1^2 + 1^2} = \frac{5 + 3i}{2}$$

Logo: $z = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2}i$

2.36) Seja $z \in \mathbb{C}$, tal que $z \cdot \bar{z} = 1$. Prove que $\dfrac{1 + z}{1 + \bar{z}} = z$, com $z \neq -1$.

Solução

Tomando $z = a + bi$, **a** e **b** reais, temos que:

$$z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \quad \text{e}$$

$$\frac{1 + z}{1 + \bar{z}} = \frac{1 + a + bi}{1 + a - bi} = \frac{(1 + a + bi)(1 + a + bi)}{(1 + a - bi)(1 + a + bi)} = \frac{(1 + a + bi)^2}{(1 + a)^2 + b^2} = \frac{[(1 + a) + bi]^2}{1 + 2a + \underbrace{a^2 + b^2}_{1}} =$$

$$= \frac{(1 + a)^2 + 2(1 + a)bi - b^2}{1 + 2a + 1} = \frac{1 + 2a + a^2 + 2(1 + a)bi - b^2}{2 + 2a} =$$

$$= \frac{1 + 2a + a^2 - b^2}{2(1 + a)} + \frac{2(1 + a)bi}{2(1 + a)} = \frac{1 + 2a + a^2 - (1 - a^2)}{2(1 + a)} + bi =$$

$$= \frac{2a + 2a^2}{2(1 + a)} + bi = \frac{2a(1 + a)}{2(1 + a)} + bi = a + bi = z$$

Exercícios Propostos

2.37) Efetue as divisões:

a) $\dfrac{1 + 2i}{3 + 2i}$ b) $\dfrac{10 - i}{1 + 3i}$ c) $\dfrac{1 + 3i}{1 - 3i}$ d) $\dfrac{4 + 3i}{3 - 4i}$ e) $\dfrac{7 + 7i}{\sqrt{3} + 2i}$ f) $\dfrac{6i}{1 - i}$

2.38) Determine o inverso do complexo **z** nos seguintes casos:

a) $z = -3i$ b) $z = 1 + i$ c) $z = i^{77} - i^{43} + i^{26}$ d) $\cos x + i \operatorname{sen} x,\ x \in \mathbb{R}$

2.39) Determine $x \in \mathbb{R}$ de forma que o complexo $z = \dfrac{30}{x^2 + 4} + \dfrac{x + 4i}{2 + xi}$ seja:

a) real b) imaginário não puro

2.40) A que condições devem obedecer os reais **a**, **b**, **c** e **d** para que $z = \dfrac{a + bi}{c + di}$ seja um imaginário puro? $(c + di \neq 0)$

2.41) Determine o imaginário puro **w** para o qual $z = \dfrac{4 + wi}{w + 1 + i}$ é real.

2.42) Mostre que, se $z = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$, então $\dfrac{z^2 + 1}{z}$ é real.

2.43) Sendo $z = \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha$, prove que $\dfrac{1 + z}{1 + \bar{z}} = z,\ \bar{z} \neq -1$.

2.44) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:

a) $z - 2\bar{z} = 4 - 3i$ b) $2z - i\bar{z} = 15i$ c) $z = (\bar{z})^2$ d) $z = i\bar{z}$

2.45) Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que:

a) $iz + 3 - i = 4 + 3i$ b) $(2 - 3i)z + 5 - i = 4$ c) $(1 + i)z + 1 - 3i = -2iz$

2.46) Efetue:

a) $\overline{(1 + 7i) + (3 - 5i)}$ c) $\overline{(1 + 2i) \cdot (3 - i)}$ e) $\overline{\left(\dfrac{1 - i}{1 + i}\right)}$

b) $\overline{(1 + 7i)} + \overline{(3 - 5i)}$ d) $\overline{(1 + 2i)} \cdot \overline{(3 - i)}$ f) $\dfrac{\overline{1 - i}}{\overline{1 + i}}$

2.47) **Propriedades dos conjugados** – Sendo z_1 e z_2 números complexos quaisquer, prove que:

1.º) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2.º) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3.º) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2 \neq 0$

2.48) Mostre que, para todo **n** natural, $(\overline{z^n}) = (\bar{z})^n$.

2.49) Sabendo que $z \in \mathbb{C}$ e $2z^3 + 3z^2 = a + bi$, **a** e **b** reais, mostre $2(\bar{z})^3 + 3(\bar{z})^2 = a - bi$.

2.50) Considere a equação (E): $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, onde α, β e γ são reais $(\alpha \neq 0)$. Mostre que, se o número imaginário **z** é raiz de (E), então $\bar{\mathbf{z}}$ também o é.

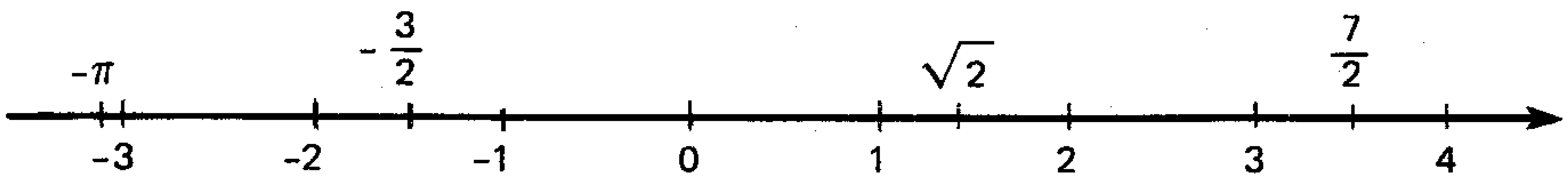
Capítulo

3

A geometria dos números complexos

3.1 — O PLANO DE ARGAND-GAUSS

Sabemos que os números **reais** podem ser associados aos pontos de uma reta, isto é, a cada número real corresponde um ponto da reta e a cada ponto da reta corresponde um número real:



Como representar graficamente um número complexo? As próprias definições dadas:

— um número complexo **z** é um **par ordenado** de números reais **a** e **b**:

$$z = (a; b) = a + bi$$

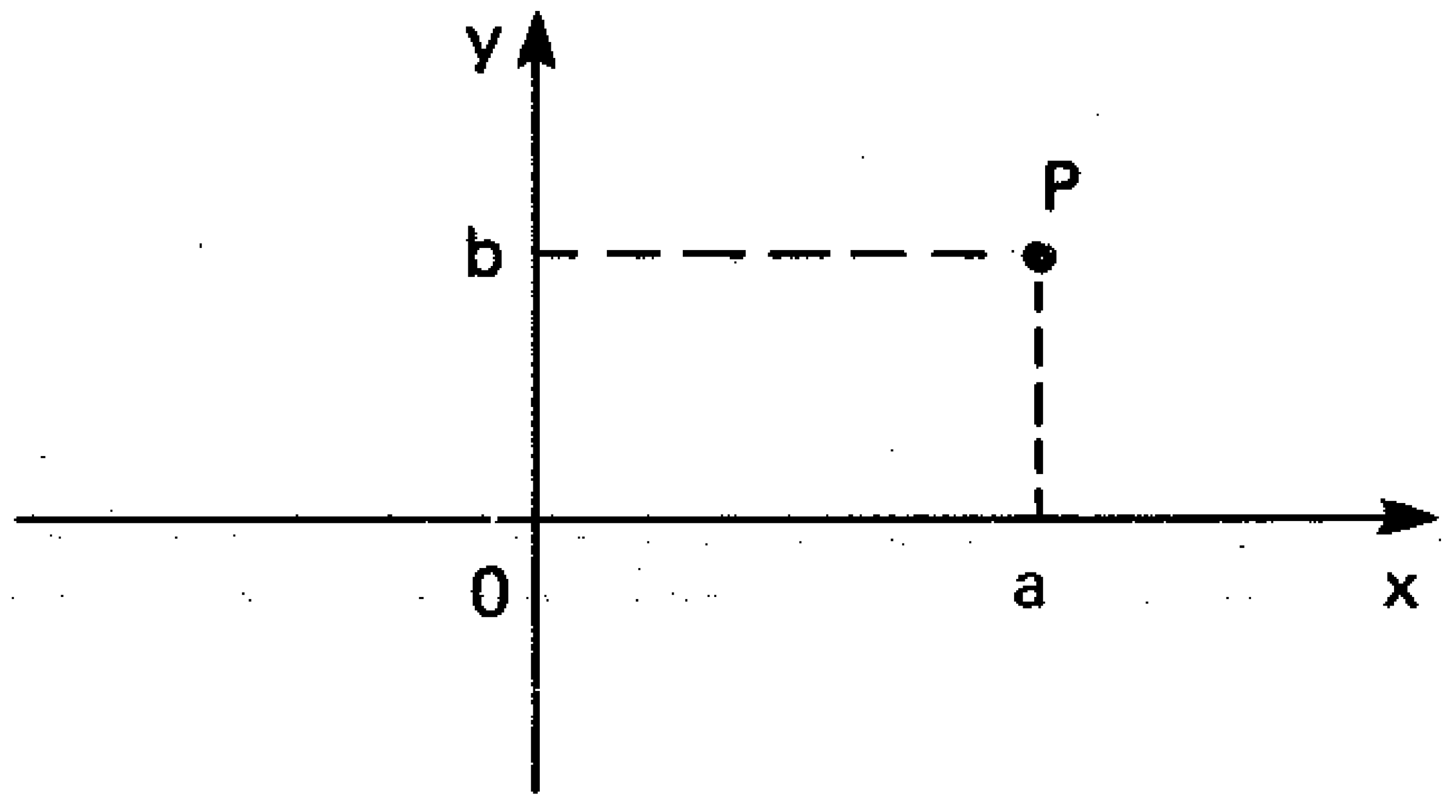
— $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

são, por si só, suficientes para percebermos a possibilidade de representação através de um **ponto do plano cartesiano.**

Vamos, então, a cada número complexo $z = a + bi$ associar o ponto $P(a; b)$ do plano cartesiano. Desta maneira:

> A cada número complexo corresponde um único ponto do plano cartesiano, e a cada ponto corresponde um único número complexo.

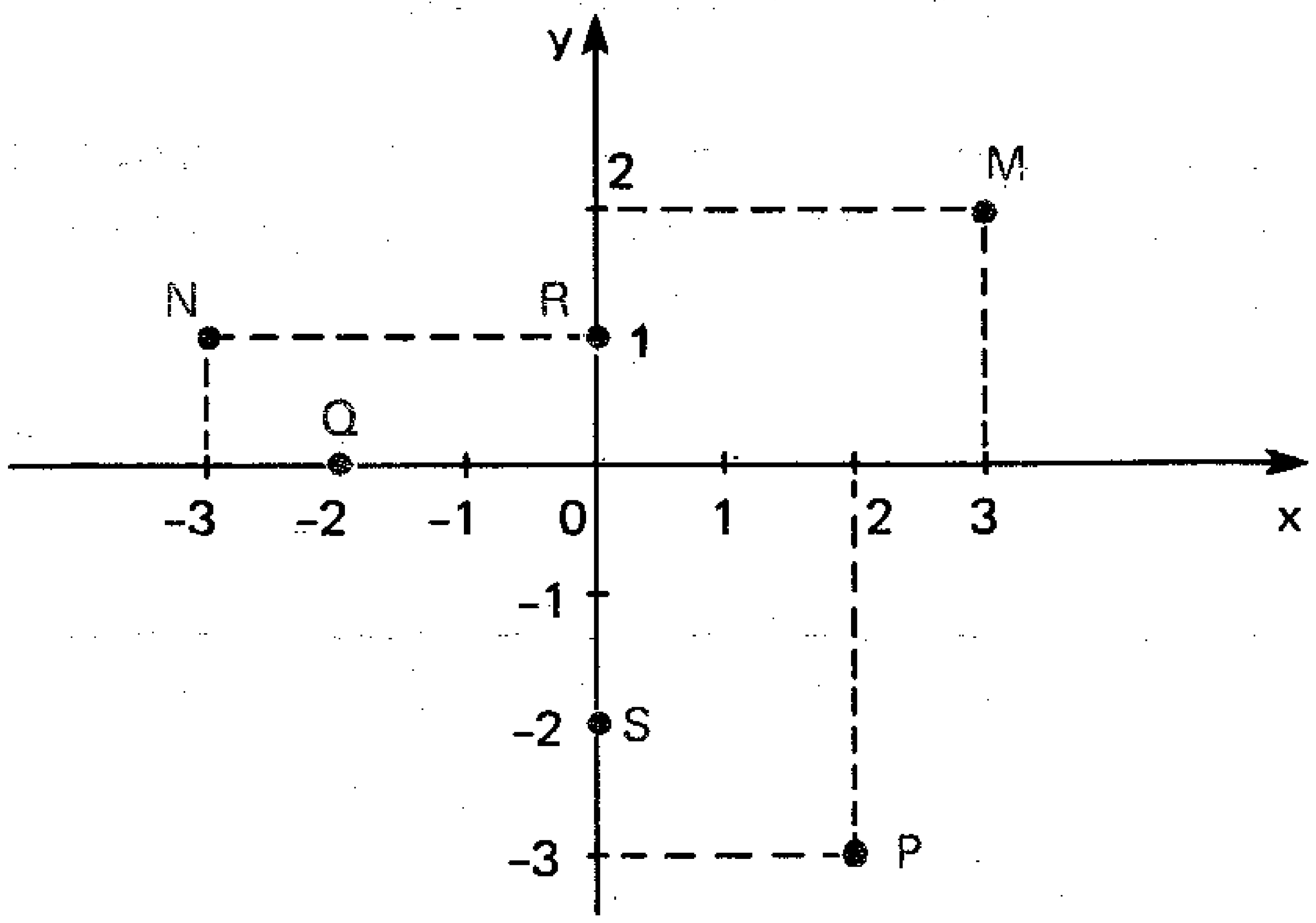
Chamaremos o ponto P de **afixo** ou de **imagem geométrica** do complexo **z**.



$$P(a;\, b) \rightleftarrows z = a + bi$$

Exemplos

Consideremos os pontos assinalados na figura:



a) O ponto M é a *representação gráfica* do complexo $3 + 2i$.
b) O ponto N é o *afixo* do complexo $-3 + i$.
c) O ponto $P(2;\, -3)$ é a *imagem geométrica* do complexo $2 - 3i$.
d) O afixo do complexo $-2 + 0i = -2$ é o ponto Q.
e) A unidade imaginária **i** tem por afixo o ponto $R(0;\, 1)$.
f) O afixo do imaginário puro $-2i$ é o ponto $S(0;\, -2)$.

A representação gráfica dos números complexos foi introduzida através de estudos de **Caspar Wessel** (1745-1818), publicados em 1798 na Revista da Academia Dinamarquesa. No entanto, a idéia só começou a ser conhecida a partir de 1806, quando **Jean Robert Argand** (1768-1822) publicou sua exposição. A incorporação definitiva da representação gráfica à Matemática só se deu quando da divulgação dos trabalhos de **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), durante a segunda década do século XIX.

Por isso, quando o plano cartesiano é utilizado para representar números complexos, é costume chamá-lo de **Plano de Argand-Gauss**.

Observemos que:

— todos os números **reais** têm seus afixos no eixo **Ox**; por isso **Ox** é chamado **eixo real**;

— os números imaginários têm seus afixos **fora** do eixo **Ox**; em particular, os **imaginários puros** são representados por pontos do eixo **Oy**, que, por isso, é chamado **eixo imaginário**.

Exercício Resolvido

3.1) Represente, no Plano de Argand-Gauss, os afixos dos números complexos **z** tais que:

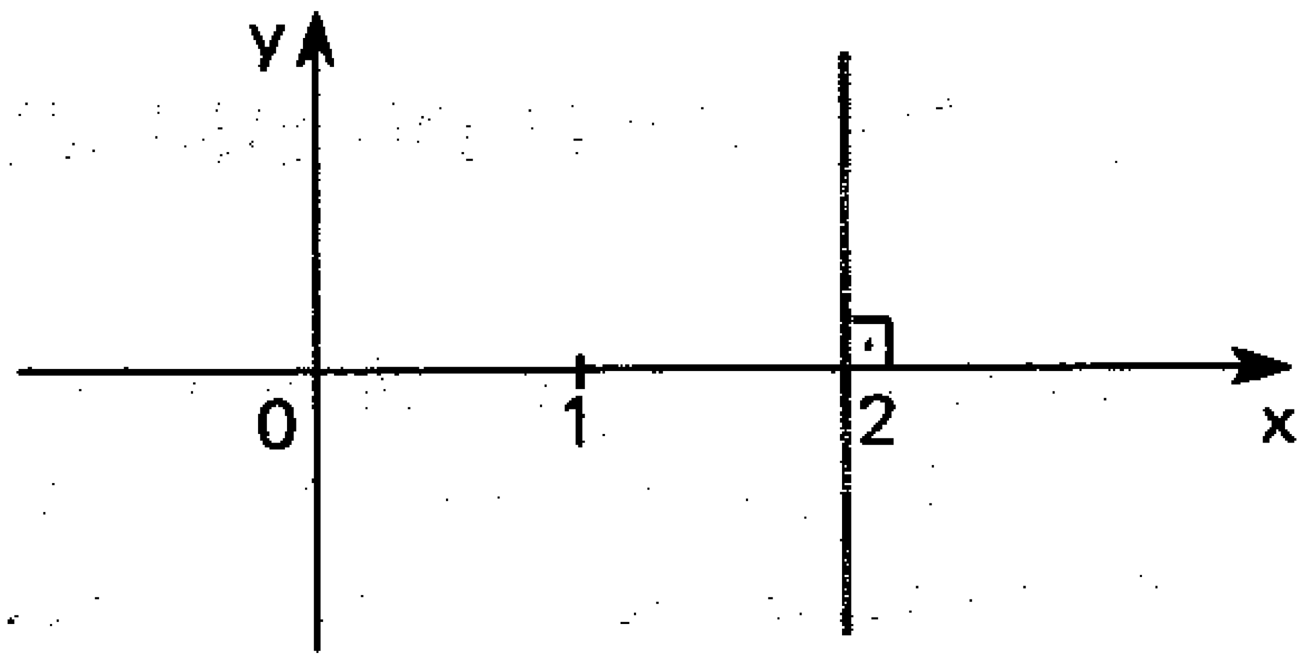
a) $R_e(z) = 2$ b) $I_m(z) \geq 1$ c) $-2 < R_e(z) \leq 1$ d) $R_e(z) - I_m(z) = 0$

Solução

Façamos $z = x + yi$, com **x** e **y** reais. Então:

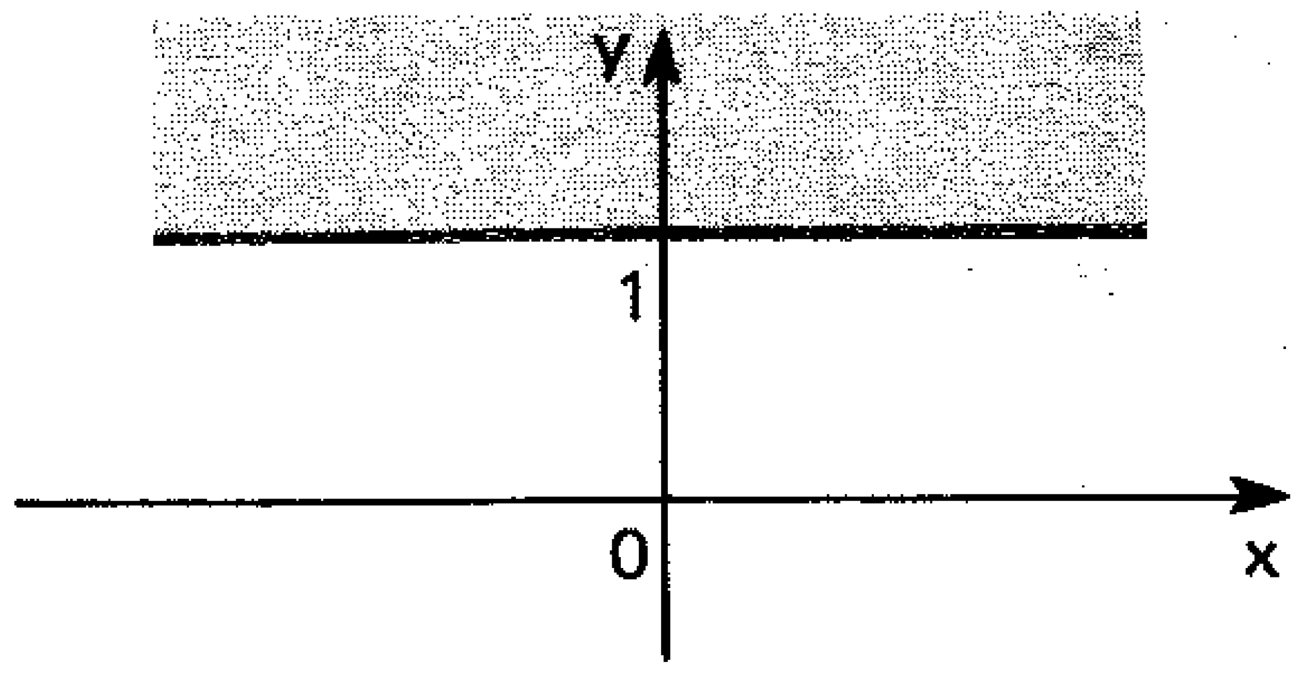
a) $R_e(z) = 2 \Leftrightarrow x = 2$

No plano cartesiano, a equação $x = 2$ representa uma reta vertical traçada pelo ponto $(2; 0)$.



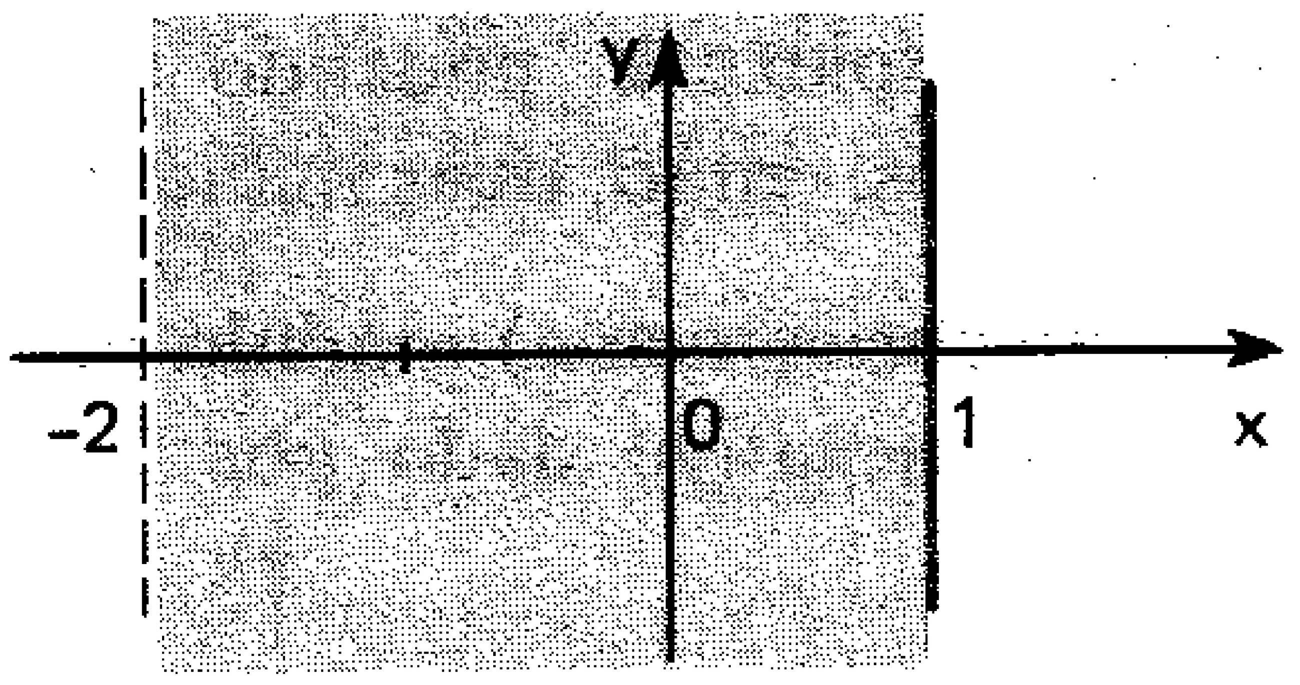
b) $I_m(z) \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 1$

Esta desigualdade representa a região do plano situada acima da reta horizontal da equação $y = 1$ (incluem-se os pontos dessa reta).



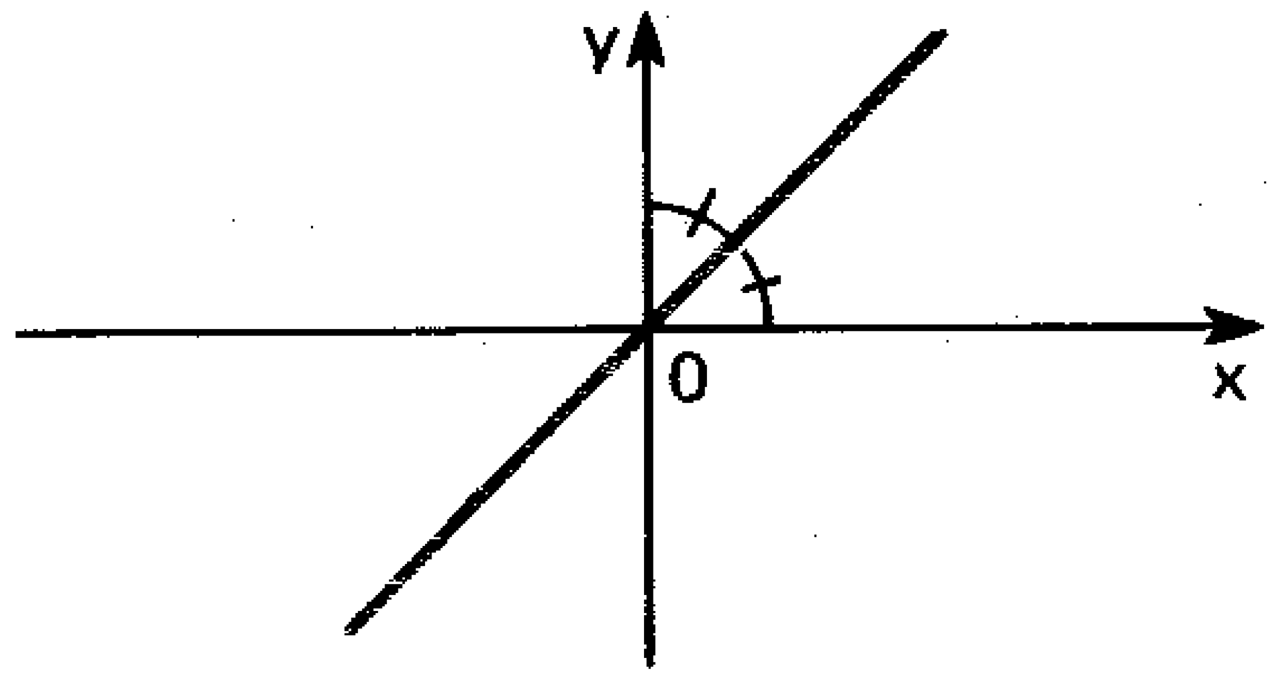
c) $-2 < R_e(z) \leq 1 \Leftrightarrow -2 < x \leq 1$

Esta desigualdade representa a faixa vertical do plano delimitada pelas retas $x = -2$ e $x = 1$, excluídos os pontos da primeira.



d) $R_e(z) - I_m(z) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$

Da Geometria Analítica, sabemos que $x - y = 0$ é a equação da *bissetriz dos quadrantes ímpares*.



Exercícios Propostos

3.2) Represente, no Plano de Argand-Gauss, os afixos dos números complexos **z** tais que:

a) $1 \leqslant I_m(z) < 3$

b) $0 \leqslant R_e(z) \leqslant 3$ e $-2 \leqslant I_m(z) \leqslant 0$

c) $R_e^2(z) + I_m^2(z) = 9$

3.3) Determine o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** para os quais o quociente $\frac{z}{\bar{z}}$ é um imaginário puro.

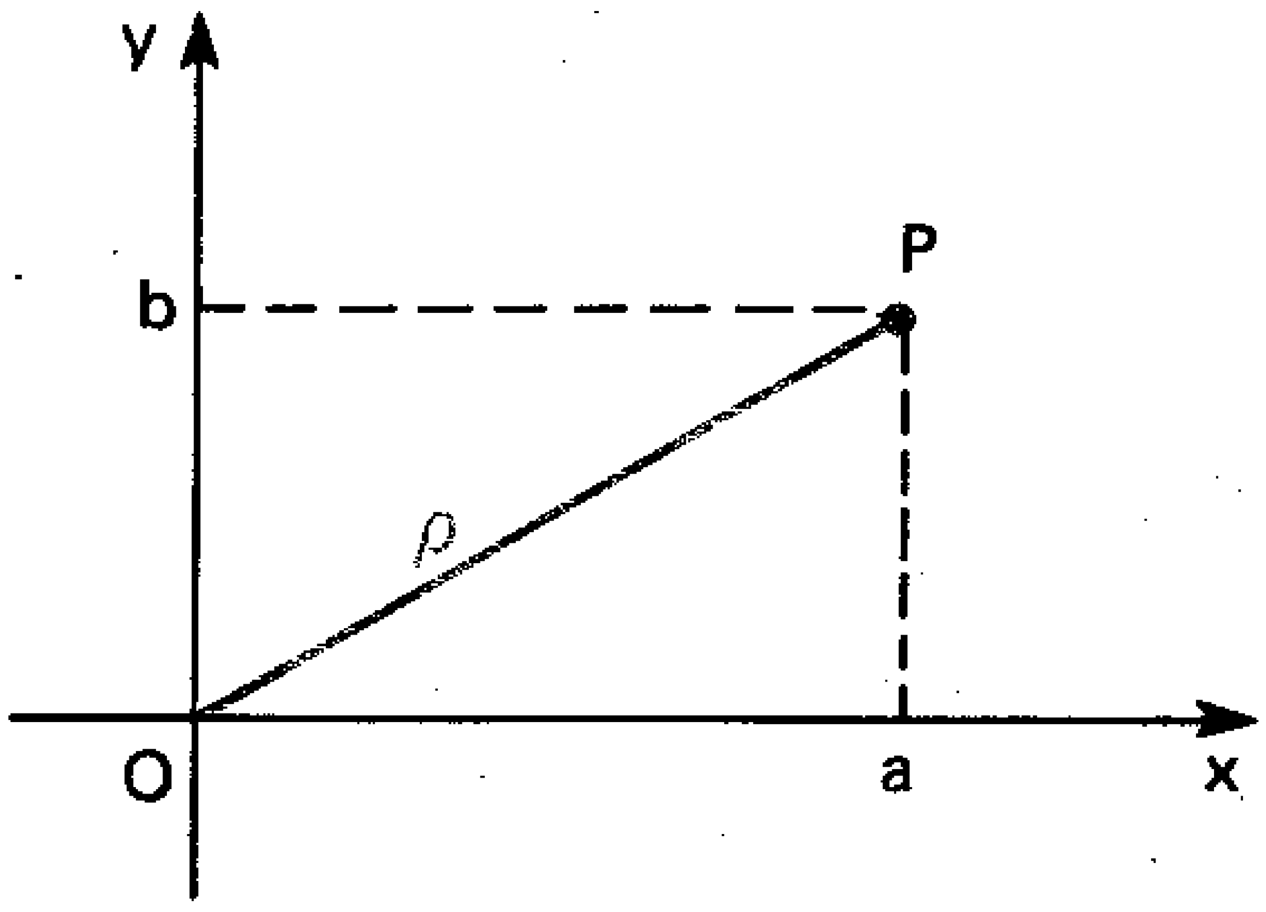
3.4) Represente graficamente os números complexos $z = (x; y)$ para os quais:

$$(x - 2yi)(2y - xi) = -16i$$

3.2 – MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Considerado um número complexo $z = a + bi$, o ponto $P(a; b)$ é o seu afixo. A **distância** ρ, de P até a origem O é facilmente obtida pelo teorema de Pitágoras:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Pois bem: esse número ρ (real e não negativo) é chamado **módulo** do número complexo **z**, podendo também ser representado por $|z|$.

Temos, então, duas maneiras de entender **módulo** de um número complexo **z**:

1.ª) (algebricamente) módulo do número complexo $z = a + bi$ é o número real não negativo dado por:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.ª) (geometricamente) **módulo** do número complexo **z** é a distância do afixo de **z** até a origem:

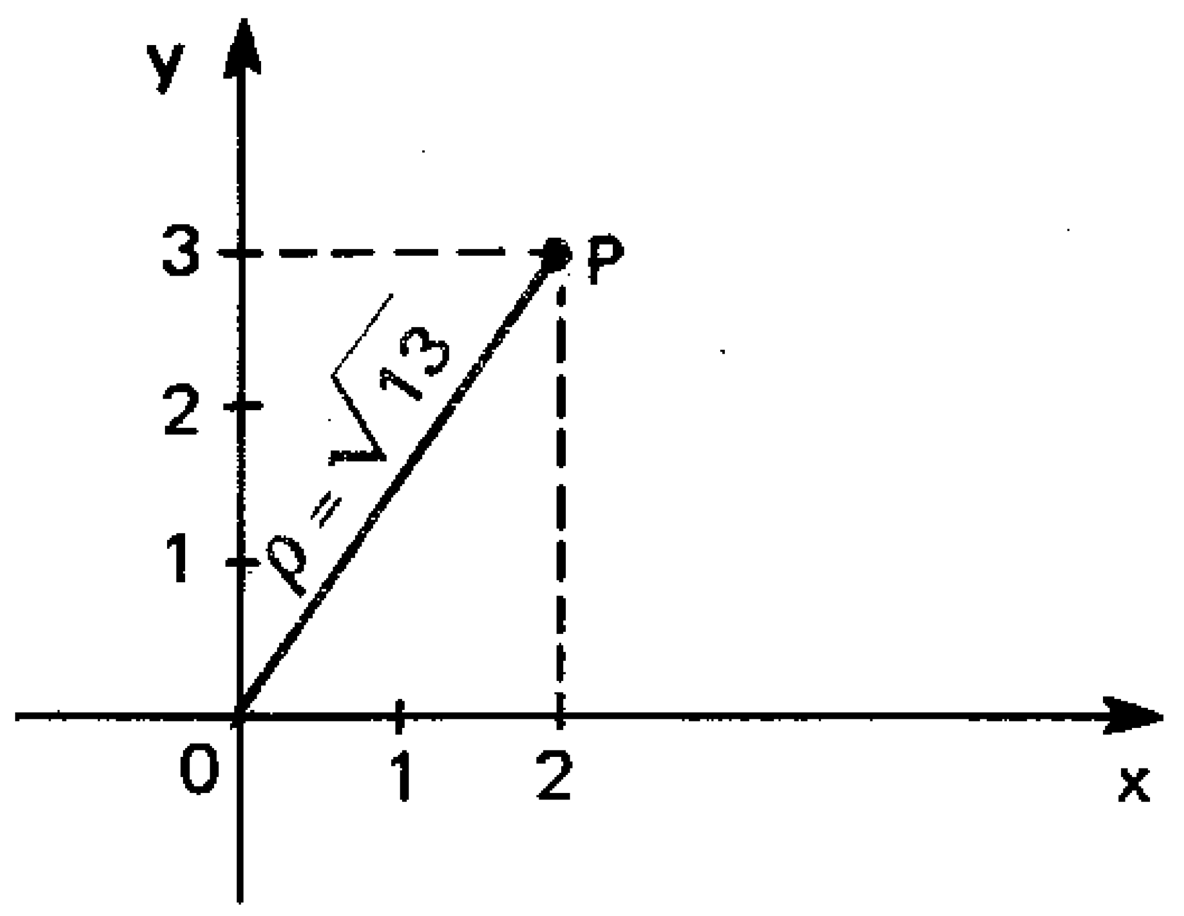
$$|z| = \rho = \delta_{OP}$$

Exemplos

a) Sendo $z = 2 + 3i$, temos:

$|z| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2}$

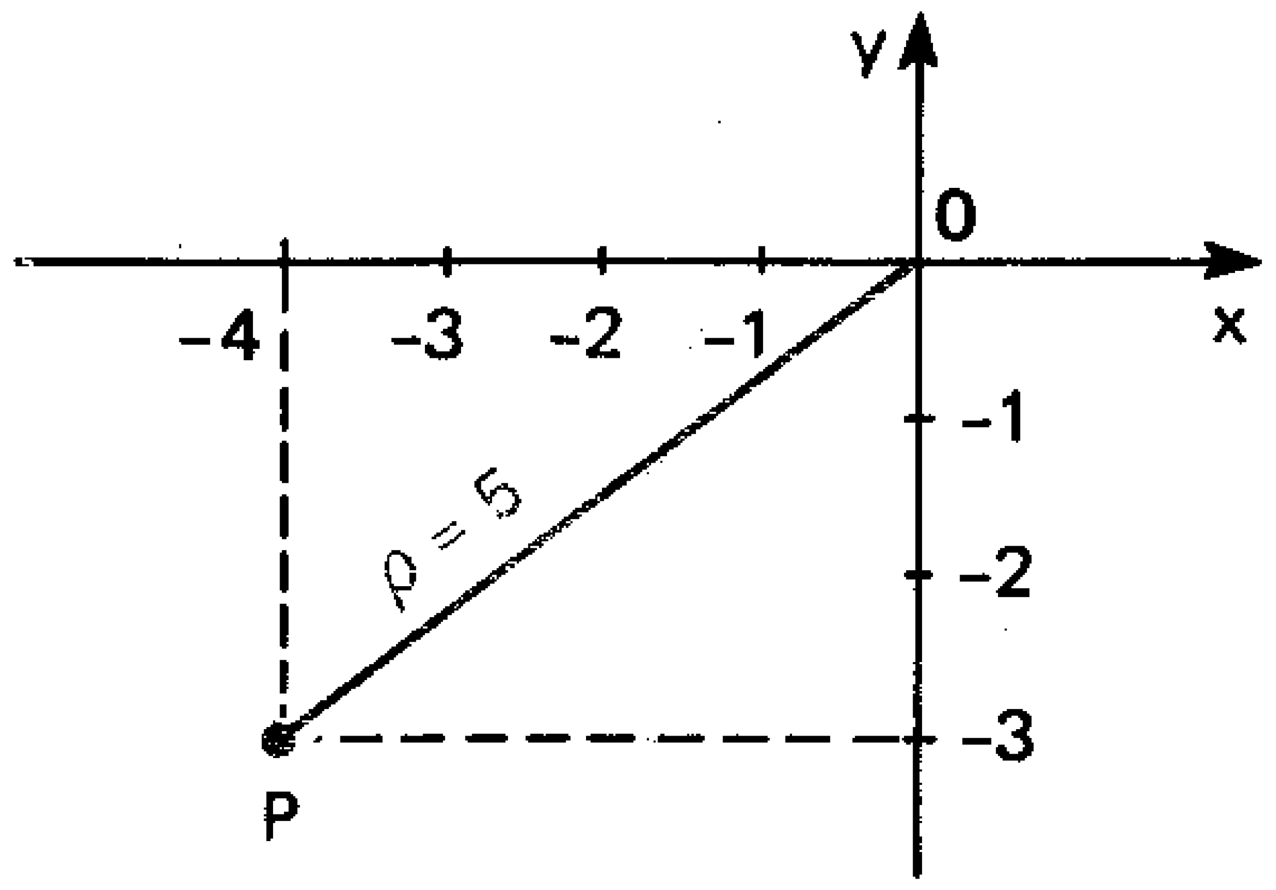
Logo: $|z| = \rho = \sqrt{13}$.



b) Sendo $z = -4 - 3i$, temos:

$|z| = |-4 - 3i| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$

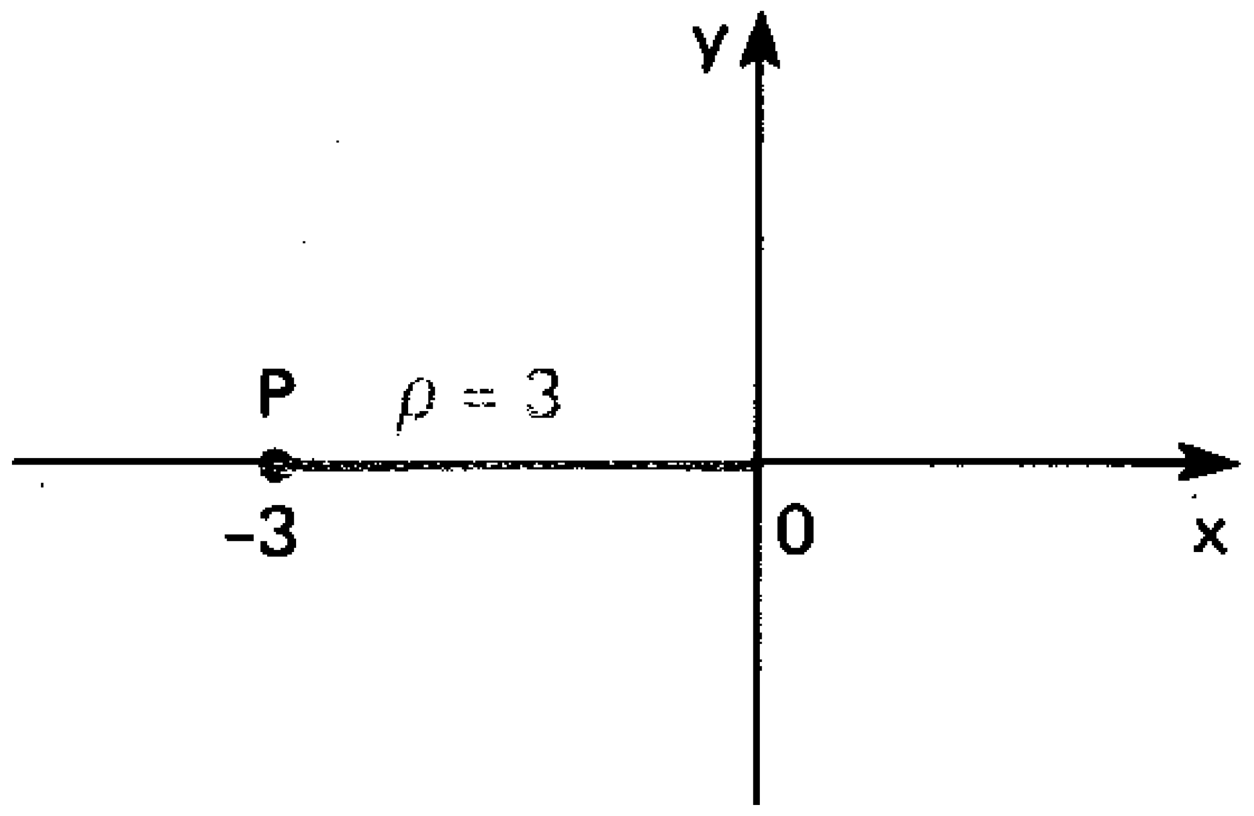
Logo: $|z| = \rho = 5$.



c) Sendo $z = -3 = -3 + 0i$, temos:

$|z| = |-3| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2}$

Logo: $|z| = \rho = 3$.

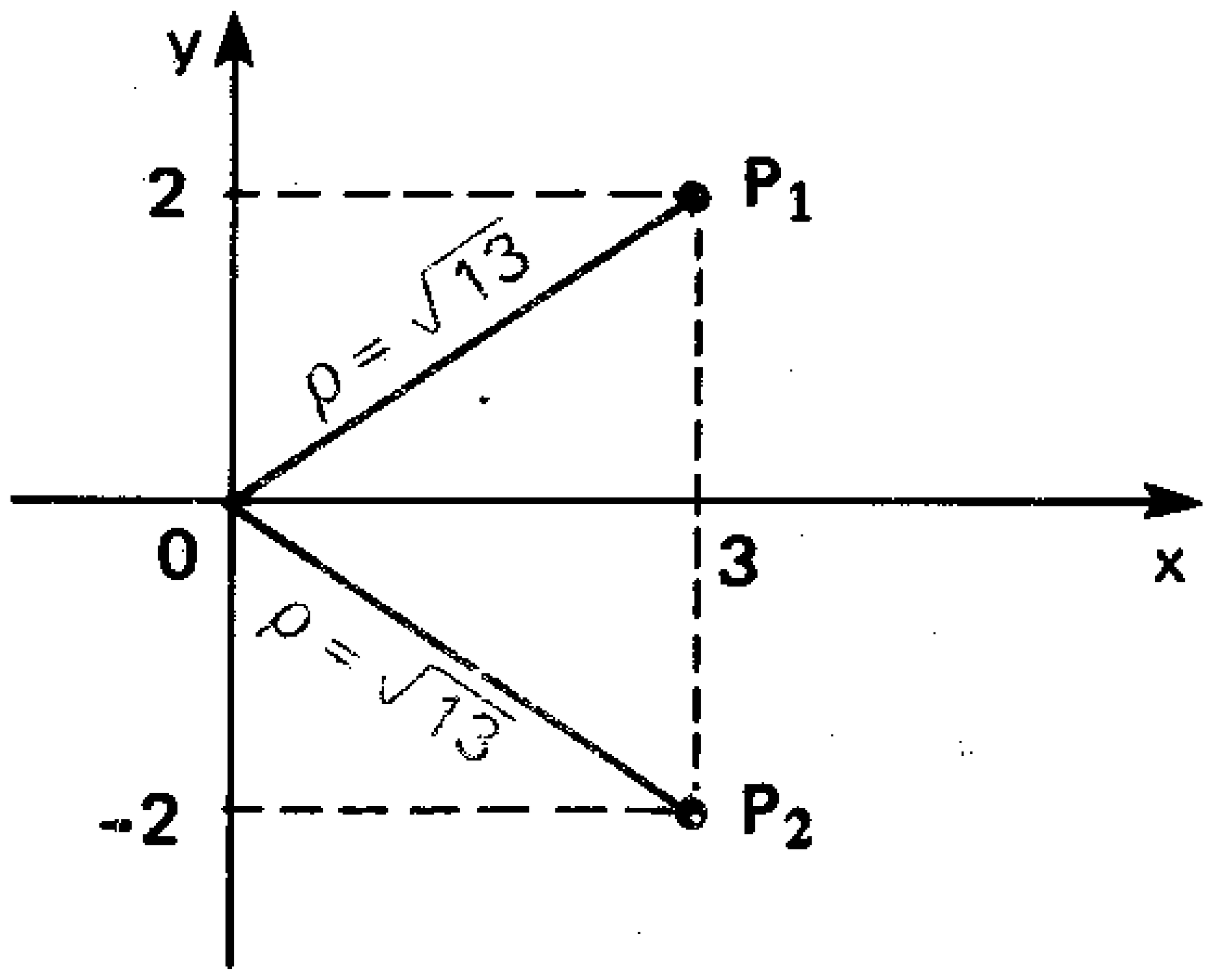


Note, neste exemplo, que **z** é real e a definição de módulo de um número complexo está de acordo com a definição de módulo de um número real, que já conhecíamos do volume 1 desta coleção.

d) Sejam P_1 o afixo de $z = 3 + 2i$ e P_2 o afixo de seu conjugado $\bar{z} = 3 - 2i$. Repare que:

1.º) P_1 e P_2 são simétricos em relação ao eixo Ox.

2.º) $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{13}$



3.3 — PROPRIEDADES IMEDIATAS DO MÓDULO

Sendo **z** e **w** dois números complexos, valem as propriedades:

1.ª) $|z| = |\bar{z}|$

2.ª) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

3.ª) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} \quad (w \neq 0)$

Suas demonstrações são imediatas, podendo ficar a cargo do leitor.

Exemplos

a) Sendo $z = 12 + 5i$, temos $\bar{z} = 12 - 5i$ e

$$\begin{cases} |z| = |12 + 5i| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \\ |\bar{z}| = |12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13 \end{cases}$$

b) $|(2 + 3i) \cdot (1 - 4i)| = |2 + 3i| \cdot |1 - 4i| =$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{13} \cdot \sqrt{17} = \sqrt{221}$$

c) $\left|\dfrac{1 - 3i}{2 + i}\right| = \dfrac{|1 - 3i|}{|2 + i|} = \dfrac{\sqrt{1^2 + (-3)^2}}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$

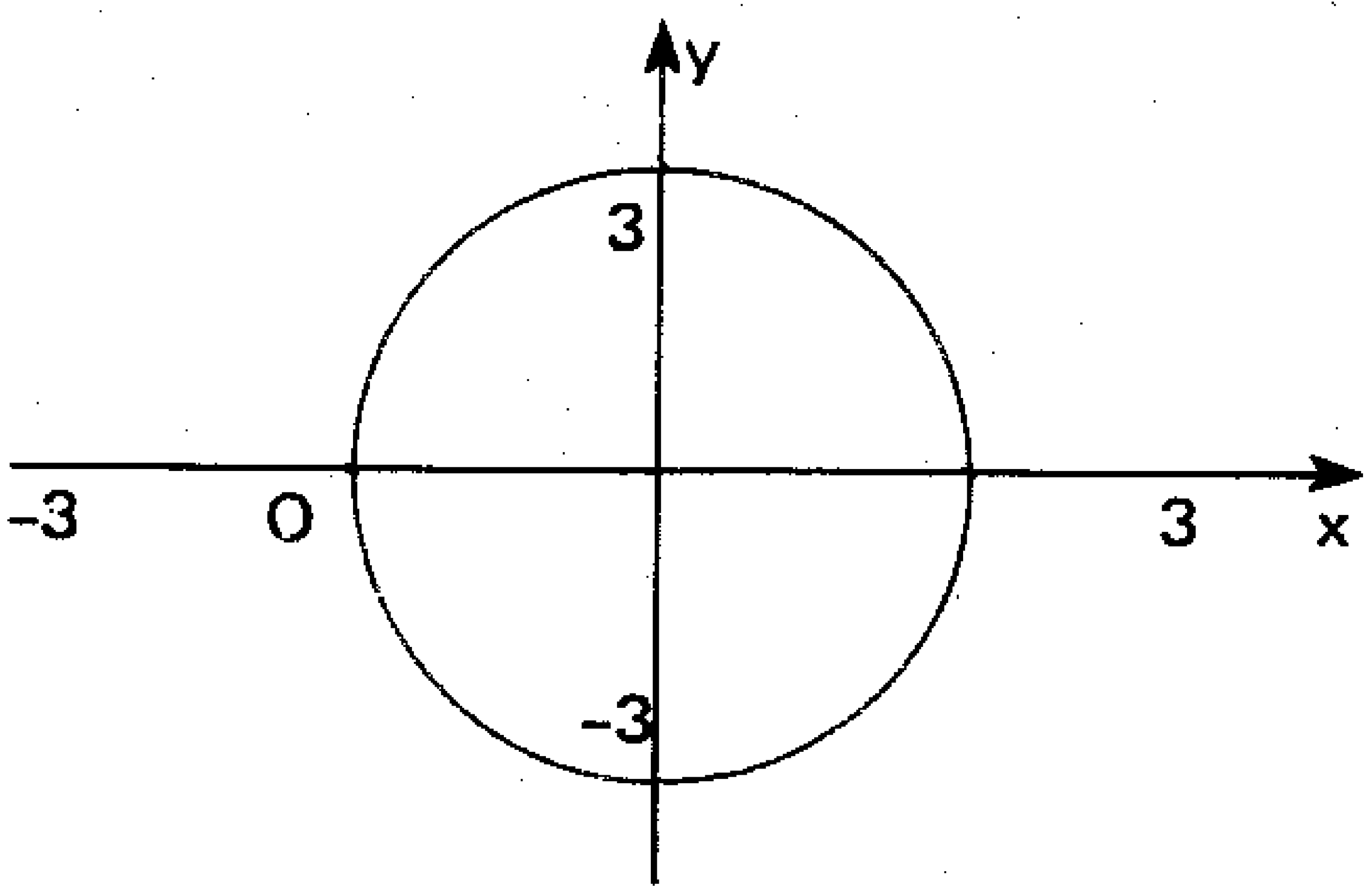
Exercícios Resolvidos

3.5) Qual o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** tais que $|z| = 3$?

Solução

Podemos resolver este problema de dois modos: por um simples raciocínio geométrico ou analiticamente.

1.º modo — Como sabemos, o módulo de um número complexo é a distância de seu afixo até a origem; estamos, então, procurando o **conjunto dos pontos cuja distância até a origem seja 3**. Ora, sabemos que o lugar geométrico dos pontos do plano, cuja distância a um ponto fixo deste plano é constante, é uma circunferência; logo, o lugar dos afixos de **z** é a circunferência de centro na origem e raio 3.



2.° modo – Fazendo $z = x + yi$, temos:

$$|z| = 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{(I)}$$

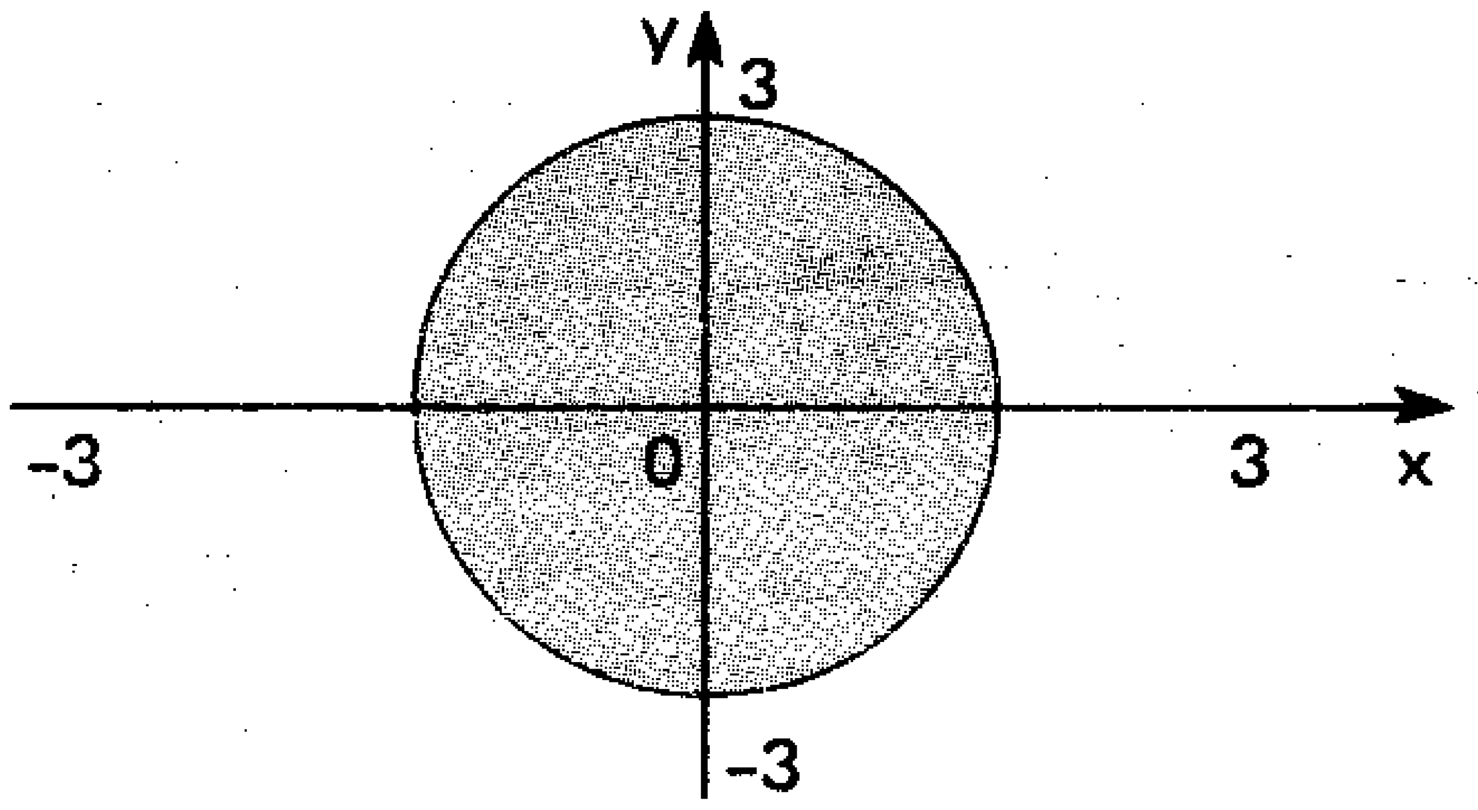
Na *Geometria analítica* (vol. 6 desta coleção) aprendemos que a equação (I) representa uma circunferência de centro O(0; 0) e raio $r = 3$.

Assim, o lugar geométrico procurado é a circunferência da figura anterior.

3.6) Qual o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** tais que $|z| \leqslant 3$?

Solução

De modo análogo ao exercício anterior, concluímos que a região do plano correspondente à condição dada é o **círculo** de centro O(0; 0) e raio 3 (sua relação é $x^2 + y^2 \leqslant 9$).



3.7) Represente graficamente os números complexos **z** que satisfazem a equação $|z|^2 \cdot i = \bar{z}^2$.

Solução

Fazendo $z = x + yi$, temos:

$$|z|^2 \cdot i = \bar{z}^2 \Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \cdot i = (x - yi)^2 \Rightarrow (x^2 + y^2)i = x^2 - y^2 - 2xyi$$

Desta igualdade de números complexos vem o sistema:

$$\begin{cases} 0 = x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 = -2xy \end{cases}$$

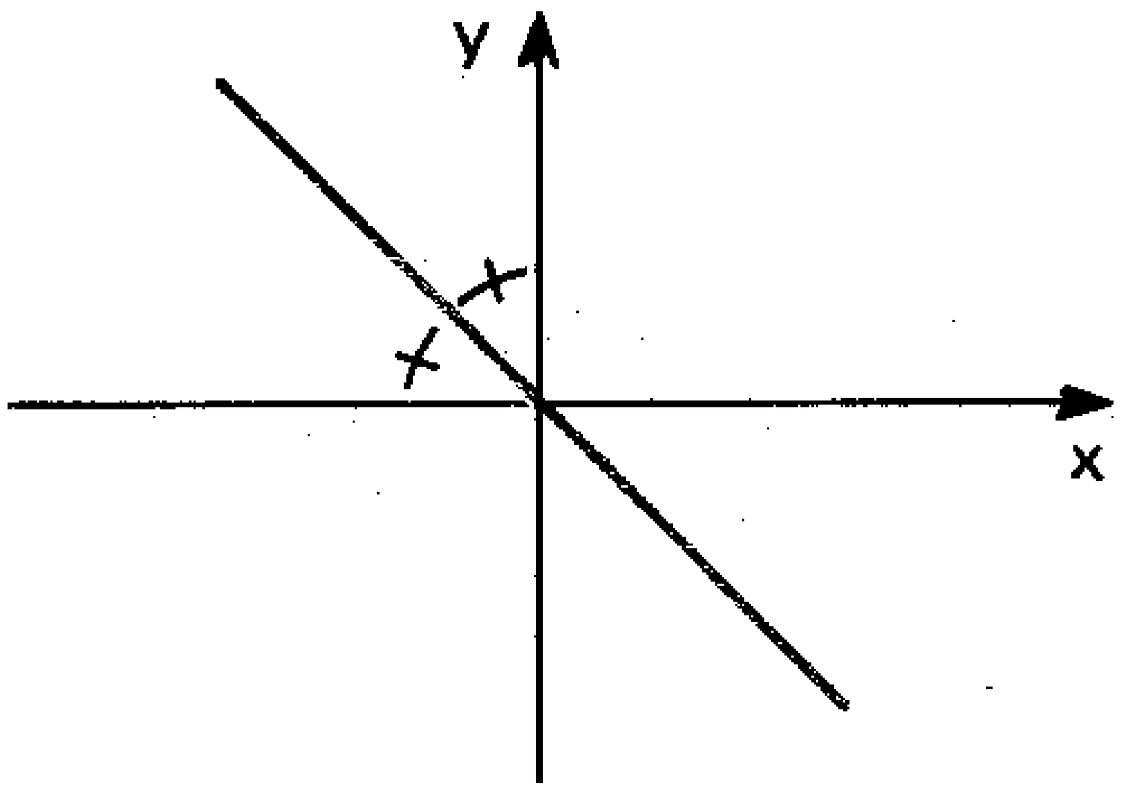
que pode também ser assim escrito:

$$\begin{cases} (x + y) \cdot (x - y) = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

É fácil, então, perceber que essas duas equações são simultaneamente satisfeitas apenas pelos pares (x; y), que obedecem à relação:

$$x + y = 0$$

que, conforme a Geometria Analítica, representa a *bissetriz dos quadrantes pares*.



3.8) Sendo $w = 1 - i$, represente graficamente os números complexos **z** tais que:

$$|z + w| \geqslant |z - wi|$$

Solução

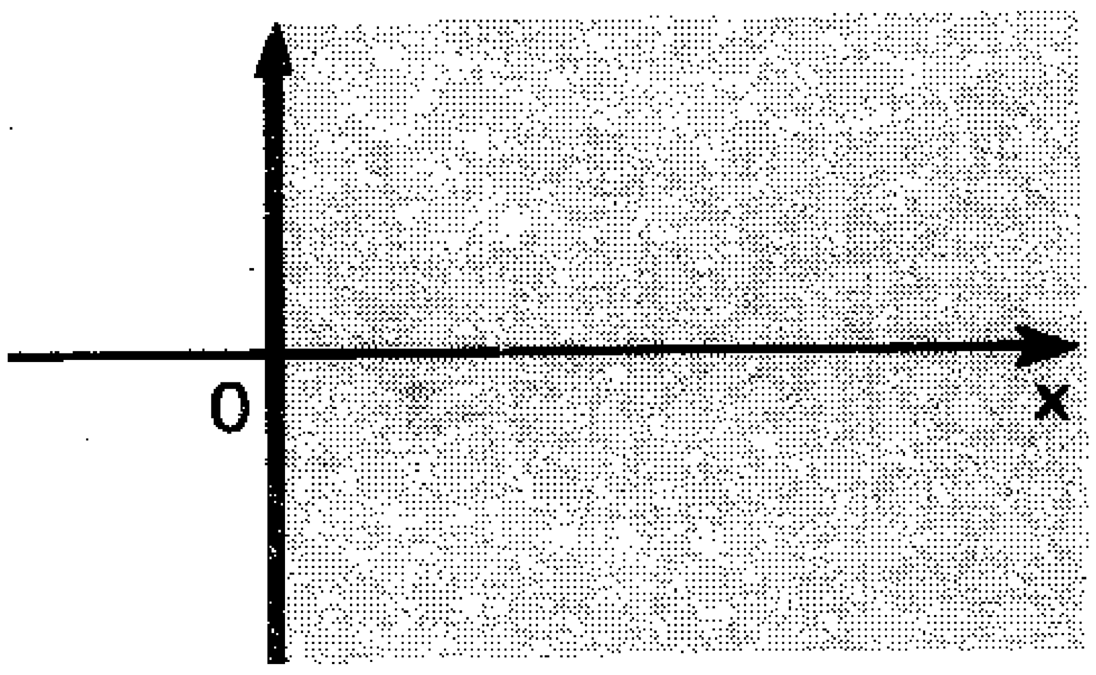
Fazendo $z = x + yi$, temos:

- $|z + w| = |x + yi + 1 - i| = |(x + 1) + (y - 1)i| = \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2}$
- $|z - wi| = |x + yi - (1 - i)i| = |(x - 1) + (y - 1)i| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$

Como $|z + w| \geqslant |z - wi|$, podemos escrever:

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} \geqslant \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}$$
$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 \geqslant (x - 1)^2 + (y - 1)^2$$
$$x^2 + 2x + 1 \geqslant x^2 - 2x + 1$$
$$4x \geqslant 0$$
$$x \geqslant 0$$

Portanto, a representação gráfica dos complexos **z** tais que $|z + w| \geqslant |z + wi|$ é o semiplano da figura ao lado.



3.9) Determine a área do polígono cujos vértices são os afixos dos números complexos **z** tais que $|z| = 1$ e $R_e(z^2) = 0$.

Solução

Fazendo $z = x + yi$, temos:

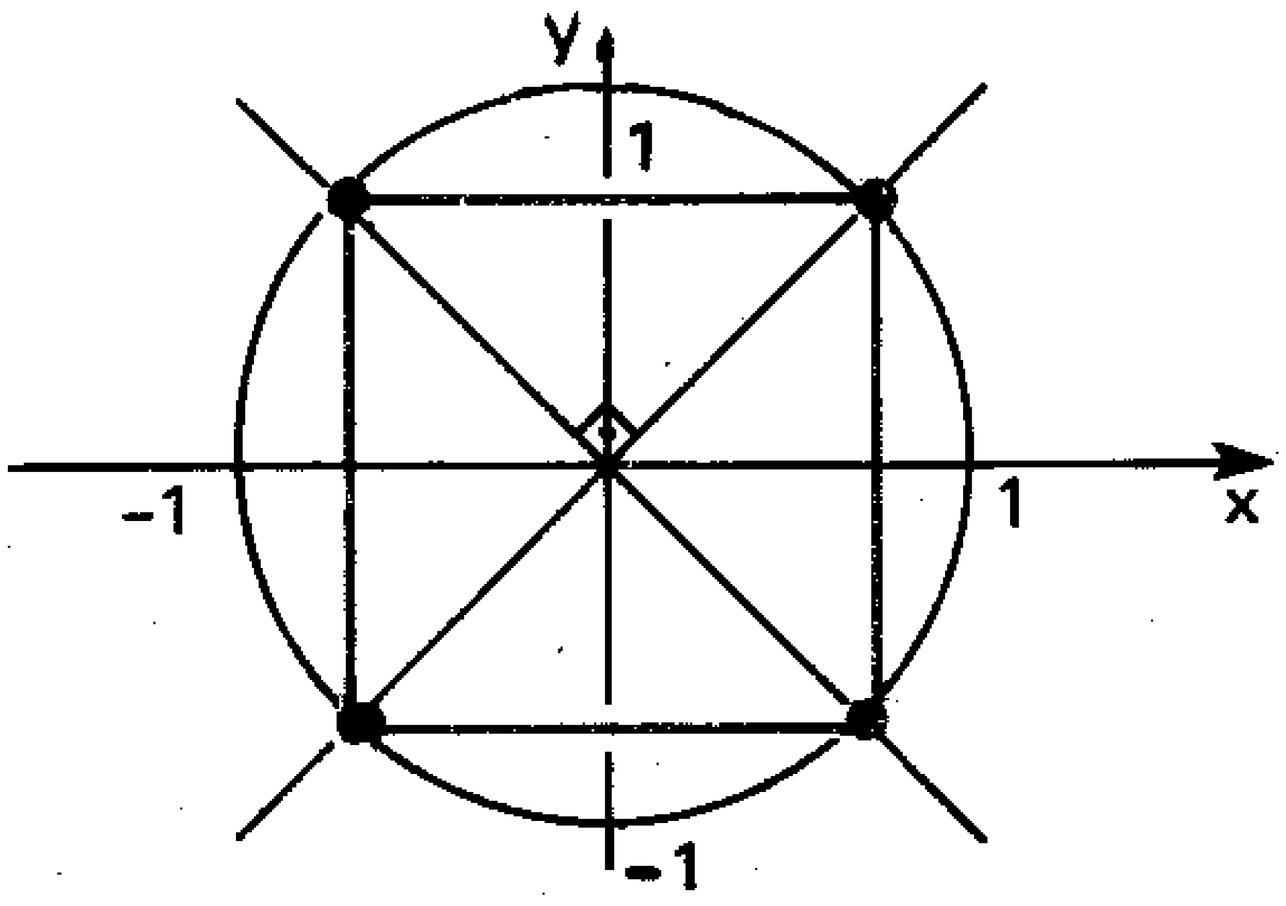
1.º) $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ (I)

2.º) $z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$.

Como $R_e(z^2) = 0$, vem $x^2 - y^2 = 0$. (II)

(I) é a equação de circunferência de centro na origem e raio 1.

(II) é a equação do par de *bissetrizes* ($x + y = 0$ ou $x - y = 0$).



Assim, os afixos dos complexos que satisfazem simultaneamente as duas condições são os vértices de um **quadrado** cuja diagonal tem medida 2 (diâmetro da circunferência).

Logo, a área pedida é:

$$S = (\text{lado})^2 = \left(\frac{\text{diagonal}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{2} = 2$$

3.10) Sendo z e w, $z \neq w$, dois números complexos tais que:

1.º) $|z| = |w| = 1$

2.º) $z \cdot \overline{w}$ é imaginário puro

determine $\left|\dfrac{z + w}{z - w}\right|$.

Solução

Fazendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos:

- $|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$
- $|w| = 1 \Rightarrow \sqrt{c^2 + d^2} = 1 \Rightarrow c^2 + d^2 = 1$
- $z \cdot \overline{w} = (a + bi)(c - di) = ac - adi + bci + bd = (ac + bd) + (b - ad)i$

Como $z \cdot \overline{w}$ é imaginário puro, $ac + bd = 0$ e $bc - ad \neq 0$.

Então:

$$\left|\frac{z + w}{z - w}\right| = \frac{|z + w|}{|z - w|} = \frac{|(a + c) + (b + d)i|}{|(a - c) + (b - d)i|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}}{\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2}{a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2}}$$

Como $a^2 + b^2 = 1$ e $c^2 + d^2 = 1$, essa última expressão pode ser escrita:

$$\left|\frac{z + w}{z - w}\right| = \sqrt{\frac{1 + 1 + 2ac + 2bd}{1 + 1 - 2ac - 2bd}} = \sqrt{\frac{2 + 2(ac + bd)}{2 - 2\underbrace{(ac + bd)}_{0}}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = 1$$

3.11) Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática*, que $|z^n| = |z|^n$ para todo natural $n \geqslant 1$.

Solução

Teorema 1 – A igualdade é válida para $n = 1$:

$$|z^1| = |z| = |z|^1$$

Teorema 2 – Vamos provar que, se a igualdade é válida para $n = k$, então também o é para $n = k + 1$.

Hipótese: $|z^k| = |z|^k$

Tese: $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$

Vamos partir do primeiro membro da tese e utilizar a propriedade $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

$$|z^{k+1}| = |z^k \cdot z^1| = |z^k| \cdot |z| \overset{\text{Hipótese}}{=} |z|^k \cdot |z| = |z|^{k+1} = (2.º \text{ membro da tese})$$

Aplicação: Vamos calcular $|(\sqrt{3} - i)^8|$:

$$|(\sqrt{3} - i)^8| = |\sqrt{3} - i|^8 = [\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}\,]^8 = [\sqrt{4}]^8 = 2^8 = 256$$

---

* Veja volume 2 desta coleção, p. 31.

Exercícios Propostos

3.12) Calcule:

a) $|7 - 24i|$

b) $|(2 + 3i) \cdot (1 - i)|$

c) $\left|\dfrac{(-3 - 4i)(2 + 2i)}{1 + i}\right|$

d) $\left|\dfrac{(\sqrt{2} + 2i)^8}{(-1 + 2\sqrt{2}i)^4}\right|$

3.13) Represente graficamente os números complexos **z** tais que:

a) $|z| = 2$ b) $|z| \geqslant 2$ c) $1 \leqslant |z| \leqslant 2$

3.14) Determine o lugar geométrico dos afixos dos números complexos **z** para os quais:

a) $|z| + z = 2 + 4i$

b) $|z - 3i| = |z + 2|$

c) $|z - 1 + 2i| = 2$

d) $|z - 1 + 2i| \leqslant 2$

3.15) Represente, no Plano de Argand-Gauss, os complexos **z** tais que:

a) $|z + 2| + |z - 2| = 6$

b) $|z + 2| + |z - 2| \leqslant 6$

3.16) Sendo $w = \cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha$, α real, determine o módulo do número complexo **z** para o qual tem-se $\left|\dfrac{z^2}{w}\right| = 8$.

3.17) Sendo **z** e **w** números complexos tais que:

1.º) $|z| = |w| = 1$

2.º) $\left|\dfrac{z + w}{zw}\right| = \sqrt{10}$

determine $R_e\left(\dfrac{z}{w}\right)$

3.4 — OUTRA PROPRIEDADE DO MÓDULO: A DESIGUALDADE TRIANGULAR

Sendo **z** e **w** números complexos quaisquer, tem-se que:

$$|z + w| \leqslant |z| + |w|$$

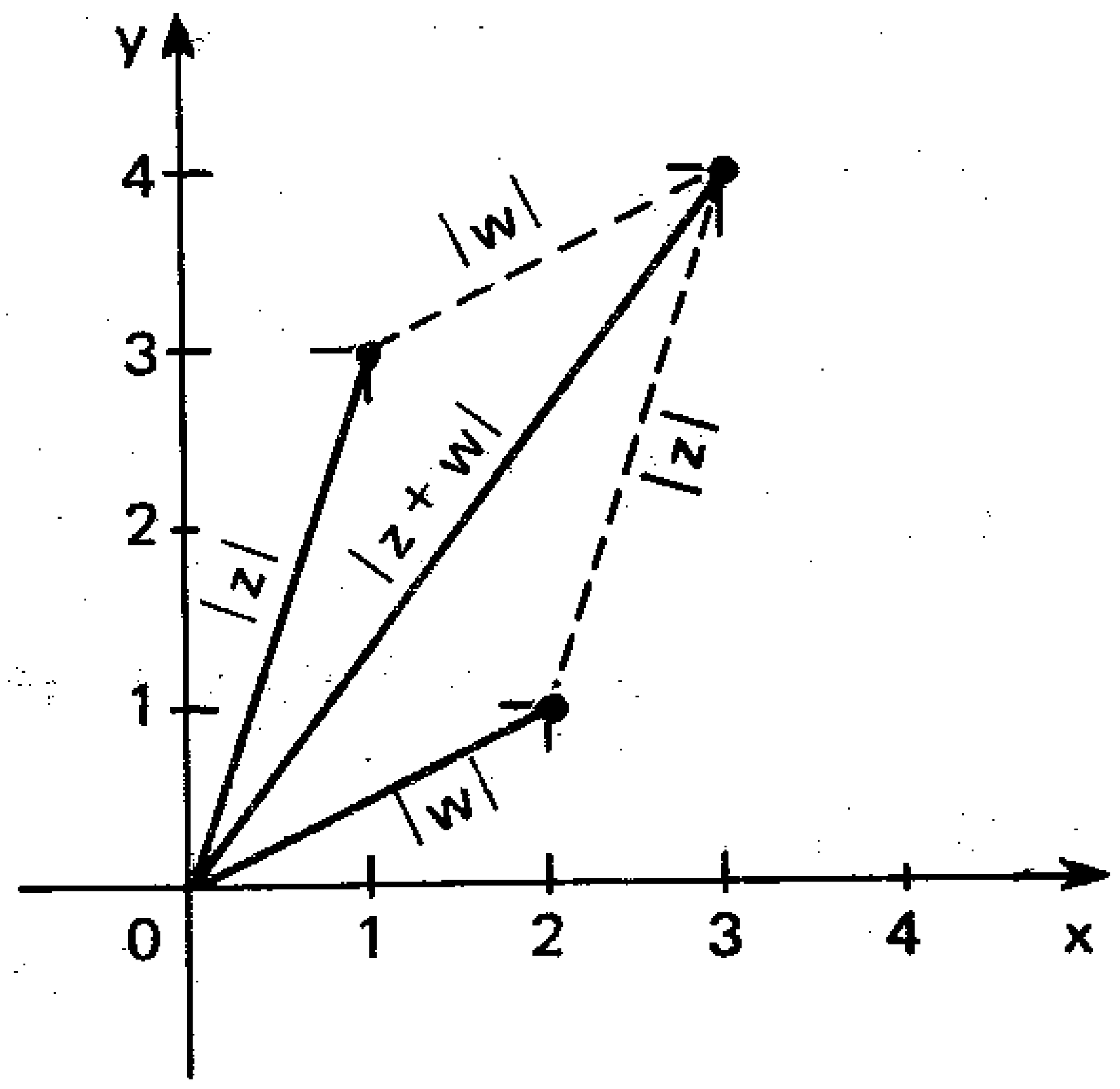
Examinemos um **exemplo**. Sendo $z = 1 + 3i$ e $w = 2 + i$, temos:

- $|z + w| = |3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
- $|z| = |1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \cong 3{,}16$
- $|w| = |2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \cong 2{,}23$

De fato, temos $5 < 3{,}16 + 2{,}23$; portanto, neste exemplo vemos que **o módulo da soma é menor que a soma dos módulos**.

Pelo gráfico abaixo, a situação torna-se visível: a figura mostra um paralelogramo, onde os lados têm medidas $|z|$ e $|w|$, e uma diagonal mede $|z + w|$.

Assim, observamos que nos triângulos em que o paralelogramo está dividido, os lados têm medidas $|z|$, $|w|$ e $|z + w|$; da Geometria Plana sabemos que (num triângulo) cada lado é menor que a soma dos outros dois. Daí a propriedade:



$$|z + w| \leqslant |z| + |w|$$

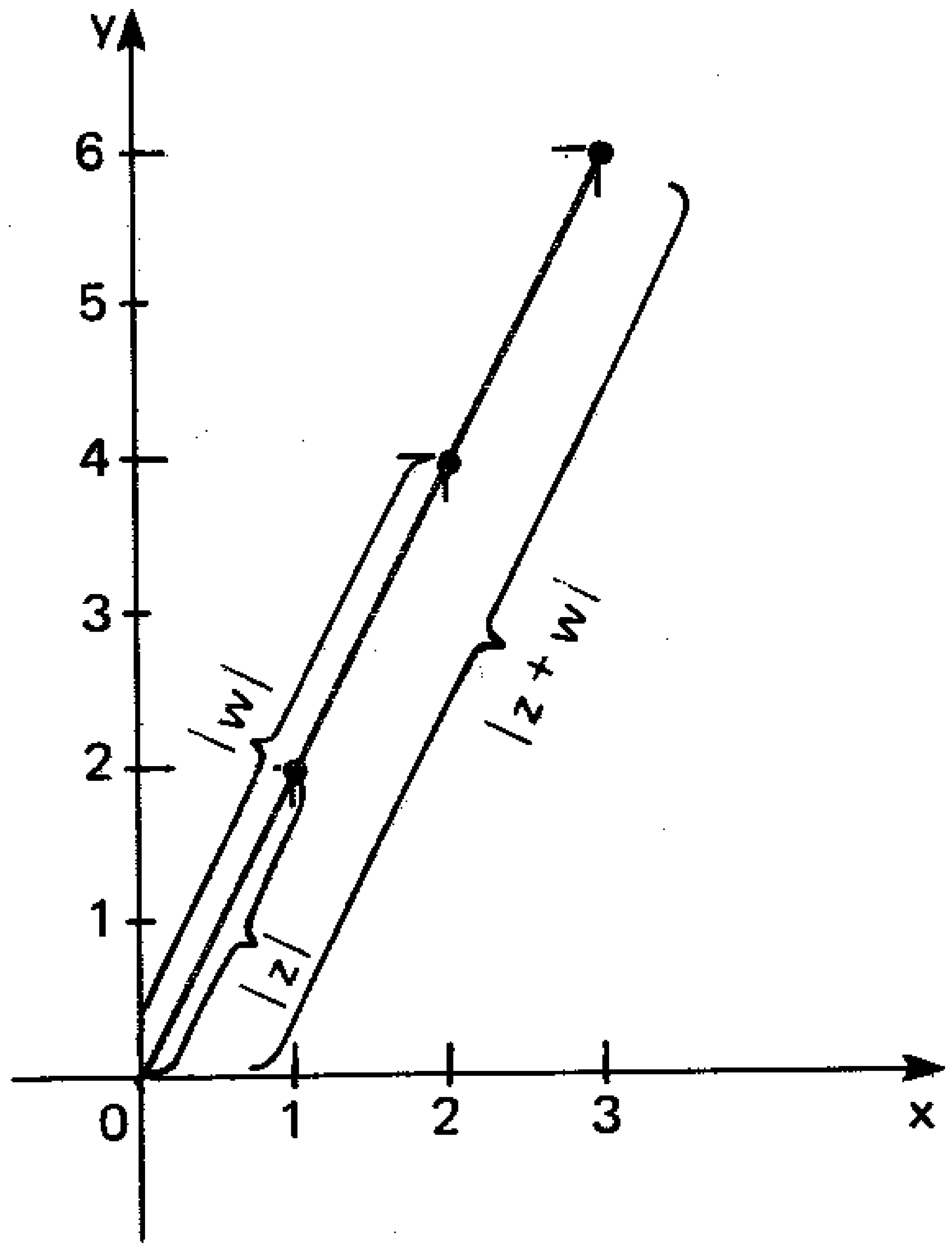
ser conhecida como **desigualdade triangular**.

Fica evidente que, quando $|z|$ e $|w|$ estiverem representados por segmentos contidos numa mesma reta que passa pela origem, ocorre o caso em que $|z + w| = |z| + |w|$.

Por exemplo, se $z = 1 + 2i$ e $w = 2 + 4i$ (note que os pontos $(1; 2)$ e $(2; 4)$ pertencem à reta da equação $y = 2x$), temos:

- $|z + w| = |3 + 6i| = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$
- $|z| = |1 + 2i| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
- $|w| = |2 + 4i| = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$

$$(3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5})$$



Demonstração da propriedade

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, **a, b, c e d** reais. Assim, temos $z + w = (a + c) + (b + d)i$.

A desigualdade $|z + w| \leqslant |z| + |w|$ pode, então, ser escrita:

$$\sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, ela é verdadeira se:

$$(a + c)^2 + (b + d)^2 \leqslant a^2 + b^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} + c^2 + d^2$$

que simplificada fica:

$$ac + bd \leqslant \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$$

Quadrando novamente ambos os membros, a desigualdade é verdadeira se:

$$a^2c^2 + 2\,abcd + b^2d^2 \leqslant a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

isto é, se:

$$2\,abcd \leqslant a^2d^2 + b^2c^2$$

Esta última relação é equivalente a:

$$(ad - bc)^2 \geqslant 0$$

que é **indiscutivelmente verdadeira**, sendo **a**, **b**, **c** e **d** reais.

Portanto, partindo desta desigualdade, revertendo o processo passagem por passagem (e cada uma delas é reversível), provamos a propriedade.

Exercícios Resolvidos

3.18) Sendo **z** um número complexo tal que $|z + 3 - 4i| = 12$, determine o valor mínimo de $|z|$.

Solução

Pela desigualdade triangular, temos que:

$$|z + 3 - 4i| \leqslant |z| + |3 - 4i|$$

Como $|z + 3 - 4i| = 12$ e $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, a desigualdade se escreve:

$$12 \leqslant |z| + 5$$

donde obtemos:

$$|z| \geqslant 7$$

Assim, o valor mínimo de $|z|$ é 7.

3.19) Os números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$ são tais que $a \cdot b \cdot c \cdot d \neq 0$ e $|z + w| = |z| + |w|$.

Determine a relação entre **a**, **b**, **c** e **d**.

Solução

Sabemos que, quando o módulo da soma é igual à soma dos módulos, os afixos dos complexos pertencem a uma mesma reta (r) que passa pela origem.

Seja, então, $y = mx$ a equação dessa reta (**r**).

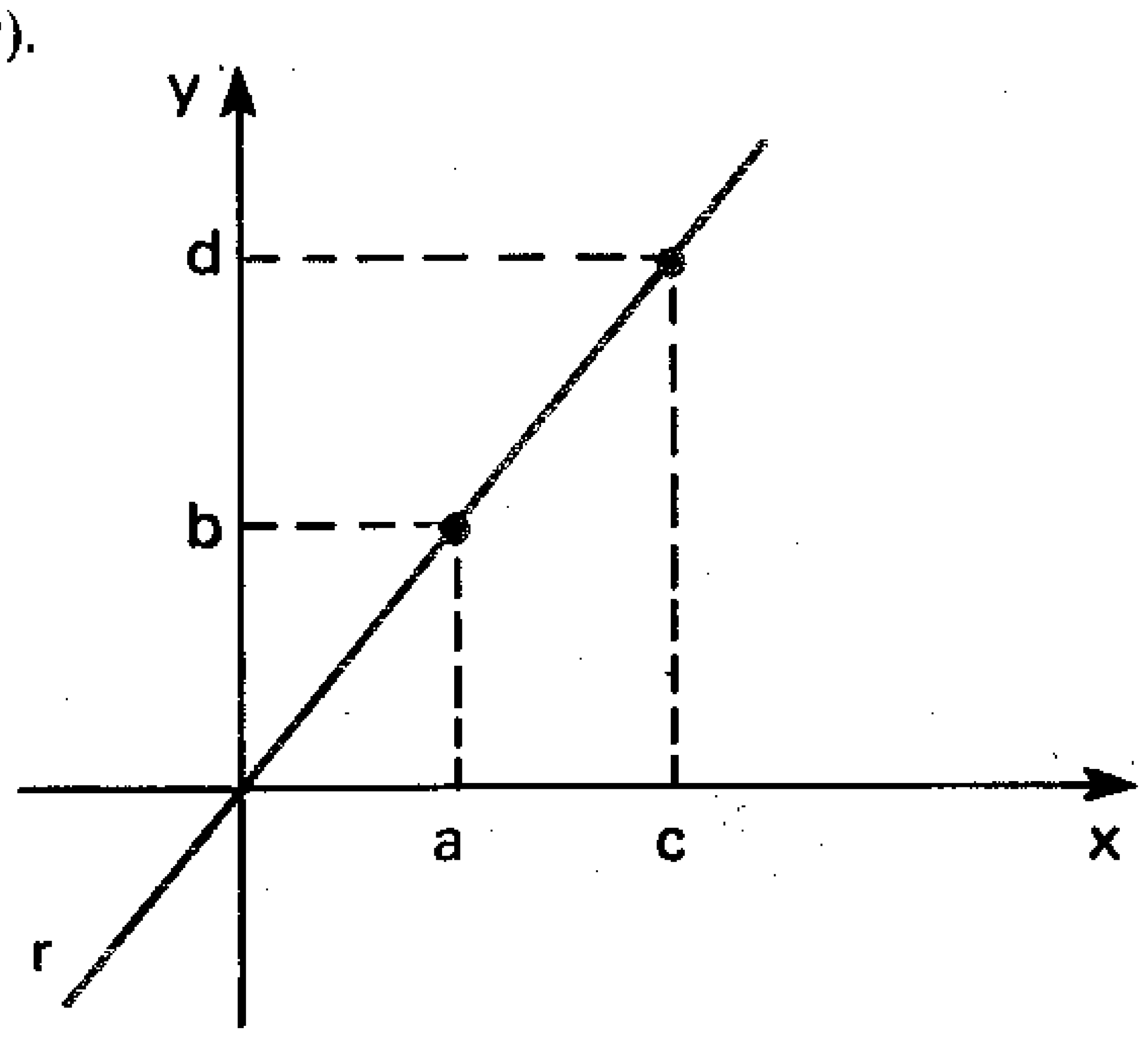
Se $(a; b) \in r$, temos $b = ma$. (I)

Se $(c; d) \in r$, temos $d = mc$. (II)

De (I) e (II) temos:

$$m = \frac{b}{a} \text{ e } m = \frac{d}{c}$$

Portanto, $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ ou $ad = bc$.



Exercícios Propostos

3.20) Mostre que, sendo **z** e **w** números complexos quaisquer, então $|z - w| \leqslant |z| + |w|$.

3.21) Mostre que, sendo z_1, z_2 e z_3 números complexos quaisquer, então:

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

$|(z_1 + z_2) + z_3| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

Capítulo

4

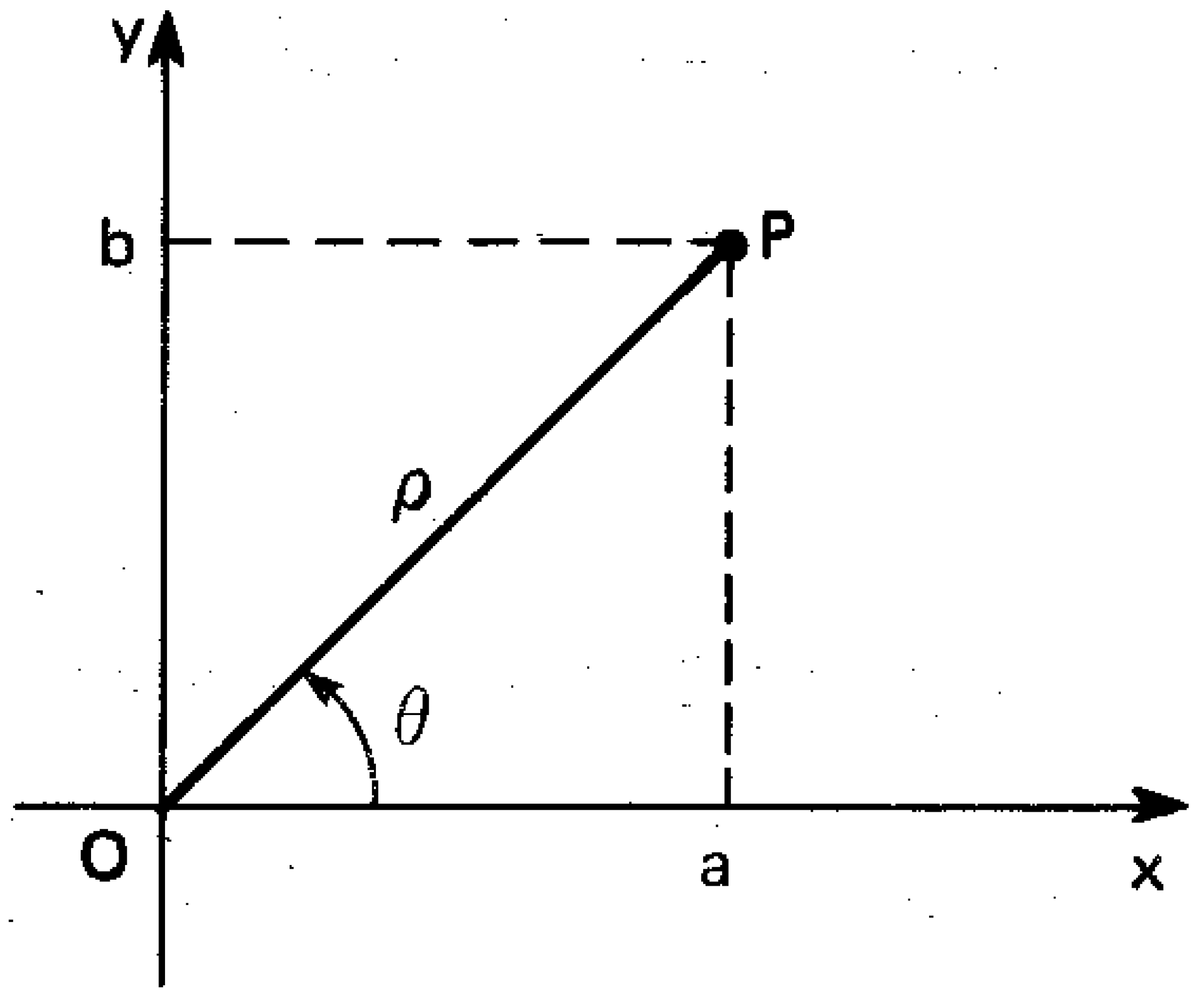
A trigonometria dos números complexos

4.1 – ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Sejam z = a + bi um número complexo **não nulo** e P o ponto que o representa.

A medida θ do ângulo formado pelo semi-eixo positivo **Ox** e pelo segmento $\overline{OP}$ (tomada no sentido anti-horário) é chamada **argumento principal** do número complexo **z**, e é indicada por arg(z):

$$\theta = \arg(z)$$



No caso em que b = 0 e a > 0, isto é, quando P está no semi-eixo positivo **Ox**, adotamos $\theta = 0$. Percebemos, então, que:

$$0 \leqslant \arg(z) < 2\pi$$

Nota: Damos o nome de **argumento principal** a θ pelo fato de também serem considerados como argumentos do número complexo z = a + bi **todos os côngruos de** θ, ou seja, os ângulos de medidas:

$$\theta_k = \theta + 2k\pi$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Assim, se $\theta = \frac{\pi}{2}$ é o argumento principal de um complexo **z**, também são argumentos de **z**:

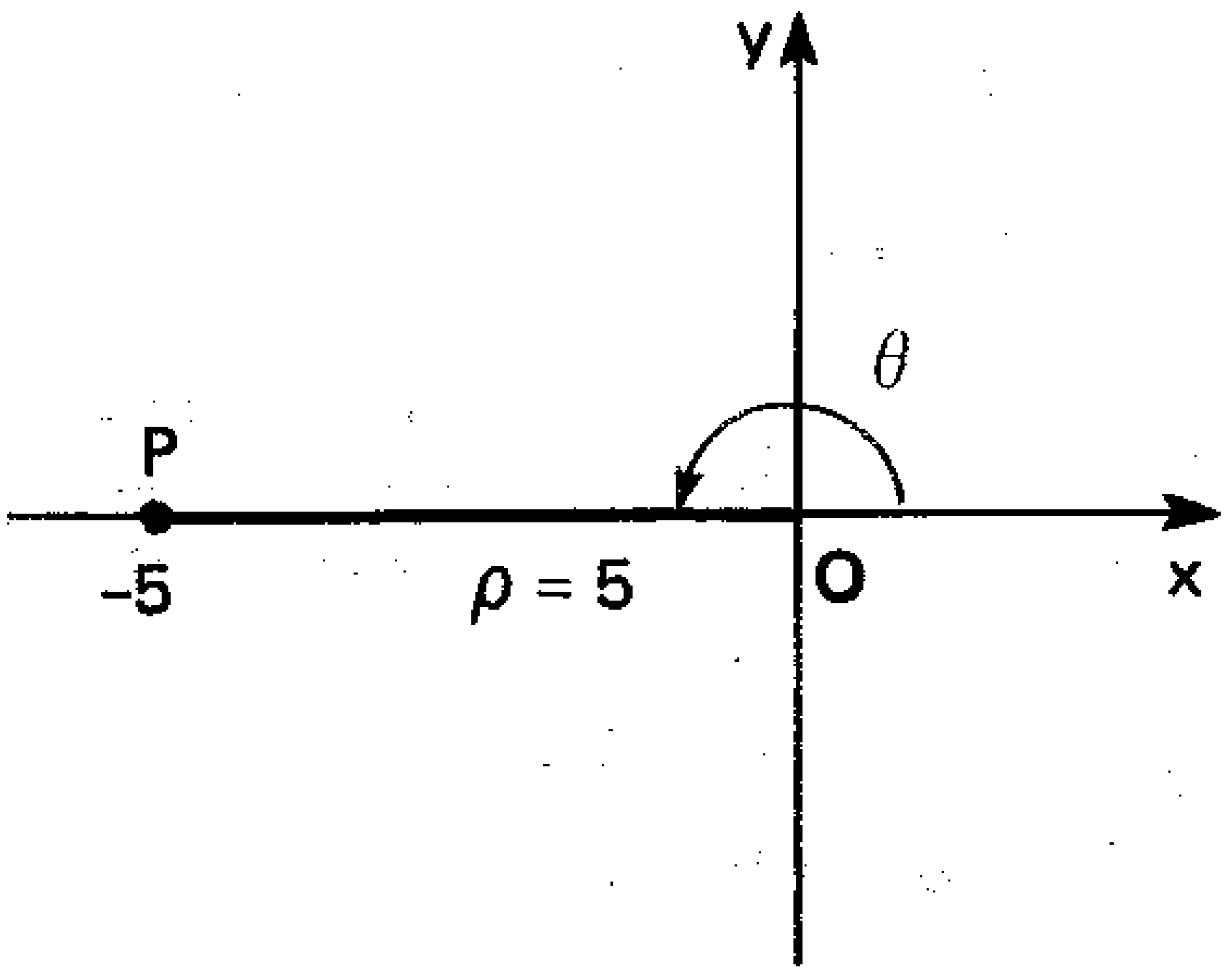
$$\frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \text{ etc.}$$

No entanto, é freqüente nos referirmos ao argumento principal θ simplesmente como argumento de **z**.

Exemplos

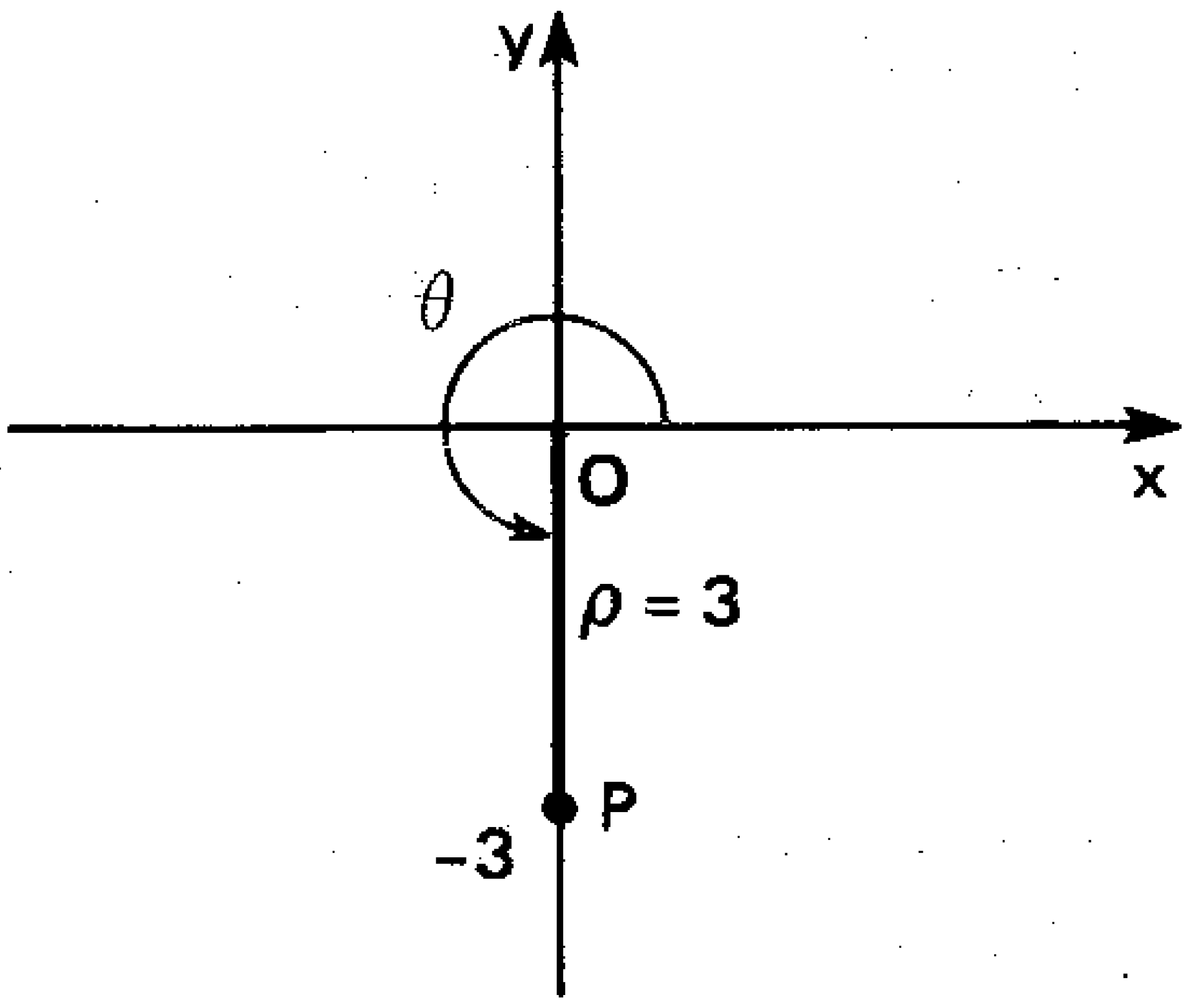
a) Seja $z = -5$.
Temos, então, o ponto $P(-5; 0)$ no semi-eixo negativo **Ox**. Portanto:

$$\theta = \pi$$



b) Seja $z = -3i$.
Temos, então, o ponto $P(0; -3)$ no semi-eixo negativo **Oy**. Portanto:

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$



c) Seja $z = 1 + \sqrt{3}\,i$.
Calculando $|z|$, temos:

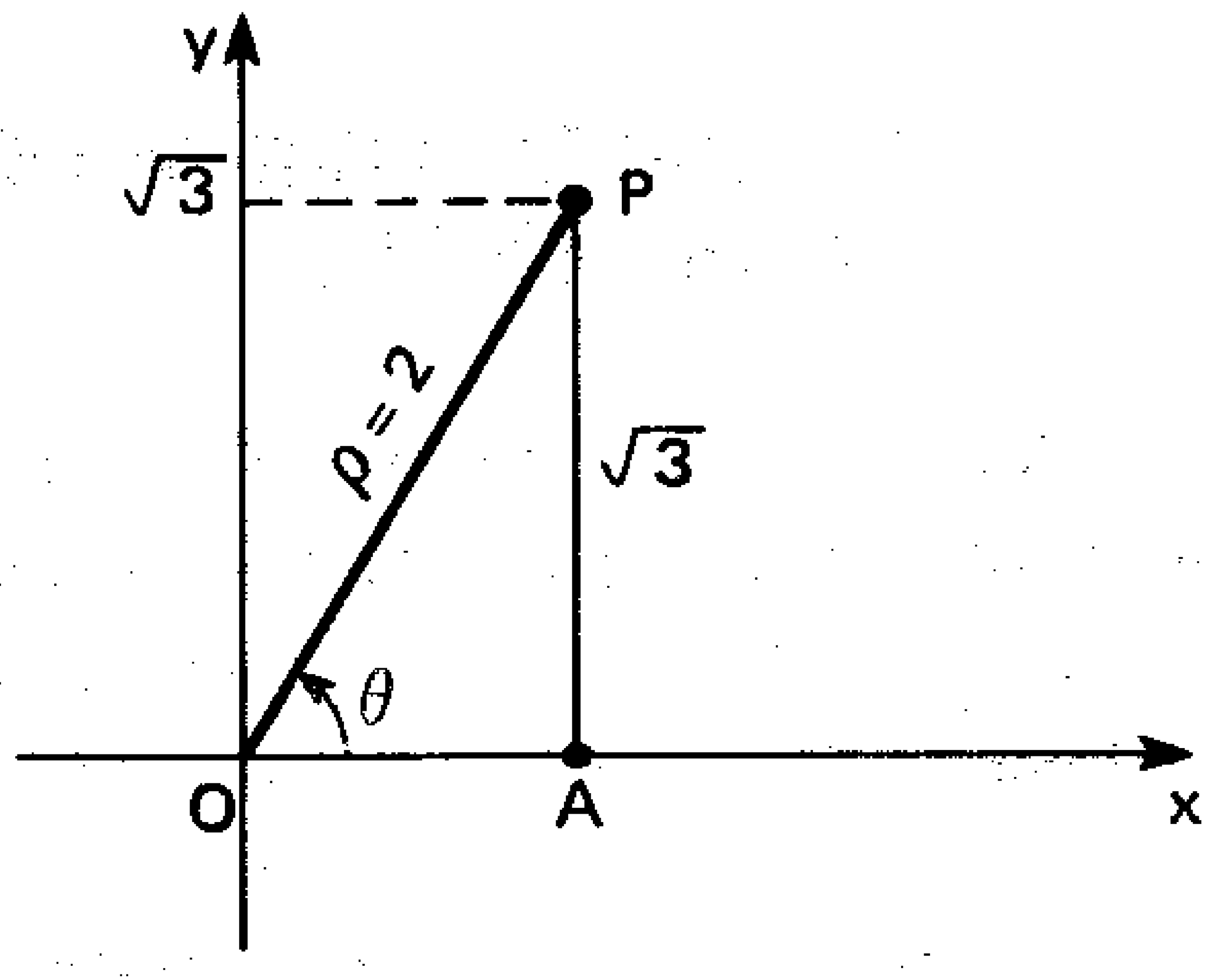
$|z| = \rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

No triângulo retângulo OAP, temos:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como θ é agudo, é imediato que:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

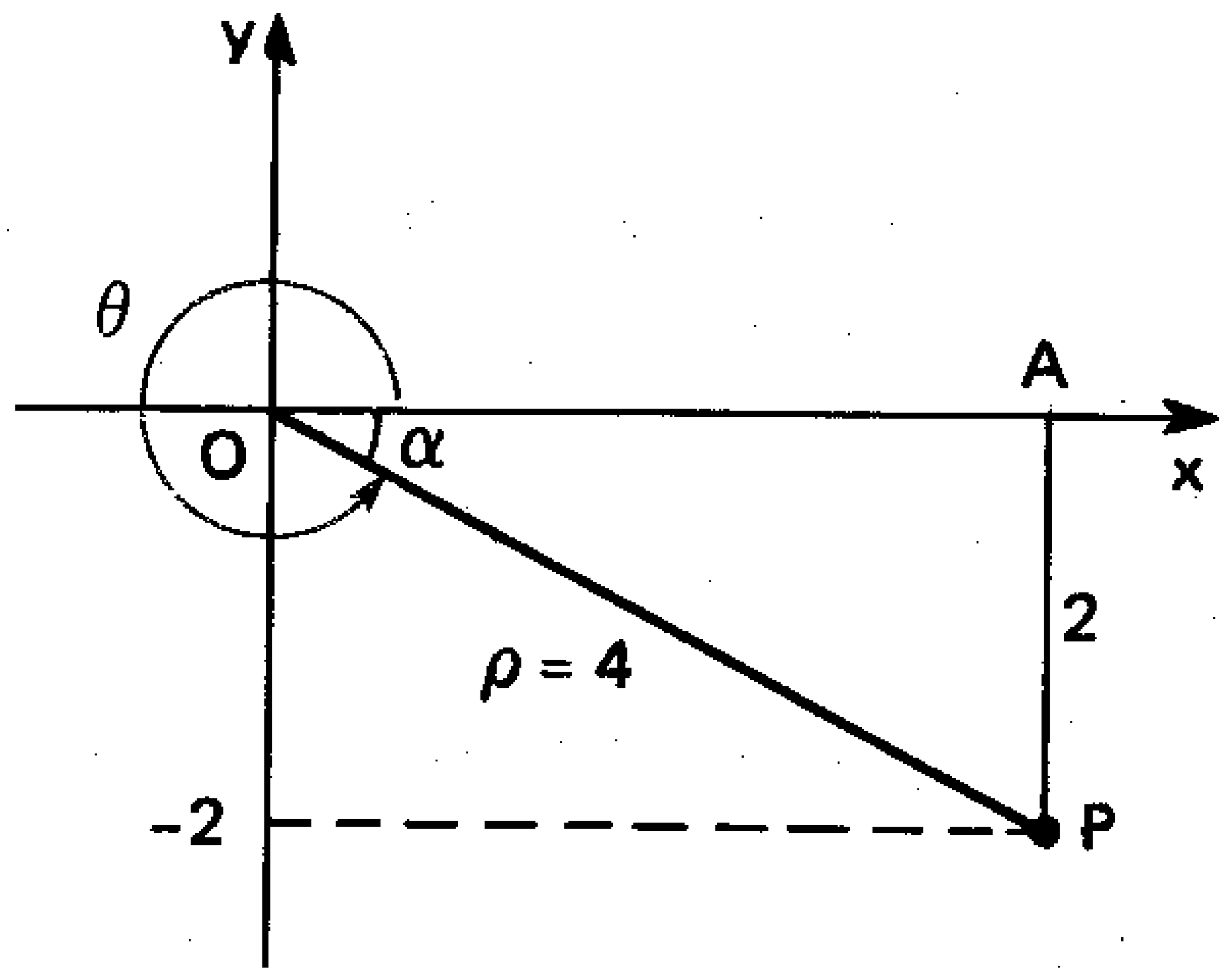


d) Seja $z = 2\sqrt{3} - 2i$.

Calculando $|z|$, temos:

$$|z| = \rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

Para determinarmos θ, vamos primeiramente determinar o ângulo α no triângulo OAP da figura, já que é imediato que $\theta = 2\pi - \alpha$:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Temos, então, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ e, portanto:

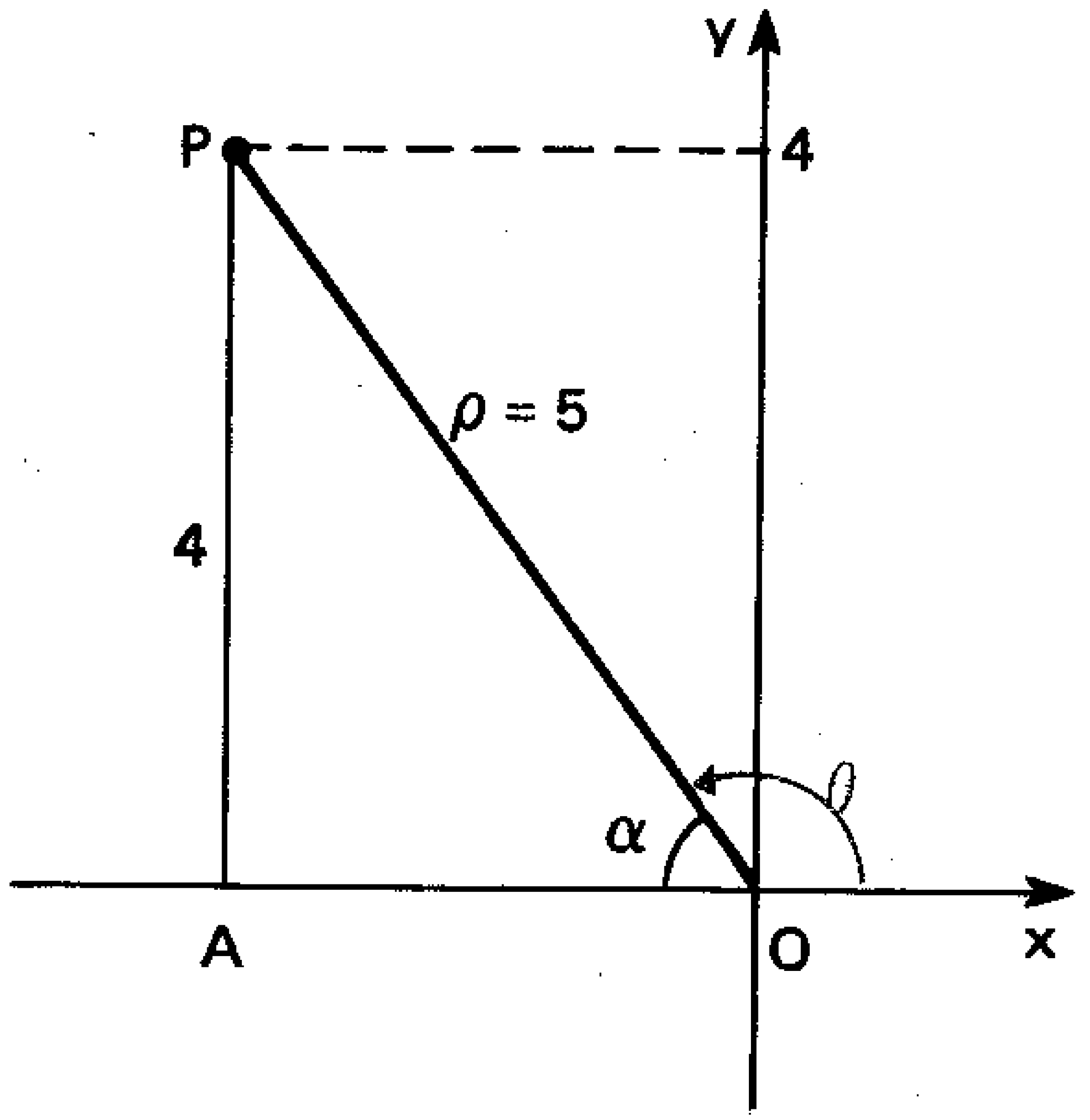
$$\theta = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

e) Seja $z = -3 + 4i$.

Calculando $|z|$, temos:

$$|z| = \rho = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

Para determinarmos θ, vamos primeiramente determinar o ângulo α no triângulo OAP da figura, já que é imediato que $\theta = 180° - \alpha$:



$$\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8000$$

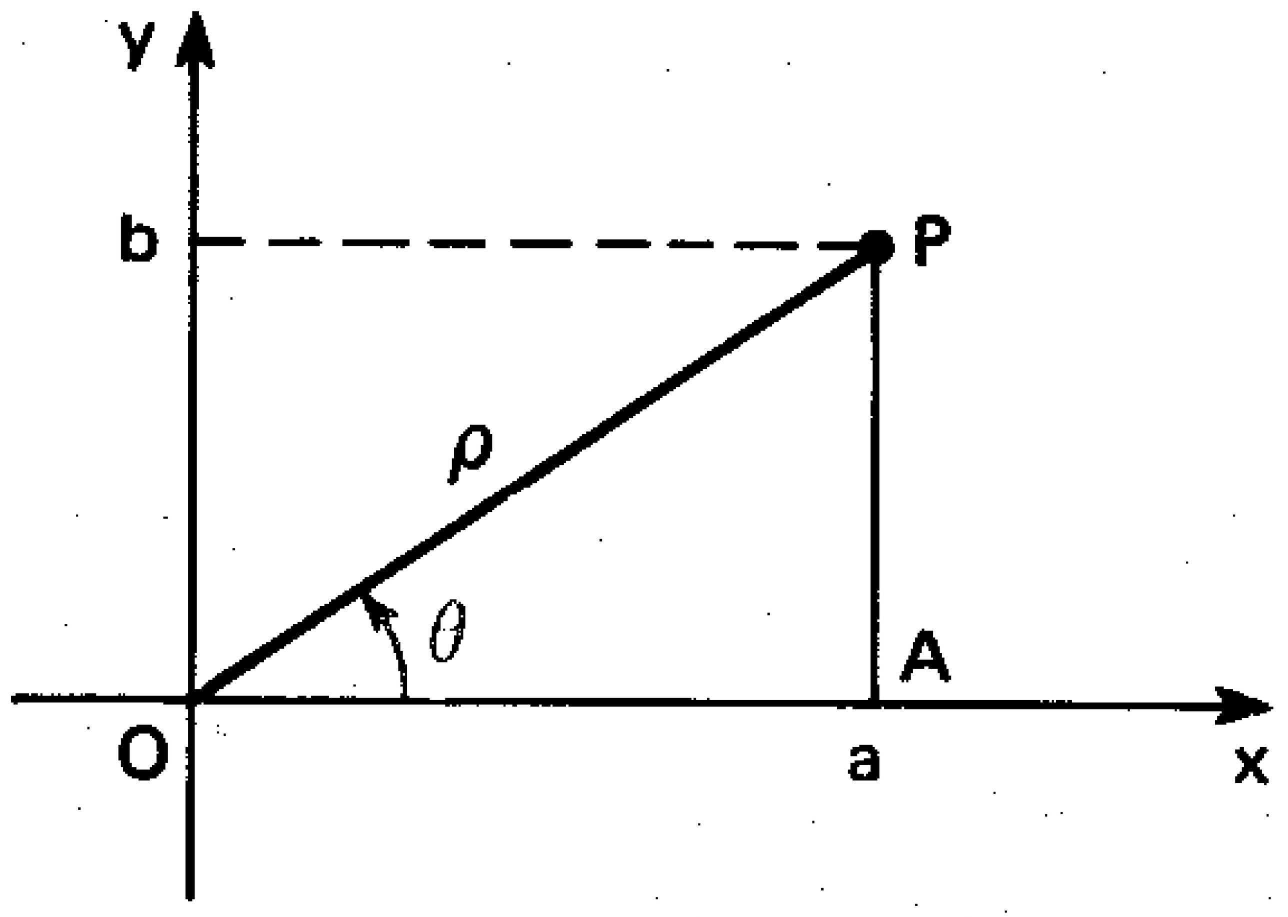
Consultando a tabela do final do livro, temos $\alpha \cong 53°$.

Logo, $\theta \cong 180° - 53° \cong 127°$

4.2 — A FORMA TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

As definições de módulo e argumento de **z** nos permitem escrevê-lo numa nova forma, além das já utilizadas: (a; b) (cartesiana) e a + bi (algébrica).

Se lembrarmos que os sinais das coordenadas (a; b) de um ponto do plano cartesiano são, em todos os quadrantes, os mesmos que os do cosseno e do seno, respectivamente, é fácil verificar que para todo número complexo $z = a + bi \neq 0$, cujo módulo é ρ e cujo argumento é θ, valem as relações:



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{\rho} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

Dessas igualdades tiramos:

$$b = \rho \operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad a = \rho\cos\theta$$

Podemos, então, escrever:

$$z = a + bi = \rho\cos\theta + (\rho\operatorname{sen}\theta)i$$

isto é:

$$z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$$

que é a **forma trigonométrica** do complexo z.

Exemplos

a) $z = -5$ tem $\rho = 5$ e $\theta = \pi$ (Veja exemplo *a*, do item 4.1.)

Podemos, então, escrever:

$$z = -5 = 5(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$$

b) $z = -3i$ tem $\rho = 3$ e $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (Veja exemplo *b*, do item 4.1.)

Então:

$$z = -3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$$

c) $z = 1 + \sqrt{3}i$ tem $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$ (Veja exemplo *c*, do item 4.1.)

Então:

$$z = 1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

d) $z = 2\sqrt{3} - 2i$ tem $\rho = 4$ e $\theta = \frac{11\pi}{6}$ (Veja exemplo *d*, do item 4.1.)

Então:

$$z = 2\sqrt{3} - 2i = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{11\pi}{6}\right)$$

Observação: Como, da Trigonometria, temos que dois arcos (ângulos) côngruos têm senos iguais e cossenos iguais, é evidente que a forma trigonométrica de **z** pode ser escrita com qualquer dos argumentos de **z** dados por $\theta_k = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, isto é:

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) = \rho(\cos\theta_k + i\,\text{sen}\,\theta_k)$$

Por exemplo, como π e 3π são côngruos, podemos escrever:

$$z = -5 = 5(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) = 5(\cos 3\pi + i\,\text{sen}\,3\pi)$$

Exercícios Propostos

4.1) Escreva na forma trigonométrica os números complexos:

a) $z = 3$
b) $z = \sqrt{3} + i$
c) $z = 5i$
d) $z = -3 + 3\sqrt{3}\,i$
e) $z = -1$
f) $z = -1 - i$
g) $z = -4i$
h) $z = 3 - 3i$

4.2) Escreva na forma algébrica os números complexos:

a) $z = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

b) $z = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}$

c) $z = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$

4.3) Mostre que se o número complexo **z** tem argumento θ então $\mathbf{z}^2$ tem argumento 2θ.

4.4) Sendo θ_1 e θ_2, com $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$, os argumentos de dois complexos de mesmo módulo, mostre que tais complexos são conjugados.

Capítulo

5

Operações na forma trigonométrica

5.1 – INTRODUÇÃO

Quando introduzimos a forma *algébrica* dos números complexos, notamos que certas operações, como a multiplicação e a divisão, tornaram-se bem mais simples de se executar.

A forma *trigonométrica*, por sua vez, tem a vantagem de simplificar o trabalho de potenciação e de radiciação de números complexos, como veremos a seguir.

5.2 – MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Sejam os números complexos (não nulos):

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

Vamos calcular o produto $z_1 \cdot z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + i^2\,\text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i\,(\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1)]$$

Como, da Trigonometria, temos que:

$$\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

e

$$\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_2\cos\theta_1 = \text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)$$

escrevemos:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]$$

onde lemos que, para multiplicar dois números complexos na forma trigonométrica, basta **multiplicar seus módulos e somar seus argumentos**.

É fácil verificar que esse procedimento pode ser generalizado para um número qualquer de fatores:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \ldots \cdot \rho_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n) + \\ + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_n)]$$

Vamos agora calcular o quociente $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i \operatorname{sen}\theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1[\cos\theta_1 \cos\theta_2 - i \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - i^2 \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2]}{\rho_2(\cos^2\theta_2 - i^2 \operatorname{sen}^2\theta_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{[(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1)]}{\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2}$$

Como, da Trigonometria, temos:

$$\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 = \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_1 = \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

e

$$\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2 = 1$$

escrevemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

onde lemos que, para dividir dois números complexos na forma trigonométrica, basta **dividir seus módulos e subtrair seus argumentos**.

Exemplo

Sejam $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$.

Para calcularmos $z_1 \cdot z_2$, fazemos:

$$\begin{cases} \rho_1 \cdot \rho_2 = 6 \cdot 2 = 12 \\ \theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

e escrevemos:

$$z_1 \cdot z_2 = 12\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$$

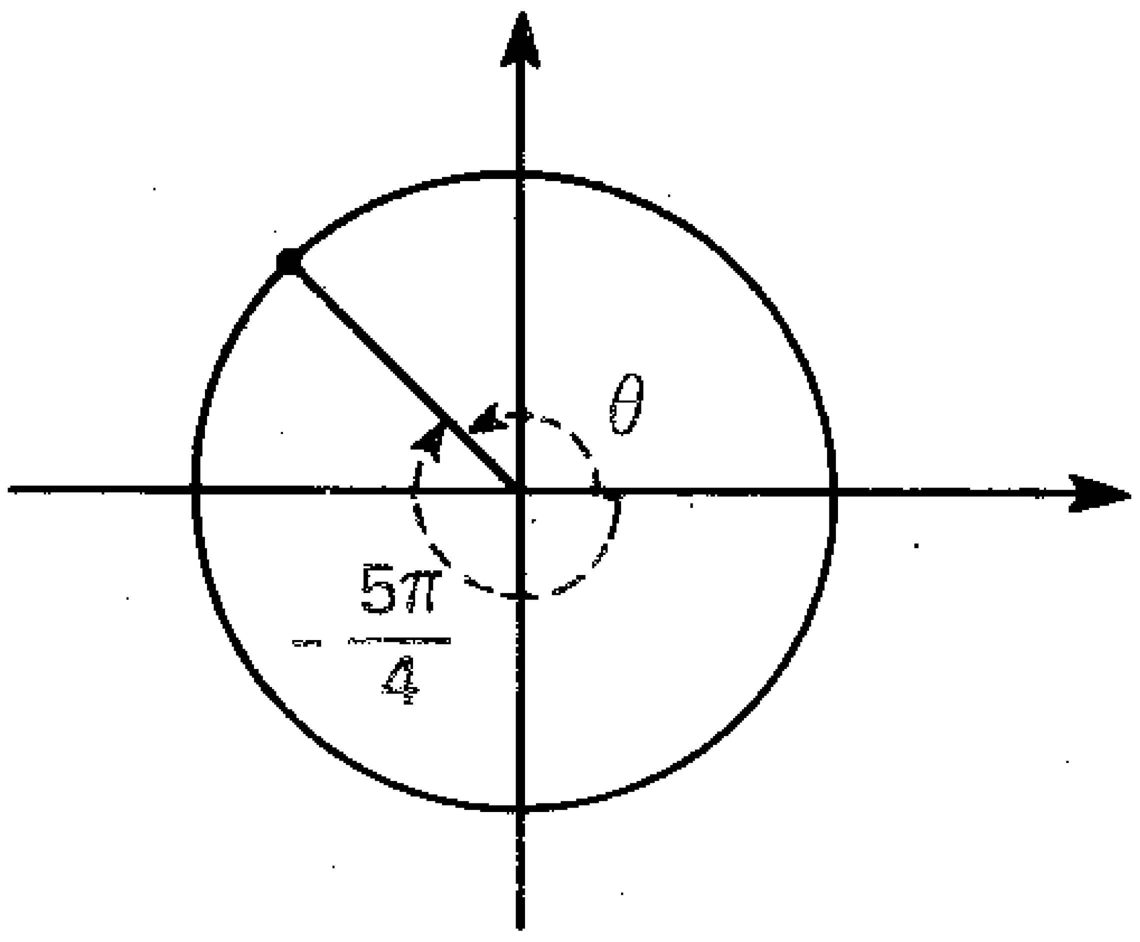
Para calcularmos $\frac{z_1}{z_2}$ fazemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \theta_1 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{2} = -\dfrac{5\pi}{4} \end{cases}$$

e escrevemos:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

Note-se que, neste resultado, o argumento obtido não é o *principal* θ, e sim o seu côngruo $-\frac{5\pi}{4}$. Caso *desejemos* a resposta em função de θ, devemos calcular a *primeira determinação positiva** dos arcos de mesma extremidade que $-\frac{5\pi}{4}$:



$$\theta = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

podendo, depois, escrever:

$$\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$$

5.3 – POTENCIAÇÃO

Com base na multiplicação, na forma trigonométrica, vamos verificar como se processa o cálculo de potências da forma $z^n = (a + bi)^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$, sem que precisemos recorrer a métodos exaustivos como, por exemplo, o binômio de Newton.

---

*Veja volume 3 desta coleção, p. 39.

Consideremos o número complexo $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e o número inteiro **n**, ambos não nulos, e calculemos z^n.

Se **n** > **0**, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\textbf{n} \text{ fatores}}$$

$$z^n = \underbrace{\rho \cdot \rho \cdot \ldots \cdot \rho}_{\textbf{n} \text{ fatores}}[\cos\underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\textbf{n} \text{ parcelas}} + i\,\text{sen}\underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\textbf{n} \text{ parcelas}}]$$

Portanto:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta) \quad (I)$$

Se **n** < **0**, temos $-n \pm 0$, podendo, por isso, ser usado o resultado (I) para $-$**n**. Então, fazemos:

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{1}{\rho^{-n}[\cos(-n\theta) + i\,\text{sen}(-n\theta)]}$$

Da Trigonometria: $\begin{cases} \cos(-n\theta) = \cos n\theta \\ \text{sen}(-n\theta) = -\,\text{sen}\,n\theta \end{cases}$

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}} = \frac{\rho^n}{\cos n\theta - i\,\text{sen}\,n\theta} = \frac{\rho^n}{\cos n\theta - i\,\text{sen}\,n\theta} \cdot \frac{\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta}{\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta} =$$

$$= \frac{\rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)}{\underbrace{\cos^2 n\theta + \text{sen}^2 n\theta}_{1}}.$$

Vemos, então, repetido o resultado (I).

Como para $n = 0$ este resultado também se verifica $[z^0 = \rho^0(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0) = 1]$, temos que, para todo inteiro **n**:

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)}$$

ou seja, para elevarmos um complexo $z \neq 0$ a um expoente inteiro **n** qualquer, basta **elevarmos o seu módulo a n e multiplicarmos o seu argumento por n**

A fórmula acima é conhecida como **fórmula de De Moivre**.

Exemplos

a) Seja $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$. Vamos calcular z^{18}.

$$z^{18} = \sqrt{2}^{18}\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{18\pi}{4}\right)$$

$$z^{18} = 2^{9}\left(\cos\frac{9\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{9\pi}{2}\right)$$

Como $\frac{9\pi}{2}$ é côngruo de $\frac{\pi}{2}$:

$$z^{18} = 512\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$$

b) Seja $z = \cos\frac{5\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{3}$. Vamos calcular z^{-6} (note que $\rho = 1$).

$$z^{-6} = (1)^{-6}\left[\cos\left(-6\cdot\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(-6\cdot\frac{5\pi}{3}\right)\right]$$

$$z^{-6} = 1\cdot[\cos(-10\pi) + i\,\text{sen}\,(-10\pi)]$$

Como -10π é côngruo de *zero*:

$$z^{-6} = \cos 0 + i\,\text{sen}\,0 = 1$$

Exercícios Resolvidos

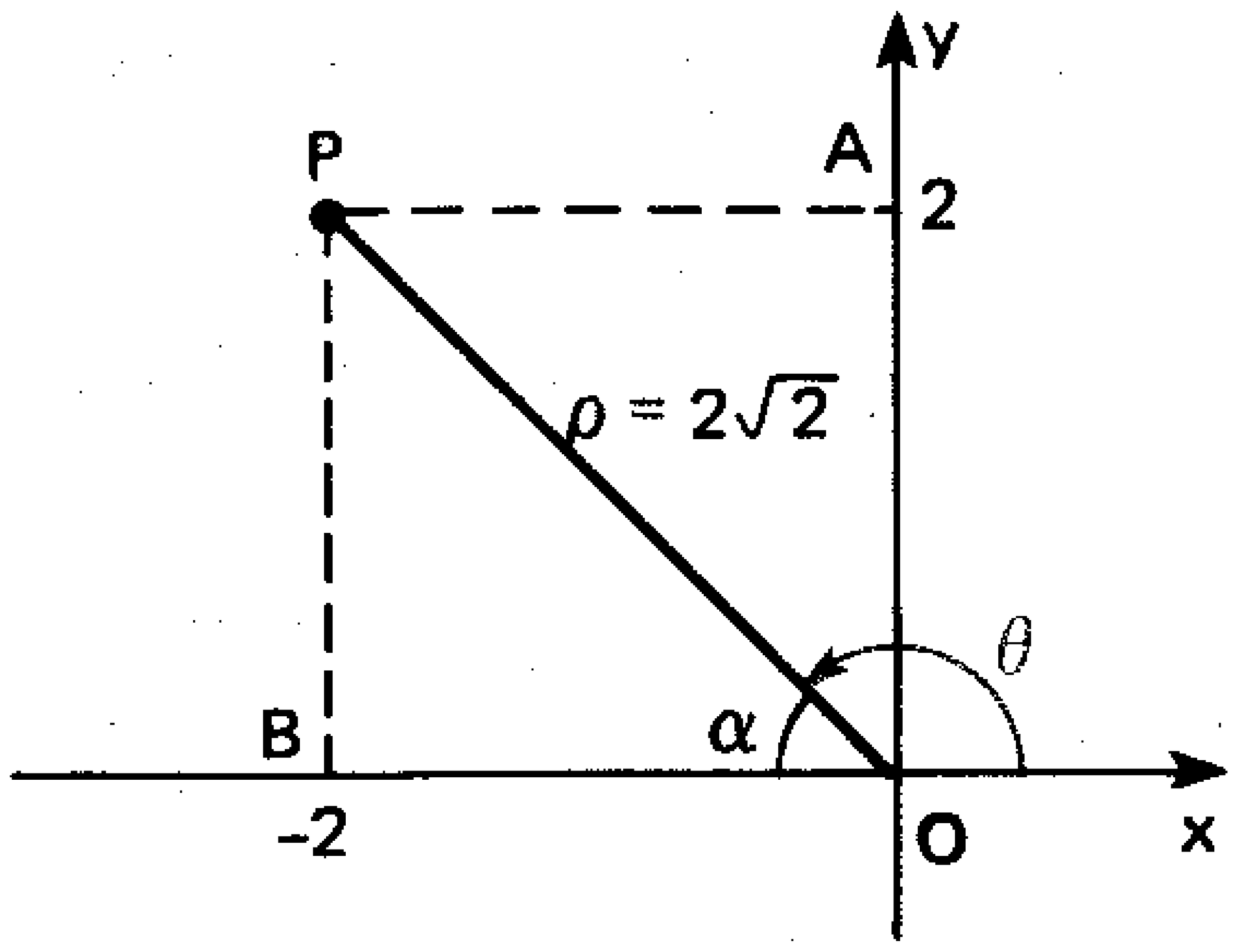
5.1) Calcule $(-2 + 2i)^5$.

Solução

Vamos escrever $-2 + 2i = z$ na forma trigonométrica:

$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Na figura, OAPB é um quadrado; portanto, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$



Logo: $z = -2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$.

$$z^5 = (-2 + 2i)^5 = (2\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5 \cdot 3\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{5 \cdot 3\pi}{4}\right) =$$

$$= 128\sqrt{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{15\pi}{4}\right)$$

$$\text{Como}\begin{cases}\cos\frac{15\pi}{4} = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\\[2mm] \text{sen}\,\frac{15\pi}{4} = \text{sen}\,\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$z^5 = 128\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 128 - 128i$$

5.2) Deduza as fórmulas de sen 2θ e cos 2θ em função de sen θ e cos θ, utilizando a fórmula de De Moivre.

Solução

Sendo $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, a fórmula de De Moivre nos dá:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Para obtermos cos 2θ e sen 2θ, façamos $n = 2$:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) \qquad \text{(I)}$$

Mas, como $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$:

$$z^2 = \rho^2(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^2 = \rho^2(\cos^2\theta + 2i\cos\theta\,\text{sen}\,\theta + i^2\,\text{sen}^2\,\theta)$$

isto é:

$$z^2 = \rho^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + i \cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) temos:

$$\rho^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) = \rho^2(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta + i \cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta)$$

Portanto:

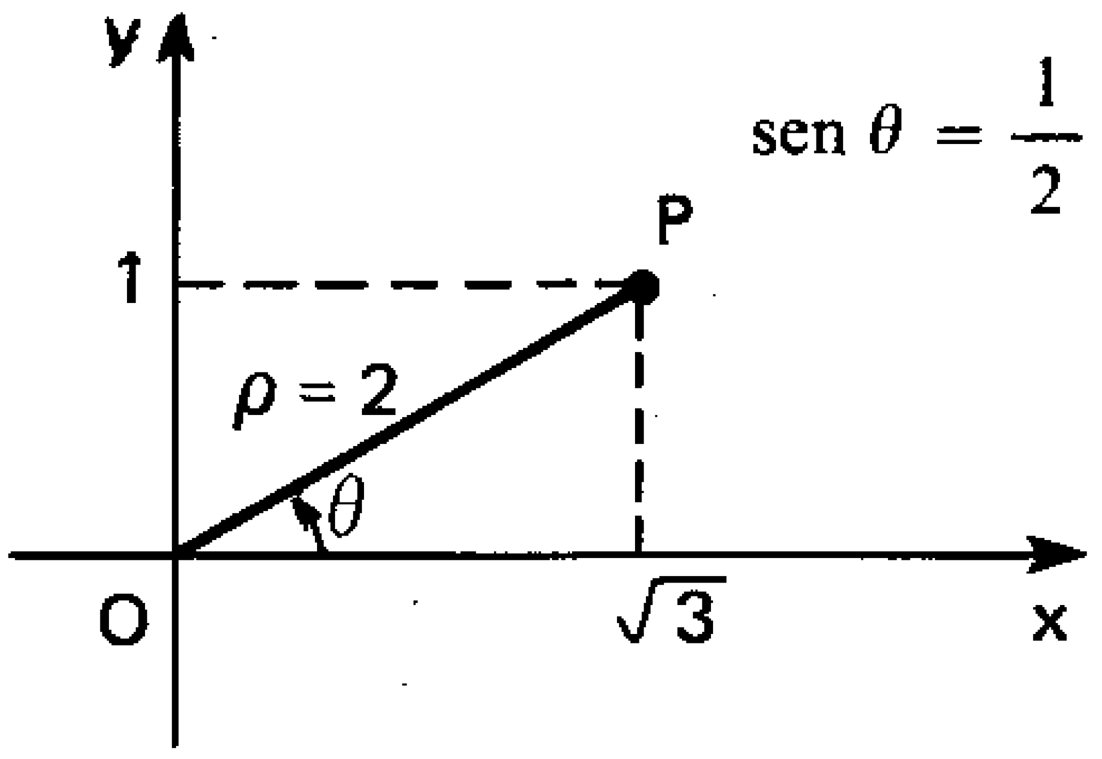
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \quad \text{e} \quad \text{sen}\,2\theta = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

5.3) Mostre que se $(\sqrt{3} + i)^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$, é real, então **n** é múltiplo de 3.

Solução

Vamos escrever $\sqrt{3} + i = z$ na forma trigonométrica; temos:

$$\begin{cases}\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\\[2mm] \theta = \frac{\pi}{6}\end{cases}$$



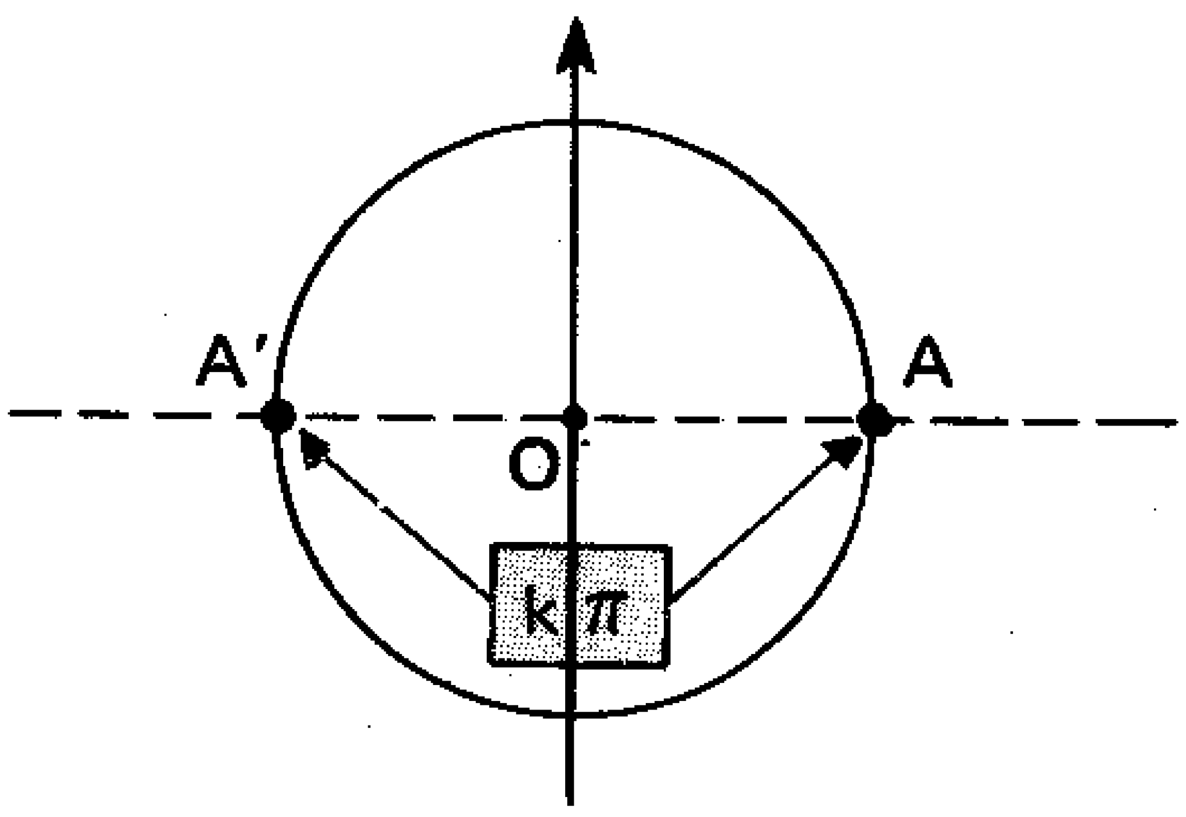
$\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}$

Portanto, $z = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$ e

$$z^{2n} = 2^{2n}\left(\cos\frac{2n\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{2n\pi}{6}\right)$$

$$z^{2n} = 4^{n}\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{3}\right)$$

Para que z^{2n} seja real, é necessário que $\text{sen}\,\frac{n\pi}{3} = 0$, isto é, o arco $\frac{n\pi}{3}$ deve ter extremidade em **A** ou em **A'** (figura abaixo).



Logo, $\frac{n\pi}{3} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$,

e daí, n = 3k = múltiplo de 3.

5.4) Determine o menor natural **n** para o qual $(\sqrt{3} + i)^n$ seja um imaginário puro de coeficiente positivo.

Solução

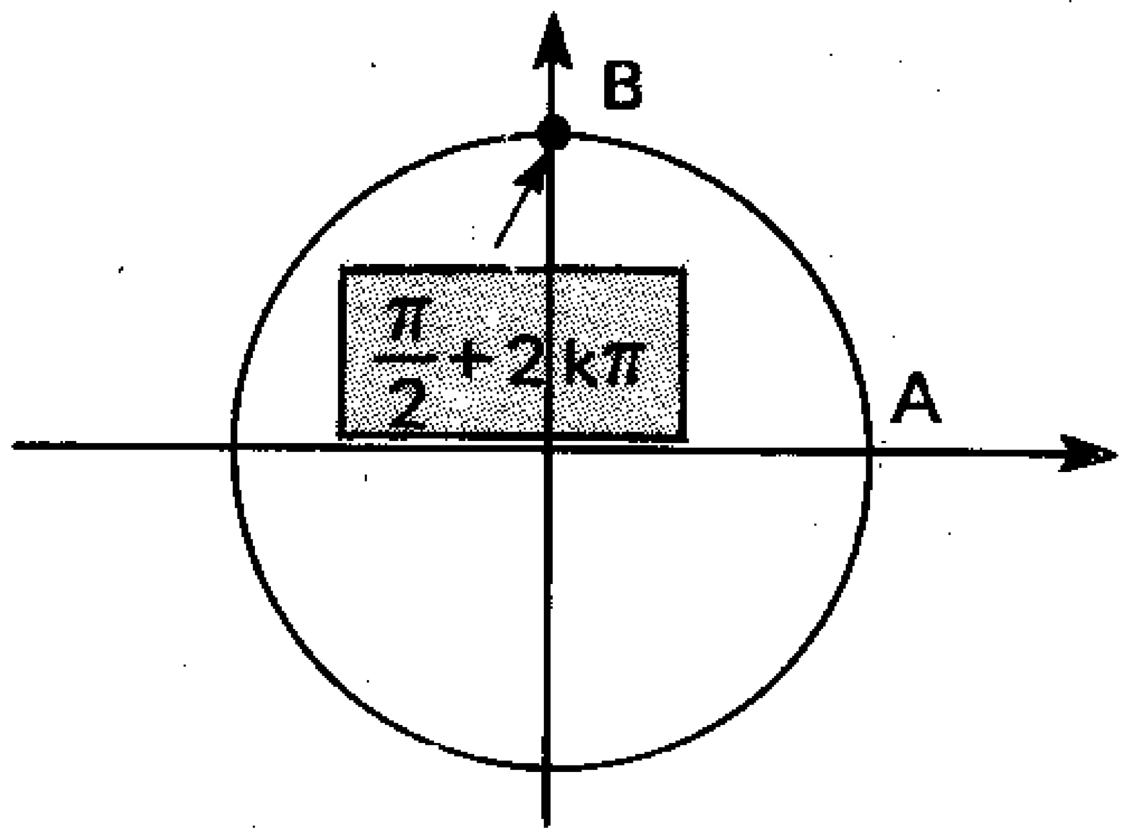
Sendo $z = \sqrt{3} + i$, temos: $|z| = \rho = 2$ e $\arg(z) = \theta = \frac{\pi}{6}$.

Portanto:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right) \text{ e}$$

$$z^n = (\sqrt{3} + i)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{n\pi}{6}\right)$$

Como $2^n > 0$, para que z^n seja imaginário puro de coeficiente positivo, devemos ter:



$$\cos\frac{n\pi}{6} = 0 \text{ e } \text{sen}\,\frac{n\pi}{6} > 0$$

isto é, o arco $\frac{n\pi}{6}$ deve ter extremidade no ponto **B** (figura ao lado).

Logo, $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

e daí, $n = 3 + 12k$, **k** inteiro.

Finalmente, o **menor natural n** que satisfaz a condição acima é n = 3.

Exercícios Propostos

5.5) Calcule:

a) $(-\sqrt{3} + i)^{15}$ b) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{60}$ c) $(-2 - 2i)^{-18}$ d) $(-1 - \sqrt{3}i)^{-10}$

5.6) Calcule $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^5 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^7$.

5.7) Deduza as fórmulas de cos (n θ) e sen (n θ) em função de cos θ e sen θ, utilizando a fôrmula de De Moivre e o binômio de Newton nos seguintes casos:

a) n = 3 b) n = 4

5.8) Sendo **n** um número natural, mostre que se $(1 + i)^n$ é imaginário puro, então **n** é um termo qualquer de uma progressão aritmética em que a razão é r = 4.

5.9) Determine o menor inteiro positivo **n** para que $(1 + i\sqrt{3})^n$ seja:

a) real positivo b) real negativo

5.10) Determine o menor natural **n** para que $(-\sqrt{3} + i)^n$ seja:

a) imaginário puro de coeficiente positivo
b) imaginário puro de coeficiente negativo

5.4 — RADICIAÇÃO

Definição — Dado um número complexo **z** e um número natural $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, chamamos raiz n-ésima de **z** a todo número complexo ω que satisfaz a relação $\omega^n = z$.

A raiz assume um nome especial para cada valor de **n**. Assim, se n = 4, dizemos *raiz quarta de* **z**; se n = 7, dizemos *raiz sétima de* **z**, etc.

No caso de n = 2, costuma-se dizer *raiz quadrada* e, para n = 3, *raiz cúbica.*

Conforme veremos, **todo número complexo não nulo admite n raízes n-ésimas.**

Por exemplo, o número 1 admite 4 raízes quartas (1; −1; i; −i), pois:

$$1^4 = 1;\ (-1)^4 = 1;\ i^4 = 1 \text{ e } (-i)^4 = 1$$

Vejamos como determinar as raízes de um número complexo.

Dado $z = \rho \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, seja:

$$\omega = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \text{ uma raiz n-ésima de } \mathbf{z}.$$

Então:

$$\omega^n = z$$

$$r^n(\cos n\alpha + i \operatorname{sen} n\alpha) = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

donde tiramos:

$$r^n = \rho, \ \cos n\alpha = \cos\theta \ \text{e} \ \text{sen}\, n\alpha = \text{sen}\,\theta$$

1.ª conclusão: $r^n = \rho \Rightarrow \boxed{r = \sqrt[n]{\rho}}$

ou seja, **o módulo da raiz n-ésima** de um complexo **z** é igual à raiz n-ésima do módulo de **z**.

Assim, se por exemplo **z** tem módulo 2, suas raízes quadradas têm módulo $\sqrt{2}$; suas raízes cúbicas têm módulo $\sqrt[3]{2}$; suas raízes quartas têm módulo $\sqrt[4]{2}$,. etc.

2.ª conclusão: – $\begin{cases} \cos n\alpha = \cos\theta \\ \text{sen}\, n\alpha = \text{sen}\,\theta \end{cases} \Rightarrow n\alpha = \theta + 2k\pi$

donde: $\boxed{\alpha = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}}$, $(k \in \mathbb{Z})$

Lembremos que α é argumento de ω e notemos que, se atribuirmos a **k** os valores:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$$

obteremos **n** valores **distintos e não côngruos** para α e, para qualquer outro valor de **k**, o valor resultante de α será côngruo de um dos já obtidos.

Por exemplo, se **z** tem argumento $\theta = \pi$, suas raízes quartas ($n = 4$) têm argumentos dados por:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}, \ k \in \mathbb{Z}$$

onde:

para $k = 0$, temos $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{4}$

para $k = 1$, temos $\alpha_2 = \dfrac{3\pi}{4}$

para $k = 2$, temos $\alpha_3 = \dfrac{5\pi}{4}$

para $k = n-1 = 3$, temos $\alpha_4 = \dfrac{7\pi}{4}$

e, caso continuemos, começaremos a encontrar côngruos:

$$\text{para } k = 4,\ \alpha = \frac{9\pi}{4} \ (\text{côngruo de } \alpha_1)$$

$$\text{para } k = 5,\ \alpha = \frac{11\pi}{4} \ (\text{côngruo de } \alpha_2)$$

Por tudo isso, concluímos que, com o valor de **r** já determinado e cada um dos **n** valores distintos e não congruentes de α, podemos formar **n** números complexos $\omega = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, todos eles raízes n-ésimas de **z**, dados por:

$$\omega = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (5.4)$$

Exemplo

Vamos calcular as raízes cúbicas de $z = 0 + 8i$.
Temos, na forma trigonométrica:

$$z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$

onde $\rho = 8$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Como $n = 3$, as raízes cúbicas de **z** são dadas por:

$$\omega = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

ou seja:

$$\omega = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Atribuindo a **k** os valores 0, 1 e $2 = n-1$, temos:

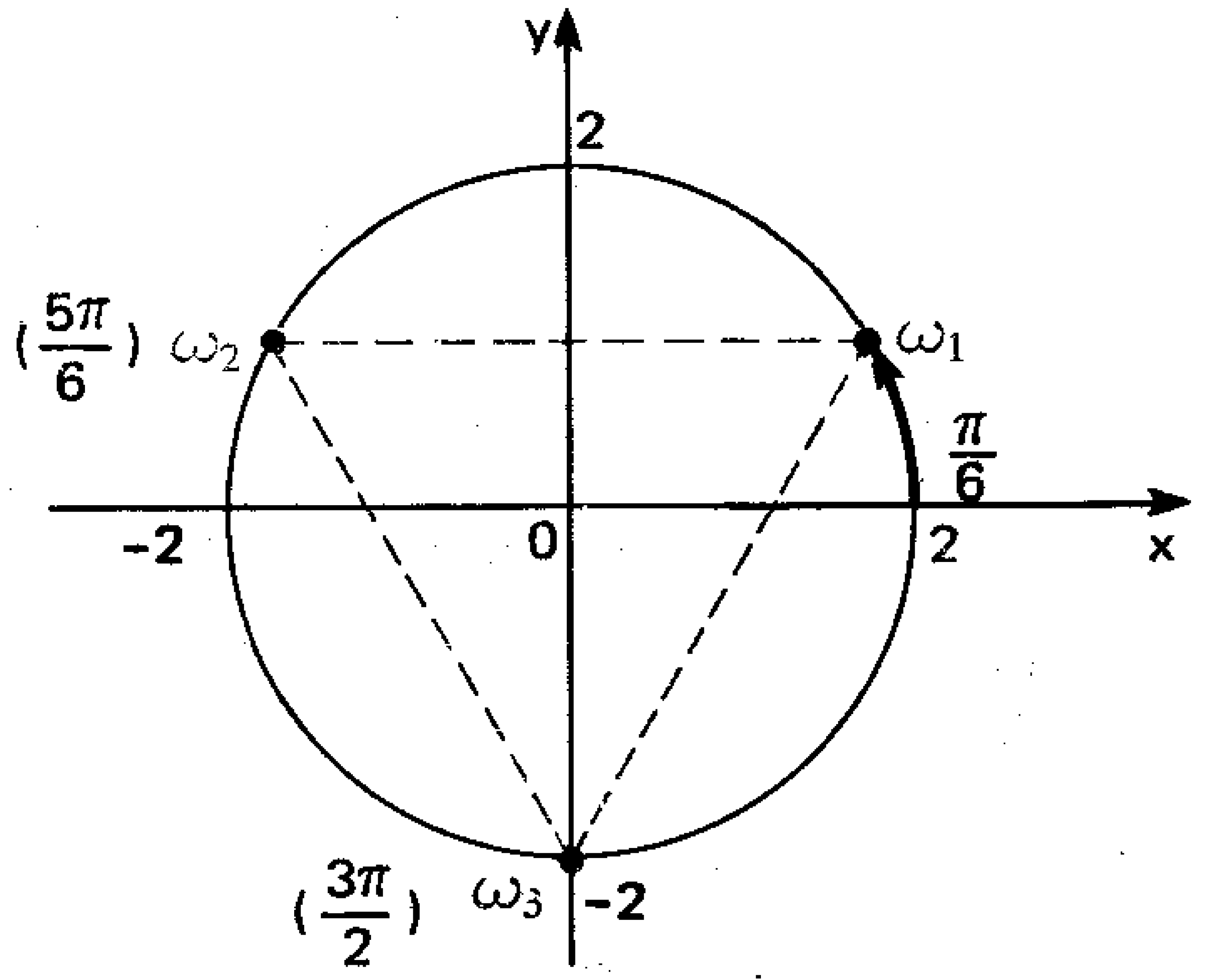
$$k = 0 \Rightarrow \omega_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1 \Rightarrow \omega_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2 \Rightarrow \omega_3 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

Assim, $\sqrt{3} + i$, $-\sqrt{3} + i$ e $-2i$ são as três raízes cúbicas de $8i$.

Interpretação geométrica – Observemos o exemplo dado: como as três raízes cúbicas têm o mesmo módulo $r = 2$, seus afixos estão sobre uma circunferência de centro na origem e raio 2; a expressão $\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$ nos diz que os argumentos α determinam, sobre esta circunferência, 3 pontos distintos e separados entre si de um arco de medida $\frac{2\pi}{3}$:



Vemos, então, que os afixos das raízes cúbicas de $z = 8i$ são vértices de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio 2.

Analisando, agora, a expressão das raízes n-ésimas de **z**:

$$\omega = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

percebemos que:

1.º) as **n** raízes n-ésimas de **z** têm o mesmo módulo $r = \sqrt[n]{\rho}$, estando, por isso, seus afixos sobre uma mesma circunferência com centro na origem e raio $r = \sqrt[n]{\rho}$;

2.º) da Trigonometria sabemos que arcos da forma $\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ representam **n** pontos distintos no ciclo, distribuídos de modo a dividir a circunferência em **n** partes iguais.

Portanto, os afixos das raízes n-ésimas de **z** são:

— se $n = 2$, extremidades de um diâmetro da circunferência de centro $(0; 0)$ e raio $\sqrt[n]{\rho}$;

— se $n \geqslant 3$, vértices de um polígono regular de **n** lados, inscrito na circunferência de centro $(0; 0)$ e raio $\sqrt[n]{\rho}$.

5.11) Sendo $\omega_0 = 1 + i$ uma das raízes quartas de um complexo **z**, determine as demais.

Solução

Vamos resolver o problema de dois modos.

1.º modo – Temos que $|\omega_0| = r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e $\arg(\omega_0) = \alpha = \frac{\pi}{4}$

As raízes quartas de **z** são dadas por:

$$\omega = \sqrt[4]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right],\ k \in \mathbb{Z}$$

Como ω_0 é uma dessas raízes, devemos ter:

$$\sqrt[4]{\rho} = |\omega_0| = \sqrt{2}$$

e

$$\frac{\theta}{4} + \frac{k\pi}{2} = \alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\theta}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{k\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pi - 2k\pi$$

Como θ representa o argumento principal de **z**, tomemos $\theta = \pi$. Portanto, as raízes quartas de **z** são dadas por:

$$\omega = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)\right]$$

e daí:

$$\text{para } k = 0,\ \omega_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

$$\text{para } k = 1,\ \omega_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i$$

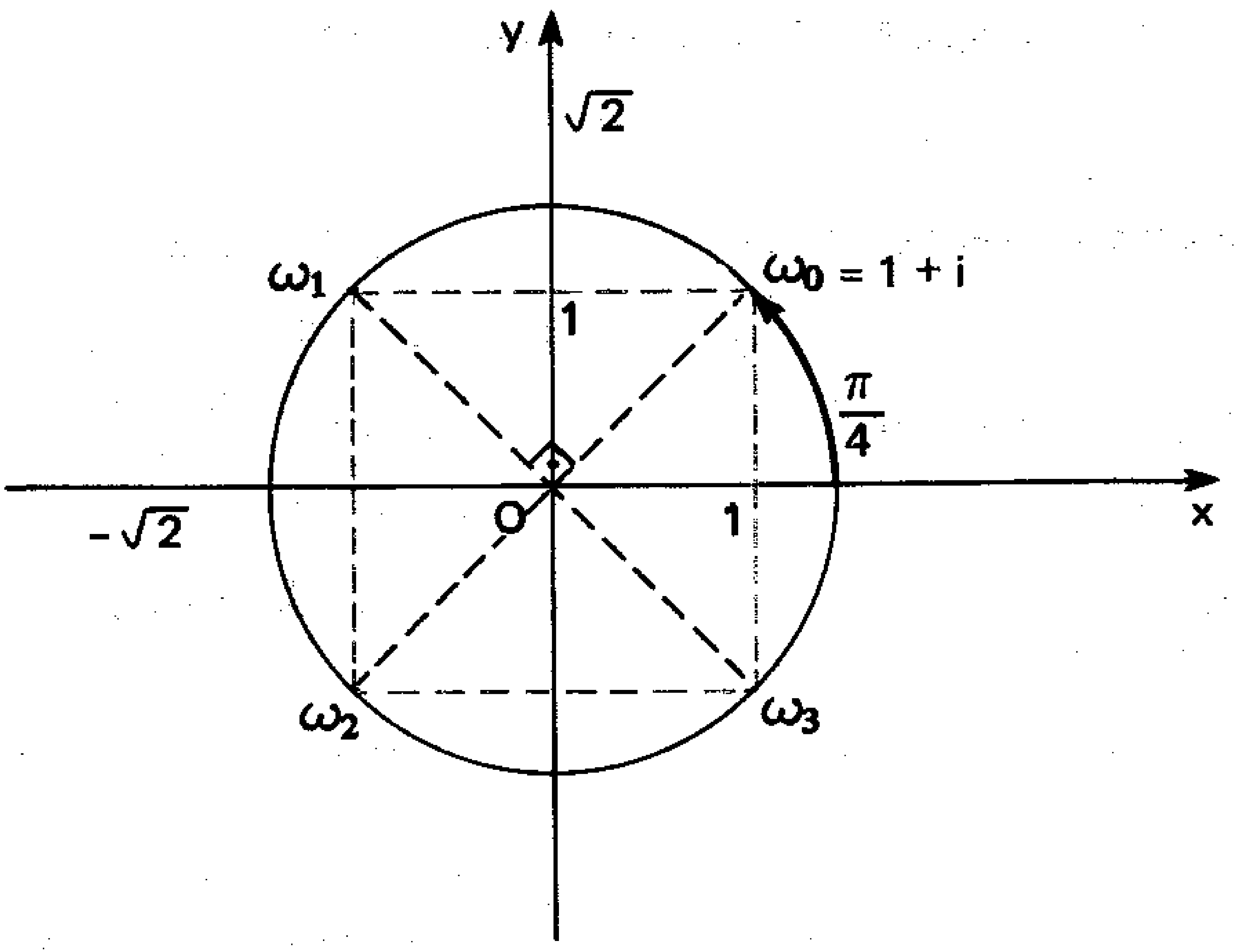
$$\text{para } k = 2,\ \omega_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i$$

$$\text{para } k = 3,\ \omega_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i$$

Assim, as demais raízes de **z** são:

$$-1 + i,\quad -1 - i,\quad 1 - i$$

2.º modo – Sabemos que as 4 raízes quartas de **z** têm seus afixos como vértices de um quadrado inscrito na circunferência de raio $r = |\omega_0| = \sqrt{2}$. Como ω_0 é um desses vértices, temos:



Então:

ω_1 é simétrico de ω_0 em relação a Oy; logo, $\omega_1 = -1 + i$.

ω_2 é conjugado de ω_1; logo, $\omega_2 = -1 - i$.

ω_3 é conjugado de ω_0; logo, $\omega_3 = 1 - i$.

5.12) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação binômia $x^3 + 8 = 0$.

Solução

Temos: $x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8$

Portanto, os valores de **x** que satisfazem a equação dada são as raízes cúbicas de $z = -8$. Na forma trigonométrica, temos:

$$z = -8 = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$$

Como $n = 3$, $\rho = 8$ e $\theta = \pi$, os valores de **x** são dados por:

$$x = \sqrt[3]{8}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right], k \in \mathbb{Z}$$

Então:

para $k = 0$, $x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

para $k = 1$, $x_2 = 2(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -2$

para $k = 2$, $x_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$

Logo, o conjunto-solução de $x^3 + 8 = 0$ é:

$$S = \{-2;\ 1 + i\sqrt{3};\ 1 - i\sqrt{3}\}$$

5.13) Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação trinômia $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$.

Solução

Fazendo a mudança de variável $x^4 = y$, a equação dada se escreve:

$$y^2 - 15y - 16 = 0$$

Como suas raízes são $y = -1$ ou $y = 16$, vem:

$$x^4 = -1 \quad \text{ou} \quad x^4 = 16$$

Portanto, os valores de **x** que satisfazem a equação dada são as raízes quartas de -1 reunidas às raízes quartas de 16.

— As raízes quartas de $-1 = 1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$ são dadas por:

$$x = \sqrt[4]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{4}\right)\right], k \in \mathbb{Z}$$

— As raízes quartas de $16 = 16(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ são dadas por:

$$x = \sqrt[4]{16}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi}{4}\right)\right], \; k \in \mathbb{Z}$$

Atribuindo a **k** os valores 0, 1, 2 e 3, obtemos, dessas duas últimas expressões, o conjunto-solução da equação proposta:

$$S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i; 2; 2i; -2; -2i\right\}$$

5.14) A *fórmula de Baskara* para determinação das raízes da equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, no caso em que os coeficientes **a**, **b** e **c** são **números complexos**, pode ser escrita:

$$x_{1,2} = \frac{-b + r_q}{2a}$$

onde o símbolo r_q representa as raízes quadradas do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Utilizando esta fórmula, resolva a equação $x^2 - (1 + i)x - \frac{1}{4}(3 + 2i) = 0$.

Solução

Tendo $a = 1$, $b = -(1 + i)$ e $c = -\frac{1}{4}(3 + 2i)$, calculamos o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = [-(1 + i)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left[-\frac{1}{4}(3 + 2i)\right]$$

$$\Delta = 3 + 4i$$

Vamos, agora, calcular r_q, isto é, as raízes quadradas de $\Delta = 3 + 4i$.

É claro que, para isso, poderíamos utilizar a expressão (5.4) para n = 2:

$$\omega = r_q = \sqrt{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)\right]$$

onde ρ e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento de $\Delta = 3 + 4i$.

No entanto, como se trata do caso simples de determinação das **raízes quadradas**, parece-nos conveniente utilizar a **definição** de raiz: determinar $r_q = \alpha + \beta i$ (α e β reais) tal que:

$$r_q^2 = \Delta$$

Temos, então:

$$(\alpha + \beta i)^2 = 3 + 4i$$

$$(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha\beta i = 3 + 4i$$

donde:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ 2\alpha\beta = 4 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema (lembrando que α e β são reais), obtemos:

$$(\alpha = 2 \text{ e } \beta = 1) \text{ ou } (\alpha = -2 \text{ e } \beta = -1)$$

Portanto, as raízes quadradas $r_q = \alpha + \beta i$ são:

$$r_{q_1} = 2 + i;\ r_{q_2} = -2 - i$$

Finalmente, com a fórmula fornecida, obtemos:

$$x_1 = \frac{-b + r_{q1}}{2} = \frac{(1 + i) + (2 + i)}{2} = \frac{3}{2} + i$$

$$x_2 = \frac{-b + r_{q2}}{2} = \frac{(1 + i) + (-2 - i)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Assim, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \left\{\frac{3}{2} + i;\ -\frac{1}{2}\right\}$$

Exercícios Propostos

5.15) Determine:

a) as raízes quadradas de $4 + 4i\sqrt{3}$
b) as raízes cúbicas de $-27i$
c) as raízes quartas de -16

5.16) Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

a) $x^3 + 8i = 0$ b) $x^6 - 1 = 0$

5.17) Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

a) $x^6 - 19x^3 - 216 = 0$
b) $x^2 - 2ix - \frac{9}{4} - 3i = 0$ (Utilize a fórmula fornecida no exercício 5.14.)

5.18) Uma das raízes cúbicas de um número complexo **z** é 8. Determine as outras raízes cúbicas de **z**.

5.19) O número $\omega = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$ é uma das raízes quartas de um número complexo **z**. Determine as demais raízes quartas de **z**.

5.20) Uma das raízes sextas de **z** tem módulo 2 e argumento $\frac{5\pi}{6}$. Represente graficamente as seis raízes sextas de **z**.

Exercícios Suplementares

I.1) Determine a soma dos reais **x** e **y** para os quais $x^2 + y^2 + 5i = 13 + xyi$.

I.2) Sendo $z = (\text{tg}\,\alpha + i)(\text{cotg}\,\alpha + i)$, determine $R_e(z)$ e $I_m(z)$.

I.3) Determine o número complexo **z** tal que $z^2 = i\bar{z}$.

I.4) Sejam **a**, **b**, **c** e **d** reais não nulos. Mostre que a equação $x^2 + (a + bi)x + c + di = 0$ não admite um número real e um imaginário puro simultaneamente como raízes.

I.5) Prove, utilizando o Princípio da Indução Matemática, que:

$$i^{5^n} = i, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

I.6) Sendo **z** e ω números complexos tais que $z^2 - \omega^2 = 6$ e $\bar{z} + \bar{\omega} = 1 - i$, determine $z - \omega$.

I.7) Os números complexos distintos $b + ai$ e $a + bi$, com $a \cdot b \neq 0$, têm por afixos os pontos **A** e **B**, respectivamente. Determine o complexo cujo afixo é a extremidade do vetor que se obtém fazendo o vetor $\overrightarrow{AB}$ girar de 270° em torno de **A**, no sentido trigonométrico positivo.

I.8) Represente graficamente os números complexos **z** tais que:

$$\begin{cases} 1 \leqslant |z| \leqslant 2 \\ \frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z) \leqslant \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

I.9) Sendo $\omega = 1 - 2i$, represente graficamente os números complexos **z** tais que o produto ωz seja:

a) real
b) real positivo
c) imaginário puro
d) imaginário puro de coeficiente negativo

I.10) a) Determine o complexo **z** tal que $iz + 2\bar{z} + 3 + 3i = 0$.
b) Determine o módulo e o argumento de **z**.
c) Determine a potência de expoente 16 desse complexo.
d) Represente graficamente as raízes oitavas do complexo $17 + z - i$.

PARTE II

Capítulo 6 — **O conceito de polinômio. Igualdade**

Capítulo 7 — **Operações com os polinômios. Grau**

Capítulo 8 — **A divisão de polinômios**

Capítulo 9 — **A divisão de polinômios em que o divisor é de grau 1**

Capítulo 10 — **Outros temas importantes**

Capítulo 6

O conceito de polinômio Igualdade

6.1 — O CONCEITO

Um **polinômio na variável ou indeterminada** x é uma expressão da forma:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

onde os **coeficientes** $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números complexos; às parcelas $a_0, a_1x, a_2x^2, \ldots, a_nx^n$, chamamos **termos** do polinômio p(x); e a_0 é o seu **termo independente**.

Exemplos

1.º) Seja $p(x) = 4 + \sqrt{2}x + ix^2$; temos $a_0 = 4$, $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = i$.
2.º) No polinômio $f(x) = 3x + 5x^3$, temos $a_0 = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 5$.

6.2 — VALOR NUMÉRICO DE UM POLINÔMIO

Sejam o polinômio:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

e o número complexo α.

Chama-se **valor numérico do polinômio p(x) em** α ao número $p(\alpha)$ que se obtém substituindo-se, em p(x), x por α, e efetuando-se as operações indicadas, isto é:

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n$$

Em particular, se para o número complexo α tem-se $p(\alpha) = 0$, diz-se que α é uma **raiz** ou um **zero** do polinômio p(x).

Exemplos

Seja $g(x) = 2 - 3x + x^2$; temos:

$$g(1) = 2 - 3 \cdot (1) + (1)^2 = 0$$
$$g(0) = 2 - 3 \cdot (0) + (0)^2 = 2$$
$$g(-1) = 2 - 3 \cdot (-1) + (-1)^2 = 6$$

Observe que o número 1 é uma raiz de $g(x)$, pois $g(1) = 0$.

6.3 — DEFINIÇÃO — POLINÔMIO NULO

Denominamos **nulo** (ou **identicamente nulo**) a um polinômio $p(x)$ quando seu valor numérico é *zero* em todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$, e indicamos:

$$p(x) = 0 \text{ ou } p(x) \equiv 0$$

Podemos, então, escrever:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow p(\alpha) = 0, \text{ para todo } \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$$

6.4 — QUANDO UM POLINÔMIO É NULO — TEOREMA

O polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ é **nulo** se e somente se todos os seus coeficientes forem iguais a zero:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow (a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0)$$

Demonstração

1.ª parte

Hipótese: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Tese: $p(x) = 0$

Por hipótese, temos:

$$p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n$$

E, para todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$p(\alpha) = 0 + 0\alpha + 0\alpha^2 + \ldots + 0\alpha^n = 0$$

o que demonstra a 1.ª parte.

2.ª parte

Hipótese: $p(x) = 0$

Tese: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$

Se $p(x)$ é **nulo** o seu valor numérico é **zero** em todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Sejam, então, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $n + 1$ números complexos, distintos dois a dois; temos:

$$\begin{array}{l} p(\alpha_0) = a_0 + a_1\alpha_0 + a_2\alpha_0^2 + \ldots + a_n\alpha_0^n = 0 \\ p(\alpha_1) = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \ldots + a_n\alpha_1^n = 0 \\ p(\alpha_2) = a_0 + a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots + a_n\alpha_2^n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p(\alpha_n) = a_0 + a_1\alpha_n + a_2\alpha_n^2 + \ldots + a_n\alpha_n^n = 0 \end{array}$$

As equações acima constituem um **sistema linear homogêneo**, formado por $n + 1$ *equações* e $n + 1$ *incógnitas*: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. A matriz incompleta do sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^n \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^n \end{bmatrix}$$

Note que A é uma matriz de **Vandermonde** e $\det A \neq 0$, pois os elementos de base da matriz são dois a dois distintos. (Veja volume 4 desta coleção, p. 121.) Daí podemos concluir que a única solução do sistema é a **trivial**:

$$a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$$

o que demonstra a 2.ª parte. (Veja volume 4 desta coleção, p. 176.)

6.5 — DEFINIÇÃO — POLINÔMIOS IGUAIS

Os polinômios $p(x)$ e $q(x)$ dizem-se **iguais** (ou **idênticos**) quando assumem o mesmo valor numérico em qualquer α, $\alpha \in \mathbb{C}$. Indica-se:

$$p(x) = q(x) \text{ ou } p(x) \equiv q(x)$$

Podemos, então, escrever:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = q(\alpha), \text{ para todo } \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$$

6.6 — QUANDO POLINÔMIOS SÃO IGUAIS — TEOREMA

Os polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

são **iguais** se e somente se os seus coeficientes forem *ordenadamente iguais*:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow (a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n)$$

Demonstração

1.ª parte

Hipótese: $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$

Tese: $p(x) = q(x)$

Para todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$, temos:

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n \underset{(H)}{=} b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \dots + b_n\alpha^n = q(\alpha)$$

2.ª parte

Hipótese: $p(x) = q(x)$

Tese: $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$

Se $p(x) = q(x)$, por hipótese, a definição 6.5 permite-nos escrever para todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$p(\alpha) = q(\alpha)$$

Então:

$$a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \dots + b_n\alpha^n$$

e daí:

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)\alpha + (a_2 - b_2)\alpha^2 + \dots + (a_n - b_n)\alpha^n = 0,\ \forall\alpha$$

A igualdade acima, **válida para todo** α, garante-nos que o polinômio:

$$h(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots + (a_n - b_n)x^n$$

é **nulo**. (Veja definição 6.3.)

Então, pelo teorema 6.4, temos:

$$a_0 - b_0 = 0,\ a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0, \dots, a_n - b_n = 0$$

e daí a tese:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

Exercícios Resolvidos

6.1) Seja o polinômio $f(x) = 1 + x + x^3$; determine: $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$, $f[f(3)]$, $f(x-1)$ e $f(3x)$.

Solução

$f(-2) = 1 + (-2) + (-2)^3 = -9$
$f(0) = 1 + 0 + 0^3 = 1$
$f(1) = 1 + 1 + 1^3 = 3$
$f(3) = 1 + 3 + 3^3 = 31$, e daí $f[f(3)] = f(31) = 1 + 31 + 31^3 = 29\,823$
$f(x-1) = 1 + (x-1) + (x-1)^3 = -1 + 4x - 3x^2 + x^3$
$f(3x) = 1 + (3x) + (3x)^3 = 1 + 3x + 27x^3$

6.2) Consideremos o polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$. O que representam P(1) e P(0) em relação aos coeficientes?

Solução

Temos:

$$P(1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1^2 + \ldots + a_n \cdot 1^n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Então, P(1) é a *soma dos coeficientes* de P(x).

$$P(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \ldots + a_n \cdot 0^n = a_0$$

Então, P(0) é o *termo independente* de P(x).

6.3) Dado o polinômio na variável **x**: $P(x) = pq + qx + px^2 + x^3$, determine **p** e **q** para que se tenha $P(1) = 2 \cdot P(-1) = 12$.

Solução

$$P(1) = 12 \Rightarrow pq + q \cdot (1) + p \cdot (1)^2 + (1)^3 = 12 \Rightarrow pq + q + p + 1 = 12 \quad \text{(I)}$$
$$2 \cdot P(-1) = 12 \Rightarrow P(-1) = 6 \Rightarrow pq + q(-1) + p(-1)^2 + (-1)^3 = 6 \Rightarrow pq - q + p - 1 = 6 \quad \text{(II)}$$

Subtraindo membro a membro, (I)-(II), obtemos:

$$2q + 2 = 6$$

Logo: $q = 2$

Substituindo em (II): $2p - 2 + p - 1 = 6$, obtemos $p = 3$.

6.4) O polinômio na indeterminada **x**, $f(x) = -(2c-3) + (b+2)x + (a-1)x^3$, é **identicamente nulo**. Determine **a**, **b** e **c**.

Solução

Os coeficientes de f(x) devem ser nulos; então:

$$\begin{cases} -(2c-3) = 0 \\ b + 2 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases}$$

Daí, temos: $a = 1$, $b = -2$ e $c = \dfrac{3}{2}$

Observe que o termo em x^2 foi omitido, pois o seu *coeficiente é igual a zero.*

6.5) Sejam os polinômios:

$$A(x) = 3 - bx + 2x^2 + (a - 1)x^3$$
$$B(x) = 3 + cx + bx^2$$

Determine **a**, **b** e **c** para que se tenha $A(x) \equiv B(x)$.

Solução

Os coeficientes de A(x) e de B(x) devem ser dois a dois iguais:

$$\begin{cases} -b = c \\ 2 = b \\ 0 = a - 1 \end{cases}$$

Então, temos: $a = 1$, $b = 2$ e $c = -2$.

Exercícios Propostos

6.6) Dado o polinômio $f(x) = 10 - 8x + 6x^2 - 4x^3 + x^5$, calcule f(2).

6.7) Dado o polinômio $f(x) = -1 + 5ix - 4x^2 - 3ix^3 + x^4$, calcule $f(1 + 2i)$.

6.8) Verifique se o número 2 é uma raiz do polinômio: $p(x) = -8 + 4x - 2x^2 + 7x^3 - 5x^4 + x^5$.

6.9) O polinômio na variável **x**:

$$f(x) = (a + 2b - c - 3) + (2a - b + 3c + 4)x^2 + (3a - 2b + 3c + 1)x^3$$

é identicamente nulo. Determine **a**, **b** e **c**.

6.10) Determine α e β, sabendo-se que $\alpha + \beta x + x^2 = \beta - (\beta + 1)x + x^2$.

6.11) Quais são os coeficientes a_i no polinômio $-1 + x^{100}$?

6.12) Seja o polinômio $f(x) = b + ax + x^3$. Determine **a** e **b**, sabendo que 1 e -1 são raízes de f(x).

6.13) Seja o polinômio $f(x) = \frac{b}{2}x^2 + \frac{a}{3}x^3$, onde **a** e **b** são números reais e $a \neq 0$. Se x_1 e x_2 são números reais distintos, tais que $f(x_1) + f(x_2) = 2 \cdot f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$, demonstre que $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$.

Capítulo 7

Operações com os polinômios Grau

7.1 — ADIÇÃO DE POLINÔMIOS

Definição

Sejam os polinômios na variável **x**:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Denomina-se **soma** de p(x) e q(x) ao polinômio:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

Exemplo

Sejam os polinômios:

$$p(x) = 2 + x - x^2$$
$$q(x) = 3 + x^2 + 2x^3$$

Temos:

$$p(x) = 2 + x - x^2 + 0x^3$$
$$q(x) = 3 + 0x + x^2 + 2x^3$$

Então:

$$p(x) + q(x) = (2 + 3) + (1 + 0)x + (-1 + 1)x^2 + (0 + 2)x^3$$
$$p(x) + q(x) = 5 + x + 2x^3$$

Propriedades da adição de polinômios

No conjunto dos polinômios com uma indeterminada **x**, de coeficientes complexos, valem as propriedades:

1.ª) A adição de polinômios é **comutativa**.

Para os polinômios p(x) e q(x) temos:

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

Demonstração

Sejam os polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$$

Observe que $p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i$ e $q(x) + p(x) = \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i)x^i$.

Então:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n} (b_i + a_i)x^i = q(x) + p(x)$$

2.ª) A adição de polinômios é **associativa**.

Para os polinômios p(x), q(x) e h(x) temos:

$$[p(x) + q(x)] + h(x) = p(x) + [q(x) + h(x)]$$

Demonstração

Sejam os polinômios: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_ix^i$ e $h(x) = \sum_{i=0}^{n} c_ix^i$.

$$[p(x) + q(x)] + h(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i + \sum_{i=0}^{n} c_ix^i = \sum_{i=0}^{n} [(a_i + b_i) + c_i]x^i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} [a_i + (b_i + c_i)]x^i = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i + \sum_{i=0}^{n} (b_i + c_i)x^i =$$

$$= p(x) + [q(x) + h(x)]$$

3.ª) **Existe o elemento neutro.**

Dado o polinômio p(x), existe um polinômio e(x) tal que:

$$p(x) + e(x) = p(x)$$

De fato, sejam $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ e $e(x) = \sum_{i=0}^{n} e_ix^i$; então, da igualdade $p(x) + e(x) = p(x)$, obtemos, para todo **i**, $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$a_i + e_i = a_i$$

isto é, $e_i = 0$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Concluímos que *o elemento neutro na adição de polinômios é o polinômio nulo.*

4.ª) **Existe o polinômio oposto.**

Dado o polinômio p(x), existe um polinômio $\bar{p}(x)$ tal que:

$$p(x) + \bar{p}(x) = e(x)$$

De fato, sejam $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ e $\bar{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i x^i$; então, da igualdade $p(x) + \bar{p}(x) = e(x)$, obtemos, para todo **i**, $0 \leqslant i \leqslant n$:

$$a_i + \bar{a}_i = 0$$

isto é, $\bar{a}_i = -a_i$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Então, dado o polinômio:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

o **polinômio oposto** de p(x) é:

$$\bar{p}(x) = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \ldots + (-a_n)x^n$$

O polinômio oposto de p(x) indica-se com:

$$-p(x)$$

Note que $-(-p(x)) = p(x)$.

Exemplo

Seja $p(x) = 3 + 4x^2 - 3x^3$; então, $-p(x) = -3 - 4x^2 + 3x^3$.

Definição

Sejam os polinômios p(x) e q(x). A **diferença** $p(x) - q(x)$ define-se por:

$$p(x) - q(x) = p(x) + (-q(x))$$

Observe que se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$, então:

$$p(x) - q(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots + (a_n - b_n)x^n$$

7.2 — MULTIPLICAÇÃO DE POLINÔMIOS

Definição

Nos cursos elementares de Álgebra, o processo para se multiplicar dois polinômios é constituído essencialmente por duas etapas.

Inicialmente, todos os pares de **termos**, um em cada polinômio, são multiplicados, utilizando-se a regra:

$$(ax^m) \cdot (bx^n) = (ab)x^{m+n}$$

Em seguida, os coeficientes de iguais potências de **x** são somados:

$$ax^p + bx^p = (a + b)x^p$$

Por exemplo, para multiplicarmos os polinômios:

$$p(x) = 2 + x - 2x^2 + x^3$$

e

$$q(x) = 3 - 2x + x^2$$

usamos o processo familiar:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & 2 + & x - & 2x^2 + & x^3 & & \\
 & 3 - & 2x + & x^2 & & & \\
\hline
3 \cdot p(x) \longrightarrow & 6 + & 3x - & 6x^2 + & 3x^3 & & \\
(-2x) \cdot p(x) \longrightarrow & & -4x - & 2x^2 + & 4x^3 - & 2x^4 & \quad \oplus \\
(x^2) \cdot p(x) \longrightarrow & & & 2x^2 + & x^3 - & 2x^4 + & x^5 \\
\hline
 & 6 - & x - & 6x^2 + & 8x^3 - & 4x^4 + & x^5
\end{array}$$

ou usamos o seguinte processo:

$$(2 + x - 2x^2 + x^3) \cdot (3 - 2x + x^2) =$$

$$= 2 \cdot (3 - 2x + x^2) + x(3 - 2x + x^2) - 2x^2 \cdot (3 - 2x + x^2) + x^3(3 - 2x + x^2) =$$

$$= 6 - 4x + 2x^2 + 3x - 2x^2 + x^3 - 6x^2 + 4x^3 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^4 + x^5 =$$

$$= 6 - x - 6x^2 + 8x^3 - 4x^4 + x^5$$

Não é conveniente definirmos a multiplicação de polinômios usando a descrição dos processos acima. Daremos uma definição em termos gerais; mas, na prática, utilizaremos um dos métodos anteriores.

Sejam os polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n$$

na variável **x** com coeficientes em $\mathbb{C}$.

O produto de p(x) e q(x) é o polinômio:

$$p(x) \cdot q(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + (a_mb_n)x^{m+n}.$$

O coeficiente de x^i no produto $p(x) \cdot q(x)$ é o número:

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \dots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0 = \sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j}$$

quando $a_j = 0$, se $j > m$, e $b_k = 0$, se $k > n$.

Propriedades da multiplicação de polinômios

No conjunto dos polinômios com uma indeterminada **x**, de coeficientes complexos, valem as propriedades:

1.ª) A multiplicação de polinômios é **comutativa**.

Para os polinômios p(x) e q(x) temos:

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$$

Demonstração

Sejam os polinômios:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

O coeficiente de x^i no produto $p(x) \cdot q(x)$ é:

$$a_0b_i + a_1b_{i-1} + \dots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$$

e o coeficiente de x^i no produto $q(x) \cdot p(x)$ é:

$$b_0a_i + b_1a_{i-1} + \dots + b_{i-1}a_1 + b_ia_0$$

Mas, em $\mathbb{C}$, a adição e a multiplicação são comutativas; daí podemos concluir que os coeficientes calculados são iguais para todo **i**. Então, $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$.

2.ª) A multiplicação de polinômios é **associativa**.
Para os polinômios p(x), q(x) e h(x) temos:

$$[p(x) \cdot q(x)] \cdot h(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot h(x)]$$

Demonstração

Veja o exercício 7.25.

3.ª) **Existe o elemento neutro**

Dado o polinômio p(x), existe um polinômio e(x) tal que:

$$p(x) \cdot e(x) = p(x)$$

Tomemos $e(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \dots + e_nx^n$, no qual $a_0 = 1$ e $e_i = 0$ para $i \geqslant 1$. Verifica-se imediatamente que:

$$p(x) \cdot e(x) = p(x)$$

para todo polinômio p(x).

4.ª) **Distributividade.**

Para os polinômios p(x), q(x) e h(x) temos:

$$[p(x) + q(x)] \cdot h(x) = p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x)$$

Demonstração

Veja o exercício 7.26.

7.3 — GRAU DE UM POLINÔMIO

Seja $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$. Suponha que p(x) não é um polinômio nulo.

O **grau** de p(x) é o maior inteiro não negativo **n**, tal que $a_n \neq 0$.

O coeficiente $\mathbf{a_n}$ é chamado **coeficiente dominante** de p(x).

Exemplos

O grau do polinômio $3 + 0x$ é zero.

O grau do polinômio $2 + (-3x)$ é 1.

O grau do polinômio $3 + 2x - 4x^3$ é 3.

Os polinômios de grau zero são polinômios constantes, não nulos; os polinômios de grau 1 são os polinômios da forma $a + bx$, com $b \neq 0$; os polinômios de grau 2 são os polinômios da forma $a + bx + cx^2$, com $c \neq 0$, etc. **Não se define grau para o polinômio nulo.**

É comum indicarmos o grau de um polinômio não nulo p(x) por:

$$\text{gr}\,[p(x)] \text{ ou } \partial p(x)$$

Por exemplo:

$$\text{gr}\,[3 + 2x - 4x^3 + 0x^4] = 3$$
$$\text{gr}\,[x^{10}] = 10$$
$$\text{gr}\left[\frac{1}{5}\right] = 0$$

Se o polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ e se $\text{gr}\,[p(x)] = n$, então é óbvio que podemos escrever:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

onde $a_n \neq 0$.

Por outro lado, se $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, com $a_n \neq 0$, então $\text{gr}\,[p(x)] = n$.

Teorema

Sejam p(x) e q(x) polinômios na variável **x**, não nulos, com coeficientes em $\mathbb{C}$; então:

a) $\text{gr}\,[p(x) \cdot q(x)] = \text{gr}\,[p(x)] + \text{gr}\,[q(x)]$
b) se $p(x) + q(x) \neq 0$, então $\text{gr}\,[p(x) + q(x)] \leq \text{máx.}\,\{\text{gr}\,[p(x)];\ \text{gr}\,[q(x)]\}$
c) se $\text{gr}\,[p(x)] \neq \text{gr}\,[q(x)]$, então $\text{gr}\,[p(x) + q(x)] = \text{máx.}\,\{\text{gr}\,[p(x)];\ \text{gr}\,[q(x)]\}$

Demonstração

Sejam os polinômios:

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$
$$q(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_0$$

onde $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, isto é:

$$\text{gr}\,[p(x)] = n \text{ e } \text{gr}\,[q(x)] = m$$

Assim:

$$p(x) \cdot q(x) = (a_nb_m)x^{n+m} + (a_{n-1}b_m + a_nb_{m-1})x^{n+m-1} + \ldots + a_0b_0$$

Em $\mathbb{C}$, se $a_n \neq 0$ e $b_m \neq 0$, então $a_n \cdot b_m \neq 0$; daí:

$$gr\,[p(x) \cdot q(x)] = n + m = gr\,[p(x)] + gr\,[q(x)]$$

Para provarmos *b* e *c*, suponhamos inicialmente que $n > m$; podemos escrever:

$$q(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \dots + b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

Daí:

$$p(x) + q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + (a_m + b_m)x^m + \\ + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \dots + (a_0 + b_0)$$

Então: $gr\,[p(x) + q(x)] = n = \text{máx.}\{gr\,[p(x)];\ gr\,[q(x)]\}$.
De forma análoga, se $n < m$, concluímos que:

$$gr\,[p(x) + q(x)] = m = \text{máx.}\{gr\,[p(x)];\ gr\,[q(x)]\}$$

Observe que fica provado *c*.
Para completarmos a demonstração de *b*, devemos examinar o caso $n = m$; assim:

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$$

Se $p(x) + q(x) \neq 0$, então $a_k + b_k \neq 0$ para algum **k**, $0 \geqslant k \geqslant n$.
Portanto, fica claro que:

$$gr[p(x) + q(x)] \leqslant n = \text{máx.}\{gr\,[p(x)];\ gr\,[q(x)]\}$$

Exemplos

Sejam os polinômios:

$$p(x) = 2x^3 + x + 2$$
$$q(x) = x^2 + 2x + 2$$

$\partial\,[p(x)] = 3$, $\partial\,[q(x)] = 2$; $\partial\,[p(x) + q(x)] = 3 = \text{máx.}\ \{\partial\,[p(x)];\ \partial\,[q(x)]\}$
$\partial\,[p(x) \cdot q(x)] = 3 + 2 = 5$

Exercícios Resolvidos

7.1) Determine os números reais **A**, **B** e **C** para que se tenha: $2x^2 - x + 1 \equiv A(x-1)^2 + B(x-1) + C$.

Solução

Temos, sucessivamente:

$$2x^2 - x + 1 \equiv A(x-1)(x-1) + B(x-1) + C$$
$$2x^2 - x + 1 \equiv A(x^2 - 2x + 1) + B(x-1) + C$$
$$2x^2 - x + 1 \equiv Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C$$
$$2x^2 - x + 1 \equiv Ax^2 + (B - 2A)x + A - B + C$$

Os coeficientes de **polinômios iguais** (ou **idênticos**) são ordenadamente iguais:

$$\begin{cases} A = 2 \\ B - 2A = -1 \\ A - B + C = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos: $A = 2$, $B = 3$ e $C = 2$.

7.2) No conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais, resolva o problema: "determinar **a** e **b** para que o polinômio $f(x) = x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1$ seja um **quadrado perfeito**".

Solução

Se f(x) é **quadrado perfeito**, existe um polinômio g(x) tal que:

$$f(x) \equiv [g(x)]^2$$

Observe que se f(x) tem grau 4, então g(x) é um polinômio de grau 2; isto é, g(x) é da *forma*:

$$g(x) = px^2 + qx + r$$

Então:

$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1 \equiv (px^2 + qx + r)^2$$
$$x^4 - 6x^3 + ax^2 + bx + 1 \equiv p^2x^4 + 2pqx^3 + (q^2 + 2pr)x^2 + 2qrx + r^2$$

Daí:

$$\begin{cases} p^2 = 1 \\ 2pq = -6 \\ a = q^2 + 2pr \\ b = 2qr \\ r^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos: $a = 11$, $b = -6$ ou $a = 7$, $b = 6$.

7.3) Determine um polinômio f(x), do segundo grau, para o qual tem-se:

$$\begin{cases} f(x) - f(x - 1) \equiv x \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Em seguida, deduza que a soma dos **n** primeiros inteiros positivos é igual a $\dfrac{n(n + 1)}{2}$

Solução

O polinômio f(x), do 2.º grau, é da *forma*:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

De $f(0) = 0$, obtemos $c = 0$; então, temos sucessivamente:

$$f(x) - f(x - 1) \equiv x$$
$$(ax^2 + bx) - \underbrace{[a(x - 1)^2 + b(x - 1)]}_{\substack{f(x-1):\text{ em } f(x),\ x \text{ é} \\ \text{substituído por } x - 1}} \equiv x$$

$$ax^2 + bx - ax^2 + 2ax - a - bx + b \equiv x$$
$$2ax + b - a \equiv x$$

Daí:

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ b - a = 0 \end{cases}$$

e, portanto: $a = b = \dfrac{1}{2}$.

O polinômio f(x) está determinado: $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$.

Na igualdade $f(x) - f(x-1) \equiv x$, substituindo **x** por 1, 2, 3, ..., n, obtemos, sucessivamente:

$$\begin{array}{l} f(1) - f(0) = 1 \\ f(2) - f(1) = 2 \\ f(3) - f(2) = 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(n) - f(n-1) = n \end{array}$$

E, somando-se membro a membro as igualdades acima:

$$f(n) - f(0) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Sendo $f(n) = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{2}n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ e $f(0) = 0$, temos:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

7.4) No conjunto dos polinômios de coeficientes reais, o polinômio do segundo grau, $f(x) = ax^2 + bx + c$, é um **quadrado perfeito** se e somente se $a > 0$ e $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

Solução

1.ª parte

Hipótese: $a > 0$ e $\Delta = 0$.
Tese: f(x) é um quadrado perfeito.

Para o polinômio f(x) temos, sucessivamente:

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$f(x) = a\left[\underbrace{\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right)}_{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$ (Veja volume 1 desta coleção, p. 102.)

Sendo $a > 0$, existe $\sqrt{a}$ em $\mathbb{R}$, e como $\Delta = 0$, podemos escrever:

$$f(x) = (\sqrt{a})^2 \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

e daí:

$$f(x) = \left[\sqrt{a} \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]^2$$

o que demonstra que f(x) é um quadrado perfeito.

2.ª parte

Hipótese: f(x) é um quadrado perfeito.
Tese: $a > 0$ e $\Delta = 0$.

Se f(x) é quadrado perfeito, existe um polinômio do primeiro grau g(x) tal que:

$$f(x) = [g(x)]^2$$

E, sendo g(x) da forma $px + q$, $p \neq 0$, temos:

$$ax^2 + bx + c \equiv (px + q)^2$$
$$ax^2 + bx + c \equiv p^2x^2 + 2pqx + q^2$$

e daí:

$$\begin{cases} a = p^2 \\ b = 2pq \\ c = q^2 \end{cases}$$

Da igualdade $a = p^2$, $p \neq 0$, concluímos que $a > 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2pq)^2 - 4 \cdot p^2 \cdot q^2 = 4p^2q^2 - 4p^2q^2 = 0$$

7.5) Determine o grau do polinômio na variável **x**: $p(x) = (a^2 - 3a + 2)x^3 + (a - 1)x + a - 2$.

Solução

Se $a^2 - 3a + 2 \neq 0$, isto é, $a \neq 1$ e $a \neq 2$: $\partial[p(x)] = 3$.
Se $a^2 - 3a + 2 = 0$, isto é, $a = 1$ ou $a = 2$, temos:

$p(x) = -3$ e $\partial[p(x)] = 0$ (para $a = 1$)
$p(x) = x$ e $\partial[p(x)] = 1$ (para $a = 2$)

7.6) Definimos uma **fração racional** na variável **x** como o *quociente formal*:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m}$$

onde $a_i \in \mathbb{C}$, $b_i \in \mathbb{C}$ e q(x) não é polinômio nulo.

Para as **frações racionais** $\frac{p(x)}{q(x)}$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$, definimos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \Leftrightarrow p(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot q(x)$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot q(x)}{q(x) \cdot g(x)}$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x) \cdot f(x)}{q(x) \cdot g(x)}$$

Problema: Demonstre que a **fração racional**, não nula:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$$

é independente de **x** se e somente se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (supondo $a' \neq 0$, $b' \neq 0$ e $c' \neq 0$).

Solução

1.ª parte

Hipótese: a fração $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$ é independente de **x**, isto é, a fração é igual (idêntica) a um **polinômio constante** de grau zero:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \equiv k$$

Tese: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

Da hipótese temos:

$$ax^2 + bx + c \equiv ka'x^2 + kb'x + kc'$$

e daí:

$$a = ka'$$
$$b = kb'$$
$$c = kc'$$

Então:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

2.ª parte

Hipótese: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$

Tese: $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c''} \equiv k$

Da hipótese temos:

$$a = ka'$$
$$b = kb'$$
$$c = kc'$$

e daí:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \equiv \frac{ka'x^2 + kb'x + kc'}{a'x^2 + b'x + c'} \equiv \frac{k(a'x^2 + b'x + c')}{a'x^2 + b'x + c'} \equiv k$$

7.7) Determine **A** e **B** para que se tenha:

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 6} \equiv \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3}$$

Solução

Temos, sucessivamente:

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 6} \equiv \frac{A(x - 3) + B(x - 2)}{(x - 2)(x - 3)}$$

$$\frac{3x - 1}{x^2 - 5x + 6} \equiv \frac{(A + B)x - 3A - 2B}{x^2 - 5x + 6}$$

$$3x - 1 \equiv (A + B)x - 3A - 2B$$

E, então:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ -3A - 2B = -1 \end{cases}$$

Obtemos: $A = -5$ e $B = 8$.

Exercícios Propostos

7.8) Dados os polinômios:

$$A(x) = x$$
$$B(x) = x + x^3$$
$$C(x) = x + x^3 + x^5$$
$$P(x) = 3x^5 - 6x^3 + 2x$$

determine os números **a**, **b** e **c** para que se tenha:

$$P(x) \equiv a \cdot A(x) + b \cdot B(x) + c \cdot C(x)$$

7.9) Efetue as multiplicações:

a) $(2x^4 - x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - 3x + 1)$ b) $(x^3 + x^2 - x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

7.10) Um polinômio P(x) é tal que:

$$P(x) + x \cdot P(2 - x) \equiv x^2 + 3$$

a) Determine P(0), P(1) e P(2).
b) Verifique que o grau de P(x) é 1.

7.11) O grau dos polinômios f(x), g(x) e h(x) é 3. O grau do polinômio, não nulo, $f(x) \cdot [g(x) + h(x)]$ é **n**. Quais são os possíveis valores de **n**?

7.12) Determine **b**, **c** e **d** para que se tenha: $(x + c)^3 + b(x + d) \equiv x^3 + 6x^2 + 15x + 14$.

7.13) Seja o polinômio na indeterminada **x**:

$$f(x) = (x - a)^2 (b - c) + (x - b)^2 (c - a) + (x - c)^2 (a - b) + (b - c)(c - a)(a - b)$$

Verifique que $f(x) \equiv 0$.

7.14) No conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais, resolva o problema: "determinar **a** e **b** para que o polinômio $f(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ seja um *cubo perfeito*".

7.15) No conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais, resolva os problemas:

1.º) "dar a condição para que o polinômio $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$, onde $aa'bb' \neq 0$, seja um *quadrado perfeito*";

2.º) "mostrar que se $(a + bx)^2 + (a' + b'x)^2$ e $(a + cx)^2 + (a' + c'x)^2$ são *quadrados perfeitos*, então, $(b + cx)^2 + (b' + c'x)$ também o é".

7.16) Qual é a progressão aritmética na qual a soma dos **n** primeiros termos é $\frac{n^2}{2}$ para todo **n**?

7.17) Determine um polinômio de grau 3, para o qual se tem:

$$g(x) - g(x-1) \equiv x^2 \text{ e } g(0) = 0$$

Em seguida, deduza que a soma dos quadrados dos **n** primeiros inteiros positivos é igual a $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7.18) Determine um polinômio f(x), de grau 3, tal que:

$$P(x) \equiv P(x-1) + x(x-1) \text{ e } P(0) = 0$$

Em seguida, deduza a igualdade: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1)n = \frac{n(n^2-1)}{3}$.

7.19) No conjunto de todos os polinômios de coeficientes reais, determine todos os polinômios f(x), de grau 2, tal que:

$$f(x^2) \equiv k \cdot f(x) \cdot f(-x), \quad k \in \mathbb{R}^*$$

7.20) Determine **p** e **q** para que se tenha: $x^2 + px + q \equiv (x-p)(x-q)$.

7.21) Determine **A**, **B**, **C** e **D** para que se tenha:

$$x^3 \equiv A(x-1)(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-2) + C(x-1) + D$$

7.22) Determine **A** e **B** para que se tenha:

$$\frac{x}{x^3+1} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

7.23) Determine **A** e **B** para que se tenha:

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x(x+1)} + \frac{B}{(x+1)(x+2)}$$

Em seguida, deduza a igualdade:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]$$

7.24) Mostre que se p(x) e q(x) não são nulos, então o produto $p(x) \cdot q(x)$ também não é nulo, isto é:

$$(p(x) \neq 0 \text{ e } q(x) \neq 0) \Rightarrow p(x) \cdot q(x) \neq 0$$

7.25) Demonstre que a multiplicação de polinômios é associativa.

7.26) Demonstre que para os polinômios p(x), q(x) e h(x) temos:

$$[p(x) + q(x)] \cdot h(x) \equiv p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x)$$

7.27) Seja a igualdade entre polinômios:

$$(1 + x + x^2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}.$$

Determine a soma $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$.

Capítulo 8

A divisão de polinômios

8.1 – DIVISÃO EUCLIDIANA

Teorema

Dados um polinômio **qualquer** A(x) e um polinômio B(x), **não nulo**, **existe um e um só par de polinômios**, Q(x) e R(x), tal que:

$$\text{I) } A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$
$$\text{II) } gr[R(x)] < gr[B(x)] \text{ ou } R(x) \equiv 0$$

Efetuar a divisão de A(x) por B(x) é determinar o par de polinômios Q(x) e R(x), satisfazendo as condições acima; A(x) é o **dividendo**, B(x) é o **divisor**, Q(x) é o **quociente** e R(x) é o **resto** na divisão.

Demonstração (opcional)

1.ª parte: *existência de uma solução*

Inicialmente observe que se $A(x) \equiv 0$ ou se $gr[A(x)] < gr[B(x)]$ existe, visivelmente, a solução $Q(x) \equiv 0$ e $R(x) \equiv A(x)$, satisfazendo as condições I e II.

Suponhamos, então, A(x) não nulo e gr[A(x)] ⩾ g[B(x)].

Sejam:

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$$
$$B(x) = b_0 x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0,\ b_m \neq 0$$

onde $n \geqslant m$.

Construamos o polinômio:

$$R_1(x) = A(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \qquad (1)$$

onde:

$gr[R_1(x)] < gr[A(x)]$, pois há o *cancelamento* de pelo menos $a^n x^n$.

Se $gr[R_1(x)] < gr[B(x)]$, a existência está estabelecida; o par $Q_1(x) = \frac{a_n}{a_m} x^{n-m}$ e $R_1(x)$ respondem à questão.

Se $gr[R_1(x)] \geqslant gr[B(x)]$, vamos escrever:

$R_1(x) = c_p x^p + c_{p-1} x^{p-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, onde $c_p \neq 0$ e $p \geqslant m$

Construamos:

$$R_2(x) = R_1(x) - \frac{c_p}{b_m} x^{p-m} \cdot B(x) \qquad (2)$$

onde $gr[R_2(x)] < gr[R_1(x)]$.

Se $gr[R_2(x)] < gr[B(x)]$, a existência está estabelecida; o par $Q_1(x) + Q_2(x)$, onde $Q_2(x) = \frac{c_p}{b_m} x^{p-m}$, e $R_2(x)$ respondem à questão.

Se $gr[R_2(x)] \geqslant gr[B(x)]$, vamos escrever:

$R_2(x) = d_q x^q + d_{q-1} x^{q-1} + \ldots + d_1 q + d_0$, onde $d_q \neq 0$ e $q \geqslant m$

Construamos:

$$R_3(x) = R_2(x) - \frac{d_q}{b_m} x^{q-m} \cdot B(x) \qquad (3)$$

onde $gr[R_3(x)] < gr[R_2(x)]$.

Se $gr[R_3(x)] < gr[B(x)]$, a existência está estabelecida; o par $Q_1(x) + Q_2(x) + Q_3(x)$, onde $Q_3(x) = \frac{d_q}{b_m} x^{q-m}$, e $R_3(x)$ respondem à questão.

Se $gr[R_3(x)] \geqslant gr[B(x)]$ o processo continua:

$$R_4(x) = R_3(x) - Q_4(x) \cdot B(x) \qquad (4)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$R_n(x) = R_{n-1}(x) - Q_n(x) \cdot B(x) \qquad (\mathbf{n})$$

Os graus $gr[R_i(x)]$ constituem uma seqüência decrescente em $\mathbb{N}$:

$$gr[R_1(x)] > gr[R_2(x)] > \ldots > gr[R_n(x)] > \ldots$$

Podemos concluir que existe um natural **n** tal que:

$$gr[R_n(x)] < gr[B(x)]$$

Então, somando membro a membro as igualdades de (1) a (**n**), obtemos:

$$R_n(x) \equiv A(x) - B(x)[Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_n(x)]$$

O par $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_n(x)$ e $R(x) = R_n(x)$ respondem à questão proposta.

Observe que se pode ter, na aplicação do processo, algum $R_i(x) \equiv 0$. Neste caso, o par que responde à questão é $Q(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_i(x)$ e $R(x) = R_i(x)$.

2.ª parte: *unicidade*

Demonstremos que o par Q(x) e R(x) obtido é **único**. Suponhamos que existe um outro par $Q_1(x)$ e $R_1(x)$ que responde à questão.

Então:

$$\begin{cases} A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x) \\ gr[R(x)] < gr[B(x)] \text{ ou } R(x) \equiv 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A(x) \equiv B(x) \cdot Q'(x) + R'(x) \\ gr[R'(x)] < gr[B(x)] \text{ ou } R'(x) \equiv 0 \end{cases}$$

Tem-se:

$$B(x) \cdot Q(x) + R(x) \equiv B(x) \cdot Q'(x) + R'(x)$$

e daí:

$$B(x) \cdot [Q(x) - Q'(x)] \equiv R'(x) - R(x) \qquad \text{(I)}$$

Se os dois membros da igualdade acima **não são nulos** podemos escrever:

$$gr\,\{B(x) \cdot [Q(x) - Q'(x)]\} = gr[R'(x) - R(x)]$$

Note que:

$$gr\{B(x) \cdot [Q(x) - Q'(x)]\} = gr[B(x)] + gr[Q(x) - Q'(x)] \geqslant gr[B(x)] \qquad (1)$$

$$gr[R'(x) - R(x)] \leqslant \text{máx.}\{gr[R'(x)];\ gr[R(x)]\} < gr[B(x)] \qquad (2)$$

As relações (1) e (2) são incompatíveis. Então, na igualdade (I), os dois membros devem ser nulos; daí, como B(x) não é nulo, obtemos $R(x) = R'(x)$ e $Q(x) = Q'(x)$.

Está estabelecida a unicidade.

Divisibilidade

Se na divisão de A(x) por B(x) obtém-se $R(x) \equiv 0$, diz-se que **A(x) é divisível por B(x)** ou que **B(x) é um divisor de A(x)**.

Se B(x) é um divisor de A(x), indica-se:

$$B(x) \mid A(x)$$

Na prática o quociente e o resto podem ser obtidos como descrevemos na demonstração da existência do par, dispondo as operações de forma conveniente; é o **método da chave** para se efetuar a divisão.

Exemplos

1.º) Vamos efetuar a divisão de $A(x) = 3x^5 + 4x^2 + 1$ por $B(x) = x^2 + 2x + 3$. Adotamos a seguinte disposição prática:

$A(x)$ →	$3x^5 \qquad + 4x^2 \quad + 1$	$x^2 + 2x + 3$ ← $B(x)$
$-Q_1(x) \cdot B(x)$ →	$-3x^5 - 6x^4 - 9x^3$	$3x^3 - 6x^2 + 3x + 16$ ← $Q(x)$
$R_1(x)$ →	$-6x^4 - 9x^3 + 4x^2 \quad + 1$	↑ $Q_1(x)$ ↑ $Q_2(x)$ ↑ $Q_3(x)$ ↑ $Q_4(x)$
$-Q_2(x) \cdot B(x)$ →	$6x^4 + 12x^3 + 18x^2$	
$R_2(x)$ →	$3x^3 + 22x^2 \quad + 1$	
$-Q_3(x) \cdot B(x)$ →	$-3x^3 - 6x^2 - 9x$	
$R_3(x)$ →	$16x^2 - 9x + 1$	
$-Q_4(x) \cdot B(x)$ →	$-16x^2 - 32x - 48$	
$R_4(x) = R(x)$ →	$-41x - 47$	

$Q_1(x)$: obtém-se "dividindo" o termo de maior grau de $A(x)$ pelo termo de maior grau de $B(x)$

$Q_2(x)$: obtém-se "dividindo" o termo de maior grau de $R_1(x)$ pelo termo de maior grau de $B(x)$

$Q_3(x)$: obtém-se "dividindo" o termo de maior grau de $R_2(x)$ pelo termo de maior grau de $B(x)$

$Q_4(x)$: obtém-se "dividindo" o termo de maior grau de $R_3(x)$ pelo termo de maior grau de $B(x)$

Tem-se, então:

$$\underbrace{3x^5 + 4x^2 + 1}_{A(x)} \equiv \underbrace{(x^2 + 2x + 3)}_{B(x)}\underbrace{(3x^3 - 6x^2 + 3x + 6)}_{Q(x)}\underbrace{- 41x - 47}_{R(x)}$$

O grau do **resto**, $-41x - 47$, é menor que o grau de $B(x)$.

2.º) Vamos efetuar a divisão de $A(x) = 2x^4 + 5x^2 - 10x + 1$ por $B(x) = 2x^2 - 5x + 5$.

$$
\begin{array}{rrrrrl|l}
A(x) \rightarrow & 2x^4 & & +5x^2 & -10x & +1 & 2x^2 - 5x + 5 \leftarrow B(x) \\
\cline{7-7}
 & -2x^4 & +5x^3 & -5x^2 & & & x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} \leftarrow Q(x) \\
\cline{2-6}
 & & 5x^3 & & -10x & +1 & \\
 & & -5x^3 & +\frac{25}{2}x^2 & -\frac{25}{2}x & & \\
\cline{3-6}
 & & & \frac{25}{2}x^2 & -\frac{45}{2}x & +1 & \\
 & & & -\frac{25}{2}x^2 & +\frac{125}{4}x & -\frac{125}{4} & \\
\cline{4-6}
 & & & R(x) \rightarrow & \frac{35}{4}x & -\frac{121}{4} &
\end{array}
$$

Tem-se, então:

$$2x^4 + 5x^2 - 10x + 1 \equiv (2x^2 - 5x + 5)\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{4}\right) + \frac{35}{4}x - \frac{121}{4}$$

Observe que o grau do **resto**, $\frac{35}{4}x - \frac{121}{4}$, é menor que o grau de $B(x)$.

3.º) Vamos efetuar a divisão de $A(x) = 6x^6 - 12x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 13x - 3$ por $2x^2 - 4x + 3$.

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
6x^6 & -12x^5 & +5x^4 & +14x^3 & -20x^2 & +13x & -3 & 2x^2 - 4x + 3 \\
\cline{8-8}
-6x^6 & +12x^5 & -9x^4 & & & & & 3x^4 - 2x^2 + 3x - 1 \\
\cline{1-7}
 & & -4x^4 & +14x^3 & -20x^2 & +13x & -3 & \\
 & & 4x^4 & -8x^3 & +6x^2 & & & \\
\cline{3-7}
 & & & 6x^3 & -14x^2 & +13x & -3 & \\
 & & & -6x^3 & +12x^2 & -9x & & \\
\cline{4-7}
 & & & & -2x^2 & +4x & -3 & \\
 & & & & 2x^2 & -4x & +3 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

$R(x) \equiv 0$
a divisão é *exata*:
$A(x)$ é *divisível* por $B(x)$

Tem-se, então:

$6x^6 - 12x^5 + 5x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 13x - 3 \equiv$
$\equiv (2x^2 - 4x + 3)(3x^4 - 2x^2 + 3x - 1)$ e $R(x) \equiv 0$.

8.2 – MÉTODO DE DESCARTES PARA A DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Na divisão de A(x) por B(x), suponhamos que:

$$gr[A(x)] \geqslant gr[B(x)]$$

Sejam Q(x) e R(x), respectivamente, o quociente e o resto procurados. Da identidade:

$$A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

obtemos:

$$gr[A(x)] = gr[B(x) \cdot Q(x) + R(x)]$$

E, como $gr[R(x)] < gr[B(x)]$ (ou $R(x) \equiv 0$), podemos escrever:

$$gr[A(x)] = gr[B(x) \cdot Q(x)]$$

ou ainda:

$$gr[A(x)] = gr[B(x)] + gr[Q(x)]$$

Para os polinômios Q(x) e R(x) procurados temos:

1) $gr[Q(x)] = gr[A(x)] - gr[B(x)]$
2) $gr[R(x)] < gr[B(x)]$ (ou $R(x) \equiv 0$)

O **método de Descartes** aplica-se da seguinte forma:

1.º) determinamos o grau de Q(x) e o **máximo grau** que R(x) pode assumir, a partir das relações *1* e *2*, acima;
2.º) escrevemos os polinômios Q(x) e R(x), onde os coeficientes são incógnitas a serem determinadas;
3.º) escrevemos a identidade $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e daí determinamos os coeficientes incógnitos de Q(x) e de R(x).

Exemplos

1.º) Efetuemos a divisão de $A(x) = 8x^3 - 6x + 4$ por $B(x) = x^2 - 2x$ pelo **método de Descartes**.

$$gr[Q(x)] = gr[A(x)] - gr[B(x)] = 3 - 2 = 1$$

Portanto, Q(x) é da *forma* ax + b:

$$gr[R(x)] < gr[B(x)] = 2$$

Então, o máximo valor para gr[R(x)] é 1 (ou $R(x) \equiv 0$). A *forma* de R(x) é $cx + d$.

Da identidade $A(x) \equiv B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, obtemos:

$$8x^3 - 6x + 4 \equiv (x^2 - 2x)(ax + b) + (cx + d)$$
$$8x^3 - 6x + 4 \equiv ax^3 + (-2a + b)x^2 + (c - 2b)x + d$$

Os coeficientes são *ordenadamente iguais*:

$$\begin{cases} a = 8 \\ -2a + b = 0 \\ c - 2b = -6 \\ d = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 8$, $b = 16$, $c = 26$ e $d = 4$; assim:

$$Q(x) = 8x + 16 \text{ e } R(x) = 26x + 4$$

2.º) Vamos dividir o polinômio $A(x) = 12x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x$ pelo polinômio $3x^2 - 2x + 1$.

$$gr[Q(x)] = gr[A(x)] - gr[B(x)] = 5 - 2 = 3$$

Portanto, Q(x) é da *forma* $ax^3 + bx^2 + cx + d$:

$$gr[R(x)] < gr[B(x)] = 2$$

Então, o máximo valor para gr[R(x)] é 1 (ou $R(x) \equiv 0$). A *forma* de R(x) é $px + q$.

Podemos escrever:

$$12x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x \equiv (3x^2 - 2x + 1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) + (px + q)$$
$$12x^5 - 8x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x \equiv 3ax^5 + (3b - 2a)x^4 + (a - 2b)x^3 + $$
$$+ (b - 2c + 3d)x^2 + (c - 2d + p)x + d + q$$

Daí:

$$\begin{cases} 3a = 12 \\ 3b - 2a = -8 \\ a - 2b + 3c = -2 \\ b - 2c + 3d = 4 \\ c - 2d + p = -8 \\ d + q = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 4$, $b = 0$, $c = -2$, $d = 0$, $p = -6$ e $q = 0$; assim:

$$Q(x) = 4x^3 - 2x$$
$$R(x) = -6x$$

Exercícios Resolvidos

8.1) Determine os números reais **a** e **b** para que o polinômio $A(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 3$ seja **divisível** por $x^2 - 5x + 1$.

Solução

Efetuando a divisão pelo **método da chave**:

$$\begin{array}{rl|l} & 2x^3 + ax^2 + bx - 3 & x^2 - 5x + 1 \\ \cline{3-3} & -2x^3 + 10x^2 - 2x & 2x + (10 + a) \\ \cline{2-2} & (10 + a)x^2 + (b - 2)x - 3 & \\ & -(10 + a)x^2 + (50 + 5a)x - (10 + a) & \\ \cline{2-2} & (48 + 5a + b)x - (13 + a) & \end{array}$$

Queremos que a divisão seja exata; assim, o resto deve ser **nulo**, isto é:

$$\begin{cases} 48 + 5a + b = 0 \\ -(13 + a) = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos: $a = -13$ e $b = 17$.

Vamos resolver o problema utilizando o **método de Descartes**.

Se a divisão é **exata**, temos $R(x) \equiv 0$, e o quociente $Q(x)$ é da forma $mx + n$, pois $gr[Q(x)] = 3 - 2 = 1$.

Então:

$$2x^3 + ax^2 + bx - 3 \equiv (x^2 - 5x + 1)(mx + n)$$
$$2x^3 + ax^2 + bx - 3 \equiv mx^3 + (n - 5m)x^2 + (m - 5n)x + n$$

Daí:

$$\begin{cases} m = 2 \\ n - 5m = a \\ m - 5n = b \\ n = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos: $a = -13$ e $b = 17$.

8.2) Numa divisão de polinômios em que o dividendo é de grau **p** e o quociente de grau **q**, qual é o grau máximo que o resto *pode* ter?

Solução

Na divisão de $A(x)$ por $B(x)$ sejam $Q(x)$ e $R(x)$ o quociente e o resto, respectivamente. Temos:

$$gr[A(x)] = gr[B(x)] + gr[Q(x)]$$
$$gr[R(x)] < gr[B(x)]$$

e, então:

$$p = gr[B(x)] + q$$

isto é:

$$gr[B(x)] = p - q$$

Concluímos que:

$$gr[R(x)] < p - q$$

Então, o grau máximo que o resto pode ter é $p - q - 1$.

8.3) Determine os números reais **a**, **b**, **c** e **d**, sabendo que o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$ dividido por $x^2 + d$ dá resto $r_1(x) = x$, e dividido por $x^2 - d$ dá resto $r_2(x) = -x$.

Solução

Vamos efetuar a divisão de $p(x)$ por $x^2 + d$:

$$\begin{array}{rl|l} & x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c & x^2 + d \\ \cline{3-3} & -x^4 \qquad - dx^2 & x^2 - x + (a - d) \\ \cline{2-2} & -x^3 + (a-d)x^2 + bx + c & \\ & x^3 \qquad\qquad + dx & \\ \cline{2-2} & (a-d)x^2 + (b+d)x + c & \\ & -(a-d)x^2 \qquad\qquad - d(a-d) & \\ \cline{2-2} & r_1(x) = (b+d)x + (x + d^2 - ad) & \end{array}$$

E, sendo $r_1(x) = x$, obtemos:

$$\begin{cases} b + d = 1 & (1) \\ c + d^2 - ad = 0 & (2) \end{cases}$$

Analogamente, na divisão de $p(x)$ por $x^2 - d$, obtemos:

$$r_2(x) = (b - d)x^2 + (c + d^2 + ad)$$

E, sendo $r_2(x) = -x$, temos:

$$\begin{cases} b - d = -1 & (3) \\ c + d^2 + ad = 0 & (4) \end{cases}$$

O sistema formado pelas equações (1), (2), (3) e (4) nos dá $a = 0$, $b = 0$, $c = -1$ e $d = 1$.

8.4) Verifique que se o polinômio $x^m - a^m$ é **divisível** por $x^p - a^p$, então **m** é **divisível** por **p**, $m > p$ e $a \neq 0$.

Solução

Vamos efetuar a divisão de $x^m - a^m$ por $x^p - a^p$:

$$\begin{array}{rl|l} & x^m \qquad\qquad\qquad - a^m & x^p - a^p \\ \cline{3-3} & -x^m + a^px^{m-p} & x^{m-p} + a^px^{m-2p} + \ldots \\ \cline{2-2} & a^px^{m-p} \qquad\quad - a^m & \\ & -a^px^{m-p} + a^{2p}x^{m-2p} & \\ \cline{2-2} & a^{2p}x^{m-2p} - a^m & \\ & \vdots & \end{array}$$

Podemos concluir, então, que o quociente na divisão é da *forma*:

$$Q(x) = x^{m-p} + a^px^{m-2p} + \ldots + a^{(s-1)p} \cdot x^{m-sp}$$

e o resto é da *forma*:

$$R(x) = a^{sp}x^{m-sp} - a^m, \quad s \in \mathbb{N}^*$$

Devemos ter $R(x) \equiv 0$, isto é:

$$a^{sp} \cdot x^{m-sp} - a^m \equiv 0$$

Como $a \neq 0$, para se ter a identidade acima, necessariamente:

$$m - sp = 0$$

daí: $m = sp$, o que demonstra a propriedade.

8.5) Os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ são **divisíveis** pelo polinômio $h(x)$; então, demonstre que o resto $r(x)$, da divisão de $f(x)$ por $g(x)$, também é **divisível** por $h(x)$.

Solução

Se os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ são divisíveis por $h(x)$, existem os polinômios $q_1(x)$ e $q_2(x)$ tais que:

$$f(x) = h(x) \cdot q_1(x)$$
$$g(x) = h(x) \cdot q_2(x)$$

Na divisão de f(x) por g(x) temos:

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Temos, sucessivamente:

$$h(x) \cdot q_1(x) = h(x) \cdot q_2(x) \cdot q(x) + r(x)$$
$$r(x) = h(x) \cdot [q_1(x) - q_2(x) \cdot q(x)]$$

A igualdade acima demonstra a propriedade.

8.6) Na divisão de um polinômio p(x) por a(x) o resto é $r_1(x)$; na divisão de p(x) por b(x) o resto é $r_2(x)$; na divisão de p(x) por $a(x) \cdot b(x)$ é r(x).
Demonstre que se r(x) é dividido por a(x), o resto é $r_1(x)$; e se r(x) é dividido por b(x), o resto é $r_2(x)$.

Solução

Da hipótese temos:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & a(x) \\ \hline r_1(x) & q_1(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} p(x) & b(x) \\ \hline r_2(x) & q_2(x) \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} p(x) & a(x) \cdot b(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

$p(x) = a(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$ (1) $\begin{cases} gr[r_1(x)] < gr[a(x)] \\ \text{ou } r_1(x) \equiv 0 \end{cases}$

$p(x) = b(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)$ (2) $\begin{cases} gr[r_2(x)] < gr[b(x)] \\ \text{ou } r_2(x) \equiv 0 \end{cases}$

$p(x) = [a(x) \cdot b(x)] \cdot q(x) + r(x)$ (3) $\begin{cases} gr[r(x)] < gr[a(x) \cdot b(x)] \\ \text{ou } r(x) \equiv 0 \end{cases}$

Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$[a(x) \cdot b(x)] \cdot q(x) + r(x) = a(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$$
$$r(x) = a(x) \cdot \underbrace{[q_1(x) - b(x) \cdot q(x)]}_{\text{quociente}} + \underbrace{r_1(x)}_{\text{resto}} \qquad (4)$$

e, sendo $gr[r_1(x)] < gr[a(x)]$ ou $r(x) \equiv 0$, a igualdade (4) mostra que se dividirmos r(x) por a(x) o resto é $r_1(x)$.

Analogamente, se substituirmos (3) em (2), concluímos que o resto da divisão de r(x) por b(x) é $r_2(x)$.

8.7) Um polinômio p(x) dividido por $x^2 + x + 1$ dá resto $-x + 1$ e dividido por $x^2 - x + 1$ dá resto $3x + 5$. Qual é o resto da divisão de p(x) por $x^4 + x^2 + 1$?

Solução

Inicialmente, observe que:

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$$

e que o resto procurado, de p(x) por $x^4 + x^2 + 1$, é da forma: $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Temos:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & a(x) = x^2 + x + 1 \\ \hline r_1(x) = -x + 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} p(x) & b(x) = x^2 - x + 1 \\ \hline r_2(x) = 3x + 5 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} p(x) & \overbrace{x^4 + x^2 + 1}^{a(x) \cdot b(x)} \\ \hline r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d & \end{array}$$

Do exercício anterior podemos concluir que se dividirmos r(x) por $a(x) = x^2 + x + 1$ o resto é $r_1(x) = -x + 1$:

$$\begin{array}{rl|l} & ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3} & -ax^3 - ax^2 - ax & ax + (b - a) \\ \cline{1-2} & (b - a)x^2 + (c - a)x + d & \\ & -(b - a)x^2 - (b - a)x - (b - a) & \\ \cline{1-2} & r_1(x) = (c - b)x + (d - b + a) & \end{array}$$

e daí: $c - b = -1$ (1) e $d - b + a = 1$ (2).

Analogamente, se dividirmos r(x) por $b(x) = x^2 - x + 1$ o resto é $r_2(x) = 3x + 5$:

$$\begin{array}{rl|l} & ax^3 + bx^2 + cx + d & x^2 - x + 1 \\ \cline{3-3} & -ax^3 + ax^2 - ax & ax + (b + a) \\ \cline{1-2} & (b + a)x^2 + (c - a)x + d & \\ & -(b + a)x^2 + (b + a)x - (b + a) & \\ \cline{1-2} & r_2(x) = (b + c)x + (d - b - a) & \end{array}$$

e daí: $b + c = 3$ (3) e $d - b - a = 5$ (4).

Resolvendo o sistema constituído pelas equações (1), (2), (3) e (4) obtemos: $a = -2$, $b = 2$, $c = 1$ e $d = 5$; então:

$$r(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 5$$

8.8) O polinômio f(x) dividido por $x^4 + x^2 + 1$ dá resto $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Qual é o resto da divisão de f(x) por $x^2 + x + 1$?

Solução

Inicialmente, observe que:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Temos:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & a(x) = x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} r_1(x) & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} f(x) & \overbrace{x^4 + x^2 + 1}^{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)} \\ \cline{2-2} r(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & \end{array}$$

Do exercício 8.6 concluímos que $r_1(x)$ pode ser obtido dividindo-se r(x) por a(x):

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 - x & x + 1 \\ \cline{1-1} x^2 + 2x + 4 & \\ -x^2 - x - 1 & \\ \cline{1-1} x + 3 & \end{array}$$

Então, o resto procurado é $r_1(x) = x + 3$.

Exercícios Propostos

8.9) Divida o polinômio A(x) pelo polinômio B(x), nos seguintes casos:

a) $A(x) = x^4 - 4x^3 + 5x - 6$ e $B(x) = x^3 + 2$
b) $A(x) = x^5 + 2x^3 - 6x + 4$ e $B(x) = x^2 + x - 2$
c) $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ e $B(x) = x^2 - 3x + 1$
d) $A(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 - 8x^2 + 5x - 6$ e $B(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

8.10) Determine **a** e **b** para que o resto da divisão do polinômio $x^5 - 2x^4 + ax^3 - 7x^2 + 3x + b$ pelo polinômio $x^2 + 4$ seja $3x + 2$.

8.11) Determine **a** e **b** para que o polinômio $2x^3 + ax^2 - 10x + b$ seja **divisível** por $x^2 - 3x + 1$.

8.12) Na divisão de um polinômio de grau 5 por um outro de grau **m**, encontrou-se quociente de grau **q** e resto de grau 4. Determine **m** e **q**.

8.13) Seja o polinômio:

$$f(x) = x^4 - (a + 1)x^3 + (a^2 - 4)x^2 + bx + c$$

a) Determine o quociente da divisão de f(x) por $x^2 - x - 2$.
b) Determine **b** e **c**, em função de **a**, para que a divisão seja **exata**.

8.14) Sejam os polinômios:

$$f(x) = x^3 + 3bx^2 + 3cx + d$$
$$g(x) = x^2 + 2bx + c$$

Se f(x) é **divisível** por g(x), verifique que f(x) é um *cubo perfeito* e g(x) é um *quadrado perfeito*.

8.15) O polinômio a(x) dividido pelo polinômio b(x) dá quociente q(x) e resto r(x); a(x) dividido por $x \cdot b(x)$ dá o mesmo resto r(x). Verifique que $x \mid q(x)$.

8.16) Na divisão de um polinômio A(x) por B(x) o quociente é Q(x) e o resto é R(x). Qual é o quociente e qual é o resto na divisão de A(x) por $2 \cdot B(x)$?

8.17) Determine **m**, **n** e **p** de modo que o resto da divisão do polinômio $6x^4 + mx^2 + nx + p$ pelo polinômio $2x^3 - 4x^2 + 3$ seja $x^2 + 3$.

8.18) Um polinômio f(x), de grau 3, dividido por $x^2 - 1$ dá resto $6x + 2$ e quando dividido por $x^2 + 1$ dá resto $2x + 8$. Determine f(x).

8.19) O polinômio $f(x) = x^4 + 4mx^3 + 6ax^2 + 4bx + c$ é **divisível** pelo polinômio $g(x) = x^3 + 3mx^2 + 3ax + b$. Verifique que: $a = m^2$, $b = m^3$ e $c = m^4$.

8.20) Determine os números reais **p** e **q**, sabendo que $x^4 + 1$ é **divisível** por $x^2 + px + q$.

8.21) Sejam os polinômios:

$$A(x) = px^3 + (p^2 + q)x^2 + (2pq + r)x + q^2 + s$$
$$B(x) = px^3 + (p^2 - q)x^2 + rx - q^2 + s$$
$$C(x) = x^2 + px + q$$

Mostre que se $C(x) \mid A(x)$, então $C(x) \mid B(x)$.

8.22) Um polinômio P(x) dividido por $x + 1$ dá resto 4; dividido por $x^2 + 1$ dá resto $2x + 3$. Qual é o resto da divisão de P(x) por $(x + 1)(x^2 + 1)$?

8.23) Um polinômio f(x) dividido por $x + 1$ dá resto 2, dividido por $x^2 - x + 1$ dá resto $x - 6$ e dividido por $x^3 + 1$ dá quociente $x + 2$. Determine f(x).

8.24) Determine os reais positivos **a**, **b** e **c**, sabendo que o polinômio $ax^4 + bx^3 + c$ dividido por $x^2 + 1$ dá resto $r_1(x)$, dividido por $x^3 + 1$ dá resto $r_2(x)$, e que $r_1(x) \cdot r_2(x) \equiv 2(x - 1)(x - 5)$.

Capítulo 9

A divisão de polinômios em que o divisor é de grau 1

9.1 — TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de um polinômio p(x) pelo polinômio x − c é o valor numérico de p(x) em **c**, isto é, o resto é p(c).

Demonstração

Na divisão de p(x) por x − c temos:

$$\begin{cases} p(x) = (x - c)q(x) + r(x) \\ gr[r(x)] < gr[x - c] = 1 \text{ ou } r(x) = 0 \end{cases}$$

A segunda relação garante que r(x) é **constante**: tem grau zero ou é nulo. Para calcular essa constante, substituímos **x** por **c** na primeira relação; temos, sucessivamente:

$$p(x) = (x - c)q(x) + \underset{\text{constante}}{\underset{\downarrow}{r}}$$

$$p(c) = (c - c)q(c) + r$$

$$p(c) = r$$

o que demonstra a propriedade.

Do **teorema do resto**, resulta o teorema de d'Alembert:

Um polinômio p(x) é **divisível** por **x** − c se e somente se p(c) = 0, isto é, **c** é uma **raiz** de p(x).

É imediato que o **teorema do resto** pode ser ampliado para os divisores x + c, ax − b e ax + b, onde a ≠ 0.

Temos, então, o resultado:

dividendo	divisor	resto
p(x)	$x - c$	p(c)
p(x)	$x + c$	p(− c)
p(x)	$ax - b$	$p\left(\frac{b}{a}\right)$
p(x)	$ax + b$	$p\left(-\frac{b}{a}\right)$

Exemplos

1.º) O resto da divisão de $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ por $x - 1$ é:

$$p(1) = 1 - 2 + 3 = 2$$

2.º) O resto da divisão de $p(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ por $x + 3$ é:

$$p(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - (-3) - 3 = 0$$

Então, p(x) é **divisível** por $x + 3$; ou ainda: -3 é **raiz** de p(x).

3.º) O resto da divisão de $p(x) = 8x^3 + 2x + 1$ por $2x - 1$ é:

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 3$$

4.º) O resto da divisão de $p(x) = x^2 + 3x - 1$ por $3x + 1$ é:

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{9}$$

9.2 – O DISPOSITIVO DE BRIOT-RUFFINI

Na divisão de um polinômio p(x) pelo polinômio $x - c$, o quociente e o resto podem ser obtidos através de um procedimento muito conveniente, conhecido como **dispositivo de Briot-Ruffini**

A descrição desse dispositivo vem a seguir.

Na divisão do polinômio:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_n \neq 0 \text{ e } n \geq 1$$

pelo polinômio $x - c$, o quociente $q(x)$, de grau $n - 1$, é da forma:

$$q(x) = q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-3}x^{n-3} + \dots + q_2x^2 + q_1x + q_0$$

Vamos aplicar o **método de Descartes** para efetuarmos a divisão de $p(x)$ por $x - c$:

$$\otimes \begin{cases} q_{n-1}x^{n-1} + q_{n-2}x^{n-2} + q_{n-3}x^{n-3} + \dots + q_1x + q_0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x - c \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} q_{n-1}x^n + q_{n-2}x^{n-1} + q_{n-3}x^{n-2} + \dots + q_1x^2 + q_0x \\ \qquad - cq_{n-1}x^{n-1} - cq_{n-2}x^{n-2} - \dots - cq_2x^2 - cq_1x - cq_0 \\ \hline q_{n-1}x^n + (q_{n-2} - cq_{n-1})x^{n-1} + (q_{n-3} - cq_{n-2})x^{n-2} + \dots + (q_1 - cq_2)x^2 + (q_0 - cq_1)x - cq_0 \end{array}$$

constante ↑

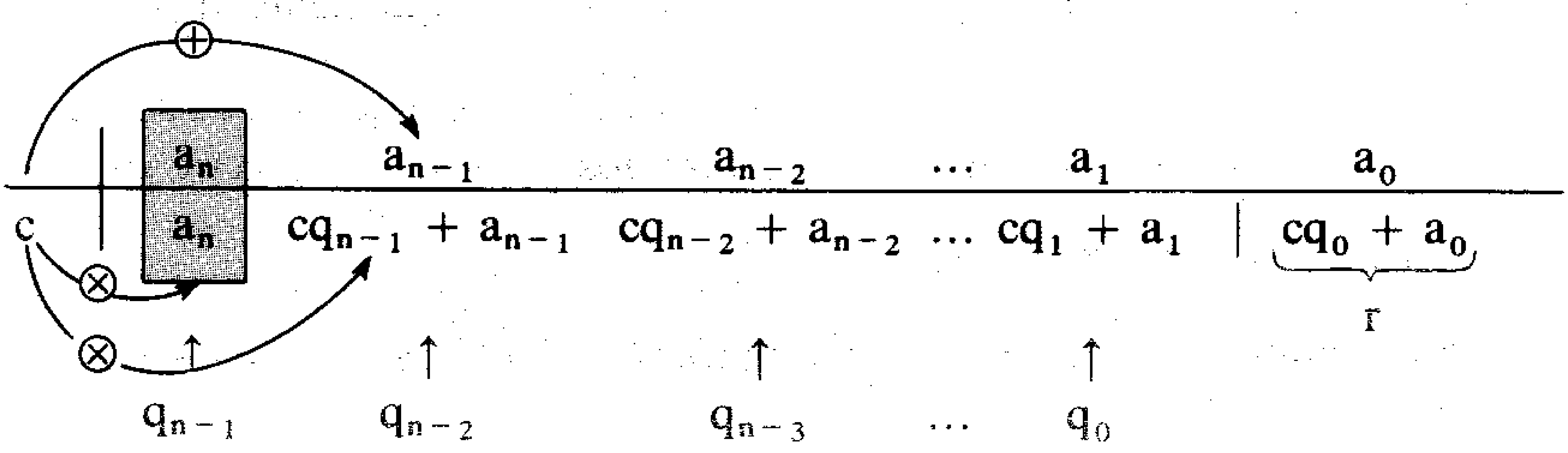
A identidade $p(x) \equiv (x - c)q(x) + r$ nos dá:

$$\begin{array}{l} q_{n-1} = a_n \\ q_{n-2} - cq_{n-1} = a_{n-1} \\ q_{n-3} - cq_{n-2} = a_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1 - cq_2 = a_2 \\ q_0 - cq_1 = a_1 \\ r - cq_0 = a_0 \end{array}$$

E, então:

$$\begin{array}{l} q_{n-1} = a_n \\ q_{n-2} = a_{n-1} + cq_{n-1} \\ q_{n-3} = a_{n-2} + cq_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ q_1 = a_2 + cq_2 \\ q_0 = a_1 + cq_1 \\ r = a_0 + cq_0 \end{array}$$

O cálculo de $q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_0$ e r, através das igualdades acima, tem natureza *recorrente* e, na prática, pode ser efetuado com a utilização do **dispositivo de Briot-Ruffini**:



Exemplo

Vamos dividir o polinômio $x^3 - 7x - 6$ por $x - 3$.

	1	0	-7	-6
3	1	$\underbrace{1 \cdot 3 + 0}_{3}$	$\underbrace{3 \cdot 3 - 7}_{2}$	$\underbrace{2 \cdot 3 - 6}_{0}$

O quociente é $q(x) = 1 \cdot x^2 + 3x + 2$ e o resto é $r = 0$.

9.3 – OBSERVAÇÕES SOBRE O DISPOSITIVO

1.ª) Quando o divisor é da forma $x + c$, escrevemos $x + c = x - (-c)$ e aplicamos o dispositivo; por exemplo, vamos dividir o polinômio $p(x) = x^4 + 6x^2 - 3x - 6$ por $x + 1$:

	1	0	6	-3	-6
-1	1	$\underbrace{1 \cdot (-1) + 0}_{-1}$	$\underbrace{(-1) \cdot (-1) + 6}_{7}$	$\underbrace{7 \cdot (-1) + (-3)}_{-10}$	$\underbrace{(-10) \cdot (-1) + (-6)}_{4}$

O quociente é $q(x) = 1 \cdot x^3 - 1 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 10$ e o resto é $r = 4$.

2.ª) Quando o divisor é da forma $ax - b$, onde $a \neq 0$, o **dispositivo de Briot-Ruffini** pode ser usado com pequenas modificações. Temos:

$$p(x) = (ax - b) \cdot q(x) + r$$

e daí:

$$p(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right) \cdot \underbrace{aq(x)}_{q'(x)} + r$$

Dividimos, então, $p(x)$ por $x - \frac{b}{a}$, obtendo o quociente $q'(x) = aq(x)$ e o resto **r**.

Observe que, para obtermos $q(x)$, fazemos $q(x) = \frac{1}{a} \cdot q'(x)$ e que o resto desejado é o resto **r** obtido.

Por exemplo, vamos dividir o polinômio $p(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ por $2x - 1$.

Dividimos, então, p(x) por $x - \frac{1}{2}$:

	2	4	-6	8
$\frac{1}{2}$	2	$2 \cdot \frac{1}{2} + 4$	$5 \cdot \frac{1}{2} + (-6)$	$\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + 8$
		5	$-\frac{7}{2}$	$\frac{25}{4}$

O resto encontrado, $r = \frac{25}{4}$, é o resto procurado; os coeficientes do quociente encontrado, q′(x), devem ser divididos por a = 2, para se obter q(x):

$$q(x) = \frac{2}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{-\frac{7}{2}}{2}$$

$$q(x) = x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{4}$$

Vamos dividir o polinômio $p(x) = 32x^5 + 243$ por $2x + 3$.

Dividimos, então, p(x) por $x + \frac{3}{2}$:

	32	0	0	0	0	243
$-\frac{3}{2}$	32	$32 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0$	$(-48)\left(-\frac{3}{2}\right) + 0$	$72 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0$	$-108\left(-\frac{3}{2}\right) + 0$	$162 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 243$
		-48	72	-108	162	zero

O resto encontrado é o resto procurado: r = 0; os coeficientes do quociente encontrado, q′(x), devem ser divididos por a = 2, para se obter q(x):

$$q(x) = \frac{1}{2} \cdot q'(x) = 16x^4 - 24x^3 + 36x^2 - 54x + 81$$

9.4 – A DIVISIBILIDADE PELO PRODUTO – TEOREMA

Se um polinômio p(x) é **divisível** (separadamente) por x – a e por x – b, a ≠ b, então p(x) é **divisível** pelo produto (x – a) • (x – b).

Demonstração

Inicialmente, observe que $p(a) = 0$ e que $p(b) = 0$, pois $p(x)$ é divisível por $x - a$ e por $x - b$.

Na divisão de $p(x)$ por $(x - a) \cdot (x - b)$ o divisor é de grau 2; então, o resto é da forma $r(x) = mx + n$.

Temos:

$$p(x) = [(x - a)(x - b)] \cdot q(x) + \overbrace{mx + n}^{r(x)}$$

Substituindo **x** por **a** e por **b**, obtemos:

$$p(a) = [(a - a)(a - b)]q(a) + ma + n$$
$$p(b) = [(a - b)(b - b)]q(b) + mb + n$$

e, sendo $p(a) = p(b) = 0$:

$$\begin{cases} ma + n = 0 \\ mb + n = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, vem $m = n = 0$, e daí $r(x) \equiv 0$.

Observações

1.ª) É fácil verificar que a recíproca desse teorema é verdadeira, isto é: "se $p(x)$ é **divisível** por $(x - a) \cdot (x - b)$, então $p(x)$ é **divisível** por $x - a$ e é **divisível** por $x - b$".

2.ª) O teorema pode ser generalizado para um número finito de fatores $(x - a)$, $(x - b)$, $(x - c)$, ..., $(x - \ell)$, onde **a**, **b**, **c**, ..., ℓ são distintos dois a dois.

9.5 — A DIVISIBILIDADE POR $(x - c)^m$ — TEOREMA

> Um polinômio $p(x)$ é **divisível** por $(x - c)^2$ se e somente se:
>
> 1.º) $p(x)$ é **divisível** por $x - c$;
> 2.º) o quociente $q(x)$, da divisão de $p(x)$ por $x - c$, também é divisível por $x - c$.

Demonstração

1.ª parte

Hipótese: $p(x)$ é **divisível** por $(x - c)^2$.
Tese: $p(x)$ é **divisível** por $x - c$ e $q(x)$ é **divisível** por $x - c$.

Se p(x) é divisível por $(x - c)^2$, podemos escrever:

$$p(x) = (x - c)^2 q'(x)$$
$$p(x) = (x - c)\underbrace{[(x - c)q'(x)]}_{q(x)}$$

A identidade acima mostra que p(x) é divisível por x − c e que o quociente da divisão de p(x) por x − c:

$$q(x) = (x - c)q'(x)$$

também é divisível por x − c.

2.ª parte

Hipótese: p(x) é **divisível** por x − c e q(x) é **divisível** por x − c.
Tese: p(x) é **divisível** por $(x - c)^2$.

Se p(x) é divisível por x − c, podemos escrever:

$$p(x) = (x - c) \cdot q(x)$$

e, se q(x) é divisível por x − c:

$$q(x) = (x - c) \cdot q'(x)$$

Daí:

$$p(x) = (x - c)[(x - c)q'(x)]$$
$$p(x) = (x - c)^2 \cdot q'(x)$$

o que garante que p(x) é divisível por $(x - c)^2$.

Observação: Da mesma forma, pode-se demonstrar que: "um polinômio p(x) é **divisível** por $(x - c)^3$ se e somente se:

1.º) p(x) é **divisível** por x − c;
2.º) o quociente q(x), da divisão de p(x) por x − c, é **divisível** por x − c;
3.º) o quociente q'(x), da divisão de q(x) por x − c, é **divisível** por x − c".

O teorema pode ser generalizado para um divisor da forma $(x - c)^m$.

Exercícios Resolvidos

9.1) Determine **k**, $k \in \mathbb{R}$, para que o polinômio $p(x) = x^4 - 5x^3 + kx^2 - 2x + 6$ seja **divisível** por x + 2.

Solução

Devemos ter $p(-2) = 0$ (**teorema do resto**):

$$(-2)^4 - 5(-2)^3 + k \cdot (-2)^2 - 2(-2) + 6 = 0$$
$$4k + 66 = 0$$
$$k = -\frac{33}{2}$$

9.2) Determine os valores de **a**, $a \in \mathbb{R}$, sabendo que o resto na divisão de $p(x) = x^3 + x^2 - 5x - a^3 + 6$ por $x - a$ é positivo.

Solução

Devemos ter $p(a) > 0$:

$$a^3 + a^2 - 5a - a^3 + 6 > 0$$
$$a^2 - 5a + 6 > 0$$

e daí: $a < 2$ ou $a > 3$.

9.3) Determine **a** e **b**, no polinômio $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$, de modo que $f(x) + 1$ seja **divisível** por $x + 1$ e $f(x) - 1$ seja **divisível** por $x - 1$.

Solução

Se o polinômio $f(x) + 1 = x^3 + 2x^2 + ax + b + 1$ é divisível por $x + 1$, tem-se:

$$(-1)^3 + 2(-1)^2 + a(-1) + b + 1 = 0$$

Se o polinômio $f(x) - 1 = x^3 + 2x^2 + ax + b - 1$ é divisível por $x - 1$, tem-se:

$$1^3 + 2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b - 1 = 0$$

Daí, temos o sistema:

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ a + b = -2 \end{cases}$$

Então, $a = 0$ e $b = -2$.

9.4) Qual deve ser o valor do coeficiente **c** para que os restos das divisões de $p(x) = x^{10} + ax^4 + bx^2 + cx + d$ por $x + 12$ e por $x - 12$ sejam iguais?

Solução

Deve-se ter: $p(-12) = p(12)$.
Então:

$$(-12)^{10} + a(-12)^4 + b(-12)^2 + c(-12) + d = 12^{10} + a12^4 + b12^2 + 12c + d$$

e daí: $-12c = 12c$ e $c = 0$.

9.5) Determine **m** para que o polinômio $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4x - m$ seja **divisível** por $2x + 1$. Qual é o quociente na divisão?

Solução

O problema pede o quociente na divisão. Neste caso, a melhor solução é aplicarmos o **dispositivo de Briot-Ruffini**:

	1	0	-5	4	$-m$
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{19}{4}$	$\frac{51}{8}$	$\underbrace{-\frac{51}{16} - m}_{\text{zero}}$

A divisão é exata: $\frac{-51}{16} - m = 0$; e daí: $m = \frac{-51}{16}$.

O quociente é: $q(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{19}{8}x + \frac{51}{16}$.

9.6) Um polinômio p(x) foi dividido pelo polinômio x − a. Usando-se o **dispositivo de Briot-Ruffini**, obteve-se o quadro abaixo:

	3	− 4	5	d	e
a	b	− 10	c	24	40

Determine p(x).

Solução

Observe que no dispositivo temos sucessivamente:

$$\begin{cases} 3 = b \\ b \cdot a - 4 = -10 \\ -10 \cdot a + 5 = c \\ c \cdot a + d = 24 \\ 24 \cdot a + e = 40 \end{cases}$$

Daí: $a = -2$, $b = 3$, $c = 25$, $d = 74$, $e = 88$.
Então: $p(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 74x + 88$.

9.7) Efetue a divisão de $x^n - a^n$ por $x - a$, $n > 1$ e $a \neq 0$.

Solução

Aplicando o **dispositivo de Briot-Ruffini**, temos:

(n − 1) zeros

	1	0	0	0	...	0	0	$-a^n$
a	1	a	a^2	a^3	...	a^{n-2}	a^{n-1}	0

Então: $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}$ e $r = 0$.

9.8) Efetue a divisão de $x^n + a^n$ por $x + a$, $n > 1$ e $a \neq 0$.

Solução

Inicialmente observe que o resto é:

$$r = (-a)^n + a^n$$

se **n** é par: $r = 2a^n$; se **n** é ímpar: $r = 0$.

Aplicando o **dispositivo de Briot-Ruffini**:

1.° caso: **n** é par

	1	0	0	0	...	0	a^n
− a	1	− a	a^2	$-a^3$	...	$-a^{n-1}$	$2a^n$

Então: $q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-2}x - a^{n-1}$ e $r = 2a^n$.

2.° caso: **n** é ímpar

	1	0	0	0	...	0	a^n
− a	1	− a	a^2	$-a^3$	...	a^{n-1}	0

Então: $q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-2}x + a^{n-1}$ e $r = 0$.

9.9) Determine os valores de **m** e **n** de modo que o polinômio:

$$P(x) = x^4 + (m + n - 2)x^3 + 5x^2 - 3mx + 6$$

seja **divisível** por $(x - 1) \cdot (x - 2)$.

Solução

$P(x)$ é divisível por $(x - 1) \cdot (x - 2)$ se e somente se $P(x)$ for divisível por $(x - 1)$ e por $(x - 2)$, isto é, $P(1) = 0$ e $P(2) = 0$:

$$P(1) = 1^4 + (m + n - 2) \cdot (1)^3 + 5 \cdot (1)^2 - 3\,m \cdot (1) + 6 = 0$$
$$P(2) = 2^4 + (m + n - 2) \cdot (2)^3 + 5 \cdot (2)^2 - 3\,m \cdot (2) + 6 = 0$$

Daí:

$$\begin{cases} n - m + 10 = 0 \\ 8n + 2m + 26 = 0 \end{cases}$$

o que nos dá: $n = -4$ e $m = 3$.

9.10) Calcule os valores de **a** e **b** de modo que o polinômio $P(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + ax + b$ seja **divisível** por $x^2 + 1$.

Solução

Observe que:

$$x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i)$$

Assim, para que $P(x)$ seja divisível por $x^2 + 1$ é necessário que $P(x)$ seja divisível por $(x - i)$ e por $(x + i)$, isto é, $P(i) = 0$ e $P(-i) = 0$:

$$P(i) = i^4 + i^3 + 3 \cdot (i)^2 + a \cdot (i) + b = 0$$
$$P(-i) = (-i)^4 + (-i)^3 + 3 \cdot (-i)^2 + a \cdot (-i) + b = 0$$

Daí:

$$\begin{cases} ai + b - 2 - i = 0 \\ -ai + b - 2 + i = 0 \end{cases}$$

o que nos dá: $a = 1$ e $b = 2$.

9.11) Determine **a** e **b** de modo que o polinômio: $P(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 + ax + b$ seja **divisível** por $(x - 1)^2$.

Solução

O teorema 9.5 sugere-nos efetuar duas divisões sucessivas pelo **dispositivo de Briot-Ruffini**:

	1	−1	2	a	b
1	1	0	2	a + 2	a + 2 + b = 0
1	1	1	3	a + 5 = 0	

O sistema:

$$\begin{cases} a + 2 + b = 0 \\ a + 5 = 0 \end{cases}$$

nos dá: $a = -5$ e $b = 3$.

9.12) Um polinômio $P(x)$ dá resto 4 quando dividido por $x - 1$ e resto 12 quando dividido por $x - 2$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ pelo produto $(x - 1)(x - 2)$.

Solução

O **teorema do resto** nos dá: $P(1) = 4$ e $P(2) = 12$.

Como o produto $(x - 1)(x - 2)$ tem grau 2, o resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ terá, no máximo, grau 1 (ou será nulo); então, será da *forma* $R(x) = ax + b$.

Temos:

$$P(x) \equiv [(x - 1)(x - 2)]Q(x) + \overbrace{ax + b}^{R(x)}$$
$$P(1) = [(1 - 1)(1 - 2)]Q(1) + a \cdot 1 + b = 4$$
$$P(2) = [(2 - 1)(2 - 2)]Q(2) + a \cdot 2 + b = 12$$

O sistema:

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ 2a + b = 12 \end{cases}$$

apresenta como solução $a = 8$ e $b = -4$.

Assim, o resto procurado é $R(x) = 8x - 4$.

9.13) O polinômio $f(x)$ dividido por $x^2 - 1$ dá resto $2x + 1$. O polinômio $g(x)$ dividido por $x^2 - 3x + 2$ dá resto $x + 2$. Qual é o resto da divisão de $s(x) = f(x) + g(x)$ por $x - 1$? Qual é o resto da divisão de $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ por $x - 1$?

Solução

Temos:

$$f(x) \equiv (x^2 - 1)q(x) + (2x + 1) \quad (1)$$
$$g(x) \equiv (x^2 - 3x + 2)q'(x) + (x + 2) \quad (2)$$

O resto da divisão de $s(x)$ por $x - 1$ é $s(1) = f(1) + g(1)$.

O resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é $p(1) = f(1) \cdot g(1)$.

Em (1) e (2) substituindo **x** por 1:

$$f(1) = 3$$
$$g(1) = 3$$

Daí, o resto da divisão de $s(x)$ por $x - 1$ é 6; o resto da divisão de $p(x)$ por $x - 1$ é 9.

9.14) $f(x)$ é um polinômio tal que $\partial[f(x)] \geqslant 3$. $f(x)$ dividido por $x - 1$ dá quociente $q_1(x)$ e resto **a**; $q_1(x)$ dividido por $x - 2$ dá quociente $q_2(x)$ e resto 3; $q_2(x)$ dividido por $x - 3$ dá quociente $q_3(x)$ e resto 4. Determine **a**, sabendo que $2f(2) = 3f(3)$.

Solução

Temos:

$$f(x) \equiv (x - 1)q_1(x) + a \quad (1)$$
$$q_1(x) \equiv (x - 2)q_2(x) + 3 \quad (2)$$
$$q_2(x) \equiv (x - 3)q_3(x) + 4 \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), sucessivamente:

$$f(x) \equiv (x - 1)\underbrace{[(x - 2)q_2(x) + 3]}_{q_1(x)} + a$$

$$f(x) \equiv (x - 1)\{(x - 2)\underbrace{[(x - 3)q_3(x) + 4]}_{q_2(x)} + 3\} + a \quad (4)$$

Em (4), substituindo **x** por 2 e, em seguida, por 3:

$$f(2) = (2 - 1)\{\underbrace{(2 - 2)[(3 - 2)q_3(2) + 4]}_{\text{zero}} + 3\} + a$$

$$f(2) = 3 + a$$

$$f(3) = (3 - 1)\{(3 - 2)[\underbrace{(3 - 3)q_3(3)}_{\text{zero}} + 4] + 3\} + a$$

$$f(3) = 14 + a$$

E sendo $2\,f(2) = 3\,f(3)$, temos:

$$6 + 2a = 42 + 3a$$

e daí: $a = -36$.

9.15) Qual é o resto da divisão do polinômio $f(x) = x^{100} - 2x^{51} + 1$ por $x^2 - 1$?

Solução

O divisor $x^2 - 1$ tem grau 2; então, o resto é da *forma*:

$$R(x) = ax + b$$

Temos:

$$x^{100} - 2x^{51} + 1 \equiv (x^2 - 1)q(x) + \overbrace{ax + b}^{R(x)}$$

Substituindo **x** por 1 e em seguida por -1, obtemos:

$$1^{100} - 2 \cdot (1)^{51} + 1 = (1^2 - 1)q(1) + a + b$$

$$(-1)^{100} - 2 \cdot (-1)^{51} + 1 = [(-1)^2 - 1]q(-1) - a + b$$

O sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 4 \end{cases}$$

nos dá: $a = -2$ e $b = 2$.

Então, $R(x) = -2x + 2$.

9.16) Determine um polinômio f(x), de grau 3, que é **divisível** por $x - 3$ e que dividido por $x + 1$, $x - 1$ e $x - 2$ dá resto sempre igual a 5.

Solução

Podemos escrever:

$$f(x) \equiv (x + 1)q_1(x) + 5$$
$$f(x) \equiv (x - 1)q_2(x) + 5$$
$$f(x) \equiv (x - 2)q_3(x) + 5$$

Daí:

$$f(x) - 5 \equiv (x + 1)q_1(x)$$
$$f(x) - 5 \equiv (x - 1)q_2(x)$$
$$f(x) - 5 \equiv (x - 2)q_3(x)$$

As identidades anteriores garantem que o polinômio $f(x) - 5$ é divisível por $(x + 1)$, $(x - 1)$ e $(x - 2)$; então, $f(x) - 5$ é divisível pelo produto $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$. Logo:

$$f(x) - 5 \equiv (x + 1)(x - 1)(x - 2) \cdot q(x)$$

E, sendo $f(x) - 5$ um polinômio de grau 3, $q(x)$ tem grau zero, ou seja, é *constante*:

$$f(x) - 5 \equiv (x + 1)(x - 1)(x - 2) \cdot \mathbf{k} \qquad (1)$$

Também $f(3) = 0$, pois $f(x)$ é divisível por $x - 3$.

Substituindo **x** por 3 na identidade (1):

$$f(3) - 5 = (3 + 1)(3 - 1)(3 - 2) \cdot k$$

daí: $k = -\frac{5}{8}$; e, voltando em (1):

$$f(x) = -\frac{5}{8}(x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

9.17) Determine os coeficientes **a** e **b** para que o polinômio $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + 1$ seja **divisível** por $(x - 1)^2$. Determine o quociente.

Solução

Vamos aplicar o **dispositivo de Briot-Ruffini**, efetuando duas divisões sucessivas:

	a	b	0	0 ...	0		1
1	a	a + b	a + b	a + b ...	a + b		a + b + 1 = 0
1	a	2a + b	3a + 2b	4a + 3b ...	na + (n − 1)b = 0		

O sistema:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ na + (n - 1)b = 0 \end{cases}$$

nos dá: $a = n - 1$ e $b = -n$.

Observe que o quociente na divisão de $f(x)$ por $(x - 1)^2$ é:

$$q(x) = (n - 1)x^{n-2} + (n - 2)x^{n-3} + \ldots + 2x + 1$$

Exercícios Propostos

9.18) Efetue a divisão de $A(x)$ por $B(x)$ nos seguintes casos:

a) $A(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ e $B(x) = x - 1$
b) $A(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$ e $B(x) = x + 3$
c) $A(x) = 4x^3 + x^2$ e $B(x) = x + 1 + i$
d) $A(x) = x^3 - x^2 - x$ e $B(x) = x - 1 + 2i$
e) $A(x) = 4x^3 - 8x^2 + 6x + 10$ e $B(x) = 2x - 8$
f) $A(x) = 6x^2 - 7x + 8$ e $B(x) = 3x + 4$

9.19) Um polinômio $f(x)$, do segundo grau, dividido por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$ dá restos 1, 8 e 27, respectivamente. Determine $f(x)$.

9.20) Determine o valor de **m** de modo que o polinômio $5x^4 - 6x^3 + 4x^2 - mx + 2$ seja **divisível** por $x + 2$.

9.21) Dividindo-se um polinômio P(x) por x − a, usando-se o **dispositivo de Briot-Ruffini**, obteve-se o quadro abaixo:

	4	13	c	d	e
a	b	1	− 5	4	0

Determine o polinômio P(x).

9.22) Divida $x^n - a^n$ por $x + a$, $n > 1$ e $a \neq 0$.

9.23) Divida $x^n + a^n$ por $x - a$, $n > 1$ e $a \neq 0$.

9.24) Determine **a** e **b** para que o polinômio $ax^3 + bx^2 - 28x + 15$ seja **divisível** por $x + 3$ e que, dividido por $x - 3$, dê resto -60.

9.25) Dê as condições que **p** e **q** devem satisfazer para que o polinômio $x^p + 2a^q x^{p-q} + a^p$ seja **divisível** por $x + a$ (**p** e **q** **naturais**, $p > q$ e $a \neq 0$).

9.26) Verifique que:

a) o polinômio $f(x) = (x - 2)^{100} + (x - 1)^{50} - 1$ é **divisível** por $x^2 - 3x + 2$.
b) o polinômio $f(x) = (x + 1)^{2n} - x^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ é **divisível** por $x(x + 1)(2x + 1)$.

9.27) Se **n** é ímpar e $a \neq b$, verifique que o polinômio: $(a + b + x)^n - a^n - b^n - x^n$ é **divisível** por $(x + a)(x + b)$.

9.28) Verifique que o polinômio $2x^5 - 15x^3 + 12x^2 + 7x - 6$ é **divisível** por $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$. Qual é o quociente dessa divisão?

9.29) Os restos das divisões de um polinômio P(x) por $x - 1$ e por $x - 2$ são 3 e 4, respectivamente. Qual é o resto da divisão de P(x) pelo produto $(x - 1)(x - 2)$?

9.30) Determine o resto da divisão de um polinômio A(x) por $B(x) = x^2 + 1$, conhecendo-se A(i) e A(− i), onde **i** é a *unidade imaginária*.

9.31) Qual é o resto da divisão de $x^{100} + 2x^{99} - 3x^3 + 2x + 5$ por $x^2 + x - 2$?

9.32) Determine o resto da divisão de um polinômio A(x) por $B(x) = -x^2 + 5x - 6$, sabendo que $A(2) = 1$, $A(-1) = 3$ e que o quociente da divisão de A(x) por B(x) é **divisível** por $x + 1$.

9.33) Os restos das divisões de P(x) por $x + 1$, $x - 1$ e $x - 2$ são 5, − 1 e − 1, respectivamente. Qual é o resto da divisão de P(x) pelo produto $(x^2 - 1)(x - 2)$?

9.34) Um polinômio p(x), quando dividido por $(x - 1)(x + 2)$, dá resto $2x + 5$. Dê os restos das divisões de p(x) por $x - 1$ e por $x + 2$.

9.35) Quando um polinômio p(x) é dividido por $ax - b$ e por $bx - a$, os restos são iguais e os quocientes são $q_1(x)$ e $q_2(x)$, respectivamente; **a** e **b** são reais não nulos e $|a| \neq |b|$.
Mostre que $q_2(x)$ é **divisível** por $ax - b$ e que $q_1(x) + q_2(x)$ é **divisível** por $x - 1$.

9.36) O polinômio f(x), dividido por $ax + b$, $a \neq 0$, dá quociente q(x) e resto **r**. Qual é o resto da divisão de:

a) f(x) por $x + \frac{b}{a}$ b) $x \cdot f(x)$ por $ax + b$ c) $x^2 \cdot f(x)$ por $ax + b$

9.37) O polinômio f(x), quando dividido por $x - 1$, dá resto **a**; dividido por $x + 2$, dá resto **b**. O quociente da divisão de f(x) por $x - 1$ é q(x). Qual é o resto da divisão de q(x) por $x + 2$?

9.38) Determine o polinômio f(x), de grau 3, sabendo que f(x) é **divisível** por $x - 4$ e que, dividido por $x - 1$, $x - 2$ e $x - 3$, dá o mesmo resto 6.

9.39) Determine **a** e **b** para que o polinômio $ax^4 + bx^3 + 1$ seja **divisível** por $(x - 1)^2$.

9.40) O polinômio $A(x) = x^5 + px + q$ é **divisível** por $(x - a)^2$. Verifique que $p = -5a^4$ e $q = 4a^5$, $a \neq 0$. Qual é o quociente na divisão?

9.41) Verifique que o polinômio $p(x) = x^{n+2} - x^{n+1} + (n - 1)x^2 - (2n - 1)x + n$ é **divisível** por $(x - 1)^2$, mas não é divisível por $(x - 1)^3$.
Qual é o quociente da divisão de p(x) por $(x - 1)^2$?

9.42) Verifique que o polinômio $p(x) = x(x^{n-1} - na^{n-1}) + a^n(n - 1)$ é **divisível** por $(x - a)^2$. Qual é o quociente na divisão?

9.43) Determine os números reais **a** e **b** e o maior inteiro **m**, de tal modo que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^4 + bx^3 - bx^2 + 2x - 1$ seja **divisível** por $(x - 1)^m$.

9.44) Mostre que o polinômio:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \end{vmatrix}$$

é **divisível** por $(x - 1)^3$.

9.45) O polinômio $p(x) = 2x^4 - ax^3 + 19x^2 - 20x + 12$ é **divisível** por $(x - p)^2$, onde **a** e **p** são inteiros positivos. Determine **a** e **p**.

9.46) Determine o polinômio f(x), de grau 3, sabendo que f(x): é **divisível** por $x + 2$; dividido por $x + 1$ dá resto 3; e dividido por $(x - 1)^2$ dá resto -9.

9.47) Verifique que o polinômio $p(x) = x^{4a} + x^{4b+1} + x^{4c+2} + x^{4d+3}$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são inteiros positivos, é **divisível** por $x^3 + x^2 + x + 1$.

9.48) O polinômio $f(x) = x^n(x^2 + ax + b)$, com **n** inteiro positivo, dividido por $(x - 2)^2$ dá resto $2^n(x - 2)$. Determine **a** e **b**.

9.49) Prove que o polinômio $f(x) = (\cos \varphi + x \operatorname{sen} \varphi)^n - \cos(n\varphi) - x \operatorname{sen}(n\varphi)$ é **divisível** por $x^2 + 1$.

Capítulo 10

Outros temas importantes

10.1 — POLINÔMIO DERIVADO

Definição

Seja o polinômio de coeficientes complexos:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_kx^k + \dots + a_nx^n,\ a_n \neq 0 \text{ e } n \geqslant 1$$

Chama-se **polinômio derivado de p(x)** ao polinômio:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + ka_kx^{k-1} + \dots + na_nx^{n-1}$$

De uma forma abreviada, podemos escrever:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \Rightarrow p'(x) = \sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1}$$

Em particular, se o polinômio p(x) é uma *constante* ou é o polinômio *nulo*, então o polinômio derivado p'(x) é o polinômio *nulo*.

Exemplos

1.º) Se $p(x) = 6 + 5x + 4x^2$, então $p'(x) = 5 + 2 \cdot 4x = 5 + 8x$.
2.º) Se $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 10$, então $p'(x) = 3 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 4x + 2 = 6x^2 + 8x + 2$.
3.º) Se $p(x) = 2x + 1$, então $p'(x) = 1 \cdot 2 \cdot x^0 = 2$.
4.º) Se $p(x) = 3$, então $p'(x) = 0$.

Adição - Propriedade I

Quaisquer que sejam os polinômios p(x) e q(x), tem-se:

$$[p(x) + q(x)]' = p'(x) + q'(x)$$

Demonstração

Se um dos polinômios é uma *constante*, a propriedade é evidente. Caso contrário, sejam:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ e } q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

Suponhamos $n \geqslant m$; observe, então, que os coeficientes b_k são nulos para $m < k \leqslant n$. E, considerando esses eventuais coeficientes nulos, podemos escrever:

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

Por definição, tem-se:

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}, \ q'(x) = \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1}, \ [p(x) + q(x)]' = \sum_{k=1}^{n} k(a_k + b_k) x^{k-1}$$

Daí:

$$p'(x) + q'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} k b_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (k a_k x^{k-1} + k b_k x^{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(a_k + b_k) x^{k-1} = [p(x) + q(x)]'$$

Propriedade II

Sejam o polinômio p(x) e o número complexo λ. Tem-se:

$$[\lambda \cdot p(x)]' = \lambda \cdot p'(x)$$

Demonstração

Se p(x) é *constante*, a propriedade é evidente. Caso contrário, seja:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Tem-se:

$$\lambda \cdot p(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$$

e, por definição:

$$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \text{ e } [\lambda p(x)]' = \sum_{k=1}^{n} (k\lambda a_k x^{k-1})$$

Daí:

$$\lambda \cdot p'(x) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \cdot k a_k x^{k-1}) = [\lambda \cdot p(x)]'$$

Multiplicação - Propriedade III

Quaisquer que sejam os polinômios p(x) e q(x), tem-se:

$$[p(x) \cdot q(x)]' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$$

Demonstração

Veja exercício 10.12.

Propriedade IV

Sejam os polinômios p(x) e q(x), tais que:

$$p(x) = [q(x)]^n, \text{ onde } n \in \mathbb{N}^*$$

Então:

$$p'(x) = n \cdot [q(x)]^{n-1} \cdot q'(x)$$

Demonstração

Veja exercício 10.12.

Exemplos

1.º) Se $f(x) = \underbrace{(x^2 + x + 2)}_{p(x)} + \underbrace{(x^3 + 4x)}_{q(x)}$, tem-se:

$$f'(x) = \underbrace{(2x + 1)}_{p'(x)} + \underbrace{(3x^2 + 4)}_{q'(x)}$$

2.º) Se $f(x) = \underbrace{20}_{\lambda} \cdot \underbrace{(x^4 + 3x^2 + 4x + 5)}_{p(x)}$, tem-se:

$$f'(x) = \underbrace{20}_{\lambda} \cdot \underbrace{(4x^3 + 6x + 4)}_{p'(x)}$$

3.º) Se $f(x) = \underbrace{(x^3 + 2x^2 + 5x)}_{p(x)} \cdot \underbrace{(x^5 + 6x^2 + 2)}_{q(x)}$, tem-se:

$$f'(x) = \underbrace{(3x^2 + 4x + 5)}_{p'(x)} \cdot \underbrace{(x^5 + 6x^2 + 2)}_{q(x)} + \underbrace{(x^3 + 2x^2 + 5x)}_{p(x)} \cdot \underbrace{(5x^4 + 12x)}_{q'(x)}$$

4.º) Se $f(x) = \underbrace{(x^6 + 13x^2)^{200}}_{g^{200}(x)}$, então $f'(x) = 200 \cdot \underbrace{(x^6 + 13x^2)^{199}}_{g^{199}(x)} \cdot \underbrace{(6x^5 + 26x)}_{g'(x)}$

Derivação sucessiva

Seja p(x) um polinômio de coeficientes complexos.

Define-se **polinômio derivado de ordem n do polinômio p(x)**, notado com $p^{(n)}(x)$, como segue:

1.º) $p^{(0)}(x) = p(x)$
2.º) $p^{(n+1)}(x) = [p^{(n)}(x)]'$

Assim, tem-se sucessivamente:

$p^{(0)}(x) = p(x)$
$p^{(1)}(x) = p'(x)$
$p^{(2)}(x) = [p'(x)]'$, que também se nota $p''(x)$
$p^{(3)}(x) = [p''(x)]'$, que também se nota $p'''(x)$
....

Exemplo

Sendo o polinômio $p(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 7x + 8$, temos, sucessivamente:

$$p^{(0)}(x) = p(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 7x + 8$$
$$p^{(1)}(x) = p'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 10x + 7$$
$$p^{(2)}(x) = p''(x) = 12x^2 + 36x + 10$$
$$p^{(3)}(x) = p'''(x) = 24x + 36$$
$$p^{(4)}(x) = p''''(x) = 24$$
$$p^{(5)}(x) = p'''''(x) = 0$$
$$p^{(6)}(x) = p^{(7)}(x) = p^{(8)}(x) = \ldots = 0$$

Observe que na seqüência $p^{(0)}(x)$, $p^{(1)}(x)$, $p^{(2)}(x)$, ... o grau dos polinômios diminui de **1**; assim, se p(x) tem grau **n**, todos os polinômios derivados de ordem superior a **n** são **nulos**.

Exercícios Resolvidos

10.1) No polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tem-se $p'(\alpha) = 0$. Verifique que $p(\alpha) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Solução

Temos:

$$p'(x) = 2ax + b$$

$$p'(\alpha) = 0 \Rightarrow 2a\alpha + b = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{b}{2a}$$

$$p(\alpha) = p\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \frac{-b}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} =$$

$$= -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

10.2) Determine um polinômio da *forma* $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, sabendo que:

$$p(2x) \equiv p'(x) \cdot p''(x)$$

Solução

Temos:

$$p(2x) = a_0 + a_1(2x) + a_2(2x)^2 + a_3(2x)^3$$
$$p(2x) = a_0 + 2a_1x + 4a_2x^2 + 8a_3x^3$$
$$p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$
$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x$$

Sendo $p(2x) \equiv p'(x) \cdot p''(x)$, temos:

$$a_0 + 2a_1x + 4a_2x^2 + 8a_3x^3 \equiv (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)(2a_2 + 6a_3x)$$
$$a_0 + 2a_1x + 4a_2x^2 + 8a_3x^3 \equiv 2a_1a_2 + (6a_1a_3 + 4a_2^2)x + 18a_2a_3x^2 + 18a_3^2x^3$$

O sistema:

$$\begin{cases} 2a_1a_2 = a_0 \\ 6a_1a_3 + 4a_2^2 = 2a_1 \\ 18a_2a_3 = 4a_2 \\ 18a_3^2 = 8a_3 \end{cases}$$

apresenta como solução:

1.º) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e p(x) é **nulo**

2.º) $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, $a_3 = \frac{4}{9}$ e $p(x) = \frac{4}{9}x^3$.

10.3) Um polinômio p(x) satisfaz a condição $p(x) + p'(x) \equiv 2x^2 + 5x + 4$. Determine p(x).

Solução

Note que o grau de p(x) é maior que o grau de p'(x); então, o grau de p(x) é igual ao grau da soma p(x) + p'(x), isto é, p(x) tem grau 2.

Então, p(x) é da forma:

$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

Daí:

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{p(x)} + \underbrace{(2ax + b)}_{p'(x)} \equiv 2x^2 + 5x + 4$$

$$ax^2 + (b + 2a)x + (c + b) \equiv 2x^2 + 5x + 4$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = 5 \\ c + b = 4 \end{cases}$$

obtemos: $a = 2$, $b = 1$ e $c = 3$; então, $p(x) = 2x^2 + x + 3$.

10.4) Os polinômios f(x) e g(x) satisfazem a condição:

$$g(x) \equiv x^2 \cdot [f(x)]^3$$

Calcule $g'(3)$, sabendo que $f(3) = 2$ e $f'(3) = 1$.

Solução

Usando as propriedades do polinômio derivado, temos:

$$g'(x) \equiv \overbrace{2x \cdot [f(x)]^3 + x^2 \cdot \underbrace{3\,[f(x)]^2 \cdot f'(x)}_{\text{propriedade IV}}}^{\text{propriedade III}}$$

Substituindo **x** por 3:

$$g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot [f(3)]^3 + 3^2 \cdot 3 \cdot [f(3)]^2 \cdot f'(3)$$
$$g'(3) = 2 \cdot 3 \cdot 2^3 + 3^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 1$$
$$g'(3) = 154$$

10.5) Para o polinômio $p(x) = x^k$, demonstre as **implicações**:

1.ª) $h \leqslant k \Rightarrow p^{(h)}(x) = A_{k,h} \cdot x^{k-h}$
2.ª) $h > k \Rightarrow p^{(h)}(x) = 0$

Solução

Para a demonstração da primeira implicação, vamos usar o **Método da Indução Matemática**. (Veja volume 2 desta coleção, p. 31.)

Teorema 1

A primeira implicação é evidente para $h = 0$.

Teorema 2

Hipótese: suponhamos que a implicação é válida para $h < k$, isto é:

$$p^{(h)}(x) = A_{k,h} \cdot x^{k-h}$$

Tese: demonstremos que a implicação é válida para $h + 1 \leqslant k$, isto é:

$$p^{(h+1)}(x) = A_{k,h+1} \cdot x^{k-(h+1)}$$

De fato:

$$p^{(h+1)}(x) = [p^{(h)}(x)]' = [A_{k,h} \cdot x^{k-h}]' = A_{k,h} \cdot (x^{k-h})' = A_{k,h} \cdot (k-h) \cdot x^{k-h-1} =$$
$$= \underbrace{(k-h) \cdot A_{k,h}}_{A_{k,h+1}} \cdot x^{k-(h+1)} = A_{k,h+1} \cdot x^{k-(h+1)}$$

A primeira implicação está demonstrada para todo **h**, $h \leqslant k$. Em particular, para $h = k$ tem-se:

$$p^{(k)}(x) = k!$$

Daí, para $h > k$, como **k**! é uma *constante*:

$$p^{(h)}(x) = 0$$

o que demonstra a segunda implicação.

Exercícios Propostos

10.6) Para cada polinômio p(x) abaixo, determine p'(x):

a) $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$
b) $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{13}{5}x^5 - 2x^6 + \frac{4}{7}x^7$
c) $p(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (x + 4)$
d) $p(x) = (5x^2 + 7)^3$
e) $p(x) = (1 + 5x - 8x^2)^5$
f) $p(x) = (a + bx)^m$, $m \in \mathbb{N}^*$ e $b \neq 0$

10.7) O polinômio f(x), de grau 2, satisfaz as condições: $f'(1) = 2$, $f'(2) = 1$ e $f(0) = 4$. Determine-o.

10.8) Determine **a**, **b** e **c** no polinômio $P(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c$, sabendo que $P(x) + k(x-1) \cdot P'(x) + (x^2 - 1)\,P''(x) \equiv 0$, $k \in \mathbb{R}$.

10.9) Um polinômio f(x) satisfaz a condição $f(x) \cdot f'(x) \equiv 2x^3 + 6x^2 + 10x + 6$. Determine-o.

10.10) a) Se $p(x) = 5x^4$, determine $p'(x)$, $p''(x)$ e $p'''(x)$.
b) Se $p(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + 8$, determine $p^{(4)}(x)$.

10.11) Seja o polinômio:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Demonstre as **implicações**:

1.ª) $h \leqslant n \Rightarrow p^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{n} a_k A_{k,h} \cdot x^{k-h}$

2.ª) $h > n \Rightarrow p^{(h)}(x) = 0$

10.12) Demonstre as propriedades III e IV, referidas anteriormente, neste capítulo.

10.2 — MÁXIMO DIVISOR COMUM

Definição

Sejam a(x) e b(x) polinômios não nulos, de coeficientes complexos.

Então, o polinômio d(x) é um **máximo divisor comum (mdc) de a(x) e b(x)** se e somente se:

a) $d(x) \mid a(x)$ e $d(x) \mid b(x)$;
b) se $c(x) \mid a(x)$ e $c(x) \mid b(x)$, então $c(x) \mid d(x)$.

Indica-se:

$$d(x) = \textbf{mdc}\,[a(x);\ b(x)]$$

Observe que se d(x) é um máximo divisor comum de a(x) e b(x), então $\lambda \cdot d(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, também o é. Daí, um máximo divisor comum de a(x) e b(x) *não é único.*

Exemplo

Se $(x) = (x - 1)^2 (x - 2)(x - 3)$ e $b(x) = (x - 1)(x - 2)^3 (x - 4)$, um **mdc** de a(x) e b(x) é $d_1(x) = (x - 1)(x - 2)$; qualquer outro **mdc** é da forma $d(x) = c \cdot (x - 1)(x - 2)$, onde $c \neq 0$.

Definição

Chamamos **normalizado** a um polinômio p(x), não nulo, se o seu *coeficiente dominante* é **1**; neste caso, então, p(x) tem a forma:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

Se $q(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0$ é um polinômio não nulo, onde $b_n \neq 0$, existe um polinômio p(x) tal que:

$$p(x) = \frac{1}{b_n} \cdot q(x) = x^n + \frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1} + \dots + \frac{b_0}{b_n}$$

Então, para todo polinômio q(x), não nulo, há um único **polinômio normalizado** p(x), que é o produto de q(x) por uma constante **c**, $c \neq 0$; *p(x) denomina-se polinômio normalizado associado a q(x).*

Por exemplo, se $q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 4x + 5$, tem-se:

$$p(x) = \frac{1}{3}[3x^3 + 2x^2 + 4x + 5] = x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

Observe que, se d(x) é um **mdc** de a(x) e b(x), podemos associar-lhe um polinômio $d_1(x)$, **normalizado**, tal que:

$$d_1(x) = \textbf{mdc}\,[a(x);\ b(x)]$$

Denomina-se **mdc normalizado de a(x) e b(x)** ao polinômio $d_1(x)$. Assim, para cada par [a(x); b(x)], esse polinômio $d_1(x)$ é **único**.

Agora, vamos construir um processo para a determinação do **mdc** de polinômios.

Teorema

Se a(x) e b(x) são polinômios **não nulos**, onde $gr[a(x)] \geqslant gr[b(x)]$, e r(x), **não nulo**, é o resto da divisão de a(x) por b(x), então:

$$\textbf{mdc}\,[a(x);\ b(x)] = \textbf{mdc}\,[b(x);\ r(x)]$$

Demonstração (opcional)

Temos:

$$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x) \text{ e, daí, } r(x) = a(x) - b(x) \cdot q(x) \qquad (1)$$

Sejam **mdc** [a(x); b(x)] = d(x) e **mdc** [b(x); r(x)] = $d_1(x)$; então:

$$d(x) \mid a(x) \Rightarrow a(x) = d(x) \cdot q_1(x)$$
$$d(x) \mid b(x) \Rightarrow b(x) = d(x) \cdot q_2(x)$$

Substituindo em (1), vem:

$$r(x) = d(x) \cdot q_1(x) - d(x) \cdot q_2(x) \cdot q(x)$$
$$r(x) = d(x)[q_1(x) - q_2(x) \cdot q(x)]$$

e, daí, podemos concluir que: $d(x) \mid r(x)$.

Como $d(x) \mid b(x)$ e $d(x) \mid r(x)$, concluímos que $d(x) \mid d_1(x) =$ **mdc** [b(x); r(x)].

Por outro lado, temos:

$$d_1(x) \mid b(x) \Rightarrow b(x) = d_1(x) \cdot q_3(x)$$
$$d_1(x) \mid r(x) \Rightarrow r(x) = d_1(x) \cdot q_4(x)$$

e, substituindo na identidade $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$, vem:

$$a(x) = d_1(x)q_3(x) \cdot q(x) + d_1(x) \cdot q_4(x) = d_1(x) \cdot [q_3(x) \cdot q(x) + q_4(x)]$$

isto é, $d_1(x) \mid a(x)$. E, como $d_1(x) \mid b(x)$, vem: $d_1(x) \mid d(x)$.

Se $d(x) \mid d_1(x)$ e $d_1(x) \mid d(x)$, vem a tese: $d(x) = d_1(x)$.

O algoritmo de Euclides

O método de obtenção de um **mdc** de dois polinômios, que se baseia no teorema anterior, utiliza o algoritmo da divisão repetidas vezes – esse método denomina-se *algoritmo de Euclides*. Vamos descrevê-lo.

1. Sejam os polinômios a(x) e b(x), com $gr[a(x)] \geqslant gr[b(x)]$, e seja $r_1(x)$ o resto da divisão de a(x) por b(x).
   Se $r_1(x) = 0$, então $b(x) =$ **mdc** $[a(x); b(x)]$.
2. Se $r_1(x) \neq 0$, tem-se **mdc** $[a(x); b(x)] =$ **mdc** $[b(x); r_1(x)]$.
   Seja $r_2(x)$ o resto da divisão de b(x) por $r_1(x)$.
   Se $r_2(x) = 0$, então $r_1(x) =$ **mdc**$[a(x); b(x)]$.
3. Se $r_2(x) \neq 0$, tem-se **mdc**$[b(x); r_1(x)] =$ **mdc**$[r_1(x); r_2(x)]$.
   Seja $r_3(x)$ o resto da divisão de $r_1(x)$ por $r_2(x)$.
   Se $r_3(x) = 0$, então $r_2(x) =$ **mdc**$[a(x); b(x)]$.

Observe que efetuando as *divisões sucessivas* temos:

$$gr[b(x)] > gr[r_1(x)] > gr[r_2(x)] > gr[r_3(x)] > \dots$$

Então, após certo número **n** de divisões, **sempre se atinge uma divisão exata** (a divisão de um polinômio por uma *constante* é certamente exata); isto é, se $r_n(x) = 0$, temos:

$$\boxed{r_{n-1}(x) = \textbf{mdc}\,[a(x);\ b(x)]}$$

Observe a seqüência das operações executadas:

$$\begin{aligned}
a(x) &= b(x)q_1(x) + r_1(x)\\
b(x) &= r_1(x)q_2(x) + r_2(x)\\
r_1(x) &= r_2(x)q_3(x) + r_3(x)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
r_{n-2}(x) &= \underbrace{r_{n-1}(x)}_{\textbf{mdc}}q_n(x) + \underbrace{r_n(x)}_{0}
\end{aligned}$$

O polinômio $r_{n-1}(x)$ é um **mdc** de a(x) e b(x); a ele podemos associar o **mdc normalizado**.

Exemplos

1.º) Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ e $b(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$.

1. *Dividimos* $a(x)$ *por* $b(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
a(x) = & x^6 + 2x^5 \qquad + x^3 + 3x^2 + 3x + 2 & x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = b(x) \\
 & -x^6 - 4x^5 - 4x^4 + x^3 + 2x^2 & x^2 - 2x + 4 \\
\hline
 & -2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x + 2 & \\
 & 2x^5 + 8x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 4x & \\
\hline
 & 4x^4 + 10x^3 + 3x^2 - x + 2 & \\
 & -4x^4 - 16x^3 - 16x^2 + 4x + 8 & \\
\hline
 & r_1(x) = -6x^3 - 13x^2 + 3x + 10 &
\end{array}
$$

2. *Dividimos* $b(x)$ *por* $r_1(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
b(x) = & x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 & -6x^3 - 13x^2 + 3x + 10 = r_1(x) \\
 & -x^4 - \frac{13}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x & -\frac{1}{6}x - \frac{11}{36} \\
\hline
 & \frac{11}{6}x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 2 & \\
 & -\frac{11}{6}x^3 - \frac{143}{36}x^2 + \frac{11}{12}x + \frac{55}{18} & \\
\hline
 & r_2(x) = \frac{19}{36}x^2 + \frac{19}{12}x + \frac{19}{18} &
\end{array}
$$

3. *Dividimos* $r_1(x)$ *por* $r_2(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
r_1(x) = & -6x^3 - 13x^2 + 3x + 10 & \frac{19}{36}x^2 + \frac{19}{12}x + \frac{19}{18} = r_2(x) \\
 & 6x^3 + 18x^2 + 12x & -\frac{216}{19}x + \frac{180}{19} \\
\hline
 & 5x^2 + 15x + 10 & \\
 & -5x^2 - 15x - 10 & \\
\hline
 & r_3(x) = 0 &
\end{array}
$$

Então, $r_2(x) =$ **mdc**$[a(x); b(x)]$; o **mdc normalizado** é:

$$d(x) = x^2 + 3x + 2$$

Observe que os cálculos são exaustivos; para facilitá-los, pode-se, por exemplo, antes de dividir $b(x)$ por $r_1(x)$, multiplicar $b(x)$ por 6.
Assim fazendo, $r_2(x)$ estará multiplicado por uma *constante*, o que pouca importância tem em nosso propósito, pois, se $d(x)$ é um **mdc** de $a(x)$ e $b(x)$, então $c \cdot d(x)$, $c \neq 0$, também o é.

2.º) Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$ e $b(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

1. *Dividimos* $a(x)$ *por* $b(x)$:

$$
\begin{array}{rl|l}
a(x) = & 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 & 2x^2 - 3x + 1 = b(x) \\
 & -6x^3 + 9x^2 - 3x & 3x - 2 \\
\hline
 & -4x^2 + 6x - 2 & \\
 & 4x^2 - 6x + 2 & \\
\hline
 & r_1(x) = 0 &
\end{array}
$$

Então, b(x) é um **mdc** de a(x) e b(x); o **mdc normalizado** é:

$$d(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

3.º) Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ e $b(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

1. *Dividimos* a(x) *por* b(x):

$$\begin{array}{rl|l}
a(x) = & x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 & x^4 - 13x^2 + 36 = b(x) \\ \cline{3-3}
& -x^4 \qquad + 13x^2 \qquad - 36 & 1 \\ \cline{2-2}
r_1(x) = & -x^3 + 6x^2 + x - 30 &
\end{array}$$

2. *Dividimos* b(x) *por* $r_1(x)$:

$$\begin{array}{rl|l}
b(x) = & x^4 \qquad - 13x^2 \qquad + 36 & -x^3 + 6x^2 + x - 30 = r_1(x) \\ \cline{3-3}
& -x^4 + 6x^3 + x^2 - 30x & -x - 6 \\ \cline{2-2}
& 6x^3 - 12x^2 - 30x + 36 & \\
& -6x^3 + 36x^2 + 6x - 180 & \\ \cline{2-2}
r_2(x) = & 24x^2 - 24x - 144 &
\end{array}$$

3. *Dividimos* $r_1(x)$ *por* $r_2(x)$:

$$\begin{array}{rl|l}
r_1(x) = & -x^3 + 6x^2 + x - 30 & 24x^2 - 24x - 144 = r_2(x) \\ \cline{3-3}
& x^3 - x^2 - 6x & -\frac{1}{24}x + \frac{5}{24} \\ \cline{2-2}
& 5x^2 - 5x - 30 & \\
& -5x^2 + 5x + 30 & \\ \cline{2-2}
r_3(x) = & 0 &
\end{array}$$

Então, $r_2(x)$ = **mdc** [a(x); b(x)]; o **mdc normalizado** é: $d(x) = x^2 - x - 6$.
Às vezes, e quando isso é possível, dadas as limitações de espaço, podemos dispor os cálculos da seguinte forma:

		b(x)	$q_1(x)$ ↓	$q_2(x)$ ↓
		1	$-x-6$	$\frac{-1}{24}x + \frac{5}{24}$
a(x) →	$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$	$x^4 - 13x^2 + 36$	$-x^3 + 6x^2 + x - 30$	$24x^2 - 24x - 144$
	$-x^3 + 6x^2 + x - 30$ ↑ $r_1(x)$	$24x^2 - 24x - 144$ ↑ $r_2(x)$	0 ↑ $r_3(x)$	

4.º) Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = (x - 2)^2 (x - 3)^3 (x + 2)$ e $b(x) = (x - 2)^3 \cdot (x - 3)(x + 4)$.
Observe que a(x) e b(x) estão *fatorados* em um produto de potências cujas bases são polinômios do primeiro grau, dois a dois distintos. Então, para

formarmos um **mdc**, construímos o **produto dos fatores comuns aos polinômios dados, afetados esses fatores nos menores expoentes com que aparecem em a(x) e b(x)**:

$$d(x) = (x - 2)^2 (x - 3) = \textbf{mdc}[a(x); b(x)]$$

Observe que o polinômio d(x) satisfaz as condições da definição.

Definição

> Chamamos **primos entre si** aos polinômios não nulos a(x) e b(x), quando:
>
> $$\textbf{mdc}\,[a(x);\ b(x)] = k,\ k \text{ constante},\ k \neq 0$$

Observe que se a(x) e b(x) são **primos entre si** o **mdc normalizado** de a(x) e b(x) é **1**.

Exemplo

Vamos determinar um **mdc** de $a(x) = 2x^4 + 4x^2 - 2x + 2$ e $b(x) = 2x^2 + x - 1$.

1. *Dividimos* a(x) *por* b(x):

$$\begin{array}{rrrrr|l}
a(x) = 2x^4 & & +\ 4x^2 & -\ 2x & +\ 2 & 2x^2 + x - 1 = b(x) \\ \cline{6-6}
-\ 2x^4 & -\ x^3 & +\ x^2 & & & x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{4} \\ \cline{1-5}
& -\ x^3 & +\ 5x^2 & -\ 2x & +\ 2 & \\
& x^3 & +\ \frac{1}{2}x^2 & -\ \frac{1}{2}x & & \\ \cline{1-5}
& & \frac{11}{2}x^2 & -\ \frac{5}{2}x & +\ 2 & \\
& & -\ \frac{11}{2}x^2 & -\ \frac{11}{4}x & +\ \frac{11}{4} & \\ \cline{3-5}
& & r_1(x) = & -\ \frac{21}{4}x & +\ \frac{19}{4} &
\end{array}$$

2. *Dividimos* b(x) *por* $r_1(x)$:

$$\begin{array}{rrr|l}
b(x) = 2x^2 & +\ x & -\ 1 & -\frac{21}{4}x + \frac{19}{4} = r_1(x) \\ \cline{4-4}
-\ 2x^2 & +\ \frac{38}{21}x & & -\frac{8}{21}x - \frac{236}{441} \\ \cline{1-3}
& \frac{59}{21}x & -\ 1 & \\
& -\ \frac{59}{21}x & +\ \frac{1\,121}{441} & \\ \cline{1-3}
& r_2(x) = & \frac{680}{441} &
\end{array}$$

3. A divisão de $r_1(x)$ por $r_2(x)$ é exata, isto é, $r_3(x) = 0$.

Então, $r_2(x) = \frac{680}{441}$ = **mdc** $[a(x); b(x)]$; e, sendo $r_2(x)$ constante, $a(x)$ e $b(x)$, são **primos entre si.**

Exercícios Propostos

10.13) Dê o **mdc normalizado** dos polinômios a(x) e b(x), nos seguintes casos:

a) $a(x) = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 2x - 3$ e $b(x) = x^5 - x^4 + x^3 + 4x^2 - 2x + 3$
b) $a(x) = 4x^5 - 20x^4 + 25x^3 + 10x^2 - 20x - 8$ e $b(x) = a'(x)$
c) $a(x) = x^3 + 3x^2 - 8x - 24$ e $b(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 9$
d) $a(x) = 2x^3 + 7x^2 + 10x + 35$ e $b(x) = 2x^4 + 7x^3 - 2x^2 - 3x + 14$
e) $a(x) = x^4 + 12x - 5$ e $b(x) = 2x^3 - x^2 + 4x + 15$

10.14) Determine um **mdc** dos polinômios:

a) $a(x) = (x^2 - 1)^2 (x + 1)^3$
b) $b(x) = (x^3 + 1) (x - 1)$

10.15) Determine um **mdc** dos polinômios:

a) $a(x) = 3(x - 1)^3 x(x + 2)^2$
b) $b(x) = 4(x - 1)^2 x^3 (x + 4)$

10.16) Determine **c**, real, para que os polinômios $x^2 + (c + 6)x + 4c + 2$ e $x^2 + (c + 2)x + 2c$ tenham **mdc** de grau 1.

10.17) Determine **m** e **n** para que os polinômios $p(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + mx + n$ e $q(x) = x^2 + 2x - 1$ sejam **primos entre si**.

10.3 – MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Definição

Sejam a(x) e b(x) polinômios não nulos, de coeficientes complexos.

Então, o polinômio m(x) é um **mínimo múltiplo comum (mmc) de a(x) e b(x)** se e somente se:

a) m(x) é **divisível** por a(x) e m(x) é **divisível** por b(x);
b) se n(x) é **divisível** por a(x) e n(x) é **divisível** por b(x), então n(x) é **divisível** por m(x).

Indica-se:

$$m(x) = \textbf{mmc}\,[a(x);\ b(x)]$$

Observe que, se m(x) é um mínimo múltiplo comum de a(x) e b(x), então $\lambda \cdot m(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, também o é. Daí, um mínimo múltiplo comum de a(x) e b(x) *não é único.*

Exemplo

Se $a(x) = (x-1)^2 (x-2)(x-3)$ e $b(x) = (x-1)(x-2)^3(x-4)$, um **mmc** de a(x) e b(x) é $m_1(x) = (x-1)^2(x-2)^3(x-3)(x-4)$; qualquer outro **mmc** é da forma $m(x) = c \cdot (x-1)^2 \cdot (x-2)^3 (x-3)(x-4)$, onde $c \neq 0$.

Observe que, se m(x) é um **mmc** de a(x) e b(x), podemos associar-lhe um polinômio $m_1(x)$, **normalizado**, tal que:

$$m_1(x) = \textbf{mmc}[a(x);\ b(x)]$$

Ao polinômio $m_1(x)$ denominamos **mmc normalizado de a(x) e b(x)**. Para cada par [a(x); b(x)], esse polinômio $m_1(x)$ é **único**.

Agora vamos examinar como podemos determinar o **mmc** de polinômios.

Teorema

Sejam a(x) e b(x) **polinômios normalizados**; sejam também d(x) e m(x) o **mdc normalizado** e o **mmc normalizado** de a(x) e b(x), respectivamente; então:

$$a(x) \cdot b(x) = d(x) \cdot m(x)$$

Aceitaremos o teorema sem demonstração.

Exemplos

1.º) Vamos determinar o **mmc** de $a(x) = 4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 6x + 1$ e $b(x) = 6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$.

Inicialmente, determinamos um **mdc** de a(x) e b(x) com o **algoritmo de Euclides**:

$$d_1(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

Daí, o **mdc normalizado** é:

$$d(x) = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Em seguida, multiplicamos o polinômio normalizado associado a a(x) pelo polinômio normalizado associado a b(x); esse produto, dividido por d(x), dá o polinômio m(x):

$$m(x) = 12x^5 - 44x^4 + 63x^3 - 44x^2 + 15x - 2$$

O processo é, infelizmente, extremamente cansativo.

2.º) Vamos determinar o **mmc** de $a(x) = (x - 2)^2 (x - 3)^3 (x + 2)$ e $b(x) = (x - 2)^3 (x - 3) (x + 4)$.

Observe que a(x) e b(x) estão *fatorados* em um produto de potências cujas bases são polinômios do primeiro grau, dois a dois distintos. Então, para formarmos um **mmc**, construímos o **produto dos fatores comuns e não comuns aos polinômios dados, afetados esses fatores nos maiores expoentes com que aparecem em a(x) e b(x)**:

$$m(x) = (x - 2)^3 (x - 3)^3 (x + 2) (x + 4) = \textbf{mmc}\,[a(x); b(x)]$$

Observe que o polinômio m(x) satisfaz as condições da definição.

Exercícios Propostos

10.18) Determine o **mmc normalizado** de $a(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ e $b(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

10.19) Determine o **mmc** e o **mdc**, **normalizados**, dos polinômios

$$a(x) = x^{14} - 2x^{13} + x^{12} \text{ e } b(x) = x^2 - 1.$$

10.4 — UMA OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Seja f(x) um polinômio na indeterminada **x**:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

com coeficientes em $\mathbb{C}$.

Ao polinômio f(x), fazemos corresponder uma **função f**, de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, que associa a todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$, a imagem:

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n$$

que é o valor numérico de f(x) em α.

A função f:

$$\begin{cases} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \end{cases}$$

denomina-se **função polinomial**.

Por exemplo, ao polinômio $f(x) = x^2 + 2x + 1$, associamos a **função quadrática f**:

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(x) = x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

e, ao **polinômio nulo**, associamos a **função constante f**:

$$\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

na qual todo α, $\alpha \in \mathbb{C}$, tem imagem zero.

Exercícios Suplementares

II.1) Um polinômio f(x) tem coeficientes inteiros. Sabe-se que:

$$f(A) = A \text{ (A é inteiro positivo)}$$
$$f(0) = P$$

onde P é um número primo, maior do que A. Determine A.

II.2) Determine os números reais **a** e **b** tais que:

$$\frac{1}{x(x+1)} \equiv \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

Deduza a expressão da soma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

II.3) Um polinômio f(x) é tal que:

$$\frac{f(u) + f(v)}{2} = f\left(\frac{u+v}{2}\right), \ \forall u, \forall v, \ u \in \mathbb{C} \text{ e } v \in \mathbb{C}$$

Verifique que f(x) é da forma $a_0 + a_1x$.

II.4) Determine **a** e **b** para que:

$$\frac{a}{10^x - 1} + \frac{b}{10^x + 2} \equiv \frac{2 \cdot 10^x + 3}{(10^x - 1)(10^x + 2)}$$

II.5) Determine A, B e C tais que:

$$\frac{1}{\text{sen } x \ \cos x \ (\text{sen } x + \cos x)} \equiv \frac{A}{\text{sen } x} + \frac{B}{\cos x} + \frac{C}{\text{sen } x + \cos x}$$

II.6) Determine **a**, **b** e **c** para que o polinômio na variável **n**: $an^3 + bn^2 + cn$, represente, para todo **n**, a soma dos quadrados dos **n** primeiros números inteiros positivos.

II.7) Um polinômio f(x), de grau 3, é tal que $f(-2) = -9$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$ e $f(2) = 11$. Determine f(0).

II.8) Um polinômio $f(x)$ dividido por $x + 3$ dá quociente $q(x)$ e resto -5; $q(x)$ dividido por $2x - 1$ dá resto 4. Qual é o resto da divisão de $f(x)$ por $2x^2 + 5x - 3$?

II.9) Determine os reais **p** e **q** para que o polinômio $A(x) = x^2 + px + q$ seja **divisor** de $A(x^2)$.

II.10) Um polinômio $f(x)$ de grau 3, quando dividido por $x^2 - x + 2$ e por $x^2 + x - 1$, dá restos $5x - 7$ e $12x - 1$, respectivamente. Determine $f(x)$.

II.11) Divida o polinômio $(x - 2)^n - 1$ por $x - 3$, onde $n > 1$.

II.12) Seja $R(x) = mx + n$ o resto da divisão de um polinômio $P(x)$ pelo polinômio $T(x) = x^2 - (a + b)x + ab$, em que **a** e **b** são constantes distintas.

a) Determine **m** e **n** em função de **a** e **b**.
b) Determine **m** e **n**, no caso particular em que $P(x) = x^{200}$, $a = -1$ e $b = 2$.
c) Prove que, no caso *b*, cada um dos coeficientes **m** e **n** é inteiro.

II.13) Um polinômio $f(x)$ dividido por $(x - b)(x - c)$, $(x - c)(x - a)$ e $(x - a)(x - b)$ da restos $3x - 1$, $x + 1$ e $2x + 3$, respectivamente.

a) Determine **a**, **b** e **c**.
b) Determine o resto da divisão de $f(x)$ por $(x - a)(x - b)(x - c)$.

II.14) O polinômio $f(x)$ dividido por $x - 5$ dá quociente $g(x)$ e resto 3; $g(x)$ dividido por $x - 3$ dá resto 2. Qual o resto da divisão de $f(x)$ por $x - 3$? E por $x^2 - 8x + 15$?

II.15) Os polinômios $a(x)$ e $b(x)$ têm uma *raiz comum* **a**. Seja $r(x)$ o resto da divisão de $a(x)$ por $b(x)$; verifique que $r(x)$ é **divisível** por $x - a$.

II.16) Seja $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ um polinômio de grau 3 que admite raiz 1 e duas raízes complexas, não reais, α e β.

a) Determine um polinômio $g(x) = ax^2 + bx + c$, de grau 2, tal que $g(1) = 1$, $g(\alpha) = \beta$ e $g(\beta) = \alpha$.
b) Determine $g[g(x)]$.
c) Qual é o grau de $g[g(x)]$?
d) Verifique que $h(x) = g[g(x)] - x$ é **divisível** por $f(x)$.

II.17) Verifique que $x^{3m} + x^{3n+1} + x^{3p+2}$ é **divisível** por $x^2 + x + 1$, onde **m**, **n** e **p** são naturais.

II.18) Determine **m** para que o polinômio $x^{2m} + x^m + 1$ seja **divisível** por $x^2 + x + 1$, $m \in \mathbb{N}^*$.

II.19) Calcule o resto da divisão do polinômio:

$$p(x) = x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$$

a) por $x - 1$
b) por $x^2 - 1$

II.20) Demonstre, usando o **Método da Indução Matemática**, que um polinômio de grau **n**, $n \geq 1$, admite no máximo **n** raízes.

II.21) Determine **p**, $p \in \mathbb{R}$, sabendo-se que o polinômio:

$$A(x) = x^3 - 3x^2 + px + 1$$

é **divisível** por $A''(x)$.

II.22) Seja o polinômio $f(x) = x^3 + ax + b$.

a) Determine **a** e **b**, sabendo que $f(-1) = 4$ e $f'(-1) = 0$.
b) Determine **p** para que $f(x) \equiv (x-1)^2 \cdot (x+p)$.

II.23) Considere o conjunto dos polinômios, com coeficientes reais, da forma:

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

Define-se:

$$\varphi[P(x)] = P(x) + (x-1)P'(x)$$

Mostre que:

a) $\varphi[P_1(x) + P_2(x)] \equiv \varphi[P_1(x)] + \varphi[P_2(x)]$
b) $\varphi[kP(x)] \equiv k \cdot \varphi[P(x)],\ k \in \mathbb{R}$.

II.24) Determine os reais **t** e **u** para que os polinômios $p(x) = x^3 + (t+1)x^2 + 2x + 2u$ e $q(x) = x^3 + tx^2 + u$ tenham **mdc** de grau 2.

Hamilton Fábio Mota Medeiros.
Belém-PA, 27 de Maio de 2008

PARTE III

Capítulo 11 — **Equações algébricas**

Capítulo 12 — **Raízes múltiplas**

Capítulo 13 — **Raízes imaginárias**

Capítulo 14 — **Relações de Girard**

Capítulo 15 — **Raízes racionais**

Capítulo 16 — **Equações recíprocas**

Capítulo 17 — **Raízes comuns**

Capítulo 18 — **Raízes reais**

Capítulo 11

Equações algébricas

11.1 — INTRODUÇÃO

Uma equação algébrica (ou polinomial) é uma equação do tipo:

$$P(x) = 0 \qquad (11.1)$$

onde P(x) é um polinômio. Caso o polinômio tenha grau **n**, diremos que a equação tem grau **n**.

Exemplos

a) $4x^3 + (3 - 5i)x^2 + 9 = 0$ é uma equação algébrica de grau 3, onde a variável é **x**.
b) $(6 + 3i)y^2 + 7y + 8 = 0$ é uma equação algébrica de grau 2, onde a variável é **y**.
c) $2x + 3 = 0$ é uma equação algébrica de grau 1.
d) $6x^0 = 0$ é uma equação algébrica de grau zero. Observe que esta equação não tem solução, isto é, seu conjunto-solução é vazio:

$$S = \varnothing$$

e) $0 \cdot x = 0$ é uma equação algébrica para a qual não definimos grau (o polinômio do "lado esquerdo" é identicamente nulo). É fácil perceber que qualquer número complexo é solução dessa equação, isto é, no universo dos complexos o conjunto-solução é:

$$S = \mathbb{C}$$

f) Consideremos a equação:

$$2x^3 + 9x^2 + 1 = 2x^3 + 6x^2 + 7x - 8 \qquad \text{(I)}$$

que é equivalente a:

$$2x^3 + 9x^2 + 1 - 2x^3 - 6x^2 - 7x + 8 = 0 \qquad \text{(II)}$$

que, por sua vez, é equivalente a:

$$3x^2 - 7x + 9 = 0 \qquad \text{(III)}$$

Observemos que a equação (I), que representa a igualdade entre dois polinômios de grau 3, é equivalente à equação (III), que é uma equação algébrica de grau 2.

Em princípio, poderíamos também dar o nome de *equação algébrica* a equações do tipo:

$$A(x) = B(x)$$

onde A(x) e B(x) são polinômios (como, por exemplo, a equação (I) do exemplo *f*). No entanto, essa equação sempre é equivalente a uma equação do tipo P(x) = 0:

$$A(x) = B(x) \Leftrightarrow \underbrace{A(x) - B(x)}_{P(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$$

Neste livro, chamaremos de *equação algébrica* apenas às equações do tipo P(x) = 0. Conforme veremos, isso facilitará nossa linguagem, pois poderemos, indiferentemente, falar nas raízes da equação P(x) = 0 ou nas raízes do polinômio P(x).

Neste e nos próximos capítulos, faremos um estudo sobre as raízes das equações algébricas (isto é, sobre as raízes dos polinômios) no universo dos números complexos, embora possamos dizer que esse estudo já foi iniciado no capítulo 9 deste volume, com o teorema de d'Alembert. De início, descartamos dois casos cuja análise é imediata:

1.º) caso em que o grau é nulo (neste caso teremos sempre $S = \varnothing$ – veja exemplo *d*);
2.º) caso em que P(x) é identicamente nulo (neste caso teremos sempre $S = \mathbb{C}$ – veja exemplo *e*).

Portanto, a partir de agora nos ocuparemos apenas de equações algébricas de grau $n \neq 0$, as quais têm a forma:

$$\boxed{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0} \qquad (11.2)$$

onde:
$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C} \\ a_n \neq 0 \end{cases}$$

Os números $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, do mesmo modo que no caso dos polinômios, são chamados coeficientes da equação.

Antes de considerarmos o caso mais geral de equação algébrica, é conveniente fazermos alguns comentários sobre as equações algébricas de graus 1 e 2.

11.2 – EQUAÇÃO ALGÉBRICA DO PRIMEIRO GRAU

Consideremos a equação algébrica de grau 1:

$$ax + b = 0 \qquad (11.3)$$

onde **a** e **b** são números complexos quaisquer, com $a \neq 0$. Temos:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Assim, concluímos que a equação 11.3 **sempre** terá uma única raiz, que é o número complexo $-\frac{b}{a}$, o qual indicaremos por x_1:

$$x_1 = -\frac{b}{a}$$

É importante observar (para aplicações que virão a seguir) que:

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a\left[x - \left(-\frac{b}{a}\right)\right] = a(x - x_1)$$

isto é, o polinômio do primeiro grau, $ax + b$, pode ser fatorado do seguinte modo:

$$ax + b = a(x - x_1) \qquad (11.4)$$

Isto está de acordo com o teorema de d'Alembert: já que x_1 é raiz do polinômio $ax + b$, então este é divisível por $x - x_1$ (o quociente é igual a a).

11.3 — EQUAÇÃO ALGÉBRICA DO SEGUNDO GRAU

Seja a equação de grau 2:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0} \qquad (11.5)$$

onde **a**, **b** e **c** são números complexos quaisquer, com $a \neq 0$. Como vimos no capítulo 2 deste volume (veja exercício 2.7), essa equação sempre tem duas raízes complexas (que podem ser distintas ou iguais, reais ou imaginárias) indicadas por $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, que podem ser obtidas pela fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac$$

Pode-se demonstrar (faremos isso no item 11.6 deste capítulo) que o polinômio $ax^2 + bx + c$ pode ser fatorado do seguinte modo:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (11.6)$$

Já sabemos que a fórmula 11.6 é válida quando os coeficientes **a**, **b** e **c** e as raízes x_1 e x_2 são reais (veja capítulo 3 do volume 1 desta coleção). O que falta é demonstrar sua validade no campo dos complexos.

Quando $\Delta = 0$, temos $x_1 = x_2$ e dizemos que a equação 11.5 admite duas raízes iguais ou, então, que a equação tem uma raiz dupla ou, ainda, que a equação tem uma raiz de multiplicidade dois. Esta linguagem se justifica, pois neste caso a fórmula 11.6 fica:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_1)^2$$

isto é, o fator $x - x_1$ aparece duas vezes.

Quando $\Delta \neq 0$, temos $x_1 \neq x_2$ e a equação 11.5 tem duas raízes distintas.

11.4 — TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

Conforme vimos nos dois itens anteriores, as equações algébricas de graus 1 e 2 **sempre** têm solução. Mas o que acontece com as equações de grau maior que 2? Isto é respondido pelo teorema fundamental da Álgebra (T.F.A.):

Toda equação algébrica, de coeficientes complexos e grau maior que zero, admite pelo menos uma raiz complexa.

O que equivale a dizer: todo polinômio de coeficientes complexos e grau maior que zero admite pelo menos uma raiz complexa.

Este teorema foi demonstrado pela primeira vez, de modo satisfatório, em 1798, por Gauss, em sua tese de doutoramento (foi o próprio Gauss que o chamou de "teorema fundamental da Álgebra"). Antes de Gauss, outros matemáticos (como, por exemplo, d'Alembert e Euler) apresentaram demonstrações do teorema, mas Gauss mostrou que todas elas eram incorretas (apesar disso há livros que chamam o T.F.A. de "teorema de d'Alembert"). Como a demonstração de Gauss usa conhecimentos que estão acima do nível deste livro, vamos admitir o teorema sem demonstrá-lo.

Teorema de Abel

O T.F.A. nos diz que toda equação algébrica de grau não nulo tem solução; no entanto, não nos diz como achar essa solução. Quanto às equações de primeiro e segundo graus, já sabemos como resolvê-las. Para as equações do terceiro e quarto graus, conhecem-se fórmulas desde o século XVI; porém, tais fórmulas em geral são de aplicação demorada e não serão usadas neste livro (uma fórmula para a equação do terceiro grau foi mencionada no capítulo 1 deste volume). Para as equações de grau maior que 4, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) demonstrou que é **impossível** estabelecer fórmulas gerais de resolução envolvendo operações algébricas com os coeficientes. Assim, a nossa situação até o final deste livro é a seguinte: só sabemos resolver, **no caso geral**, equações algébricas do primeiro e segundo graus. As equações de grau superior a 2 serão resolvidas em **alguns casos particulares**, quando for possível usar certos artifícios, ou forem conhecidas informações sobre as raízes, aplicando-se teoremas que apresentaremos adiante.

Dois artifícios usados com freqüência serão a fatoração do polinômio (quando a conseguirmos) e a mudança de variável, como fizemos em alguns exemplos do capítulo 5.

11.5 — TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Consideremos um polinômio P(x), de coeficientes complexos e grau $n \geqslant 1$, tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Pode-se demonstrar (faremos isso no item seguinte) que P(x) pode ser decomposto do seguinte modo:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \quad (11.7)$$

onde os números complexos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as **n** raízes do polinômio P(x), isto é, são as **n** raízes da equação algébrica $P(x) = 0$. As fórmulas 11.4 e 11.6 são casos particulares da fórmula 11.7.

É fácil perceber que a decomposição 11.7 é única (a menos da ordem), isto é, os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as únicas raízes de P(x), pois **nenhum** outro número diferente de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ anularia o "lado direito" de 11.7, ao ser colocado no lugar de x.

Portanto, todo polinômio de grau $n \geqslant 1$ tem **n** (e apenas **n**) raízes, que podem ser reais ou imaginárias, não sendo, contudo, necessário que elas sejam todas distintas: podemos ter algumas (ou todas) iguais. Se na decomposição 11.7 um certo fator:

$$x - x_i$$

aparecer **m** vezes, diremos que o número x_i é raiz de multiplicidade **m**. Se um certo fator $x - x_i$ aparecer apenas uma vez, diremos que x_i é uma raiz simples (ou raiz de multiplicidade 1).

Exemplos

a) Consideremos o polinômio $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$ e vamos **tentar** determinar suas raízes. Neste caso, "por sorte" (nem sempre teremos essa sorte), podemos fazer uma fatoração por agrupamento:

$$2x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x - 3) + 4(2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x - 3)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \text{ ou } x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = \pm 2i$$

Portanto, as raízes de P(x) são os números $\frac{3}{2}$, $2i$ e $-2i$. O polinômio, sendo de grau 3, apresenta 3 raízes, as quais (neste caso) são todas distintas. Temos, então, de acordo com o teorema da decomposição:

$$2x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2i)(x + 2i)$$

b) Consideremos um polinômio P(x), que após ser decomposto, fica:

$$P(x) = 5(x - 4)(x - 4)(x - 2i)$$

isto é:

$$P(x) = 5(x - 4)^2(x - 2i)$$

Se fizermos as multiplicações, obteremos:

$$P(x) = 5x^3 - (40 + 10i)x^2 + (80 + 80i)x - 160i = 5(x - 4)^2(x - 2i)$$

Na decomposição, vemos que o fator $x - 4$ aparece 2 vezes e, portanto, o número 4 é raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla). Já o fator $x - 2i$ aparece apenas uma vez, assim o número $2i$ é raiz simples. No total, P(x) tem 3 raízes: 4 (dupla) e $2i$ (simples).

c) Sendo $P(x) = 7(x - 9)(x - 3)^2(x - 4)^5(x + 6)^3$, temos:

9 é raiz simples
3 é raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla)
4 é raiz de multiplicidade 5
-6 é raiz de multiplicidade 3 (raiz tripla)

P(x) possui 11 raízes; portanto, é um polinômio de grau 11.

d) Consideremos $P(x) = 16x^3(x - 2)(x + i)^4(x - i)^2$. Observando que:

$$x^3 = (x - 0)^3$$

temos:

0 é raiz de multiplicidade 3 (raiz tripla)
2 é raiz simples
$-i$ é raiz de multiplicidade 4
i é raiz de multiplicidade 2 (raiz dupla)

Assim, P(x) tem 10 raízes; portanto, é um polinômio de grau 10.

11.6 – DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA DECOMPOSIÇÃO

Consideremos, então, o polinômio P(x), de coeficientes complexos e grau $n \geq 1$, tal que:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

De acordo com o T.F.A., P(x) admite pelo menos uma raiz complexa. Representando essa raiz por x_1, P(x) deve ser divisível por $x - x_1$, isto é:

$$P(x) = (x - x_1) \cdot P_1(x) \qquad \text{(I)}$$

onde $P_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$, cujo coeficiente dominante é a_n.

Supondo $n - 1 \geq 1$, pelo T.F.A. o polinômio $P_1(x)$ admite pelo menos uma raiz complexa x_2. Assim, $P_1(x)$ é divisível por $x - x_2$, isto é:

$$P_1(x) = (x - x_2) \cdot P_2(x)$$

onde $P_2(x)$ é um polinômio de grau $n - 2$, cujo coeficiente dominante é a_n. Substituindo em (I), temos:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdot P_2(x) \qquad \text{(II)}$$

Procedendo de modo semelhante, pelo número necessário de vezes, chegaremos a:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \cdot P_n$$

onde P_n é um polinômio de grau $n - n$, cujo coeficiente dominante é a_n. Como $n - n = 0$, concluímos que P_n é o polinômio constante a_n e, portanto:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Exercícios Resolvidos

11.1). Resolva a equação $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é igual a 2.

Solução

Sendo $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$, o número 2 é uma das raízes de $P(x)$; portanto, $P(x)$ é divisível por $x - 2$:

$$P(x) = (x - 2) \cdot P_1(x):$$

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x - 2$, obtemos $P_1(x)$:

2	2	−3	−3	2
	2	1	−1	0

$P_1(x) = 2x^2 + x - 1$

Portanto, $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(2x^2 + x - 1)$.

Assim:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \\ \text{ou} \\ 2x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$$

A equação $x - 2 = 0$ nos fornece a raiz 2, que já conhecíamos; portanto, para obtermos as outras raízes, resolvemos a equação $2x^2 + x - 1 = 0$, cujas raízes são -1 e $\frac{1}{2}$. Então, as raízes da equação dada são 2, -1 e $\frac{1}{2}$, isto é, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{2; -1; \frac{1}{2}\right\}$$

Para completar, podemos dar a decomposição de $P(x)$ em fatores do primeiro grau:

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 2(x - 2)(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(x + 1)(2x - 1)$$

11.2) Decomponha o polinômio $P(x) = 3x^3 + (-10 - 3i)x^2 + (9 + 7i)x + (-2 - 2i)$ em fatores do primeiro grau, sabendo que uma de suas raízes é o número $1 + i$.

Solução

Se $1 + i$ é raiz de $P(x)$, este é divisível por $x - (1 + i)$:

$$P(x) = [x - (1 + i)] \cdot P_1(x) = (x - 1 - i) \cdot P_1(x)$$

Efetuando a divisão de $P(x)$ por $x - (1 + i)$, obtemos $P_1(x)$:

$1 + i$	3	$(-10 - 3i)$	$(9 + 7i)$	$(-2 - 2i)$
	3	-7	2	0

$$P_1(x) = 3x^2 - 7x + 2$$

Para obtermos as raízes que faltam, resolvemos a equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$, cujas raízes são 2 e $\frac{1}{3}$. Assim, as três raízes de $P(x)$ são $1 + i$, 2 e $\frac{1}{3}$; portanto, a decomposição é:

$$3x^3 + (-10 - 3i)x^2 + (9 + 7i)x + (-2 - 2i) = 3(x - 1 - i)(x - 2)\left(x - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= (x - 1 - i)(x - 2)(3x - 1)$$

11.3) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24$, sabendo que duas de suas raízes são os números 2 e 3.

Solução

Já que 2 e 3 são raízes de $P(x)$, podemos escrever:

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)Q(x)$$

Dividindo $P(x)$ por $x - 2$, obtemos $Q_1(x)$ e, dividindo $Q_1(x)$ por $x - 3$, obtemos $Q(x)$:

$$\frac{P(x)}{x - 2} = \underbrace{(x - 3) \cdot Q(x)}_{Q_1(x)} \qquad \frac{Q_1(x)}{x - 3} = Q(x)$$

Fazendo sucessivamente as duas divisões:

2	1	-8	17	2	-24
3	1	-6	5	12	0
	1	-3	-4	0	

$$Q(x) = x^2 - 3x - 4$$

Para obtermos as raízes que faltam, resolvemos a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$, cujas raízes são 4 e -1. Portanto, o polinômio $P(x)$, de grau 4, possui 4 raízes distintas, que são os números 2, 3, -1 e 4, podendo assim ser decomposto do seguinte modo:

$$x^4 - 8x^3 + 17x^2 + 2x - 24 = (x - 2)(x - 3)(x + 1)(x - 4)$$

11.4) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9$, sabendo que o número -3 é raiz dupla.

Solução

Se -3 é raiz dupla de $P(x)$, podemos escrever $P(x) = (x + 3)(x + 3) \cdot Q(x)$ isto é, $P(x) = (x + 3)^2 \cdot Q(x)$.

Para obtermos $Q(x)$, fazemos duas divisões sucessivas por $x + 3$:

-3	1	6	10	6	9
-3	1	3	1	3	0
	1	0	1	0	

$$Q(x) = x^2 + 1$$

Para acharmos as outras raízes, resolvemos a equação $x^2 + 1 = 0$, cujas raízes são i e $-i$. Assim, o polinômio $P(x)$, de grau 4, possui 4 raízes (nem todas distintas), que são os números -3 (raiz dupla), i e $-i$. Portanto, $P(x)$ pode ser fatorado do seguinte modo:

$$x^4 + 6x^3 + 10x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2(x - i)(x + i)$$

11.5) Sabe-se que uma das raízes do polinômio $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ é o número 2. Verifique sua multiplicidade.

Solução

Vamos tentar fazer várias divisões sucessivas por $x - 2$, até obtermos uma divisão não exata:

2	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	$\boxed{0}$
2	1	-1	-1	-2	$\boxed{0}$	
2	1	1	1	$\boxed{0}$		
	1	3	$\boxed{7}$			

Conseguimos fazer 3 divisões exatas (a quarta divisão nos deu resto 7), portanto o número 2 é raiz de multiplicidade 3. Podemos, então, escrever:

$$P(x) = (x - 2)^3 \cdot Q(x)$$

onde $Q(x)$ é o quociente da terceira divisão:

$$Q(x) = x^2 + x + 1$$

Assim: $P(x) = (x - 2)^3(x^2 + x + 1)$

Se quisermos, poderemos obter as outras raízes resolvendo a equação $x^2 + x + 1 = 0$.

11.6) Determine os valores de **a** e **b** de modo que o número -4 seja raiz dupla do polinômio $P(x) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 + ax + b$. Em seguida, determine as outras raízes.

Solução

Já que -4 é raiz dupla de P(x), temos:

$$P(x) = (x + 4)^2 \cdot Q(x)$$

Isto significa que, fazendo duas divisões sucessivas por $x + 4$, essas duas divisões devem ser exatas (porém, a terceira não pode ser exata):

-4	1	8	17	a	b
-4	1	4	1	$(a - 4)$	$(b - 4a + 16)$
-4	1	0	1	$(a - 8)$	
	1	-4	17		

Devemos ter $\begin{cases} b - 4a + 16 = 0 \\ a - 8 = 0 \end{cases}$

Resolvendo esse sistema, obtemos $a = 8$ e $b = 16$. (Observemos que a terceira divisão não foi exata: o resto foi igual a 17.) Temos, então:

$$P(x) = (x + 4)^2 \cdot Q(x)$$

onde Q(x) é o quociente da segunda divisão:

$$Q(x) = x^2 + 1$$

Para obtermos as raízes que faltam, resolvemos a equação $x^2 + 1 = 0$, cujas raízes são i e $-i$. Assim, P(x) possui 4 raízes: -4 (dupla), i e $-i$. Podemos, então, fatorar P(x) do seguinte modo:

$$P(x) = (x + 4)^2 (x - i)(x + i)$$

11.7) Determine os valores de **a**, **b**, **c** e **d** de modo que o número **zero** seja raiz tripla do polinômio:

$$P(x) = 2x^5 - 9x^4 + ax^3 + (b - 9)x^2 + (3c - 7)x + d$$

Solução

Se o número 0 é raiz tripla de P(x), temos:

$$P(x) = (x - 0)^3 \cdot Q(x) = x^3 \cdot Q(x)$$

onde Q(x) é um polinômio que **não** se pode anular para $x = 0$.

Poderíamos resolver este problema de modo semelhante ao empregado no exercício anterior, efetuando divisões sucessivas por $x - 0$. No entanto, neste caso, é mais fácil perceber que devemos colocar x^3 em evidência e, para que isto ocorra, os termos de P(x) que possuem grau inferior a 3 devem ter coeficientes nulos:

$$\begin{cases} b - 9 = 0 \\ 3c - 7 = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Obtemos, então, $b = 9$, $c = \frac{7}{3}$ e $d = 0$. Ao mesmo tempo, devemos impor que o coeficiente de x^3 seja diferente de zero, pois, em caso contrário, poderíamos colocar x^4 em evidência; aí o número zero não seria raiz tripla mas sim raiz de multiplicidade 4. Portanto, a resposta do problema é:

$$a \neq 0, \quad b = 9, \quad c = \frac{7}{3}, \quad d = 0$$

11.8) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$ são **a** (dupla) e **b**. Sabendo que $b = 2a$, determine os valores de **a** e **b**.

Solução

O polinômio P(x) pode ser fatorado do seguinte modo:

$$P(x) = (x - a)^2 (x - b)$$

Efetuando as multiplicações, obtemos:

$$P(x) = x^3 - (2a + b)x^2 + (2ab + a^2)x - a^2b$$

mas temos também:

$$P(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 54$$

Assim, por identidade de polinômios, devemos ter:

$$\begin{cases} 2a + b = 12 \\ 2ab + a^2 = 45 \\ a^2b = 54 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $a = 3$ e $b = 6$.

11.9) Sabe-se que o número 1 é raiz da equação $(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)^4 = 0$. Determine todas as raízes dessa equação, com as respectivas multiplicidades.

Solução

Seja $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$. O número 1 deve ser raiz de P(x) e, portanto, este é divisível por $x - 1$:

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x)$$

Efetuando a divisão, obtemos Q(x):

1	1	−5	7	−3
	1	−4	3	0

$$Q(x) = x^2 - 4x + 3$$

As outras raízes de P(x) são as raízes de Q(x). Resolvendo a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, obtemos as raízes 1 e 3. Assim, as raízes de P(x) são os números 1 (dupla) e 3:

$$P(x) = (x - 1)^2 (x - 3)$$

Portanto:

$$(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)^4 = 0 \Leftrightarrow [(x-1)^2(x-3)]^4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^8(x-3)^4 = 0$$

Então, a equação dada possui 12 raízes:

$$\begin{cases} 1 \text{ (multiplicidade 8)} \\ 3 \text{ (multiplicidade 4)} \end{cases}$$

11.10) Determine **m** de modo que o número 2 seja raiz da equação:

$$x^3 + (2m - 1)x^2 + (5 - m)x + 7 = 0$$

Solução

Substituindo a variável **x** pelo número 2, temos:

$$2^3 + (2m - 1)(2)^2 + (5 - m)(2) + 7 = 0$$

Resolvendo esta equação, obtemos $m = -\frac{7}{2}$.

11.11) Sabe-se que o número -2 é raiz da equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + 6 = 0$, onde $m \in \mathbb{R}$. Determine **m** de modo que todas as raízes da equação sejam reais.

Solução

Tentemos inicialmente fazer o que fizemos no exercício anterior, isto é, vamos substituir **x** por -2:

$$(-2)^3 + (m + 1)(-2)^2 + (2m + 1)(-2) + 6 = 0$$

Porém, ao simplificarmos esta última equação, obtemos:

$$0 = 0$$

Isto significa que, para qualquer valor de **m**, o número -2 é raiz da equação dada. Façamos então:

$$P(x) = x^3 + (m + 1)x^2 + (2m + 1)x + 6$$

Já que -2 é raiz de P(x), este é divisível por $x + 2$:

$$P(x) = (x + 2) \cdot Q(x)$$

Efetuando a divisão, obtemos Q(x):

-2	1	$(m + 1)$	$(2m + 1)$	$+6$
	1	$m - 1$	3	0

$$Q(x) = x^2 + (m - 1)x + 3$$

O polinômio Q(x) é do segundo grau e tem coeficientes reais. Portanto, para que todas as suas raízes sejam reais, devemos ter $\Delta \geqslant 0$:

$$(m - 1)^2 - 4(3) \geqslant 0$$

Resolvendo esta inequação, vem:

$$m \leqslant 1 - 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad m \geqslant 1 + 2\sqrt{3}$$

11.12) Dê um polinômio de grau 3 cujas raízes sejam os números 2 (simples) e 4 (dupla).

Solução

Seja P(x) o polinômio procurado:

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Já que conhecemos suas raízes, podemos escrever:

$$P(x) = a_3(x - 2)(x - 4)^2 = a_3(x^3 - 10x^2 + 32x - 32)$$

onde $a_3 \neq 0$. Podemos dar infinitos valores para a_3 e, assim, há infinitos polinômios que satisfazem as condições dadas no enunciado do problema; mas, como o problema pediu **apenas um** polinômio, podemos dar um valor qualquer para a_3. Fazendo, por exemplo, $a_3 = 1$, uma resposta para esse problema é $P(x) = x^3 - 10x^2 + 32x - 32$. No capítulo 14 (exercício 14.7) veremos um outro modo de resolver este problema.

11.13) Seja P(x) um polinômio de grau 3 cujas raízes são os números 2 (simples) e 4 (dupla). Determine P(x) em cada um dos casos a seguir:

a) $P(6) = -80$

b) a soma dos coeficientes de P(x) é igual a 45

Solução

a) Este problema é semelhante ao anterior, mas agora temos uma condição adicional: $P(6) = -80$. Do mesmo modo que no problema anterior, temos então:

$$P(x) = a_3(x - 2)(x - 4)^2$$

Substituindo x pelo número 6, temos:

$$P(6) = a_3(6 - 2)(6 - 4)^2 = -80$$

o que nos dá $a_3 = -10$. Assim:

$$P(x) = -10(x - 2)(x - 4)^2 = -10x^3 + 100x^2 - 320x + 320$$

b) Do mesmo modo que no caso anterior, temos:

$$P(x) = a_3(x - 2)(x - 4)^2$$

A soma dos coeficientes de P(x) deve ser igual a 45. Mas, de acordo com o que vimos no exercício 6.2, a soma dos coeficientes de P(x) é igual a P(1). Assim:

$$P(1) = a_3(1 - 2)(1 - 4)^2 = 45$$

donde $a_3 = -5$ e $P(x) = -5(x - 2)(x - 4)^2 = -5x^3 + 50x^2 - 160x + 160$

Exercícios Propostos

11.14) Decomponha o polinômio $P(x) = (2 + i)x^2 + (-3 + i)x + (1 - 2i)$.

11.15) Um polinômio P(x), após ser decomposto, ficou:

$$P(x) = \sqrt{3}\,(x - 5)(x + 6)^3(x - \sqrt{2} + 4)^2\left(x - \frac{3}{4} - \frac{2i}{5}\right)^7$$

a) Qual é o grau de P(x)?
b) Quantas raízes tem P(x)?
c) Quantas raízes distintas tem P(x)?
d) Diga quais são as raízes de P(x), com as respectivas multiplicidades.
e) Se fizermos todas as multiplicações e reduzirmos os termos semelhantes, qual será o coeficiente do termo em x^{13}?

11.16) Resolva a equação $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é igual a -4.

11.17) Decomponha o polinômio $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 5$, sabendo que uma de suas raízes é igual a $\frac{1}{2}$.

11.18) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$, sabendo que duas de suas raízes são os números 2 e -1.

11.19) Decomponha o polinômio $A(x) = x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 36$, sabendo que o número -2 é raiz dupla.

11.20) Decomponha o polinômio $B(x) = 3x^3 - 7x^2 + (5 + 6i)x - (1 + 2i)$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 - i$.

11.21) Decomponha o polinômio $P(x) = x^3 - 5x^2 - 8x + 48$, sabendo que uma de suas raízes é igual a 4.

11.22) O número -4 é uma das raízes da equação $x^5 + 12x^4 + 47x^3 + 52x^2 - 48x - 64 = 0$. Verifique sua multiplicidade.

11.23) Determine os valores de **p** e **q** de modo que o número 5 seja raiz dupla da equação:

$$x^4 - 10x^3 + 24x^2 + px + q = 0$$

11.24) Determine os valores de **r**, **s** e **t**, de modo que o número zero seja raiz dupla da equação:

$$7x^4 - 5x^3 + (r - 6)x^2 + (3s - 2)x + (t - 9) = 0$$

11.25) Determine **k**, de modo que o número -3 seja raiz da equação $x^4 - kx^3 + (k - 1)x^2 - 18 = 0$.

11.26) Sabe-se que o número 3 é raiz da equação $x^3 + (k - 5)x^2 + (4 - k)x + (6 - 6k) = 0$, onde **k** é real. Determine **k**, de modo que todas as raízes da equação sejam reais.

11.27) Seja P(x) um polinômio de grau 4 cujas raízes são **i** (dupla), -2 e zero. Determine P(x), sabendo que $P(-1) = -10i$.

11.28) Determine o polinômio P(x), de grau 3, cujas raízes são 4, -2 e 3, sabendo que a soma dos coeficientes é igual a 6.

11.29) Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - x + 9 = 3x^2 + x - 15$, sabendo que uma de suas raízes é o número 4.

11.30) Resolva a equação $x^5 - 9x^4 + 26x^3 - 24x^2 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número 3.

11.31) Resolva a equação $\frac{1}{x - 1} = \frac{x^2 + 3}{5x^2 - 8x + 3}$, sabendo que uma de suas raízes é o número 2.

11.32) Resolva a equação $x^3 - 2x - 4 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número 2.

11.7 — ALGUNS ARTIFÍCIOS

Neste item, examinaremos alguns exercícios que, além da teoria já vista, necessitarão de alguns artifícios para serem resolvidos.

Exercícios Resolvidos

11.33) Obtenha as raízes e faça a fatoração do polinômio:

$$P(x) = x^5 - 2x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 27x + 54$$

Solução

Aqui, "por sorte", conseguimos fazer uma fatoração por agrupamento:

$$P(x) = \underbrace{x^5 - 2x^4}+\underbrace{6x^3 - 12x^2}-\underbrace{27x + 54} =$$

$$= x^4(x-2) + 6x^2(x-2) - 27(x-2) = (x-2)(x^4 + 6x^2 - 27)$$

Assim:

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^4 + 6x^2 - 27) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x^4 + 6x^2 - 27 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

A equação (I) nos dá a raiz 2 e a equação (II) nos dá as raízes $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$, $3i$ e $-3i$. Portanto, o conjunto-solução da equação $P(x) = 0$ é:

$$S = \{2; \sqrt{3}; -\sqrt{3}; 3i; -3i\}$$

e a fatoração de P(x) é:

$$P(x) = (x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-3i)(x+3i)$$

11.34) Decomponha o polinômio P(x) do exercício anterior, no campo real.

Solução

Neste caso não devemos considerar as raízes imaginárias. Assim, ao resolvermos a equação $x^4 + 6x^2 - 27 = 0$, temos:

$$x^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{144}}{2}$$

isto é, $x^2 = 3$ ou $x^2 = -9$. Portanto:

$$x^4 + 6x^2 - 27 = (x^2 - 3)(x^2 + 9) = (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x^2 + 9)$$

Temos, então:

$$P(x) = (x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2 + 9)$$

Um outro modo de resolver esse problema é, primeiramente, fazer a decomposição no campo complexo:

$$P(x) = (x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x+3i)(x-3i)$$

para, em seguida, fazer a multiplicação dos termos em que aparecem raízes imaginárias:

$$(x+3i)(x-3i) = x^2 + 9$$

11.35) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 + 1$ em fatores do primeiro grau.

Solução

1.º modo

Vamos achar as raízes de P(x):

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$$

Portanto, as raízes de P(x) são as raízes quartas de -1:

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad r_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, temos:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$$

isto é:

$$x^4 + 1 = \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2.º modo

Podemos usar o artifício de somar e subtrair um mesmo termo, de modo a cair em algum caso conhecido de fatoração:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^2) =$$
$$= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$$

Se o problema tivesse pedido a fatoração no campo real, deveríamos parar aqui. Mas como foi pedida a fatoração em termos do primeiro grau, devemos continuar determinando as raízes de $x^2 + 1 + \sqrt{2}x$ e $x^2 + 1 - \sqrt{2}x$, que são:

$$\begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Estas são as mesmas raízes que obtivemos pelo primeiro modo e, obviamente, a resposta será a mesma.

11.36) Resolva a equação $x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Solução

1.º modo

Podemos fazer a mudança de variável $y = x^2$. Com isso temos:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = 0$$

Resolvendo esta última equação obteremos as raízes y_1 e y_2. Em seguida, resolvemos as equações:

$$\begin{cases} x^2 = y_1, \text{ de raízes } x_1 \text{ e } x_2 \\ \text{e} \\ x^2 = y_2, \text{ de raízes } x_3 \text{ e } x_4 \end{cases}$$

Finalmente teríamos:

$$P(x) = x^4 + x^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

No entanto, neste caso, há um modo mais rápido, que veremos em seguida.

2.º modo

Temos:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + x^2 + 1 - x^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - (x)^2 =$$
$$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2 = (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x)$$

Assim:

$$x^4 + x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 1 + x = 0 & \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x^2 + 1 - x = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{A equação (I) tem raízes } \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ e } \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}. \\ \text{A equação (II) tem raízes } \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ e } \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Portanto, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \left\{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$$

11.37) Resolva a equação $x^2 + (2 + \sqrt{5})x + 2\sqrt{5} = 0$.

Solução

$$\Delta = (2 + \sqrt{5})^2 - 4(2\sqrt{5}) = 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 8\sqrt{5} = 4 - 4\sqrt{5} + 5 = (2 - \sqrt{5})^2$$

Assim:

$$x = \frac{(2 + \sqrt{5}) \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{(2 + \sqrt{5}) \pm (2 - \sqrt{5})}{2}$$

donde: $x_1 = 2$ e $x_2 = \sqrt{5}$:

$$S = \{2; \sqrt{5}\}$$

11.38) Resolva a equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Solução

A seqüência:

$$(1;\ x;\ x^2;\ x^3;\ x^4)$$

é uma progressão geométrica (PG) de razão igual a x. Assim, usando a fórmula da soma dos termos de uma PG (veja capítulo 6 do volume 2 desta coleção), temos:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$$

É óbvio que a igualdade anterior só é válida para $x \neq 1$; porém, por simples verificação, concluímos que o número 1 não é raiz da equação dada. Assim:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 - 1 = 0 \\ \text{e} \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 = 1 \\ \text{e} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Portanto, as raízes da equação dada são as raízes quintas do número 1, com exceção do número 1:

$$\begin{cases} \omega_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5} & \omega_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{5} \\ \omega_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5} & \omega_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{8\pi}{5} \end{cases}$$

Se quisermos, poderemos indicar essas raízes de modo mais "compacto", lembrando que:

$$\begin{cases} \cos\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{8\pi}{5} & \text{sen}\,\frac{2\pi}{5} = -\,\text{sen}\,\frac{8\pi}{5} \\ \cos\frac{4\pi}{5} = \cos\frac{6\pi}{5} & \text{sen}\,\frac{4\pi}{5} = -\,\text{sen}\,\frac{6\pi}{5} \end{cases}$$

Assim, podemos dizer que as raízes procuradas são:

$$\cos\frac{2\pi}{5} \pm i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5} \quad \text{e} \quad \cos\frac{4\pi}{5} \pm i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{5}$$

No capítulo 4 do volume 3 desta coleção, vimos que $\text{sen}\,\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. A partir daí, se quiséssemos, poderíamos obter $\cos\frac{2\pi}{5}$, $\text{sen}\,\frac{2\pi}{5}$, $\text{sen}\,\frac{4\pi}{5}$ e $\cos\frac{4\pi}{5}$.

Poderíamos, também, observar que:

$$\omega_2 = \omega_1^2,\ \omega_3 = \omega_1^3,\ \omega_4 = \omega_1^4$$

Fazendo $\omega_1 = \omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5}$, poderíamos dizer que o conjunto-solução da equação é:

$$S = \{\omega;\ \omega^2;\ \omega^3;\ \omega^4\}$$

Este exercício será resolvido de outro modo no capítulo 16 (exercício 16.3).

11.39) Resolva a equação $(z - 1)^6 = (z - 3)^6$.

Solução

É fácil verificar que o número 1 não é solução da equação (isto é, $z \neq 1$). Portanto:

$$(z - 1)^6 = (z - 3)^6 \Leftrightarrow \frac{(z - 3)^6}{(z - 1)^6} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z - 3}{z - 1}\right)^6 = 1$$

Sejam ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 as raízes sextas do número 1 (com $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \omega$, $\omega_2 = \omega^2$, $\omega_3 = \omega^3$, $\omega_4 = \omega^4$, $\omega_5 = \omega^5$). Sendo ω_j uma delas, temos:

$$\frac{z - 3}{z - 1} = \omega_j$$

Isolando **z**, obtemos $z = \dfrac{\omega_j - 3}{\omega_j - 1}$.

Nesta última equação, vemos que $\omega_j \neq 1$ e, portanto, a raiz $\omega_0 = 1$ não serve. Sendo, então:

$$\omega_1 = \omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

o conjunto-solução é:

$$S = \left\{\frac{\omega - 3}{\omega - 1}; \frac{\omega^2 - 3}{\omega^2 - 1}; \frac{\omega^3 - 3}{\omega^3 - 1}; \frac{\omega^4 - 3}{\omega^4 - 1}; \frac{\omega^5 - 3}{\omega^5 - 1}\right\}$$

11.40) Mostre que os pontos representativos das raízes da equação $(z - 1)^6 = (z - 3)^6$ estão sobre uma reta.

Solução

$$(z - 1)^6 = (z - 3)^6 \Rightarrow |z - 1| = |z - 3|$$

De acordo com o que vimos no capítulo 3 deste volume, a equação $|z - 1| = |z - 3|$ representa a reta de equação $x = 2$.

Assim, as raízes da equação $(z - 1)^6 = (z - 3)^6$ são representadas por pontos (apenas alguns) que estão sobre a reta de equação $x = 2$.

11.41) Resolva a equação $x^4 - 2x^3 + 21x^2 - 32x + 80 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é um número imaginário puro.

Solução

Seja **ai** (com $a \in \mathbb{R}^*$) a raiz imaginária pura da equação. Fazendo a substituição, temos:

$$(ai)^4 - 2(ai)^3 + 21(ai)^2 - 32(ai) + 80 = 0$$

donde:

$$(a^4 - 21a^2 + 80) + (2a^3 - 32a)i = 0$$

Ficamos, então, com as equações:

$$\begin{cases} a^4 - 21a^2 + 80 = 0 & \text{(I)} \\ \quad \text{e} & \\ 2a^3 - 32a = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{A equação (I) nos dá } a = \pm 4 \text{ ou } a = \pm\sqrt{5}. \\ \text{A equação (II) nos dá } a = 0 \text{ ou } a = \pm 4. \end{cases}$

Para satisfazer simultaneamente as duas equações, ficamos com $a = \pm 4$. Portanto, a equação dada admite duas raízes imaginárias puras: $4i$ e $-4i$. Daí concluímos que o polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 21x^2 - 32x + 80$ pode ser fatorado do seguinte modo:

$$P(x) = \underbrace{(x - 4i)(x + 4i)}_{x^2 + 16} \cdot A(x).$$

Dividindo $P(x)$ por $x^2 + 16$ (ou fazendo uma divisão por $x - 4i$ e, em seguida, outra por $x + 4i$), obtemos $A(x) = x^2 - 2x + 5$, cujas raízes são $1 + 2i$ e $1 - 2i$. Assim, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \{4i; -4i; 1 + 2i; 1 - 2i\}$$

11.42) Consideremos o polinômio $P(x) = x^n - 1$, com $n > 1$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$. Sabendo que $r_1 = 1$, calcule o valor de $(5 - r_2) \cdot (5 - r_3) \ldots (5 - r_n)$.

Solução

Sendo $P(x) = (x - 1)(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)$, temos:

$$\frac{P(x)}{x - 1} = \underbrace{(x - r_2)(x - r_3) \ldots (x - r_n)}_{A(x)}$$

Percebemos, então, que:

$$(5 - r_2)(5 - r_3) \ldots (5 - r_n) = A(5)$$

Fazendo a divisão de $P(x)$ por $x - 1$, obtemos:

$$A(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1$$

Daí temos:

$$A(5) = 5^{n-1} + 5^{n-2} + 5^{n-3} + \ldots + 5^2 + 5 + 1 \qquad \text{(I)}$$

O "lado direito" da igualdade (I) é a soma dos termos de uma progressão geométrica de **n** termos e razão igual a 5. Portanto:

$$(5 - r_2) \cdot (5 - r_3) \ldots (5 - r_n) = A(5) = \frac{5^n - 1}{4}$$

11.43) Decomponha o polinômio $P(x) = x^3 + (-5 - 2i)x^2 + (7 + 7i)x + (-2 - 6i)$, sabendo que ele tem uma raiz real.

Solução

Seja **a** a raiz real de $P(x)$. Devemos ter, então, $P(a) = 0$, isto é:

$$a^3 + (-5 - 2i)a^2 + (7 + 7i)a + (-2 - 6i) = 0$$

Efetuando as multiplicações e agrupando os termos de modo que fiquem separadas as partes real e imaginária, obtemos:

$$(a^3 - 5a^2 + 7a - 2) + (-2a^2 + 7a - 6)i = 0$$

Tanto a parte real como a parte imaginária devem ser nulas:

$$\begin{cases} a^3 - 5a^2 + 7a - 2 = 0 & \text{(I)} \\ -2a^2 + 7a - 6 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo a equação (II), obtemos as raízes 2 e $\frac{3}{2}$. Por substituição, podemos verificar que, destas raízes, apenas o número 2 satisfaz também a equação (I). Assim, concluímos que a = 2, isto é, a raiz real de P(x) é o número 2. Portanto, P(x) é divisível por x − 2:

$$P(x) = (x - 2) \cdot Q(x)$$

Efetuando a divisão, obtemos Q(x):

2	1	(−5 − 2i)	(7 + 7i)	(−2 − 6i)
	1	(−3 − 2i)	(1 + 3i)	0

$$Q(x) = x^2 + (-3 - 2i)x + (1 + 3i)$$

Podemos, em seguida, obter as raízes de Q(x), que são 1 + i e 2 + i. Assim, as raízes de P(x) são os números 2, 1 + i, 2 + i, e sua decomposição é:

$$x^3 + (-5 - 2i)x^2 + (7 + 7i)x + (-2 - 6i) = (x - 2)(x - 1 - i)(x - 2 - i)$$

Exercícios Propostos

11.44) Decomponha o polinômio $P(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108$.

11.45) Resolva a inequação $x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 - 36x - 108 < 0$, no universo dos reais.

11.46) Resolva a equação $x^2 + (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0$.

11.47) Resolva a equação $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = 0$.

11.48) Resolva a equação $(z - 3)^5 = z^5$.

11.49) Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 20x + 24 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é um número imaginário puro.

11.50) Consideremos o polinômio $P(x) = x^n - 1$, com $n > 1$, cujas raízes são $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$. Sabendo que $r_1 = 1$, calcule os valores de:

a) $(3 - r_2) \cdot (3 - r_3) \cdot \ldots \cdot (3 - r_n)$ b) $(1 - r_2) \cdot (1 - r_3) \cdot \ldots \cdot (1 - r_n)$

11.51) Decomponha o polinômio $P(x) = x^3 + (-6 + 2i)x^2 + (10 - 9i)x + (-3 + 9i)$, sabendo que ele possui uma raiz real.

11.52) A equação $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) + 5 = 0$ tem raízes **r**, **s** e **t**. Quais as raízes da equação $(x - r)(x - s)(x - t) - 5 = 0$?

11.53) Consideremos uma equação algébrica de grau 20. Qual o número máximo de raízes distintas que essa equação pode ter?

11.54) Consideremos dois polinômios A(x) e B(x), ambos de grau $n \geq 1$. Suponhamos que os valores numéricos de A(x) e B(x) coincidam para $n + 1$ valores distintos de x: $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_n$. Demonstre que, neste caso, A(x) e B(x) são idênticos.

11.8 — POLINÔMIOS DE MESMAS RAÍZES

Consideremos dois polinômios A(x) e B(x), de mesmo grau $n > 0$, que tenham as mesmas raízes, com as mesmas multiplicidades:

$$\begin{cases} A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 & \text{(I)} \\ B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Sendo $r_1, r_2, \ldots r_n$ as raízes, vem:

$$\begin{cases} A(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) & \text{(III)} \\ B(x) = b_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) & \text{(IV)} \end{cases}$$

Observando (III) e (IV), concluímos que:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_n}{b_n} = k$$

isto é:

$$A(x) = k \cdot B(x) \qquad \text{(V)}$$

onde **k** é uma constante não nula.

Substituindo (I) e (II) em (V), temos:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = kb_n x^n + kb_{n-1}x^{n-1} + \ldots + kb_1 x + kb_0$$

donde, por identidade de polinômios, concluímos que:

$$\begin{cases} a_n = k \cdot b_n \\ a_{n-1} = k \cdot b_{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 = k \cdot b_1 \\ a_0 = k \cdot b_0 \end{cases}$$

Em outras palavras, podemos dizer que os coeficientes correspondentes são proporcionais.

Exemplo

Consideremos o polinômio $A(x) = 3x^2 - 7x + 9$. Multiplicando-o pela constante $k = 10$, obtemos o polinômio $B(x) = 30x^2 - 70x + 90$, que deve ter as mesmas raízes de A(x), com as mesmas multiplicidades.

Capítulo

12

Raízes múltiplas

12.1 — RAÍZES MÚLTIPLAS E DERIVADAS — TEOREMA

Consideremos um polinômio P(x) de grau $n \geqslant 1$, que possui uma raiz c de multiplicidade $m > 1$. Conforme vimos no capítulo anterior, P(x) poderá ser escrito na forma:

$$P(x) = (x - c)^m \cdot A(x)$$

com $A(c) \neq 0$, isto é, não sendo **c** raiz de A(x). Seja $P^{(1)}(x)$ o polinômio derivado de P(x). Vale, então, o teorema (que será demonstrado no item seguinte):

$$\boxed{c \text{ é raiz de multiplicidade } m - 1 \text{ de } P^{(1)}(x)} \quad (12.1)$$

isto é, podemos decompor $P^{(1)}(x)$ na forma:

$$P^{(1)}(x) = (x - c)^{m-1} \cdot B(x)$$

onde $B(c) \neq 0$.

Exemplos

a) Consideremos o polinômio:

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$$

que pode ser fatorado do seguinte modo:

$$P(x) = (x - 1)^3 \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{A(x)}$$

A derivada primeira de P(x) é o polinômio:

$$P^{(1)}(x) = 5x^4 - 16x^3 + 21x^2 - 14x + 4$$

que pode ser fatorado da seguinte maneira:

$$P^{(1)}(x) = (x-1)^2 \cdot \underbrace{(5x^2 - 6x + 4)}_{B(x)}$$

Observando que $A(1) \neq 0$, e $B(1) \neq 0$, podemos dizer que:

$$\begin{bmatrix} 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 3 \text{ de } P(x) \\ 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 2 \text{ de } P^{(1)}(x) \end{bmatrix}$$

b) Consideremos novamente o polinômio P(x) do exemplo anterior:

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 4x - 1$$

Conforme vimos, o número 1 é raiz tripla de P(x). Determinemos algumas das derivadas sucessivas de P(x):

$$\begin{bmatrix} P^{(1)}(x) = 5x^4 - 16x^3 + 21x^2 - 14x + 4 \\ P^{(2)}(x) = 20x^3 - 48x^2 + 42x - 14 \\ P^{(3)}(x) = 60x^2 - 96x + 42 \end{bmatrix}$$

Aplicando-se várias vezes o teorema 12.1, podemos dizer que:

$$\begin{bmatrix} 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 3 \text{ de } P(x) \\ 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 2 \text{ de } P^{(1)}(x) \\ 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 1 \text{ de } P^{(2)}(x) \\ 1 \text{ é raiz de multiplicidade } 0 \text{ de } P^{(3)}(x) \end{bmatrix}$$

isto é, o número 1 não é raiz de $P^{(3)}(x)$.
Embora não tenhamos definido anteriormente, passaremos a usar a frase:

"**k** é raiz de multiplicidade 0 de P(x)"

com o seguinte significado:

"**k não** é raiz de P(x)".

O exemplo *b* anterior ilustra uma conseqüência do teorema 12.1:

> Se o número **c** é raiz de multiplicidade **m** (com $m \geq 1$) do polinômio P(x), então será também raiz dos polinômios:
>
> $$P^{(1)}(x), P^{(2)}(x), \ldots, P^{(m-1)}(x)$$
>
> com multiplicidades respectivamente iguais a:
>
> $$m-1, m-2, \ldots, 1$$
>
> mas não será raiz de $P^{(m)}(x)$.

(12.2)

12.2 — DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Temos, então:

$$P(x) = (x-c)^m \cdot A(x)$$

com $A(c) \neq 0$. Usando a regra da derivada do produto, vem:

$$P^{(1)}(x) = m(x-c)^{m-1} \cdot A(x) + (x-c)^m \cdot A^{(1)}(x) =$$

$$= (x-c)^{m-1} \cdot \underbrace{[m \cdot A(x) + (x-c)A^{(1)}(x)]}_{B(x)} = (x-c)^{m-1} \cdot B(x)$$

Portanto, para demonstrar que c é raiz de multiplicidade $m-1$ de $P^{(1)}(x)$, basta mostrarmos que $B(c) \neq 0$. De fato:

$$B(c) = [m \cdot A(c) + (c-c)A^{(1)}(c)] = m \cdot A(c)$$

mas, como $A(c) \neq 0$, concluímos que $B(c) \neq 0$.

Teorema

Pode-se demonstrar que:

> Se o número **c** é raiz dos polinômios:
>
> $P(x), P^{(1)}(x), P^{(2)}(x), \ldots, P^{(m-1)}(x)$
>
> mas não é raiz de $P^{(m)}(x)$, então será raiz de multiplicidade **m** de $P(x)$. (12.3)

Observação: No capítulo 17 veremos um outro processo para a pesquisa de raízes múltiplas.

Exercícios Resolvidos

12.1) Mostre que o número 2 é raiz tripla do polinômio $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$.

Solução

Este exercício já foi resolvido no capítulo 11 (exercício 11.5). Agora vamos resolvê-lo de outro modo. Temos:

$$\begin{cases} P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\ P^{(1)}(x) = 5x^4 - 20x^3 + 21x^2 - 4x + 4 \\ P^{(2)}(x) = 20x^3 - 60x^2 + 42x - 4 \\ P^{(3)}(x) = 60x^2 - 120x + 42 \end{cases}$$

Podemos verificar que $P(2) = 0$, $P^{(1)}(2) = 0$, $P^{(2)}(2) = 0$ e $P^{(3)}(2) = 0$.

Assim, de acordo com o teorema 12.3, podemos afirmar que o número 2 é raiz de multiplicidade 3 de P(x).

12.2) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla (multiplicidade 2).

Solução

Seja $P(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 9$. Se o número c é raiz de multiplicidade 2 de P(x), será raiz de multiplicidade 1 de $P^{(1)}(x)$.

$$P^{(1)}(x) = 3x^2 - 14x + 15$$

Determinemos as raízes de $P^{(1)}(x)$:

$$3x^2 - 14x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{16}}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = 3$$

Portanto, c pode ser $\frac{5}{3}$ ou 3. Fazendo as substituições (ou usando Briot-Ruffini), obtemos:

$$P\left(\frac{5}{3}\right) \neq 0 \quad \text{e} \quad P(3) = 0$$

Assim, concluímos que c = 3, isto é, a raiz dupla procurada é o número 3 e, portanto, P(x) pode ser escrito:

$$P(x) = (x - 3)^2 \cdot Q(x)$$

Determinemos Q(x):

3	1	−7	15	−9
3	1	−4	3	0
	1	−1	0	

$$Q(x) = x - 1$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Portanto, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \{3; 1\}$$

12.3) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - (4 + 2i)x^2 + (4 + 6i)x - 4i$, sabendo que ele tem uma raiz dupla.

Solução

Derivando P(x), obtemos: $P^{(1)}(x) = 3x^2 - (8 + 2i)x + (4 + 6i)$.

Podemos obter as raízes de $P^{(1)}(x)$, que são $1 + i$ e $\frac{5 + i}{3}$

Uma delas será raiz dupla de P(x). Fazendo as verificações obtemos:

$$P(1 + i) = 0 \quad \text{e} \quad P\left(\frac{5 + i}{3}\right) \neq 0$$

Assim, $1 + i$ é a raiz dupla de $P(x)$ que procuramos:

$$P(x) = [x - (1 + i)]^2 \cdot Q(x)$$

Fazendo duas divisões sucessivas por $x - (1 + i)$, obtemos $Q(x)$:

$1 + i$	1	$(-4 - 2i)$	$(4 + 6i)$	$-4i$
$1 + i$	1	$(-3 - i)$	$(2 + 2i)$	0
	1	-2	0	

$$Q(x) = x - 2$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Portanto, as raízes de $P(x)$ são $1 + i$ (dupla) e 2 (simples).

12.4) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2$, sabendo que admite uma raiz tripla.

Solução

Temos, então:

$$P^{(1)}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5$$
$$P^{(2)}(x) = 12x^2 + 6x - 6$$

Sendo c a raiz tripla de $P(x)$, deverá também ser raiz dupla de $P^{(1)}(x)$ e raiz simples de $P^{(2)}(x)$. As raízes de $P^{(2)}(x)$ são -1 e $\frac{1}{2}$. Portanto, c pode ser igual a -1 ou $\frac{1}{2}$. Fazendo as verificações, obtemos:

$$P(-1) = 0 \quad \text{e} \quad P\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$$

Assim, a raiz tripla procurada é $c = -1$:

$$P(x) = (x + 1)^3 \cdot Q(x)$$

Fazendo três divisões sucessivas por $x + 1$, obtemos $Q(x)$:

-1	1	1	-3	-5	-2
-1	1	0	-3	-2	0
-1	1	-1	-2	0	
	1	-2	0		

$$Q(x) = x - 2$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Portanto, as raízes de $P(x)$ são -1 e 2.

12.5) Determine o valor de **k** de modo que o polinômio $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + kx - 2$ admita uma raiz tripla. Depois determine as raízes.

Solução

A raiz tripla c de P(x) deverá ser raiz dupla de $P^{(1)}(x)$ e raiz simples de $P^{(2)}(x)$, porém não poderá ser raiz de $P^{(3)}(x)$. Temos, então:

$$\begin{cases} P^{(1)}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + k \\ P^{(2)}(x) = 12x^2 + 6x - 6 \\ P^{(3)}(x) = 24x + 6 \end{cases}$$

$$P^{(2)}(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 + 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Portanto, os possíveis valores de **c** são -1 e $\frac{1}{2}$

1.ª possibilidade: $c = -1$

$$P(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 + (-1)^3 - 3(-1)^2 + k(-1) - 2 = 0 \Leftrightarrow k = -5$$

Assim: $\begin{cases} P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 \\ P^{(1)}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \end{cases}$

Por substituição, verificamos que:

$$P^{(1)}(-1) = 0 \text{ e } P^{(3)}(-1) \neq 0$$

Portanto, uma possibilidade é $k = -5$ e $c = -1$; teremos:

$$P(x) = (x + 1)^3 \cdot Q(x)$$

−1	1	1	−3	−5	−2
−1	1	0	−3	−2	0
−1	1	−1	−2	0	
	1	−2	0		

$$Q(x) = x - 2$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Assim, para $k = -5$, as raízes são -1 e 2.

2.ª possibilidade: $c = \frac{1}{2}$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + k\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{41}{8}$$

Assim: $\begin{cases} P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + \dfrac{41}{8}x - 2 \\ P^{(1)}(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + \dfrac{41}{8} \end{cases}$

Por substituição, verificamos que $P^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ e, portanto, a possibilidade $c = \frac{1}{2}$ não serve.

Em resumo, a resposta do exercício é:

$$\begin{cases} k = -5 \\ \text{raízes: } -1 \text{ e } 2 \end{cases}$$

12.6) Determine os valores de **m** e **n** de modo que o polinômio:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + (m - 1)x + (2n - 2)$$

admita uma raiz tripla.

Solução

A raiz tripla **c** de P(x) deverá ser raiz dupla de $P^{(1)}(x)$ e raiz simples de $P^{(2)}(x)$, porém não poderá ser raiz de $P^{(3)}(x)$. Temos, então:

$$\begin{cases} P^{(1)}(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + (m - 1) \\ P^{(2)}(x) = 12x^2 - 30x + 12 \\ P^{(3)}(x) = 24x - 30 \end{cases}$$

$$P^{(2)}(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 30x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Portanto, os possíveis valores de **c** são 2 e $\frac{1}{2}$.

Observemos que $P^{(3)}(2) \neq 0$ e $P^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$.

1.ª possibilidade: $c = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} P\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (m-1)\left(\frac{1}{2}\right) + 2n - 2 = 0 \Leftrightarrow 8m + 32n = 25 \\ P^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

Daí temos $m = -\frac{7}{4}$ e $n = \frac{39}{32}$.

2.ª possibilidade: $c = 2$

$$\begin{cases} P(2) = 0 \Leftrightarrow (2)^4 - 5(2)^3 + 6(2)^2 + (m-1)(2) + 2n - 2 = 0 \Leftrightarrow m + n = 2 \\ P^{(1)}(2) = 0 \Leftrightarrow 4(2)^3 - 15(2)^2 + 12(2) + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 5 \end{cases}$$

Daí tiramos $m = 5$ e $n = -3$.

Portanto, a resposta do problema é:

$$m = -\frac{7}{4} \text{ e } n = \frac{39}{32}$$

ou

$$m = 5 \text{ e } n = -3$$

Exercícios Propostos

12.7) Resolva a equação $x^3 + 7x^2 + 6x + 12 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

12.8) Resolva a equação $x^3 - (5 - 2i)x^2 + (6 - 8i)x + 6i = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

12.9) Resolva a equação $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 5x + 1 = 0$, sabendo que admite uma raiz tripla.

12.10) Determine **k** de modo que a equação $x^3 + 9x^2 + 24x + k = 0$ admita uma raiz dupla.

12.11) Determine o valor de **k** de modo que a equação $x^4 + 7x^3 + 18x^2 + kx + 8 = 0$ admita uma raiz tripla. Depois resolva a equação.

12.12) Determine os valores de **k** e **t** de modo que a equação $x^4 + x^3 - 3x^2 + kx + t = 0$ admita uma raiz tripla.

12.13) Determine o valor de **k** de modo que a equação $x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 + 8x + k = 0$ admita uma raiz dupla real e negativa.

12.14) Determine o valor de **k** de modo que o polinômio $P(x) = x^3 + (k-4)x^2 + (4-4k)x + 4k$ admita o número 2 como raiz dupla.

Capítulo

13

Raízes imaginárias

13.1 — TEOREMA DAS RAÍZES CONJUGADAS

Consideremos um polinômio P(x) de grau **n** e coeficientes reais. Se o número imaginário $z = a + bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$) é raiz de P(x), temos: a) $\bar{z}$ também é raiz de P(x); b) $\bar{z}$ tem a mesma multiplicidade de **z**.	(13.1)

Demonstração

a) Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são números reais. Se **z** é raiz de P(x), temos $P(z) = 0$:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad \text{(I)}$$

Calculemos $P(\bar{z})$:

$$P(\bar{z}) = a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad \text{(II)}$$

Já que $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ são reais, temos:

$$a_n = \overline{a_n}$$
$$a_{n-1} = \overline{a_{n-1}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_0 = \overline{a_0}$$

Usando esse fato e lembrando que para um número complexo qualquer ω vale:

$$(\bar{\omega})^n = \overline{(\omega^n)}$$

a igualdade (II) transforma-se em:

$$P(\bar{z}) = \overline{a_n}(\overline{z^n}) + \overline{a_{n-1}}(\overline{z^{n-1}}) + \ldots + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0)} = \overline{P(z)} = 0$$

Assim, se $P(\bar{z}) = 0$, $\bar{z}$ é raiz de $P(x)$.

b) Temos $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$. Suponhamos que z seja raiz de multiplicidade **m** (com $m \geqslant 1$). Já que z e $\bar{z}$ são raízes de $P(x)$, temos:

$$P(x) = (x - z)(x - \bar{z}) \cdot A(x) = [x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}] \cdot A(x) =$$

$$= \underbrace{[x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)]}_{B(x)} \cdot A(x)$$

Observando que $P(x)$ e $B(x)$ têm coeficientes reais, concluímos que $A(x)$ também tem coeficientes reais.

Se z for raiz simples de $P(x)$ (isto é, $m = 1$), então z não será raiz de $A(x)$ e, portanto, $\bar{z}$ também não será raiz de $A(x)$; isto nos leva a concluir que $\bar{z}$ também será raiz simples. Em outras palavras, se z é raiz simples, $\bar{z}$ também é raiz simples de $P(x)$.

Se $m > 1$, então z deverá ser raiz de $A(x)$; mas, levando em conta que $A(x)$ possui coeficientes reais, $\bar{z}$ também será raiz de $A(x)$.

Aplicando-se esse raciocínio o número necessário de vezes, chegaremos à conclusão de que z e $\bar{z}$ têm a mesma multiplicidade.

Exemplos

a) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$.
Suponhamos que alguém nos informe que o número $z = 2 + i$ seja raiz de $P(x)$. Observando que os coeficientes do polinômio são todos **reais**, concluímos que o número $\bar{z} = 2 - i$ também deve ser raiz de $P(x)$.

b) Consideremos o polinômio $P(x) = x^2 - (4 + 2i)x + (2 + 4i)$.
Observemos que alguns de seus coeficientes são **imaginários**; disso resulta que para esse polinômio **não** se aplica o teorema 13.1. De fato, se determinarmos as raízes de $P(x)$, obteremos $z_1 = 3 + i$ e $z_2 = 1 + i$; no entanto, os números $\bar{z}_1 = 3 - i$ e $\bar{z}_2 = 1 - i$ **não** são raízes de $P(x)$.

c) Sabe-se que o número $z = -3i$ é raiz dupla do polinômio:

$$P(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$$

Como todos os coeficientes de $P(x)$ são reais, o númèro $\bar{z} = 3i$ também é raiz dupla de $P(x)$. Donde, podemos escrever:

$$P(x) = (x + 3i)^2(x - 3i)^2 \cdot A(x)$$

Observação: Nos capítulos 11 e 12 apresentamos teoremas que valem para polinômios de coeficientes complexos; neste capítulo, enunciamos um teorema que vale apenas quando os coeficientes são reais. Nos próximos teoremas, devemos observar cuidadosamente para que "tipos" de coeficientes eles valem.

13.2 — CONSEQÜÊNCIA

Consideremos um polinômio P(x) de grau $n > 0$ e de coeficientes reais. Como conseqüência do teorema anterior, temos que o número de raízes imaginárias de P(x) é sempre par. Assim, se P(x) for de grau ímpar, terá um número ímpar de raízes reais (isto é, pelo menos uma raiz real).

Propriedade

Para facilitar nosso trabalho em alguns exercícios, chamaremos a atenção para um detalhe. Consideremos os números imaginários $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$ (com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$). Sendo P(x) um polinômio de coeficientes reais, suponhamos que **z** seja raiz de P(x); nesse caso, $\bar{\mathbf{z}}$ também é raiz de P(x), portanto podemos escrever:

$$P(x) = (x - z)(x - \bar{z}) \cdot A(x)$$

Fazendo o produto dos dois termos correspondentes às raízes conjugadas, temos:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - (bi)][(x - a) + (bi)] =$$
$$= (x - a)^2 - (bi)^2 = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$$

Observe que $-2a$ é real e $a^2 + b^2$ também é real.

O produto de dois termos correspondentes a duas raízes imaginárias conjugadas apresenta sempre um polinômio de grau 2 de coeficientes reais (é este o detalhe que queríamos ressaltar).

Exercícios Resolvidos

13.1) Qual o menor grau possível para um polinômio P(x) de coeficientes reais e de grau $n > 0$ que admite os números 2, 5 e $7 + i$ como raízes?

Solução

Já que P(x) tem coeficientes reais e $7 + i$ é raiz, concluímos que $7 - i$ também é raiz. Assim, P(x) terá no mínimo quatro raízes:

$$2,\ 5,\ 7 + i \text{ e } 7 - i$$

Portanto, P(x) é no mínimo de grau 4.

13.2) Dê um polinômio P(x) de coeficientes reais, de menor grau possível, que admita como raízes os números 2 e $1 + i$.

Solução

Se $1 + i$ é raiz, $1 - i$ também o é. Assim, P(x) terá no mínimo três raízes e será, no mínimo, de grau 3.

Assim:

$$P(x) = a_n(x - 2)[x - (1 + i)][x - (1 - i)] \quad \text{(I)}$$

De acordo com o que destacamos no item 13.3, temos:

$$[x - (1 + i)][x - (1 - i)] = x^2 - 2(1)x + (1^2 + 1^2) = x^2 - 2x + 2$$

Substituindo em (I), vem:

$$P(x) = a_n(x - 2)(x^2 - 2x + 2) = a_n(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)$$

Fazendo $a_n = 1$, obtemos um dos polinômios que satisfaz as condições do problema:

$$P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$$

13.3) Dê um polinômio P(x) de coeficientes complexos, de menor grau possível, que admita como raízes os números 2 e $1 + i$.

Solução

Este exercício assemelha-se ao anterior. Naquele, pedíamos que o polinômio tivesse coeficientes reais; neste, estamos pedindo que os coeficientes sejam complexos. Então, não é necessário que o número $1 - i$ seja raiz do polinômio. Temos, então:

$$P(x) = a_n(x - 2)[x - (1 + i)] = a_n[x^2 - (3 + i)x + (2 + 2i)]$$

Fazendo $a_n = 1$, obtemos um polinômio que satisfaz a condição do exercício:

$$P(x) = x^2 - (3 + i)x + (2 + 2i)$$

13.4) Dê um polinômio P(x) de coeficientes reais, de menor grau possível, que admita como raízes os números 7, $3 - i$ e $5i$, com multiplicidades 1, 3 e 2, respectivamente.

Solução

$$\begin{cases} 7 \text{ é raiz simples} \\ 3 - i \text{ é raiz tripla} \Rightarrow 3 + i \text{ é raiz tripla} \\ 5i \text{ é raiz dupla} \Rightarrow -5i \text{ é raiz dupla} \end{cases}$$

Assim, P(x) admite no mínimo 11 raízes e é no mínimo de grau 11. Podemos, então, escrever:

$$P(x) = a_n(x - 7) \cdot [x - (3 - i)]^3 \cdot [x - (3 + i)]^3 \cdot (x - 5i)^2 \cdot (x + 5i)^2$$

onde a_n é um número real qualquer, não nulo.

13.5) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + i$.

Solução

Seja $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$. Como os coeficientes são todos reais e o número $2 + i$ é raiz, concluímos que o número $2 - i$ também é raiz. Portanto, podemos escrever:

$$P(x) = [x - (2 + i)][x - (2 - i)] \cdot A(x) \qquad (I)$$

Para obtermos A(x), podemos fazer uma divisão por $x - (2 + i)$ e, em seguida, outra por $x - (2 - i)$:

$2 + i$	1	-7	17	-15
$2 - i$	1	$-5 + i$	$6 - 3i$	0
	1	-3	0	

$$A(x) = x - 3$$

$$A(x) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Assim, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \{3;\ 2 + i;\ 2 - i\}$$

No entanto, poderíamos ter obtido A(x) de outro modo. De acordo com o que vimos no item 13.3, temos:

$$[x - (2 + i)][x - (2 - i)] = x^2 - 2(2)x + (2^2 + 1^2) = x^2 - 4x + 5$$

Substituindo em (I):

$$P(x) = (x^2 - 4x + 5) \cdot A(x)$$

Portanto, podemos obter A(x) dividindo P(x) por $x^2 - 4x + 5$, utilizando o método da chave:

$$\begin{array}{rl|l} x^3 - 7x^2 + 17x - 15 & & x^2 - 4x + 5 \\ -x^3 + 4x^2 - 5x & & x - 3 \\ \hline -3x^2 + 12x - 15 & & \\ 3x^2 - 12x + 15 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

$$\boxed{A(x) = x - 3}$$

No capítulo 14 resolveremos este exercício de outro modo (exercício 14.5).

13.6) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$, sabendo que o número $3i$ é raiz dupla.

Solução

Os coeficientes de P(x) são reais. Portanto, se $3i$ é raiz dupla, $-3i$ também o é. Logo:

$$P(x) = (x - 3i)^2(x + 3i)^2 \cdot A(x)$$

Para obtermos A(x), fazemos duas divisões sucessivas por $x - 3i$ e duas divisões por $x + 3i$:

$3i$	1	-1	18	-18	81	-81
$3i$	1	$-1 + 3i$	$9 - 3i$	$-9 + 27i$	$-27i$	0
$-3i$	1	$-1 + 6i$	$-9 - 6i$	9	0	
$-3i$	1	$-1 + 3i$	$-3i$	0		
	1	-1	0			

$$A(x) = x - 1$$

Como a raiz de A(x) é o número 1, concluímos que as raízes de P(x) são: $3i$ (dupla), $-3i$ (dupla) e 1 (simples).

Este exercício será resolvido de outro modo no capítulo 14 (exercício 14.6).

13.7) Determine o número real **m** de modo que o polinômio $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 11x + m$ admita uma raiz imaginária de módulo igual a 1.

Solução

Seja $z = a + bi$ a raiz imaginária mencionada. Já que $|z| = 1$, temos $a^2 + b^2 = 1$. Como os coeficientes de P(x) são reais, $\bar{z}$ também é raiz de P(x); assim, concluímos que P(x) é divisível por $(x - z)(x - \bar{z})$. Mas, de acordo com o que vimos no item 13.3, temos:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 \underbrace{- 2a}_{k}\, x + \underbrace{(a^2 + b^2)}_{1} = \underbrace{x^2 + kx + 1}_{A(x)}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. As raízes de A(x) são ambas imaginárias e, portanto, seu discriminante deve ser negativo:

$$\Delta = k^2 - 4 < 0$$

Assim:

$$P(x) = A(x) \cdot Q(x)$$

Façamos a divisão de P(x) por A(x):

$$\begin{array}{llll|l} 5x^3 + & 2x^2 & -11x + m & & x^2 + kx + 1 \\ \hline -5x^3 - & 5kx^2 & -5x & & \underbrace{5x + (2 - 5k)}_{Q(x)} \\ \hline & (2 - 5k)x^2 & -16x + m & & \\ & -(2 - 5k)x^2 & -(2k - 5k^2)x & -(2 - 5k) & \\ \hline & & (5k^2 - 2k - 16)x & + (5k - 2 + m) & \end{array}$$

Como o resto dessa divisão deve ser identicamente nulo, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 5k^2 - 2k - 16 = 0 & \text{(I)} \\ 5k - 2 + m = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I) tiramos $k = 2$ ou $k = -\frac{8}{5}$.

Antes de substituirmos na equação (II), devemos verificar se esses valores de **k** satisfazem a condição $\Delta < 0$:

$$\begin{cases} k = 2 \Rightarrow \Delta = k^2 - 4 = 2^2 - 4 = 0 \text{ (não satisfaz)} \\ k = -\frac{8}{5} \Rightarrow \Delta = k^2 - 4 = \left(-\frac{8}{5}\right)^2 - 4 = -\frac{36}{25} \text{ (satisfaz)} \end{cases}$$

Substituindo $k = -\frac{8}{5}$ na equação (II), tiramos $m = 10$. Portanto, a resposta do problema é:

$$\boxed{m = 10}$$

No entanto, se quisermos, poderemos obter as raízes de P(x). Temos:

$$\begin{cases} -2a = k = -\frac{8}{5} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Deste sistema, obtemos $a = \frac{4}{5}$ e $b = \pm\frac{3}{5}$ Portanto:

$$z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i \text{ e } \bar{z} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

Para obtermos a raiz real, o meio mais rápido é achar a raiz do quociente Q(x).

$$Q(x) = 5x + (2 - 5k) = 5x + 10$$

$$Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

As raízes de P(x) são, então: $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$, $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ e -2.

13.8) Determine o número real **m** de modo que o polinômio $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - 11x + m$ admita uma raiz de módulo 1.

Solução

Neste caso, o enunciado não esclarece se a raiz de módulo 1 é real ou imaginária. Temos, então, duas possibilidades:

1.ª possibilidade: a raiz é imaginária.

Neste caso, temos um problema idêntico ao anterior e a resposta é $m = 10$.

2.ª possibilidade: a raiz é real.

Neste caso, a raiz real de módulo 1 pode ser 1 ou -1.

$$\begin{cases} P(1) = 0 \Leftrightarrow 5(1)^3 + 2(1)^2 - 11(1) + m = 0 \Leftrightarrow m = 4 \\ P(-1) = 0 \Leftrightarrow 5(-1)^3 + 2(-1)^2 - 11(-1) + m = 0 \Leftrightarrow m = -8 \end{cases}$$

A resposta do exercício é, então, $m = 10$ ou $m = 4$ ou $m = -8$

13.9) Mostre que o polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 3x - 7$ tem apenas uma raiz real.

Solução

Os coeficientes do polinômio são todos reais e o grau do polinômio é ímpar. Daí concluímos que P(x) tem pelo menos uma raiz real. Seja **k** essa raiz real.

$$P(x) = (x - k) \cdot A(x)$$

Vamos dividir P(x) por $x - k$ para obtermos A(x):

k	1	−1	3	−7
	1	$(k - 1)$	$(k^2 - k + 3)$	$(k^3 - k^2 + 3k - 7)$

$$A(x) = x^2 + (k - 1)x + (k^2 - k + 3)$$

O discriminante de A(x) é:

$$\Delta = (k - 1)^2 - 4(k^2 - k + 3) = -3k^2 + 2k - 11$$

O discriminante da expressão $-3k^2 + 2k - 11$ é:

$$\Delta' = 2^2 - 4(-3)(-11) = 4 - 132 = -128$$

Como $\Delta' < 0$ e o coeficiente de k^2 é negativo (-3), concluímos que a expressão $-3k^2 + 2k - 11$ será negativa para qualquer $k \in \mathbb{R}$; assim, temos que A(x) não tem raízes reais. Portanto, P(x) tem apenas uma raiz real (que é o número **k**).

Exercícios Propostos

13.10) Consideremos um polinômio P(x) de grau $n > 0$ que admite as raízes 3, 4 e $2 - 6i$.

a) Supondo que os coeficientes de P(x) sejam reais, qual o menor grau possível para esse polinômio?

b) Supondo que os coeficientes de P(x) sejam complexos, qual o menor grau possível para esse polinômio?

13.11) Um polinômio de coeficientes reais e não identicamente nulo tem o número 6 como raiz dupla, o número 8 como raiz tripla e o número $7 + 5i$ como raiz de multiplicidade 4. Qual o menor grau possível para esse polinômio?

13.12) Consideremos um polinômio P(x) de grau $n > 0$ e de coeficientes reais. Dê o valor *verdadeiro* ou *falso* para cada uma das sentenças abaixo:

a) Se **n** for ímpar, P(x) tem pelo menos uma raiz real.
b) Se **n** for ímpar, o número de raízes reais de P(x) também é ímpar.
c) Se **n** for par, P(x) tem pelo menos 2 raízes reais.
d) Se **n** for par, pode acontecer que todas as raízes de P(x) sejam imaginárias.
e) Se **n** for ímpar, pode acontecer que todas as raízes de P(x) sejam imaginárias.
f) Se **n** for par, o número de raízes reais também é par.

13.13) Sabe-se que os números 7, −9 e $2 + 3i$ são raízes de um polinômio P(x) de grau 17 e de coeficientes reais. Dê o valor *verdadeiro* ou *falso* para cada sentença a seguir:

a) P(x) tem pelo menos 3 raízes reais.
b) P(x) pode ter até 16 raízes reais.
c) P(x) pode ter até 15 raízes imaginárias.
d) P(x) pode ter no máximo 14 raízes imaginárias.

13.14) Dê o polinômio P(x) de coeficientes reais, de menor grau possível, que satisfaz simultaneamente as duas condições a seguir:

1.ª) os números i, 2 − i e 3 são raízes;
2.ª) o termo independente é igual a 30.

13.15) Dê o polinômio A(x) de coeficientes reais, de menor grau possível, que satisfaz simultaneamente as condições:

1.ª) 2i é raiz dupla;
2.ª) $1 + \sqrt{5}i$ é raiz simples;
3.ª) 0 é raiz tripla;
4.ª) o coeficiente de x^5 é igual a 32.

13.16) Resolva a equação $x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 6x - 40 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $3 + i$.

13.17) Resolva a equação $x^6 - 3x^5 - 18x^3 + 12x^2 = 30x^3 - 18x^4 - 20x^2$, sabendo que uma de suas raízes é o número 4i.

13.18) Resolva a equação $x^6 - x^5 - 2x^3 - 3x^2 - x - 2 = 0$, sabendo que **i** é raiz dupla.

13.19) Resolva a equação $x^5 - 4x^4 - 3x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$, sabendo que os números 1 e 2i são raízes.

13.20) Resolva a equação $x^7 - 2x^6 + 7x^5 - 14x^4 + 8x^3 - 16x^2 + ax + b = 0$, sabendo que o número 1 é raiz simples e o número 2i é raiz dupla.

13.21) Sabe-se que o número 5 + 7i é raiz de um polinômio P(x), não identicamente nulo, cujos coeficientes são complexos. Podemos garantir que o número 5 − 7i também é raiz de P(x)?

13.22) Sabe-se que o polinômio $A(x) = 5x^3 + 27x^2 + 46x + m$, onde $m \in \mathbb{R}$, admite uma raiz imaginária de módulo igual a 2. Determine:

a) o valor de **m**;
b) as raízes de A(x).

13.23) Determine o número real **m** de modo que o polinômio $A(x) = 5x^3 + 27x^2 + 46x + m$ admita uma raiz complexa de módulo igual a 2.

13.24) Resolva a equação $2x^5 + 9x^4 + 4x^3 + 54x + 27 = 0$, sabendo que ela admite uma raiz dupla e que o número $1 - \sqrt{2}i$ é raiz simples.

13.25) Resolva a equação $x^8 - 6x^7 + 14x^6 - 22x^5 + 25x^4 + 8x^3 - 60x^2 = 0$, sabendo que ela admite a raiz 2 + i e uma raiz imaginária pura.

Capítulo 14

Relações de Girard

14.1 — INTRODUÇÃO

Existem importantes **relações entre os coeficientes e as raízes** de uma equação algébrica, estabelecidas por Girard (Albert Girard, flamengo, 1590-1633). Porém, antes de mostrarmos como são essas relações no caso geral, estudaremos alguns casos particulares.

14.2 — EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Consideremos a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde **a**, **b** e **c** são complexos, com $a \neq 0$. Sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ suas raízes, temos:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2]$$

isto é:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

Por identidade de polinômios, obtemos as relações:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \qquad (14.1)$$

que são as relações de Girard para a equação do segundo grau. Já as havíamos estudado no campo **real** (veja capítulo 3 do volume 1 desta coleção); agora, estudaremos estas relações no campo **complexo**.

Exemplo

Seja a equação $8x^2 - 10x + 3 = 0$, cujas raízes são $x_1 = \frac{3}{4}$ e $x_2 = \frac{1}{2}$.

Neste caso temos:

$$a = 8,\ b = -10 \ \text{e}\ c = 3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4} \\ -\frac{b}{a} = -\frac{(-10)}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \\ \frac{c}{a} = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

14.3 — EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Consideremos a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, onde **a**, **b**, **c** e **d** são complexos, com $a \neq 0$. Sendo x_1, x_2 e x_3 suas raízes, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

ou

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) =$$
$$= x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 +$$
$$+ (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1 \cdot x_2x_3$$

Por identidade de polinômios, obtemos as relações:

$$\begin{aligned} &1.^a)\ x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ &2.^a)\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ &3.^a)\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{aligned} \qquad (14.2)$$

que são as relações de Girard para a equação do terceiro grau. Observe que na **primeira** relação temos as raízes tomadas **uma a uma**; na **segunda** relação temos as raízes tomadas **duas a duas**; na **terceira** relação temos as **três raízes**.

Exemplos

a) Consideremos a equação $5x^3 - 7x^2 - 9x + (6 + i) = 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3. Temos:

$$a = 5,\ b = -7,\ c = -9 \text{ e } d = 6 + i$$

Portanto:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{-7}{5} = \dfrac{7}{5} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-9}{5} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} = -\dfrac{6+i}{5} \end{cases}$$

b) Sejam **a**, **b** e **c** as raízes da equação $7x^3 + 9x^2 + 6x + 5 = 0$.
As relações de Girard para essa equação são:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{9}{7} \\ ab + ac + bc = \dfrac{6}{7} \\ abc = -\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

14.4 — EQUAÇÃO DO QUARTO GRAU

Consideremos a equação de grau 4:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

cujas raízes são x_1, x_2, x_3 e x_4. Por um processo semelhante ao usado nos itens anteriores, obtemos as relações de Girard para essa equação:

1.ª) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}$

2.ª) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}$

3.ª) $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}$

4.ª) $x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}$

Observe que:

1.º) na primeira relação, temos as raízes tomadas **uma a uma**;
2.º) na segunda relação, temos as combinações das 4 raízes, tomadas **duas a duas**; lembrando que $C_{4,2} = 6$, temos 6 parcelas;
3.º) na terceira relação, temos as combinações das 4 raízes, tomadas **três a três**; como $C_{4,3} = 4$, temos 4 parcelas;
4.º) na quarta relação, tomamos as **4 raízes**.

Exemplo

Sejam **a**, **b**, **c** e **d** as raízes da equação $5x^4 + 6x^3 + 7x^2 + 8x + 9 = 0$.

As relações de Girard para essa equação são:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\dfrac{6}{5} \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = \dfrac{7}{5} \\ abc + abd + acd + bcd = -\dfrac{8}{5} \\ abcd = \dfrac{9}{5} \end{cases}$$

14.5 — CASO GERAL

Consideremos a equação algébrica:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \ldots + a_0 = 0$$

de grau $n > 0$, cujas raízes são $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Por um processo semelhante ao usado nos três itens anteriores, podemos obter as relações de Girard para essa equação:

1.ª) $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

2.ª) $x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

3.ª) $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$

....

n.ª) $x_1x_2x_3 \ldots x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{a_0}{a_n}$

Observemos que:

1.º) na primeira relação, temos as raízes tomadas **uma a uma**;
2.º) na segunda relação, temos as combinações das **n** raízes tomadas **duas a duas**;
3.º) na terceira relação, temos as combinações das **n** raízes tomadas **três a três**;

....

n.º) na n-ésima relação, temos todas as **n raízes**.

Exemplo

Vamos escrever as relações de Girard para a equação do quinto grau

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

cujas raízes são x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5.

1.ª) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{b}{a}$

2.ª) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_1x_5 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_4 + x_3x_5 + {}$

$+ x_4x_5 = \frac{c}{a}$

3.ª) $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_5 + x_1x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_1x_4x_5 + x_2x_3x_4 + {}$

$+ x_2x_3x_5 + x_2x_4x_5 + x_3x_4x_5 = -\frac{d}{a}$

4.ª) $x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + x_1x_2x_4x_5 + x_1x_3x_4x_5 + x_2x_3x_4x_5 = \frac{e}{a}$

5.ª) $x_1x_2x_3x_4x_5 = -\frac{f}{a}$

Observação: As relações de Girard só são úteis na resolução de equações quando temos mais alguma informação sobre as raízes. Sozinhas, elas não são suficientes para resolver equações.

Exercícios Resolvidos

14.1) Determine as raízes do polinômio $P(x) = 9x^3 - 18x^2 + 11x - 2$, sabendo que uma de suas raízes é igual à soma das outras duas.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes do polinômio, as relações de Girard ficam:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-18}{9} = 2 & \text{(I)} \\[2ex] ab + ac + bc = \dfrac{11}{9} & \text{(II)} \\[2ex] abc = -\dfrac{-2}{9} = \dfrac{2}{9} & \text{(III)} \end{cases}$$

A condição dada no enunciado pode ser traduzida por:

$$a = b + c \qquad \text{(IV)}$$

Introduzindo (IV) em (I), obtemos:

$$2a = 2$$

donde:

$$2 = 1$$

Agora que já temos a raiz $a = 1$, podemos abandonar as relações de Girard e dividir $P(x)$ por $x - 1$, obtendo o polinômio $A(x) = 9x^2 - 9x + 2$, cujas raízes são $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{2}{3}$.

Assim, as raízes de $P(x)$ são: 1, $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{2}{3}$.

14.2) Obtenha a soma e o produto das raízes da equação $6x^5 + 7x^3 + 9x^2 + 4x + 5 = 0$.

Solução

Observemos que o coeficiente de x^4 é nulo, isto é, a equação pode ser escrita:

$$6x^5 + 0x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 4x + 5 = 0$$

Sendo x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 as raízes da equação, vamos considerar apenas a primeira e a última relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\dfrac{0}{6} = 0 \\[2ex] x_1x_2x_3x_4x_5 = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

14.3) Resolva a equação $x^3 + 8x^2 + 9x - 18 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o dobro de outra raiz.

Solução

Sejam **a**, **b** e **c** as raízes. As relações de Girard são:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{8}{1} & \text{(I)} \\[2ex] ab + ac + bc = \dfrac{9}{1} = 9 & \text{(II)} \\[2ex] abc = -\dfrac{-18}{1} = 18 & \text{(III)} \end{cases}$$

A condição dada no enunciado pode ser traduzida por:

$$a = 2b \qquad \text{(IV)}$$

Tomemos o valor de **a** da equação (IV) e substituamos nas equações (I) e (II):

$$\begin{cases} 3b + c = -8 & \text{(V)} \\ 2b^2 + 3bc = 9 & \text{(VI)} \end{cases}$$

De (V), tiramos $c = -8 - 3b$ (VII)

Substituindo em (VI), obtemos a equação $7b^2 + 24b + 9 = 0$, cujas raízes são $b = -3$ e $b'' = -\dfrac{3}{7}$. Substituindo nas equações (IV) e (VII), vem:

$$\left[\begin{array}{l} 6 = -3 \Rightarrow a = -6 \text{ e } c = 1 \\[2ex] b = -\dfrac{3}{7} \Rightarrow a = -\dfrac{6}{7} \text{ e } c = \dfrac{-47}{9} \end{array}\right.$$

A fim de sabermos qual destas duas séries de valores serve, fazemos o teste na equação que ainda não foi usada (III) e vemos que apenas a primeira série serve. Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \{-3; -6; 1\}$$

14.4) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

Solução

Já resolvemos este exercício com o auxílio de derivada (veja exercício 12.2). Agora vamos resolvê-lo usando as relações de Girard. Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-7}{1} = 7 \\[2ex] ab + ac + bc = \dfrac{15}{1} = 15 \\[2ex] abc = -\dfrac{-9}{1} = 9 \end{cases}$$

Já que a equação tem uma raiz dupla, façamos b = a. Substituindo nas três equações anteriores, temos:

$$\begin{cases} 2a + c = 7 & \text{(I)} \\ a^2 + 2ac = 15 & \text{(II)} \\ a^2c = 9 & \text{(III)} \end{cases}$$

Da equação (I), tiramos: $c = 7 - 2a$ (IV). Substituindo em (II), obtemos a equação:

$$3a^2 - 14a + 15 = 0$$

cujas raízes são $a' = 3$ e $a'' = \frac{5}{3}$. Substituindo em (IV), temos:

$$\begin{cases} a = 3 \Rightarrow c = 1 \\ a = \frac{5}{3} \Rightarrow c = \frac{11}{3} \end{cases}$$

Para sabermos qual destes pares de valores vão servir, fazemos a verificação na equação que ainda não foi usada (III) e observamos que serve apenas o par $a = 3$ e $c = 1$.

Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \{3; 1\}$$

onde **3** é a raiz dupla.

14.5) Resolva a equação $x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + i$.

Solução

Este exercício já foi resolvido no capítulo 13 (exercício 13.5). Vamos agora resolvê-lo de outro modo (bem mais rápido).

Observemos que os coeficientes da equação são todos reais; portanto, se o número $2 + i$ é raiz, o número $2 - i$ também o é. Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, pela primeira relação de Girard, temos:

$$a + b + c = -\frac{-7}{1} = 7$$

Fazendo $a = 2 + i$ e $b = 2 - i$, temos:

$$(2 + i) + (2 - i) + c = 7$$

donde:

$$c = 3$$

Portanto, o conjunto-solução é:

$$S = \{2 + i; 2 - i; 3\}$$

14.6) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^5 - x^4 + 18x^3 - 18x^2 + 81x - 81$, sabendo que o número $3i$ é raiz dupla.

Solução

Este exercício já foi resolvido no capítulo 13 (exercício 13.6).

Sejam **a**, **b**, **c**, **d** e **e** as raízes de P(x). Observando que os coeficientes de P(x) são todos reais, concluímos que se 3i é raiz dupla, −3i também o é. Assim, podemos fazer:

$$a = b = 3i \quad e \quad c = d = -3i$$

Mas, pela primeira relação de Girard, temos:

$$a + b + c + d + e = -\frac{-1}{1} = 1$$

isto é:

$$3i + 3i - 3i - 3i + e = 1$$

donde:

$$e = 1$$

Portanto, as raízes são 3i, −3i e 1.

14.7) Dê um polinômio de grau 3, cujas raízes sejam os números 2 (simples) e 4 (dupla).

Solução

Observe que este exercício já foi resolvido de outro modo no capítulo 11 (exercício 11.12).

Já que não houve exigência especial, vamos construir um polinômio em que o coeficiente de x^3 é igual a 1:

$$P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Sendo x_1, x_2 e x_3 as raízes de P(x), as relações de Girard ficam:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{\alpha}{1} = -\alpha & \text{(I)} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{\beta}{1} = \beta & \text{(II)} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{\gamma}{1} = -\gamma & \text{(III)} \end{cases}$$

Como 2 é raiz simples e 4 é raiz dupla, podemos fazer: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ e $x_3 = 4$. Substituindo em (I), (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 2 + 4 + 4 = -\alpha \\ 2(4) + 2(4) + 4(4) = \beta \\ (2)(4)(4) = -\gamma \end{cases}$$

donde:

$$\alpha = -10, \ \beta = 32 \ e \ \gamma = -32$$

Assim, $P(x) = x^3 - 10x^2 + 32x - 32$.

14.8) Sendo **a**, **b**, **c** e **d** as raízes da equação, $5x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 9x + 13 = 0$, calcule o valor da expressão $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$.

Solução

Vamos tentar calcular o valor da expressão dada, sem sabermos quais são as raízes, usando apenas as relações de Girard:

$$\begin{cases} a+b+c+d = -\dfrac{-7}{5} = \dfrac{7}{5} & \text{(I)} \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd = \dfrac{6}{5} & \text{(II)} \\ abc+abd+acd+bcd = -\dfrac{9}{5} & \text{(III)} \\ abcd = \dfrac{13}{5} & \text{(IV)} \end{cases}$$

Temos, então:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = \frac{bcd+acd+abd+abc}{abcd} = \frac{\dfrac{-9}{5}}{\dfrac{13}{5}} = \frac{-9}{13}$$

14.9) Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 7x + 3 = 0$, calcule os valores de:

a) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc}$

b) $a^2 + b^2 + c^2$

c) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$

d) $a^3 + b^3 + c^3$

Solução

As relações de Girard para essa equação são:

$$\begin{cases} a+b+c = 4 \\ ab+ac+bc = 7 \\ abc = -3 \end{cases}$$

a) $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{bc} = \dfrac{c+b+a}{abc} = \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$

b) Vamos nos lembrar da identidade:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$

Portanto:

$$a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc) = (4)^2 - 2(7) = 16 - 14 = 2$$

c) Temos:

$$(ab+ac+bc)^2 = (ab)^2+(ac)^2+(bc)^2+2[(ab)(ac)+(ab)(bc)+(ac)(bc)] =$$
$$= a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$$

Portanto:

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2 = (ab+ac+bc)^2 - 2(abc)(a+b+c) =$$
$$= (7)^2 - 2(-3)(4) = 49 + 24 = 73$$

d) Já que **a**, **b** e **c** são raízes da equação $x^3 - 4x^2 + 7x + 3 = 0$, devemos ter:

$$\begin{cases} a^3 - 4a^2 + 7a + 3 = 0 \\ b^3 - 4b^2 + 7b + 3 = 0 \\ c^3 - 4c^2 + 7c + 3 = 0 \end{cases}$$

Somando membro a membro estas três equações, obtemos:

$$(a^3 + b^3 + c^3) - 4\underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_{2} + 7\underbrace{(a + b + c)}_{4} + (3 + 3 + 3) = 0$$

Daí tiramos: $a^3 + b^3 + c^3 = -29$.

14.10) Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ as raízes da equação algébrica de grau **n** (com $n > 1$):

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

Calcule o valor de $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$.

Solução

Vamos partir da identidade:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) \quad \text{(I)}$$

Escrevamos a primeira e a segunda relações de Girard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} & \text{(II)} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} & \text{(III)} \end{cases}$$

Introduzindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)$$

donde:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\,\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

14.11) **Sejam a, b, c e d as raízes da equação** $3x^4 + \sqrt{2}\,x^3 + (1 + i)x^2 + \frac{7}{5}x - (8 + 3i) = 0$. Calcule o valor de $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Solução

De acordo com o que vimos no exercício anterior, vamos partir da identidade:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \quad \text{(I)}$$

A primeira e a segunda relações de Girard são:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\dfrac{\sqrt{2}}{3} & \text{(II)} \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = \dfrac{1 + i}{3} & \text{(III)} \end{cases}$$

Introduzindo (II) e (III) em (I), obtemos:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\left(\frac{1+i}{3}\right)$$

donde:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{-4-6i}{9}$$

14.12) Consideremos a equação $2x^3 + 7x^2 + 5x + 3 = 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3. Obtenha um polinômio P(x) de raízes **a**, **b** e **c**, tais que: $a = x_1x_2$, $b = x_1x_3$, $c = x_2x_3$.

Solução

As relações de Girard para a equação dada são:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{-7}{2} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{5}{2} \\ x_1x_2x_3 = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Seja $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ o polinômio de raízes **a**, **b** e **c**. As relações de Girard para esse polinômio são:

$$\begin{cases} a + b + c = -\alpha & \text{(I)} \\ ab + ac + bc = \beta & \text{(II)} \\ abc = -\gamma & \text{(III)} \end{cases}$$

Mas, de acordo com o enunciado, temos $a = x_1x_2$, $b = x_1x_3$ e $c = x_2x_3$. Assim:

$$\begin{cases} a + b + c = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{5}{2} \\ ab + ac + bc = x_1x_2x_1x_3 + x_1x_2x_2x_3 + x_1x_3x_2x_3 = (x_1x_2x_3)(x_1 + x_2 + x_3) = \\ = \left(\dfrac{-3}{2}\right)\left(\dfrac{-7}{3}\right) = \dfrac{21}{4} \\ abc = x_1x_2x_1x_3x_2x_3 = (x_1x_2x_3)^2 = \left(\dfrac{-3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

Substituindo em (I), (II) e (III), obtemos $\alpha = \frac{-5}{2}$, $\beta = \frac{21}{4}$ e $\gamma = \frac{-9}{4}$. Portanto:

$$P(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{21}{4}x - \frac{9}{4}$$

14.13) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 5x - 125$, sabendo que elas têm o mesmo módulo.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes de P(x), vamos escrever a terceira relação de Girard:

$$abc = -\frac{-125}{1} = 125$$

A condição dada no enunciado é: $|a| = |b| = |c|$

Temos, então:

$$abc = 125 \Rightarrow |abc| = 125 \Rightarrow |a| \cdot |b| \cdot |c| = 125 \Rightarrow |a|^3 = 125 \Rightarrow |a| = \sqrt[3]{125} = 5$$

Observando que P(x) é de grau ímpar e possui todos os coeficientes reais, concluímos que pelo menos uma das raízes é real; supondo que **a** seja a raiz real, temos:

$$|a| = 5 \Leftrightarrow a = \pm 5$$

Podemos verificar que $P(-5) \neq 0$ e $P(5) = 0$; portanto, temos $a = 5$.

Dividindo P(x) por $x - 5$, obtemos o polinômio $A(x) = x^2 + 6x + 25$, cujas raízes são $-3 + 4i$ e $-3 - 4i$. Assim, as raízes de P(x) são: 5, $-3 + 4i$ e $-3 - 4i$.

14.14) Determine as raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 15x^2 + 37x - 30$, sabendo que elas formam uma progressão aritmética.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes de P(x), vamos escrever apenas as duas primeiras relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-15}{2} = \dfrac{15}{2} & \text{(I)} \\ ab + ac + bc = \dfrac{37}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

A partir daqui, podemos encaminhar a resolução de vários modos.

1.º modo

Supondo que **a**, **b** e **c** formem, nesta ordem, uma PA, podemos usar a representação (veja capítulo 4 do volume 2 desta coleção):

$$a = b - r \quad e \quad c = b + r$$

onde **r** é a razão da PA. Substituindo em (I) e (II), obtemos:

$$\begin{cases} (b - r) + b + (b + r) = \dfrac{15}{2} & \text{(III)} \\ (b - r)(b) + (b - r)(b + r) + b(b + r) = \dfrac{37}{2} & \text{(IV)} \end{cases}$$

Da equação (III), tiramos $b = \dfrac{5}{2}$. Substituindo em (IV):

$$\left(\frac{5}{2} - r\right)\left(\frac{5}{2}\right) + \left(\frac{5}{2} - r\right)\left(\frac{5}{2} + r\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{5}{2} + r\right) = \frac{37}{2}$$

Efetuando as multiplicações, chegamos à equação $4r^2 = 1$,

donde:

$$r = \pm \frac{1}{2}$$

Para $r = \frac{1}{2}$, temos: $\begin{cases} a = b - r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \\ c = b + r = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \end{cases}$

Para $r = -\frac{1}{2}$, temos: $\begin{cases} a = b - r = \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \\ c = b + r = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2 \end{cases}$

Em resumo, tanto para $r = \frac{1}{2}$ como para $r = -\frac{1}{2}$, as raízes são: $\frac{5}{2}$, 2 e 3.

2.º modo

Podemos começar como no 1.º modo e ir até o ponto em que obtemos $b = \frac{5}{2}$. A partir daí, abandonamos as relações de Girard e fazemos a divisão de P(x) por $x - \frac{5}{2}$, obtendo $A(x) = 2x^2 - 10x + 12$, cujas raízes são 2 e 3.

3.º modo

Um outro modo de indicar que **a**, **b** e **c** formam uma PA (nessa ordem) é colocar $a + c = 2b$.

Substituindo na relação (I) temos:

$$2b + b = \frac{15}{2}$$

donde:

$$b = \frac{5}{2}$$

A partir daí procedemos como no 2.º modo.

14.15) Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$, sabendo que elas são reais e formam uma progressão geométrica.

Solução

Sejam **a**, **b** e **c** as raízes; as relações de Girard ficam:

$$\begin{cases} a + b + c = -\frac{-7}{1} = 7 & \text{(I)} \\ ab + ac + bc = \frac{14}{1} = 14 & \text{(II)} \\ abc = -\frac{-8}{1} = 8 & \text{(III)} \end{cases}$$

1.º modo

Supondo que **a**, **b** e **c** formem, nessa ordem, uma PG, temos (veja capítulo 6 do volume 2 desta coleção):

$$ac = b^2 \qquad \text{(IV)}$$

Introduzindo (IV) em (III), obtemos $b^3 = 8$.

Em princípio, deveríamos agora extrair todas as raízes cúbicas do número 8; mas, como o enunciado do exercício diz que as raízes do polinômio são reais, ficaremos apenas com a raiz cúbica real de 8:

$$b^3 = 8 \Leftrightarrow b = \sqrt[3]{8} = 2$$

Dividindo P(x) por $x - 2$, obtemos o polinômio $A(x) = x^2 - 5x + 4$, cujas raízes são 1 e 4. Assim, as raízes de P(x) são: 1, 4 e 2.

2.º modo

Suponhamos que não soubéssemos que as raízes do polinômio são todas reais. Então, para evitar o problema surgido com as raízes cúbicas do número 8, introduzimos (IV) em (II), obtendo:

$$ab + b^2 + bc = 14$$

isto é,

$$b\underbrace{(a + b + c)}_{7} = 14$$

donde:

$$b = 2$$

Daí em diante, procederíamos como no 1.º modo.

3.º modo

Uma outra maneira de indicar que **a**, **b** e **c** formam uma PG (nessa ordem) é usar a representação:

$$a = \frac{b}{q} \quad \text{e} \quad c = bq$$

onde **q** é a razão da PG. Substituindo em (III), obtemos:

$$\left(\frac{b}{q}\right)(b)(bq) = 8$$

donde:

$$b = 2$$

Daí em diante, fazemos como no 1.º modo.

14.16) Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 18x - 9$, sabendo que elas formam uma progressão harmônica.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes de P(x), as relações de Girard são:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{-11}{2} = \dfrac{11}{2} & \text{(I)} \\ ab + ac + bc = \dfrac{18}{2} = 9 & \text{(II)} \\ abc = -\dfrac{-9}{2} = \dfrac{9}{2} & \text{(III)} \end{cases}$$

Supondo que **a**, **b** e **c** formem, nessa ordem, uma PH, temos (veja capítulo 5 do volume 2 desta coleção):

$$b = \frac{2ac}{a + c}$$

donde:

$$ab + bc = 2ac \qquad \text{(IV)}$$

Introduzindo (IV) em (II), obtemos $3ac = 9$,

isto é:

$$ac = 3 \qquad \text{(V)}$$

Introduzindo (V) em (III), obtemos $3b = \frac{9}{2}$,

donde: $b = \frac{3}{2}$

Dividindo P(x) por $x - \frac{3}{2}$, obtemos o polinômio $A(x) = 2x^2 - 8x + 6$, cujas raízes são 1 e 3. Assim, as raízes de P(x) são: $\frac{3}{2}$, 1 e 3.

14.17) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$, sabendo que elas formam uma progressão aritmética.

Solução

Sendo **a**, **b**, **c** e **d** as raízes de P(x), vamos escrever apenas as duas primeiras relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\frac{-8}{1} = 8 & \text{(I)} \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd = \frac{14}{1} = 14 & \text{(II)} \end{cases}$$

Uma maneira de indicar que **a**, **b**, **c** e **d** formam uma PA, nessa ordem, é fazer as substituições:

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (y - 3k) & (y - k) & (y + k) & (y + 3k) \end{matrix}$$

Introduzindo em (I) e (II), obtemos, após as simplificações:

$$\begin{cases} 4y = 8 & \text{(III)} \\ 6y^2 - 10k^2 = 14 & \text{(IV)} \end{cases}$$

De (III), tiramos $y = 2$; substituindo em (IV), obtemos $k = \pm 1$. Assim:

$$\begin{cases} y = 2 \text{ e } k = 1 \Rightarrow a = -1,\ b = 1,\ c = 3,\ d = 5 \\ y = 2 \text{ e } k = -1 \Rightarrow a = 5,\ b = 3,\ c = 1,\ d = -1 \end{cases}$$

Tanto num caso como no outro as raízes de P(x) são -1, 1, 3 e 5.

14.18) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x - 18$, sabendo que duas delas são simétricas.

Solução

Sendo **a**, **b**, **c** e **d** as raízes de P(x), vamos escrever apenas a primeira e a terceira relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c + d = 3 & \text{(I)} \\ abc + abd + acd + bcd = -27 & \text{(II)} \end{cases}$$

Supondo que as raízes simétricas sejam **a** e **b**, temos:

$$a + b = 0 \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (III) em (I), obtemos:

$$c + d = 3 \qquad \text{(IV)}$$

A relação (II) pode ser transformada em:

$$ab\underbrace{(c + d)}_{3} + cd\,\underbrace{(a + b)}_{0} = -27$$

donde:

$$ab = -9 \qquad \text{(V)}$$

Consideremos agora o sistema formado pelas equações (V) e (III):

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ ab = -9 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $a = 3$ e $b = -3$ (ou então $a = -3$ e $b = 3$, o que dá no mesmo). Agora que já obtivemos as raízes 3 e -3, podemos fazer a divisão de P(x) por $(x - 3)(x + 3)$, obtendo o polinômio $A(x) = x^2 - 3x + 2$, cujas raízes são 1 e 2. Portanto, as raízes de P(x) são: 3, -3, 1 e 2.

14.19) Determine as raízes do polinômio $P(x) = 2x^4 - 7x^3 - 5x^2 + 28x - 12$, sabendo que duas delas são recíprocas (isto é, uma delas é o inverso da outra).

Solução

Sendo **a**, **b**, **c** e **d** as raízes de P(x), vamos escrever apenas a primeira, a terceira e a quarta relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c + d = \dfrac{7}{2} & \text{(I)} \\[2ex] abc + abd + acd + bcd = -\dfrac{28}{2} = -14 & \text{(II)} \\[2ex] abcd = \dfrac{-12}{2} = -6 & \text{(III)} \end{cases}$$

Sendo **a** e **b** as raízes recíprocas, temos:

$$ab = 1 \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$cd = -6 \qquad \text{(V)}$$

A relação (II) pode ser transformada em:

$$\underbrace{ab}_{1}(c + d) + \underbrace{cd}_{-6}(a + b) = -14$$

isto é,

$$(c + d) - 6(a + b) = -14 \qquad \text{(VI)}$$

Da relação (I), tiramos:

$$c + d = \frac{7}{2} - (a + b) \qquad \text{(VII)}$$

Substituindo (VII) em (VI), temos

$$\frac{7}{2} - (a + b) - 6(a + b) = -14$$

donde:

$$a + b = \frac{5}{2} \qquad \text{(VIII)}$$

Consideremos agora o sistema formado pelas equações (VIII) e (IV):

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{5}{2} \\ ab = 1 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtemos $a = 2$ e $b = \frac{1}{2}$ (ou $a = \frac{1}{2}$ e $b = 2$, o que dá no mesmo). Daqui por diante, podemos completar o problema de dois modos.

1.º modo

Como já temos as raízes 2 e $\frac{1}{2}$, podemos dividir P(x) por $(x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, obtendo o polinômio $A(x) = x^2 - x - 6$, cujas raízes são -2 e 3. Assim, as raízes de P(x) são: $2, \frac{1}{2}, -2$ e 3.

2.º modo

Podemos substituir (VIII) em (VII), obtendo:

$$c + d = 1 \qquad \text{(IX)}$$

Consideramos em seguida o sistema formado pelas equações (IX) e (V):

$$\begin{cases} c + d = 1 \\ cd = -6 \end{cases}$$

cuja solução é $c = -2$ e $d = 3$ (ou $c = 3$ e $d = -2$, o que dá no mesmo).

14.20) Consideremos um número complexo $z \neq 0$ e um número natural $n > 1$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as raízes n-ésimas do número **z**. Mostre que:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

Solução

As raízes n-ésimas do número **z** são as raízes da equação $x^n = z$, a qual é equivalente a:

$$x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \ldots - z = 0 \qquad \text{(I)}$$

Mas, de acordo com a primeira relação de Girard, temos:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{0}{1} = 0$$

14.21) Seja **n** um número natural qualquer tal que $n > 1$. Mostre que:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{2\pi}{n} + \cos\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = -1 \\[2ex] \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0 \end{cases}$$

Solução

Sejam $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ as raízes n-ésimas do número 1. De acordo com o exercício anterior, temos:

$$\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{n-1} = 0 \qquad \text{(I)}$$

Porém:

$$\left[\begin{array}{l} \omega_0 = 1 \\[1ex] \omega_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} \\[2ex] \omega_2 = \cos\dfrac{4\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{n} \\[1ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[1ex] \omega_{n-1} = \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} + i\operatorname{sen}\dfrac{2(n-1)\pi}{n} \end{array}\right.$$

Substituindo em (I) e separando as partes real e imaginária, temos:

$$\left[1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] +$$

$$+\, i\left[\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] = 0$$

Para que esta igualdade seja verdadeira, devemos ter:

$$\begin{cases} 1 + \cos\dfrac{2\pi}{n} + \cos\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0 \\ \\ \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} + \operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + \operatorname{sen}\dfrac{2(n-1)\pi}{n} = 0 \end{cases}$$

o que nos leva à tese.

14.22) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - (5 + \sqrt{5})x^2 + (6 + 5\sqrt{5})x - 6\sqrt{5}$ são medidas dos lados de um triângulo retângulo. Determine essas raízes.

Solução

As raízes **a, b** e **c** do polinômio P(x) devem ser números reais positivos. Supondo $a > b > c$, pelo teorema de Pitágoras, devemos ter:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Vamos escrever apenas a primeira e a segunda relações de Girard:

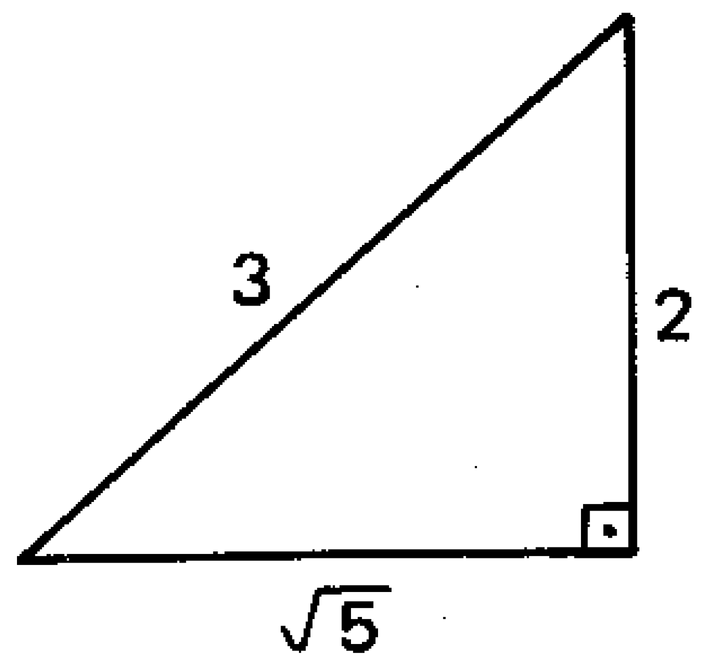
$$\begin{cases} a + b + c = 5 + \sqrt{5} \\ ab + ac + bc = 6 + 5\sqrt{5} \end{cases}$$

Temos, então:

$$a + b + c = 5 + \sqrt{5} \Rightarrow (a + b + c)^2 = (5 + \sqrt{5})^2 \Rightarrow a^2 + \underbrace{b^2 + c^2}_{a^2} +$$

$$+ 2\underbrace{(ab + ac + bc)}_{6 + 5\sqrt{5}} = 25 + 10\sqrt{5} + 5 \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a = 3$$

Obtida a raiz 3, dividimos P(x) por $x - 3$, obtendo o polinômio $A(x) = x^2 - (2 + \sqrt{5})x + 2\sqrt{5}$, cujas raízes são $\sqrt{5}$ e 2. Assim, as raízes de P(x) são 3, $\sqrt{5}$ e 2.



14.23) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 14x^2 + 63x - 90$, são medidas dos lados de um triângulo. Calcule a área desse triângulo.

Solução

Sendo **a, b** e **c** as raízes de P(x), vamos escrever apenas a primeira relação de Girard:

$$a + b + c = 14$$

Seja **p** o semiperímetro do triângulo:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

De acordo com a fórmula de Herão (veja volume 5 desta coleção), a área S do triângulo é dada por:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad \text{(I)}$$

Mas, observando que $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, concluímos que:

$$(p-a)(p-b)(p-c) = P(p) = P(7) = 7^3 - 14(7)^2 + 63(7) - 90 = 8$$

Substituindo em (I), obtemos:

$$S = \sqrt{(7)(8)} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

14.24) Escreva uma igualdade ligando os coeficientes da equação $x^3 + kx + m = 0$ (onde $m \neq 0$), de modo que uma das raízes da equação seja igual à soma dos inversos das outras duas.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, a condição do enunciado é:

$$a = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad \text{(I)}$$

Vamos escrever a primeira e a terceira relações de Girard:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 & \text{(II)} \\ abc = -m & \text{(III)} \end{cases}$$

De (I), tiramos: $b + c = abc$ (IV)
De (II), tiramos: $b + c = -a$ (V)
De (IV) e (V), vem: $abc = -a$ (VI)

Substituindo (VI) em (III), temos $a = m$, isto é, uma das raízes da equação $x^3 + kx + m = 0$ é o número **m**. Portanto:

$$m^3 + km + m = 0$$

Mas, como $m \neq 0$, temos: $m^2 + k + 1 = 0$.

14.25) Escreva uma igualdade ligando os coeficientes da equação $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$, sabendo que as raízes dessa equação estão em progressão geométrica.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, suponhamos que elas formem uma progressão geométrica, nessa ordem:

$$b^2 = ac \qquad \text{(I)}$$

As relações de Girard são:

$$\begin{cases} a + b + c = -k & \text{(II)} \\ ab + ac + bc = m & \text{(III)} \\ abc = -t & \text{(IV)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (IV), vem: $b^3 = -t$ (V)

Substituindo (I) em (III), temos:

$$ab + b^2 + bc = m$$

isto é, $\underbrace{b(a + b + c)}_{-k} = m$, donde $bk = -m$, ou ainda, $b^3k^3 = -m^3$ (VI)

Substituindo (V) em (VI), obtemos $tk^3 = m^3$.

14.26) Escreva uma igualdade envolvendo os coeficientes da equação $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$, sabendo que as raízes da equação formam uma progressão aritmética.

Solução

Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação, suponhamos que elas formem uma progressão aritmética, nessa ordem:

$$2b = a + c \qquad (I)$$

A primeira relação de Girard é:

$$a + b + c = -k \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), obtemos $b = -\dfrac{k}{3}$. Assim, concluímos que uma das raízes da equação $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$ é o número $\dfrac{-k}{3}$ e, portanto:

$$\left(\frac{-k}{3}\right)^3 + k\left(\frac{-k}{3}\right)^2 + m\left(\frac{-k}{3}\right) + t = 0$$

donde:

$$2k^3 - 9mk + 27t = 0$$

Exercícios Propostos

14.27) Determine o conjunto-solução de cada equação a seguir, utilizando a condição dada:

a) $x^3 - 6x^2 + (12 + i)x - (9 + 3i) = 0$
Uma das raízes é igual à soma das outras duas.

b) $3x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$
Uma das raízes é o triplo da outra raiz.

c) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$
Há uma raiz dupla.

d) $x^3 - 14x^2 + 69x - 116 = 0$
Uma das raízes é $5 + 2i$.

e) $2x^5 + 3x^4 + 16x^3 + 24x^2 + 32x + 48 = 0$
O número $2i$ é raiz dupla.

f) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48 = 0$
Há duas raízes simétricas.

g) $6x^3 - 23x^2 + 16x - 3 = 0$
Há duas raízes recíprocas (uma é o inverso da outra).

h) $2x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = 0$
A soma de duas raízes é igual a $\dfrac{7}{2}$.

i) $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$
A diferença de duas de suas raízes é igual a 6.

j) $2x^4 + 25x^3 + 108x^2 + 176x + 64 = 0$
Há uma raiz tripla.

k) $2x^3 - 19x^2 + 45x - 18 = 0$
Uma das raízes é igual ao produto das outras duas.

l) $x^3 - 12x^2 + 20x + 96 = 0$
A razão entre duas de suas raízes é igual a $\frac{4}{3}$.

14.28) Uma das raízes da equação $2x^3 - 9x^2 + x + k = 0$ é igual à soma das outras duas.
a) Determine o valor de **k**.
b) Dê o conjunto-solução da equação.

14.29) Dê uma equação de grau 3, cujas raízes sejam $\frac{1}{3}$, 2 e $1 + i$.

14.30) Dê uma equação de grau 3, cujas raízes sejam 5 (dupla) e $2 - i$ (simples).

14.31) Dê uma equação de grau 4, cujas raízes sejam 3 (dupla), 2 (simples) e -1 (simples).

14.32) Determine o valor de **k** na equação $3x^2 - 7x + (k + 2) = 0$, de modo que uma das raízes seja o sêxtuplo da outra.

14.33) Determine o valor de **k** na equação $5x^2 - 12x + 6k + 2 = 0$, de modo que suas raízes sejam recíprocas.

14.34) Sejam **a** e **b** as raízes da equação $3x^2 + 4x + 5 = 0$.
Calcule os valores de:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

b) $a^2 + b^2$

c) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

d) $a^4 + b^4$

e) $a^3 + b^3$

(*Sugestão*: para os exercícios *b* e *e*, use as identidades: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.)

14.35) Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $3x^2 + (5 - i)x + (2 - 3i) = 0$.

14.36) Determine o valor de **k**, de modo que a soma dos quadrados das raízes da equação $2x^2 - 5x + k = 0$ seja igual a $\frac{7}{4}$.

14.37) Sejam **a**, **b** e **c** as raízes da equação $4x^3 - 3x^2 + 2x + 8 = 0$. Calcule os valores de:

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

b) $a^2 + b^2 + c^2$

c) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$

d) $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$

e) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

f) $a^4 + b^4 + c^4$

g) $a^3 + b^3 + c^3$

h) $\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$

14.38) Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $4x^9 + x^8 + (3 + i)x^7 + (6 - i)x^3 + 4x - 1 = 0$.

14.39) Sejam **a**, **b** e **c** as raízes da equação $2x^3 + 3x^2 + 4x + 6 = 0$.

Em cada caso a seguir, dê um polinômio P(x), de raízes x_1, x_2 e x_3, satisfazendo a condição dada:

a) $x_1 = ab$; $x_2 = ac$; $x_3 = bc$

b) $x_1 = a - \frac{1}{bc}$; $x_2 = b - \frac{1}{ac}$; $x_3 = c - \frac{1}{ab}$

c) $x_1 = \frac{1}{a}$; $x_2 = \frac{1}{b}$; $x_3 = \frac{1}{c}$

14.40) Sejam **a** e **b** as raízes da equação $x^2 + 2x + 3 = 0$.
Dê um polinômio de raízes x_1 e x_2, tais que $x_1 = a^2 + b^2$ e $x_2 = a^3 + b^3$.

14.41) Sejam **a**, **b** e **c** números complexos distintos, tais que:

$$\begin{cases} a^3 + 7a + 13 = 0 \\ b^3 + 7b + 13 = 0 \\ c^3 + 7c + 13 = 0 \end{cases}$$

Calcule o valor de $a + b + c$.

14.42) Consideremos a equação $x^3 + kx + m = 0$, onde **k** e **m** são reais e $m \neq 0$. Mostre que, se todas as raízes da equação são reais, então $k < 0$.

14.43) Determine as raízes da equação $5x^3 - 2x^2 - 4x + 40 = 0$, sabendo que elas têm o mesmo módulo.

14.44) Resolva cada uma das equações a seguir, utilizando a condição dada:

a) $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$
As raízes estão em progressão aritmética.

b) $2x^3 - 21x^2 + 42x - 16 = 0$
As raízes estão em progressão geométrica.

c) $x^3 - 9x^2 + 11x + 21 = 0$
As raízes estão em progressão aritmética.

d) $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$
As raízes estão em progressão geométrica.

e) $3x^3 - 4x^2 - 48x + 64 = 0$
As raízes estão em progressão harmônica.

f) $x^4 - 12x^3 + 14x^2 + 132x - 135 = 0$
As raízes estão em progressão aritmética.

14.45) Determine o valor de **k** de modo que as raízes da equação $x^3 + 6x^2 + kx - 24 = 0$ formem uma progressão aritmética.

14.46) Resolva a equação $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 24x - 40 = 0$, sabendo que há duas raízes simétricas.

14.47) Resolva a equação $3x^4 + 2x^3 - 28x^2 - 18x + 9 = 0$, sabendo que há duas raízes recíprocas.

14.48) Resolva a equação $2x^4 - 13x^3 + 4x^2 + 13x - 6 = 0$, sabendo que o produto de duas raízes é igual a 3.

14.49) Consideremos a equação $2x^4 + kx^3 + mx^2 + 14x - 8 = 0$. Duas de suas raízes têm soma igual a 1 e as outras duas têm produto igual a 2.

a) Dê o conjunto-solução da equação.

b) Determine os valores de **k** e **m**.

14.50) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - (7 + \sqrt{7})x^2 + (12 + 7\sqrt{7})x + 12\sqrt{7}$ são medidas dos lados de um triângulo retângulo. Determine essas raízes.

14.51) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 8x^2 + kx + m$ são medidas dos lados de um triângulo. Obtenha a área desse triângulo em função de **k** e **m**.

14.52) Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação $x^3 - 8x^2 + 24x - 16 = 0$, calcule os valores de:

a) $\log_2(a^2 + b^2 + c^2)$ b) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b} + \frac{\pi}{c}\right)$ c) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & c & 0 \\ -3 & 7 & b \end{vmatrix}$

14.53) Sejam **a**, **b** e **c** números complexos não nulos, tais que $a + b + c = 0$ e $ab + ac + bc = 0$. Mostre que $|a| = |b| = |c|$.

14.54) Em cada caso a seguir, escreva uma igualdade ligando os coeficientes da equação, utilizando a condição dada:

a) $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$
Uma das raízes é igual à soma das outras duas.
b) $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$
Há duas raízes simétricas.
c) $x^3 + kx + m = 0$ (com $k \neq 0$ e $m \neq 0$)
Há uma raiz dupla.
d) $x^3 + kx^2 + mx + t = 0$
As raízes formam uma progressão harmônica.
e) $x^4 + kx^3 + mx^2 + tx + n = 0$
O produto de duas raízes é igual ao produto das outras duas.
f) $x^4 + kx^3 + mx^2 + tx + n = 0$
A soma de duas raízes é igual à soma das outras duas.

14.55) Determine os números **a**, **b** e **c** (não nulos), sabendo que eles são raízes da equação $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$.

14.56) Sendo $\omega = \cos\frac{2\pi}{7} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{7}$, calcule o valor de $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6$.

(*Sugestão*: observe que ω é uma das raízes sétimas da unidade; veja exercício 14.20.)

14.57) Consideremos o número natural $n > 1$. Sendo $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$, calcule os valores de:

a) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \ldots + \omega^{n-1}$ b) ω^n

14.58) Sendo $\omega = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$, calcule os valores de:

a) $\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5$ b) ω^6

14.59) Consideremos o número natural $n > 1$. Sendo $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}$, calcule o valor de S:

$$S = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + 4\omega^3 + \ldots + n\omega^{n-1}$$

(*Sugestão*: calcule $S - \omega S$.)

Capítulo

15 Raízes racionais

15.1 — TEOREMA DAS RAÍZES RACIONAIS

Consideremos o polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

de grau $n > 0$, cujos coeficientes são todos inteiros, com $a_0 \neq 0$. Consideremos também um número racional $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}^*$ e $q \in \mathbb{Z}^*$), com **p** e **q** primos entre si. No item seguinte demonstraremos que:

> Se $\frac{p}{q}$ é raiz de P(x), então **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n. (15.1)

Observemos que:

1.º) esse teorema não garante que exista a raiz $\frac{p}{q}$; garante apenas que se existir, **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n;

2.º) o teorema só vale quando os coeficientes são **todos inteiros**;

3.º) ao colocarmos $a_0 \neq 0$, estamos excluindo o caso em que $\frac{p}{q} = 0$, pois este é de análise imediata.

Exemplos

a) Consideremos o polinômio:

$$P(x) = \underset{\substack{\downarrow \\ a_n}}{6}x^5 - 7x^4 + 9x^3 - x - \underset{\substack{\downarrow \\ a_0}}{15}$$

$$\begin{cases} \text{divisores de } a_0\text{: } \pm 1;\ \pm 3;\ \pm 5;\ \pm 15 \\ \text{divisores de } a_n\text{: } \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 6 \end{cases}$$

Se o polinômio admitir uma raiz racional $\frac{p}{q}$ (com p e q inteiros não nulos, p e q primos entre si), p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n. Dividindo de todos os modos possíveis, um divisor de a_0 por um divisor de a_n, obtemos o conjunto dos possíveis valores da raiz $\frac{p}{q}$:

$$M = \left\{\pm 1;\ \pm 3;\ \pm 5;\ \pm 15;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{1}{6};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{5}{2};\ \pm\frac{5}{3};\ \pm\frac{5}{6};\ \pm\frac{15}{2}\right\}$$

Isto não significa que, obrigatoriamente, um dos elementos de M seja raiz de P(x). Significa apenas que se P(x) tem uma raiz racional (não nula), ela é obrigatoriamente um elemento de M.

b) Seja o polinômio:

$$P(x) = \underset{\underset{a_n}{\downarrow}}{2}x^4 - 7x^3 - 17x^2 + 58x - \underset{\underset{a_0}{\downarrow}}{24}$$

$$\begin{cases} \text{divisores de } a_0\text{: } \pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 8;\ \pm 12;\ \pm 24 \\ \text{divisores de } a_n\text{: } \pm 1;\ \pm 2 \end{cases}$$

Seja M o conjunto dos possíveis valores da raiz $\frac{p}{q}$:

$$M = \left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm 4;\ \pm 6;\ \pm 8;\ \pm 12;\ \pm 24;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2}\right\}$$

Para sabermos se algum elemento de M é raiz de P(x), vamos calculando os valores numéricos de P(x) para os diversos elementos de M (obviamente começando pelos inteiros). Esse cálculo pode ser feito pelo dispositivo de Briot-Ruffini:

		2	−7	−17	58	−24
P(1) = 12	1	2	−5	−22	36	12
P(−1) = −90	−1	2	−9	−8	66	−90
P(2) = 0 ⇒ 2 é raiz	2	2	−3	−23	12	0

$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 23x + 12$

As verificações seguintes podem ser feitas no polinômio Q(x). Devemos recomeçar essas verificações experimentando novamente o número 2, pois ele pode ser uma raiz de multiplicidade $m > 1$.

		2	−3	−23	12
$Q(2) = -30$	2	2	1	−21	−30
$Q(-2) = 30$	−2	2	−7	−9	30
$Q(3) = -30$	3	2	3	−14	−30
$Q(-3) = 0 \Rightarrow -3$ é raiz	−3	2	−9	4	0

$$\underbrace{2 \quad -9 \quad 4}_{2x^2 - 9x + 4}$$

Resolvendo a equação $2x^2 - 9x + 4 = 0$, obtemos as raízes que faltam: 4 e $\frac{1}{2}$. Observemos que estas duas raízes são também elementos de M.

15.2 — DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Suponhamos que o número $\frac{p}{q}$ (satisfazendo as condições do enunciado do teorema) seja raiz do polinômio:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Devemos ter:

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

isto é,

$$\frac{a_n p^n}{q^n} + \frac{a_{n-1}p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1 p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando todos os termos por q^n, obtemos:

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{(I)}$$

Dividindo por **p** todos os termos de (I) e passando o último termo para o lado direito, temos:

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1} = -\frac{a_0 q^n}{p} \qquad \text{(II)}$$

O lado esquerdo da igualdade (II) nos dá um número inteiro e, portanto, o lado direito também deve ser inteiro. Mas, como **p** e **q** são primos entre si, para que o número:

$$\frac{a_0 q^n}{p}$$

seja inteiro, a_0 deve ser divisível por **p**, isto é, **p** é divisor de a_0.

Dividindo por **q** todos os termos da igualdade (I), e passando o primeiro termo para o lado direito, temos:

$$a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1} = -\frac{a_n p^n}{q} \qquad \text{(III)}$$

O lado esquerdo da igualdade (III) nos dá um número inteiro e, portanto, o lado direito também deve ser inteiro. Mas, como **p** e **q** são primos entre si, para que o número:

$$\frac{a_n p^n}{q}$$

seja inteiro, a_n deve ser divisível por **q**, isto é, **q** é divisor de a_n.

15.3 — CONSEQÜÊNCIAS

Do teorema anterior, tiramos imediatamente duas conseqüências:

1.ª) Se P(x) admite uma raiz inteira $k \neq 0$, então **k** deve ser divisor de $\mathbf{a_0}$.
2.ª) Suponhamos que $a_n = 1$. Então, se P(x) admitir raízes racionais, estas serão necessariamente inteiras.

Exercícios Resolvidos

15.1) Determine o conjunto-solução da equação $3x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 - 2x = 0$.

Solução

Neste caso podemos colocar **x** em evidência:

$$3x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2 = 0$$

Vamos agora tentar determinar as raízes do polinômio $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2$ usando o teorema 15.1.

$$\left[\begin{array}{l} \text{divisores de } a_0\text{: } \pm 1;\ \pm 2 \\ \text{divisores de } a_n\text{: } \pm 1;\ \pm 3 \end{array}\right.$$

Assim, o conjunto das possíveis raízes racionais de P(x) é:

$$M = \left\{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3;\ \pm \frac{1}{3};\ \pm \frac{2}{3}\right\}$$

Começaremos as tentativas pelos números inteiros:

		3	−4	1	6	−2
P(1) = 4	1	3	−1	0	6	4
P(−1) = 0 ⇒ −1 é raiz	−1	3	−7	8	−2	0

$$Q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$$

Continuaremos as tentativas, agora usando o polinômio Q(x), experimentando novamente a raiz −1, pois ela pode ser raiz de multiplicidade $m > 1$.

		3	−7	8	−2
	−1	3	−10	18	−20
	2	3	−1	6	10
	−2	3	−13	34	−70
	3	3	2	14	40
	−3	3	−16	56	−170
$Q\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}$ é raiz	$\frac{1}{3}$	3	−6	6	0

$$3x^2 - 6x + 6$$

Resolvendo a equação $3x^2 - 6x + 6 = 0$, obtemos as raízes que faltam: $1 + i$ e $1 - i$.

Portanto, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{0;\ -1;\ \frac{1}{3};\ 1 + i;\ 1 - i\right\}$$

15.2) Decomponha o polinômio $A(x) = 3x^5 - 4x^4 + x^3 + 6x^2 - 2x$ em fatores do primeiro grau.

Solução

O polinômio A(x) coincide com o lado esquerdo da equação dada no exercício anterior. Aproveitamos então as raízes que já foram obtidas e temos:

$$A(x) = 3x\,(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1 - i)\,(x - 1 + i)$$

15.3) Determine o conjunto-solução da equação $x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x - 12 = 0$.

Solução

Vamos tentar obter as raízes usando o teorema 15.1. Mas acontece que o coeficiente de x^2 na equação dada não é inteiro. Assim, vamos multiplicar todos os termos por 2, para obtermos uma equação equivalente à equação dada, cujos coeficientes são todos inteiros:

$$x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 5x - 12 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 7x^2 - 10x - 24 = 0$$

Determinaremos, agora, as raízes do polinômio:

$$P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 10x - 24$$

$$\begin{bmatrix} \text{divisores de } a_0: \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24 \\ \text{divisores de } a_n: \pm 1; \pm 2 \end{bmatrix}$$

Conjunto das possíveis raízes racionais de P(x):

$$M = \left\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 8; \pm 12; \pm 24; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}\right\}$$

		2	7	−10	−24
	1	2	9	−1	−25
	−1	2	5	−15	−9
P(2) = 0 ⇒ 2 é raiz	2	2	11	12	0

$$\underbrace{2 \quad 11 \quad 12}_{2x^2 + 11x + 12}$$

Resolvendo a equação $2x^2 + 11x + 12 = 0$, obtemos as outras raízes: -4 e $-\frac{3}{2}$.

Portanto, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \left\{2; -4; -\frac{3}{2}\right\}$$

15.4) Mostre que o número $1 + \sqrt{2}$ é irracional.

Solução

Sabemos que os números 1 e $\sqrt{2}$ são reais. Sabemos também que a soma de dois números reais é ainda um número real. Portanto, o número $1 + \sqrt{2}$ é real, resta saber se é racional ou irracional.

Seja $x = 1 + \sqrt{2}$. Temos:

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow x^2 = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow x^2 - 3 = 2\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2 - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 9 = 8 \Rightarrow x^4 - 6x^2 + 1 = 0$$

Esta última equação tem todos os coeficientes inteiros. Aplicando o teorema 15.1, concluímos que os únicos números racionais que poderiam ser raízes dessa equação são 1 e −1. Assim, concluímos que $1 + \sqrt{2}$ é irracional.

15.5) Mostre que o número $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ é inteiro.

Solução

Seja $x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. É fácil verificar que o número x é real; resta mostrar que ele é inteiro. Para facilitar a notação, faremos:

$$a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \quad e \quad b = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

Lembrando que:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

temos:

$$x = a + b \Rightarrow x^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\underbrace{(a+b)}_{x} = a^3 + b^3 + 3abx$$

Porém:

$$\begin{cases} a = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \Rightarrow a^3 = 7 + 5\sqrt{2} \\ b = \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \Rightarrow b^3 = 7 - 5\sqrt{2} \\ ab = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2})} = \sqrt[3]{7^2 - (5\sqrt{2})^2} = -1 \end{cases}$$

Assim:

$$x^3 = a^3 + b^3 + 3abx = 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} + 3(-1)x = 14 - 3x$$

isto é:

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

O conjunto das possíveis raízes inteiras desta última equação é:

$$M = \{\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 7;\ \pm 14\}$$

Fazendo-se as tentativas:

		1	0	3	−14
	1	1	1	4	−10
	−1	1	−1	4	−18
2 é raiz	2	1	2	7	0

$$A(x) = x^2 + 2x + 7$$

O discriminante do polinômio A(x) é:

$$\Delta = 2^2 - 4(1)(7) = 4 - 28 = -24 < 0$$

e, portanto, as raízes de A(x) são imaginárias. Concluímos, então, que a única raiz real da equação:

$$x^3 + 3x - 14 = 0$$

é o número 2. Como o número x é real, concluímos que x = 2.

15.6) Um número complexo é chamado de **número algébrico** se ele pode ser raiz de um polinômio (não identicamente nulo) de coeficientes **inteiros**; um número complexo que não seja algébrico é chamado de **número transcendente**. Na realidade, praticamente todos os números com que tratamos em Matemática Elementar são algébricos. Todos os números racionais são algébricos; alguns números irracionais, como, por exemplo:

$$\sqrt{2},\ \sqrt[3]{7},\ 1-\sqrt{2}$$

são também algébricos. Como exemplo de número transcendente podemos dar o número π. Outro exemplo de número transcendente é o número **e**, base do sistema de logaritmos neperianos (veja capítulo 10 do volume 2 desta coleção). Com base no que acabamos de dizer, mostre que os seguintes números são algébricos:

a) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ b) $3+4i$

Solução

a) Fazendo $x=\sqrt{5}+\sqrt{2}$, temos:

$$x=\sqrt{5}+\sqrt{2} \Rightarrow x^2=(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{5}\sqrt{2}+2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=7+2\sqrt{10} \Rightarrow x^2-7=2\sqrt{10} \Rightarrow (x^2-7)^2=(2\sqrt{10})^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^4-14x^2+49=40 \Rightarrow x^4-14x^2+9=0$$

Portanto, $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ é uma das raízes da equação $x^4-14x^2+9=0$, a qual tem todos os coeficientes inteiros; assim, podemos dizer que o número $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ é algébrico.

b) $x=3+2i \Rightarrow x-3=2i \Rightarrow (x-3)^2=(2i)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2-6x+9=-4 \Rightarrow x^2-6x+13=0$

O número $3+2i$ é uma das raízes da equação $x^2-6x+13=0$, a qual tem todos os coeficientes inteiros; portanto, ele é um número algébrico.

15.7) Determine todas as raízes do polinômio $P(x)=2x^5-5x^4+16x^3-23x^2+32x-12$, sabendo que ele admite uma raiz imaginária pura.

Solução

Note que já resolvemos exercício semelhante a este no capítulo 11 (exercício 11.41). Seja **ai** a raiz imaginária pura procurada (com $a \in \mathbb{R}^*$). Devemos ter $P(ai)=0$:

$$2(ai)^5-5(ai)^4+16(ai)^3-23(ai)^2+32(ai)-12=0$$

Efetuando as operações e separando as partes real e imaginária, obtemos:

$$(-5a^4+23a^2-12)+(2a^5-16a^3+32a)i=0$$

Devemos ter, então:

$$\begin{cases}-5a^4+23a^2-12=0 & \text{(I)}\\ 2a^5-16a^3+32a=0 & \text{(II)}\end{cases}$$

O conjunto-solução da equação (I) é:

$$S_1=\left\{2;\ -2;\ \sqrt{\frac{3}{5}};\ -\sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$$

e o conjunto-solução da equação (II) é:

$$S_2=\{0;\ 2;\ -2\}$$

Os números que satisfazem simultaneamente as equações (I) e (II) são 2 e −2; portanto, temos a = ± 2. Concluímos, então, que o polinômio dado admite duas raízes imaginárias puras: 2i e −2i.

Assim, temos:

$$P(x) = \underbrace{(x - 2i)(x + 2i)}_{x^2 + 4} \cdot A(x) = (x^2 + 4) \cdot A(x)$$

Dividindo P(x) por $x^2 + 4$, obtemos A(x):

$$A(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$$

Vamos agora verificar se A(x) admite alguma raiz racional.

$$\begin{bmatrix} \text{divisores de } -3: \pm 1;\ \pm 3 \\ \text{divisores de } 2: \pm 1;\ \pm 2 \end{bmatrix}$$

Assim, o conjunto das possíveis raízes racionais de A(x) é:

$$M = \left\{\pm 1;\ \pm 3;\ \pm \frac{1}{2};\ \pm \frac{3}{2}\right\}$$

	2	−5	8	−3
1	2	−3	5	2
−1	2	−7	15	−18
3	2	1	11	30
−3	2	−11	41	−126
$\frac{1}{2}$	2	−4	6	0

$A\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}$ é raiz; o quociente é $2x^2 - 4x + 6$

Resolvendo a equação $2x^2 - 4x + 6 = 0$, obtemos as raízes que faltam: $1 + \sqrt{2}i$ e $1 - \sqrt{2}i$. Então, o conjunto de todas as raízes de P(x) é:

$$\left\{2i;\ -2i;\ \frac{1}{2};\ 1 + \sqrt{2}\,i;\ 1 - \sqrt{2}\,i\right\}$$

Exercícios Propostos

15.8) Consideremos a equação $6x^7 - 14x^5 + kx^2 - 3x + 4 = 0$, onde $k \in \mathbb{Z}^*$. Determine:

a) as possíveis raízes inteiras dessa equação;

b) as possíveis raízes racionais não inteiras dessa equação.

15.9) Consideremos o polinômio $P(x) = 7x^3 + kx^2 - 3x + 6$, onde $k \in \mathbb{Z}^*$. O número $\frac{2}{3}$ poderia ser raiz de P(x)?

15.10) Seja $A(x) = 4x^{37} - 5x^{22} + kx^{10} - 7$. Sabe-se que o número $\frac{2}{5}$ é raiz de A(x). O número k é inteiro?

15.11) Resolva as equações:

a) $x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 17x - 12 = 0$

b) $4x^4 - 24x^3 + 55x^2 - 52x + 15 = 0$

c) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

d) $x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{14}{3}x + 8 = 0$

15.12) Decomponha o polinômio $P(x) = x^4 - 8x^3 + 13x^2 + 12x - 10$ em fatores do primeiro grau.

15.13) Mostre que o número $\sqrt[3]{2} + 1$ é irracional.

15.14) Mostre que o número $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$ é inteiro.

15.15) Mostre que o número $\sqrt[3]{2} + i$ é algébrico.

15.16) Resolva a equação $x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 + 6x - 20 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + i$.

15.17) Resolva a equação $x^4 + 4x^3 + 13x^2 + 36x + 36 = 0$, sabendo que ela admite uma raiz dupla.

15.18) Resolva a equação $2x^5 - 9x^4 + 14x^3 - 13x^2 + 12x - 4 = 0$, sabendo que ela admite uma raiz imaginária pura.

15.19) Resolva a equação $x^6 - 7x^4 + 16x^2 - 12 = 0$.

(*Sugestão*: faça a mudança de variável $x^2 = y$.)

15.20) Resolva a equação $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$.

15.21) Consideremos a equação $x^n + 2kx - 2 = 0$, onde $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Essa equação pode ter raízes racionais?

15.4 — PROPRIEDADES

Consideremos um polinômio P(x) não identicamente nulo e de coeficientes **racionais**. Consideremos ainda os números **racionais** **a**, **b**, **m** e **n** tais que $\sqrt{m}$ e $\sqrt{n}$ sejam **irracionais**. Pode-se demonstrar que:

1.º) se $a + \sqrt{m}$ é raiz de P(x), $a - \sqrt{m}$ também o é;

2.º) se $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ é raiz de P(x), os números $\sqrt{m} - \sqrt{n}$, $-\sqrt{m} + \sqrt{n}$ e $-\sqrt{m} - \sqrt{n}$ também são raízes de P(x).

Assim, por exemplo, se $2 + \sqrt{3}$ é raiz de P(x), $2 - \sqrt{3}$ também é raiz. Se $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ é raiz de P(x), os números $\sqrt{5} - \sqrt{7}$, $-\sqrt{5} + \sqrt{7}$ e $-\sqrt{5} - \sqrt{7}$ também serão raízes.

Exercícios Resolvidos

15.22) Sabe-se que o número $1 + \sqrt{2}$ é raiz do polinômio:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 8x - 4$$

Determine as outras raízes.

Solução

Os coeficientes de P(x) são racionais; portanto, se $1 + \sqrt{2}$ é raiz, $1 - \sqrt{2}$ também o é. Assim:

$$P(x) = \underbrace{[x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})]}_{x^2 - 2x - 1} \cdot A(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot A(x)$$

Dividindo P(x) por $x^2 - 2x - 1$, obtemos A(x):

$$A(x) = x^2 + 4$$

Resolvendo a equação $x^2 + 4 = 0$, obtemos as raízes que faltam: 2i e −2i. Portanto, as raízes de P(x) são:

$$1 + \sqrt{2},\ 1 - \sqrt{2},\ 2i \text{ e } -2i$$

15.23) Determine todas as raízes do polinômio $P(x) = x^6 - x^4 + 7x^2 + 9$, sabendo que uma de suas raízes é $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Solução

Os coeficientes de P(x) são todos racionais; portanto, se $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz, os números $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$ e $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ também serão raízes.

$$P(x) = \underbrace{[x - (\sqrt{2} + \sqrt{3})][x - (\sqrt{2} - \sqrt{3})]}_{x^2 - 2\sqrt{2}x - 1} \underbrace{[x - (-\sqrt{2} + \sqrt{3})][x - (-\sqrt{2} - \sqrt{3})]}_{x^2 + 2\sqrt{2}x - 1} \cdot A(x) =$$

$$= (x^2 - 2\sqrt{2}x - 1)(x^2 + 2\sqrt{2}x - 1) \cdot A(x) = (x^4 - 10x^2 + 1) \cdot A(x)$$

Dividindo P(x) por $x^4 - 10x^2 + 1$, obtemos A(x):

$$A(x) = x^2 + 1$$

As raízes de A(x) são $\pm$ **i**. Portanto, as raízes de P(x) são:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3},\ \sqrt{2} - \sqrt{3},\ -\sqrt{2} + \sqrt{3},\ -\sqrt{2} - \sqrt{3},\ i,\ -i$$

Exercícios Propostos

15.24) Resolva a equação $x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $2 + \sqrt{3}$.

15.25) Resolva a equação $x^5 + x^4 - 14x^3 - 14x^2 + 9x + 9 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $\sqrt{2} - \sqrt{5}$.

15.26) Resolva a equação $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 10x - 12 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é o número $\sqrt{2}$.

15.27) Determine as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 4x^3 - 4x - 1$, sabendo que uma de suas raízes é o número $\sqrt{9 + \sqrt{80}}$.

(*Sugestão*: escreva o número $\sqrt{9 + \sqrt{80}}$ na forma $\sqrt{r} + \sqrt{s}$, onde **r** e **s** são racionais — veja volume 1 desta coleção, p. 260.)

Capítulo

16

Equações recíprocas

16.1 — DEFINIÇÃO

Uma equação algébrica de grau $n > 0$ é chamada de equação recíproca se, e somente se, for satisfeita a condição:

r é raiz da equação $\Rightarrow \dfrac{1}{r}$ é raiz da equação, com a mesma multiplicidade.

Em outras palavras, dada uma equação recíproca, se um número é raiz, o seu **recíproco** também é raiz, com a mesma multiplicidade. É óbvio, então, que o número zero nunca é raiz de uma equação recíproca e, portanto, o termo independente da equação recíproca é sempre diferente de zero.

Exemplos

a) A equação $2x^2 - 5x + 2 = 0$ tem conjunto-solução $S = \left\{2;\ \dfrac{1}{2}\right\}$; portanto é uma equação recíproca.

b) A equação $3x^2 - 8ix + 3 = 0$ tem conjunto-solução $S = \left\{3i;\ \dfrac{-i}{3}\right\}$. Observando que $\dfrac{1}{3i} = \dfrac{-i}{3}$, concluímos que a equação é recíproca.

c) A equação $6x^3 - 19x^2 + 14x - 1 = 0$ tem conjunto-solução $S = \left\{1;\ \dfrac{2}{3};\ \dfrac{3}{2}\right\}$.

Observando que:

o recíproco (ou inverso) de $\dfrac{2}{3}$ é $\dfrac{3}{2}$

o recíproco de 1 é 1

concluímos que a equação é recíproca.

d) Consideremos a equação $(x - 4)^3 \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = 0$, cujas raízes são 4 e $\frac{1}{4}$.

Embora $\frac{1}{4}$ seja o recíproco de 4, a equação **não** é recíproca, pois as raízes **não** têm a mesma multiplicidade.

e) A equação $\left(x - \frac{4}{7}\right)^3 \left(x - \frac{7}{4}\right)^3 (x + 5)^2 \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 (x + 1) = 0$ é recíproca.

f) A equação $(x - 4)(x - 7) = 0$ **não** é recíproca.

Devemos resaltar que:

$$r = \frac{1}{r} \Leftrightarrow r^2 = 1 \Leftrightarrow r = \pm 1$$

isto é, os únicos números que são iguais aos seus recíprocos são os números 1 e −1. Portanto, para $r \neq \pm 1$, devemos ter $r \neq \frac{1}{r}$. Daí, concluímos que:

1.º) se uma equação recíproca **não** admite a raiz 1 nem a raiz −1, ela deve ser de grau **par**;

2.º) se uma equação recíproca é de grau **ímpar**, ela deve admitir a raiz 1 ou a raiz −1.

16.2 — RECONHECIMENTO DE UMA EQUAÇÃO RECÍPROCA

Consideremos a equação recíproca:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \text{(I)}$$

onde, obviamente, $a_n \neq 0$ e $a_0 \neq 0$. Se **x** é uma das raízes de (I), $\frac{1}{x}$ também é raiz.

Substituindo em (I), temos:

$$a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \ldots + a_2\left(\frac{1}{x}\right)^2 + a_1\left(\frac{1}{x}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando todos os termos por x^n, obtemos:

$$a_n + a_{n-1} x + a_{n-2} x^2 + \ldots + a_2 x^{n-2} + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n = 0$$

isto é:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad \text{(II)}$$

As equações (I) e (II) devem ter as mesmas raízes, com as mesmas multiplicidades; portanto (veja item 11.8) os coeficientes dos termos de mesmo grau devem ser proporcionais. Sendo **k** a constante de proporcionalidade, vem:

$$\begin{cases} a_0 = k \cdot a_n \\ a_1 = k \cdot a_{n-1} \\ a_2 = k \cdot a_{n-2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n-2} = k \cdot a_2 \\ a_{n-1} = k \cdot a_1 \\ a_n = k \cdot a_0 \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

onde:

$$\begin{cases} a_0 \text{ e } a_n \text{ são coeficientes dos termos extremos} \\ a_1 \text{ e } a_{n-1} \text{ são coeficientes de termos eqüidistantes dos extremos} \\ a_2 \text{ e } a_{n-2} \text{ são coeficientes de termos eqüidistantes dos extremos} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

De $a_0 = k \cdot a_n$ e $a_n = k \cdot a_0$ vem $k = \pm 1$.

Substituindo nas igualdades (III), concluímos que:

1.º) para $k = 1$, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são **iguais**;
2.º) para $k = -1$, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são **simétricos**. (IV)

Todos os passos que demos neste item podem ser dados "para trás", isto é, supondo que as condições (IV) são satisfeitas, podemos concluir que a equação é recíproca. Assim, podemos dizer que:

Uma condição necessária e suficiente para que uma equação algébrica de grau $n > 0$ seja recíproca é que os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) sejam **iguais** ou **simétricos**.

Quando ocorrer $k = 1$, diremos que a equação recíproca é de primeira classe; quando ocorrer $k = -1$, diremos que a equação recíproca é de segunda classe.

Exemplos

a) Seja a equação $7x^5 - 9x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 9x + 7 = 0$. Observe que os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são iguais. Portanto, é uma equação recíproca de primeira classe.

b) $6x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 7x - 6 = 0$

Os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são simétricos; portanto, é uma equação recíproca de segunda classe.

c) $5x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 6x + 5 = 0$

Os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são iguais. (Observe que neste caso o termo central é igual a ele mesmo.) Trata-se de uma equação recíproca de primeira classe.

d) A equação $5x^4 + 6x^3 - 6x - 5 = 0$ pode ser escrita:

$$5x^4 + 6x^3 + 0x^2 - 6x - 5 = 0$$

Neste caso, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos (e os dos extremos) são simétricos e, portanto, a equação, para ser recíproca, não pode ter o termo central.

e) Consideremos a equação $7x^4 - 9x^3 + 2x^2 + 9x - 7 = 0$. De acordo com o que falamos no exemplo anterior, podemos dizer que esta equação **não** é recíproca.

f) $6x^2 - 9x + 6 = 0$

Esta equação é recíproca de primeira classe.

g) A equação $4x^6 + (2 + 5i)x^4 + 9x^3 + (2 + 5i)x^2 + 4 = 0$ pode ser escrita:

$$4x^6 + 0x^5 + (2 + 5i)x^4 + 9x^3 + (2 + 5i)x^2 + 0x + 4 = 0$$

Trata-se de uma equação recíproca de primeira classe.

h) A equação $2x^5 - 7x^4 + 7x - 2 = 0$ pode ser escrita:

$$2x^5 - 7x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 7x - 2 = 0$$

Trata-se de uma equação recíproca de segunda classe.

16.3 — RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO RECÍPROCA

Consideremos o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tal que a equação:

$$P(x) = 0$$

seja recíproca. Suponhamos que os números 1 e -1 sejam raízes dessa equação, com multiplicidades **p** e **q**, respectivamente (eventualmente podemos ter $p = 0$ ou $q = 0$). Admitindo que haja outras raízes, temos:

$$P(x) = (x - 1)^p \cdot (x + 1)^q \cdot B(x) \qquad \text{(I)}$$

de modo que (de acordo com o que vimos no item 16.1) a equação:

$$B(x) = 0$$

é recíproca de grau par, que **não admite** a raiz 1 nem a raiz -1. Resta saber se a equação $B(x) = 0$ é de 1.ª ou 2.ª classe.

Suponhamos que B(x) fosse de 2.ª classe. Assim, sendo:

$$B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$$

teríamos:

$$B(1) = b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_2 + b_1 + b_0 = 0$$

pois, a equação sendo de segunda classe, os coeficientes dos termos eqüidistantes dos extremos são simétricos. Mas aí concluiríamos que o número 1 é raiz de B(x), o que não pode ser. Então concluímos que a equação $B(x) = 0$ deve ser recíproca de grau par e 1.ª classe.

Portanto, só precisaremos de um processo especial para resolvermos uma equação recíproca de 1.ª classe e grau par que não admita a raiz 1 nem a raiz -1. Tal equação será chamada, daqui em diante, de equação recíproca normal.

Exemplo

Consideremos a equação recíproca:

$$2x^7 - 6x^6 + 3x^5 + x^4 + x^3 + 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

Experimentando os números 1 e -1, verificamos que 1 é raiz dupla e -1 é raiz simples.

	2	−6	3	1	1	3	−6	2
1	2	−4	−1	0	1	4	−2	0
1	2	−2	−3	−3	−2	2	0	
−1	2	−4	1	−4	2	0		

$$B(x) = 2x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 2$$

A equação $B(x) = 0$ é recíproca, de grau par, de 1.ª classe e não admite a raiz 1 nem a raiz -1. Portanto, é uma equação **recíproca normal**.

16.4 — RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO RECÍPROCA NORMAL

Consideremos uma equação recíproca normal de grau **n**. O artifício usado para resolvê-la consiste em dividir todos os termos por $x^{\frac{n}{2}}$ e, em seguida, fazer a seguinte mudança de variável:

$$\boxed{x + \frac{1}{x} = y}$$

Para facilitar o nosso trabalho nos exercícios, vamos deixar prontos alguns cálculos:

$$x + \frac{1}{x} = y \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

Assim: $\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2}$

$$y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow y^3 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \Rightarrow y^3 = x^3 + 3x^2 \cdot \frac{1}{x} + 3x \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^3 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3y$$

Assim: $\boxed{x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y}$

De modo análogo, podemos concluir:

$$\boxed{x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2}$$

e assim por diante.

Exercícios Resolvidos

16.1) Resolva a equação $6x^6 + 47x^5 + 138x^4 + 194x^3 + 138x^2 + 47x + 6 = 0$.

Solução

1.º modo

A equação dada é recíproca, de grau par, porém não sabemos ainda se é normal. Devemos começar experimentando os números 1 e -1. Fazendo isso, podemos verificar que o número 1 não é raiz e que o número -1 é raiz dupla.

	6	47	138	194	138	47	6
-1	6	41	97	97	41	6	0
-1	6	35	62	35	6	0	

Ficamos agora com a equação normal $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$, a qual tem grau $n = 4$. Vamos dividir todos os termos por $x^{\frac{n}{2}}$, isto é, por x^2, obtendo:

$$\frac{6x^4}{x^2} + \frac{35x^3}{x^2} + \frac{62x^2}{x^2} + \frac{35x}{x^2} + \frac{6}{x^2} = 0$$

isto é:

$$6x^2 + 35x + 62 + \frac{35}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

ou, ainda:

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Fazendo a mudança de variável $x + \frac{1}{x} = y$, temos $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Substituindo em (I):

$$6(y^2 - 2) + 35y + 62 = 0$$

donde:

$$6y^2 + 35y + 50 = 0$$

cujas raízes são $y' = -\frac{5}{2}$ e $y'' = -\frac{10}{3}$.

Como $x + \frac{1}{x} = y$, temos as equações:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \text{ cujas raízes são } x' = -2 \text{ e } x'' = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}, \text{ cujas raízes são } x' = -3 \text{ e } x'' = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Assim, o conjunto-solução da equação dada é:

$$S = \left\{-1;\ -2;\ -\frac{1}{2};\ -3;\ -\frac{1}{3}\right\}$$

2.º modo

Já que os coeficientes da equação são todos inteiros, poderíamos ter tentado o processo desenvolvido no capítulo 15, isto é, a pesquisa de raízes racionais.

16.2) Resolva a equação $12x^6 - 40x^5 - 39x^4 + 170x^3 - 39x^2 - 40x + 12 = 0$.

Solução

1.º modo

Temos uma equação recíproca, de grau par e 1.ª classe. Fazendo a verificação, concluímos que 1 e -1 não são raízes. Vamos então usar o artifício. Como o grau da equação é $n = 6$, vamos dividir todos os termos por $x^{\frac{n}{2}}$, isto é, por x^3, obtendo:

$$12x^3 - 40x^2 - 39x + 170 - \frac{39}{x} - \frac{40}{x^2} + \frac{12}{x^3} = 0$$

ou,

$$12\underbrace{\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}_{y^3 - 3y} - 40\underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}_{y^2 - 2} - 39\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{y} + 170 = 0$$

donde:

$$12y^3 - 40y^2 - 75y + 250 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Fazendo a pesquisa das raízes racionais, descobrimos que uma das raízes da equação (I) é $y' = \frac{5}{2}$. Dividindo o lado esquerdo de (I) por $y - \frac{5}{2}$, obtemos o polinômio $12y^2 - 10y - 100$, cujas raízes são $y'' = \frac{10}{3}$ e $y''' = -\frac{5}{2}$.

Lembrando que $x + \frac{1}{x} = y$, temos as equações:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \text{ cujas raízes são } x' = 2 \text{ e } x'' = \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}, \text{ cujas raízes são } x' = 3 \text{ e } x'' = \frac{1}{3} \\ x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}, \text{ cujas raízes são } x' = -2 \text{ e } x'' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{2;\ \frac{1}{2};\ 3;\ \frac{1}{3};\ -2;\ -\frac{1}{2}\right\}$$

2.º modo

Poderíamos ter feito a pesquisa de raízes racionais já na equação dada.

16.3) Resolva a equação $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Solução

Este exercício já foi resolvido no capítulo 11 (exercício 11.38). Vamos agora resolvê-lo de outro modo.

A equação dada é recíproca normal. Vamos então dividir todos os termos por x^2, obtendo:

$$x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

ou,

$$\underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}_{y^2 - 2} + \underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{y} + 1 = 0$$

ou ainda:

$$y^2 + y - 1 = 0$$

Esta última equação tem raízes $y' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ e $y'' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Obtemos então as equações:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ cujas raízes são } \frac{-1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{e} \\ x + \frac{1}{x} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ cujas raízes são } \frac{-1 - \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} \end{cases}$$

Comparando a solução dada no capítulo 11 com a solução dada agora, teríamos um novo processo (além daquele visto no volume 3 desta coleção) de calcular o seno e o cosseno de $\frac{\pi}{5}$

16.4) Resolva a equação $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$.

Solução

Esta equação não é recíproca, mas podemos resolvê-la usando um artifício semelhante ao que usamos no caso da recíproca normal.

Vamos dividir todos os termos por x^2:

$$6x^2 - 25x + 12 + \frac{25}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Fazendo $x - \frac{1}{x} = y$, temos:

$$y^2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

isto é:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2$$

Substituindo em (I), obtemos:

$$6(y^2 + 2) - 25(y) + 12 = 0$$

ou,

$$6y^2 - 25y + 24 = 0$$

cujas raízes são $y' = \frac{8}{3}$ e $y'' = \frac{3}{2}$

Temos então as equações:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}, \text{ cujas raízes são } x' = 3 \text{ e } x'' = -\frac{1}{3} \\ x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}, \text{ cujas raízes são } x' = 2 \text{ e } x'' = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim, o conjunto-solução é:

$$S = \left\{3; -\frac{1}{3}; 2; -\frac{1}{2}\right\}$$

Exercícios Propostos

16.5) Determine os valores de **a** e **b** de modo que a equação $5x^4 + (a - b)x^3 + (3a - 2b)x^2 + x - 5 = 0$ seja recíproca.

16.6) Determine os valores de **a** e **b** de modo que a equação $4x^3 + ax^2 + 7x + b = 0$ seja recíproca.

16.7) Resolva as equações:

a) $3x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3 = 0$

b) $2x^8 - 6x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 14x^4 + 6x^3 + 5x^2 - 6x + 2 = 0$

c) $12x^6 - 4x^5 - 53x^4 + 53x^2 + 4x - 12 = 0$

d) $\frac{5x^3 + 5x}{2} = \frac{3x^4 + 31x^2 + 3}{7}$

16.8) Dada a equação $ax^4 + 7x^3 + 5x^2 + bx + 9 = 0$, determine os valores de **a** e **b** de modo que, se um número α é raiz da equação, o número $-\frac{1}{\alpha}$ também seja raiz da equação, com a mesma multiplicidade.

Capítulo

17

Raízes comuns

17.1 – INTRODUÇÃO

Consideremos dois polinômios: $A(x)$ e $B(x)$. Neste capítulo vamos estabelecer um processo que permita obter os números que são ao mesmo tempo raízes de $A(x)$ e $B(x)$.

17.2 – RAÍZES COMUNS E MDC

Sejam então dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$, de graus maiores que zero. Conforme vimos no capítulo 10, o máximo divisor comum de $A(x)$ e $B(x)$ pode ser obtido multiplicando-se os fatores comuns, com os menores expoentes. Mas, obviamente, ao pegarmos os fatores comuns, estamos pegando os fatores que trazem as raízes comuns. Daí temos a propriedade:

As raízes comuns a $A(x)$ e $B(x)$ são as raízes do mdc de $A(x)$ e $B(x)$.

Exercícios Resolvidos

17.1) Obtenha as raízes comuns aos polinômios:

$$\begin{cases} A(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 11x + 6 \\ B(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x + 6 \end{cases}$$

Solução

Seja $D(x)$ o mdc normalizado (veja capítulo 10) de $A(x)$ e $B(x)$:

$$D(x) = x^2 - 5x + 6$$

Como as raízes de $D(x)$ são 2 e 3, concluímos que as raízes comuns a $A(x)$ e $B(x)$ são 2 e 3.

17.2) Determine o valor de **k** de modo que os polinômios:

$$\begin{cases} A(x) = x^3 - 3x^2 + kx + 12 \\ B(x) = x^2 - x - 2 \end{cases}$$

admitam uma raiz comum.

Solução

Neste caso não é necessário recorrer ao mdc. As raízes de B(x) são 2 e −1. Temos, então:

$$\begin{cases} A(2) = 2^3 - 3(2)^2 + k(2) + 12 = 2k + 8 \\ A(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + k(-1) + 12 = -k + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(2) = 0 \Rightarrow k = -4 \\ A(-1) = 0 \Rightarrow k = 8 \end{cases}$$

Assim, podemos ter $k = -4$ ou $k = 8$.

17.3) Sendo $k \in \mathbb{R}^*$, determine a raiz comum aos polinômios:

$$A(x) = kx^3 + (3k - 2)x^2 + (3k - 4)x + (k - 2) \text{ e}$$

$$B(x) = kx^2 + (3k - 2)x + (2k - 4)$$

Solução

Vamos determinar um mdc de A(x) e B(x):

$$\begin{array}{r|l} kx^3 + (3k-2)x^2 + (3k-4)x + (k-2) & kx^2 + (3k-2)x + (2k-4) \\ \hline -kx^3 + (-3k+2)x^2 + (-2k+4)x & x \\ \hline kx + (k-2) & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} kx^2 + (3k-2)x + (2k-4) & kx + (k-2) \\ \hline -kx^2 + (-k+2)x & x + 2 \\ \hline 2kx + (2k-4) & \\ -2kx + (-2k+4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

O mdc de A(x) e B(x) é o polinômio $D(x) = kx + (k - 2)$, cuja raiz é $\frac{2-k}{k}$. Portanto, a raiz comum aos dois polinômios é $\frac{2-k}{k}$.

Exercícios Propostos

17.4) Obtenha as raízes comuns aos polinômios:

$$A(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 \text{ e } B(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$

17.5) Obtenha as raízes comuns aos polinômios:

$$A(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 12x - 8 \quad e \quad B(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 6$$

17.6) Determine o valor de **k** de modo que os polinômios $A(x) = x^3 - x^2 + kx - 1$ e $B(x) = x^2 - 4$ tenham uma raiz comum.

17.7) Determine os valores de **k** e **m**, de modo que os polinômios $A(x) = x^3 + x^2 + kx + m$ e $B(x) = x^2 - 4$ tenham duas raízes comuns.

17.8) Sendo $k \in \mathbb{R}^*$, determine a raiz comum aos polinômios:

$$A(x) = kx^3 + (2 - k)x^2 - (k + 4)x + (k + 2) \quad e \quad B(x) = kx^2 + (2 - k)x - (2k + 4)$$

17.3 — RAÍZES MÚLTIPLAS E MDC

Consideremos um polinômio P(x) de grau $n >$ e suponhamos que um número **c** seja raiz de P(x), com multiplicidade $m > 1$. De acordo com o que vimos no capítulo 12, podemos dizer que o número **c** é raiz de multiplicidade $m - 1$ do polinômio P'(x) (polinômio derivado de P(x)). Portanto, o número **c** é **raiz comum** dos polinômios P(x) e P'(x); a partir disto, concluímos:

> O número **c** é raiz de multiplicidade $m - 1$ do **mdc** dos polinômios P(x) e P'(x).

Exercícios Resolvidos

17.9) Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, sabendo que há uma raiz de multiplicidade maior que 1.

Solução

Temos: $\begin{cases} P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \\ P'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 \end{cases}$

Podemos determinar o mdc dos polinômios P(x) e P'(x), que é $M(x) = x^2 - 2x + 1$. É fácil concluir que o número 1 é raiz dupla de M(x); portanto, o número 1 é raiz tripla de P(x):

$$P(x) = (x - 1)^3 \cdot A(x)$$

Fazendo três divisões sucessivas por $x - 1$, podemos obter $A(x) = x + 2$, cuja raiz é -2. Portanto, as raízes de P(x) são: 1 (tripla) e -2 (simples).

17.10) Obtenha as raízes do polinômio $P(x) = x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36$, sabendo que há pelo menos uma raiz de multiplicidade maior que 1.

Solução

$$\begin{cases} P(x) = x^4 - 10x^3 + 37x^2 - 60x + 36 \\ P'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 74x - 60 \end{cases}$$

O mdc de $P(x)$ e $P'(x)$ é o polinômio $M(x) = x^2 - 5x + 6$, cujas raízes são 2 (simples) e 3 (simples). Daí concluímos que o número 2 é raiz dupla de $P(x)$ e o número 3 é raiz dupla de $P(x)$. Como $P(x)$ é de grau 4, estas são as únicas raízes. Devemos ter, então:

$$P(x) = (x - 2)^2 (x - 3)^2$$

Exercícios Propostos

17.11) Resolva a equação $x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$, sabendo que há uma raiz de multiplicidade maior que 1.

17.12) Resolva a equação $x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, sabendo que há uma raiz de multiplicidade maior que 1.

Capítulo 18

Raízes reais

18.1 — INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos algumas propriedades referentes às raízes reais de um polinômio de coeficientes reais Para melhor entendermos, é útil encararmos os polinômios como funções. (Observe que o item 10.4 deste volume se refere a isto.) Para tal, usaremos vários conceitos sobre funções, como os de função crescente, decrescente, gráfico de uma função, etc., já estudados no volume 1 desta coleção.

Observamos que teremos de lançar mão de várias propriedades que só serão justificadas no volume 8 (onde serão estudados os conceitos de **limite** e de **derivada**); assim, estas propriedades serão aqui apresentadas sem demonstração.

18.2 — GRÁFICO DA FUNÇÃO POLINOMIAL

Consideremos o polinômio P(x) de grau $n > 0$ e coeficientes reais:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Obviamente, para cada valor real atribuído a **x** teremos um único valor de P(x) e, portanto, podemos considerar a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada **x** associa o valor P(x). Pode-se demonstrar que o gráfico desta função é sempre uma **linha contínua** (como, por exemplo, na figura 18.1), **não podendo** apresentar "buracos" ou "interrupções" (como, por exemplo, na figura 18.2).

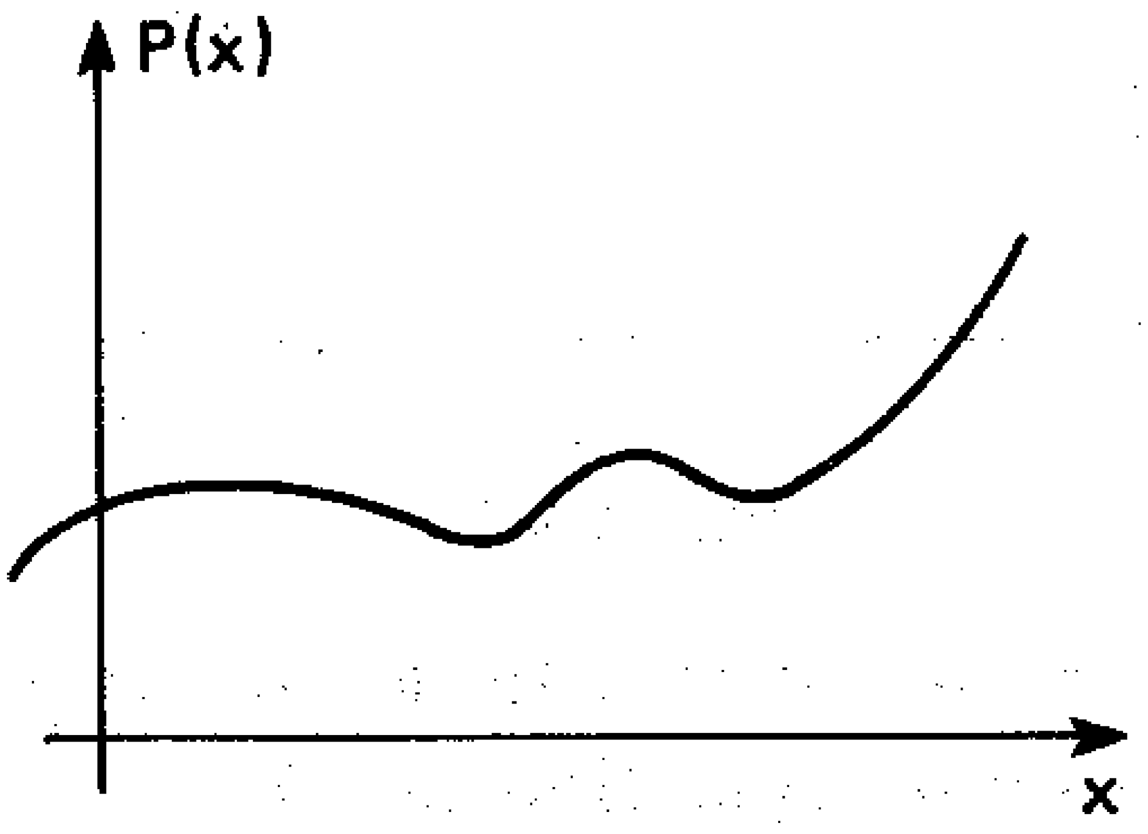


Fig. 18.1

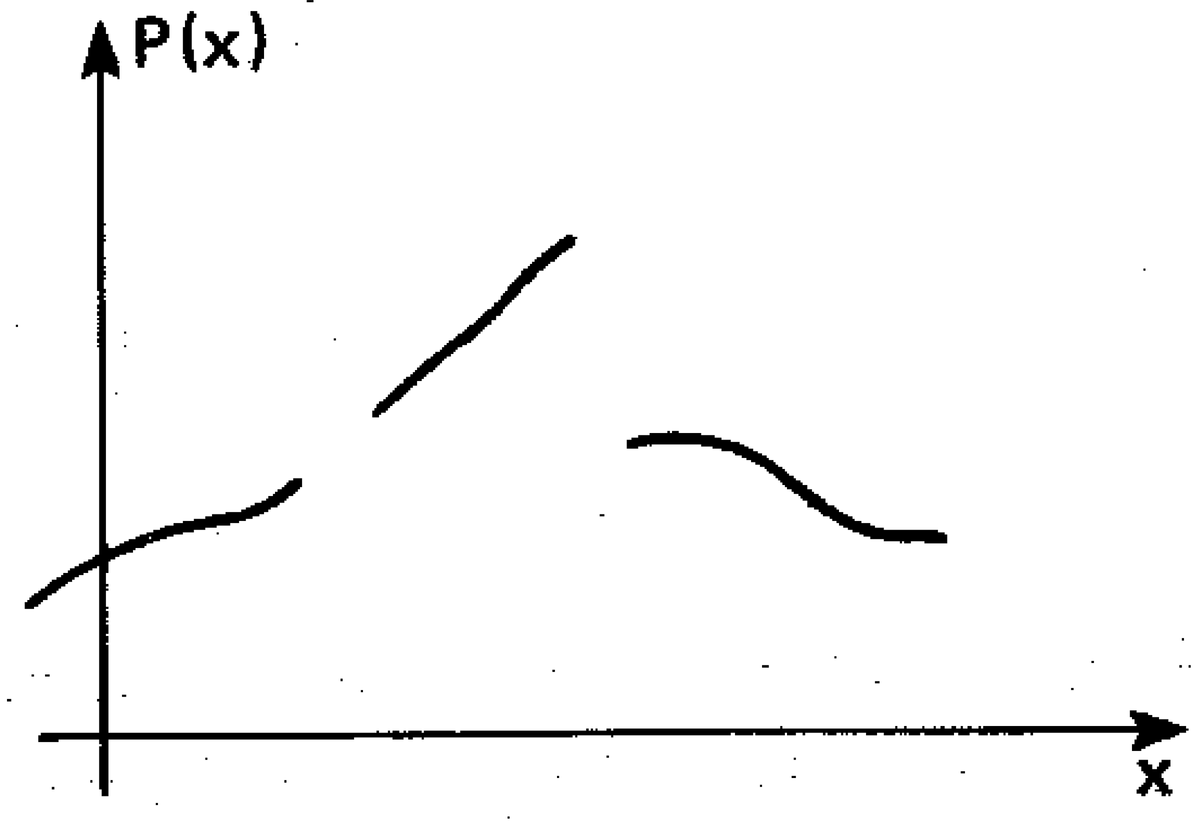


Fig. 18.2

Demonstra-se ainda que o gráfico **não pode** apresentar "bicos" do tipo que aparece na figura 18.3. É fácil ainda verificar que a interseção do gráfico com o eixo vertical nos dá o termo independente a_0, e uma interseção qualquer com o eixo horizontal nos dá uma raiz real **r** (veja figura 18.4).

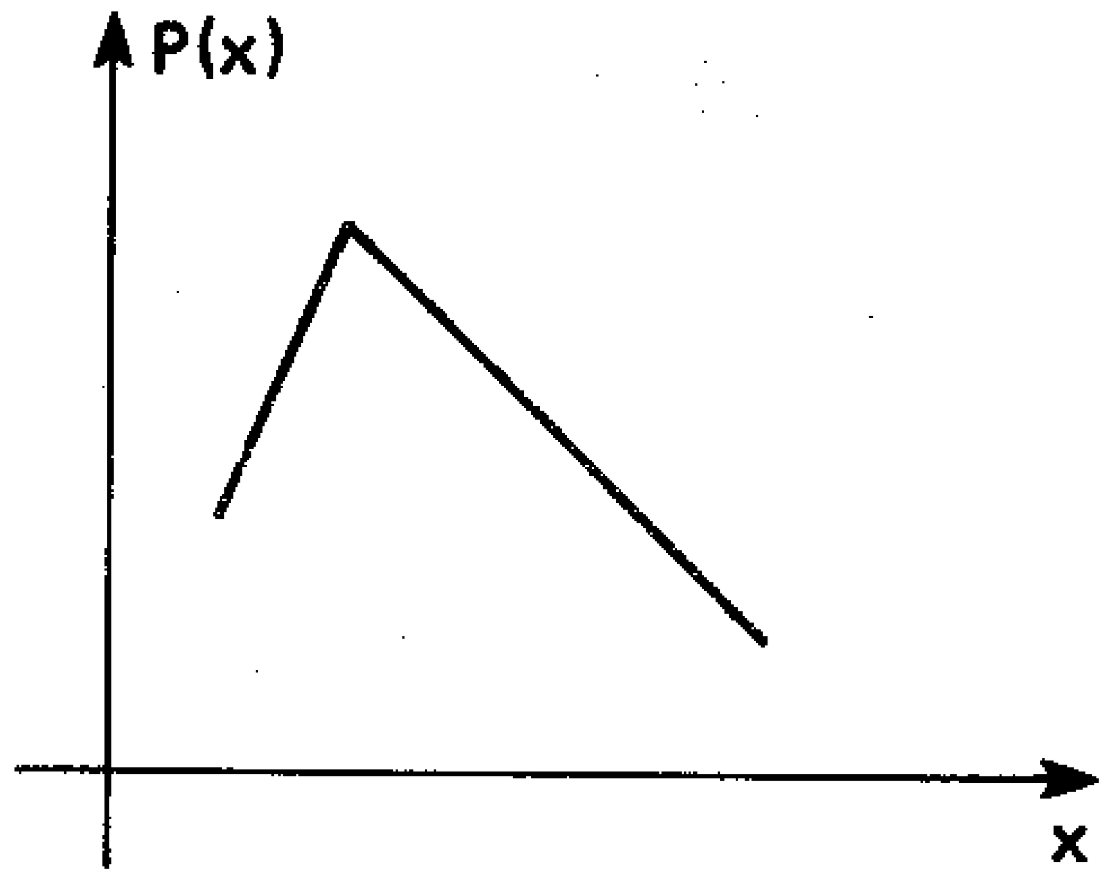


Fig. 18.3

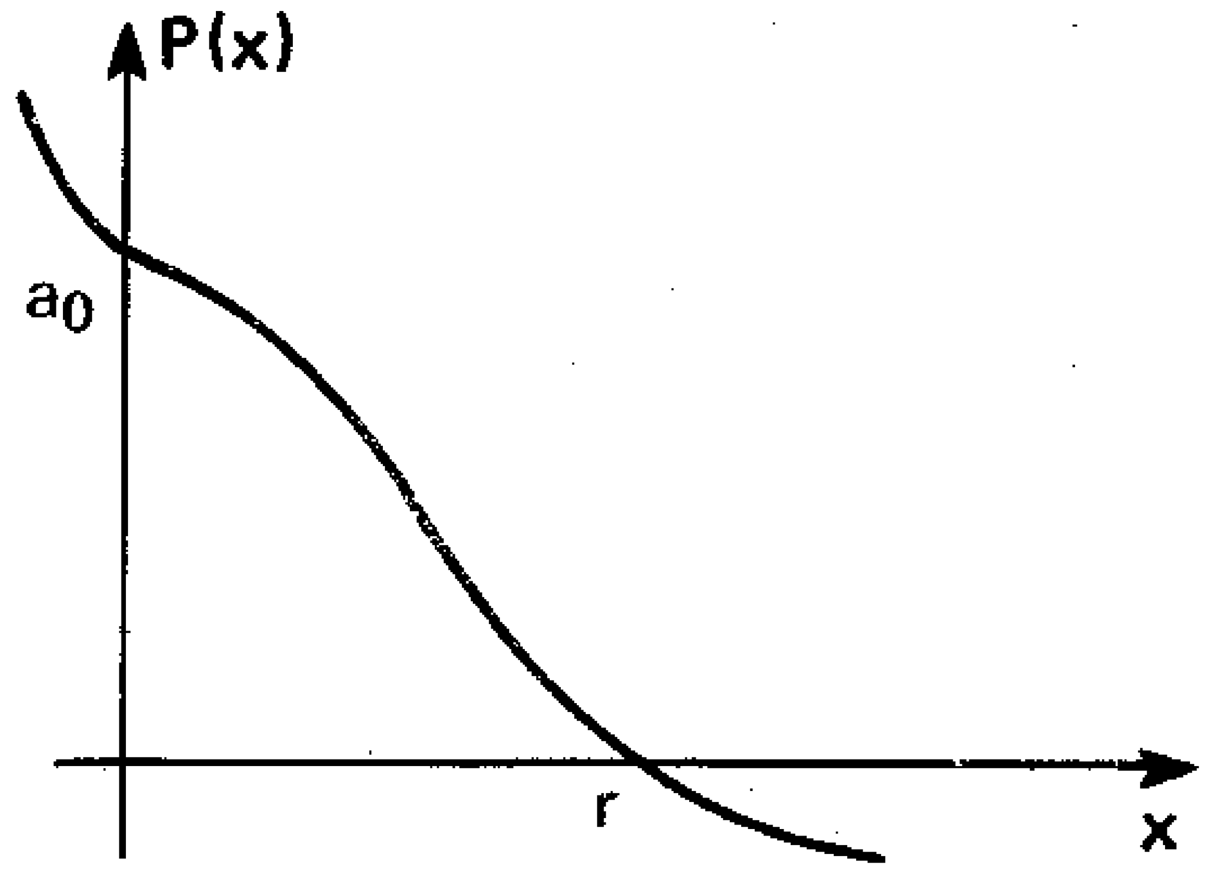


Fig. 18.4

Quando ocorrer o que vemos na figura 18.5, a raiz **r** tem multiplicidade par (o gráfico tangencia o eixo horizontal sem "cortá-lo"). Quando ocorrer o que vemos na figura 18.6, a raiz **r** tem multiplicidade ímpar maior que 1 (o gráfico corta o eixo horizontal, "tangenciando-o"). Se a raiz **r** for simples, ocorre o que vemos na figura 18.4.

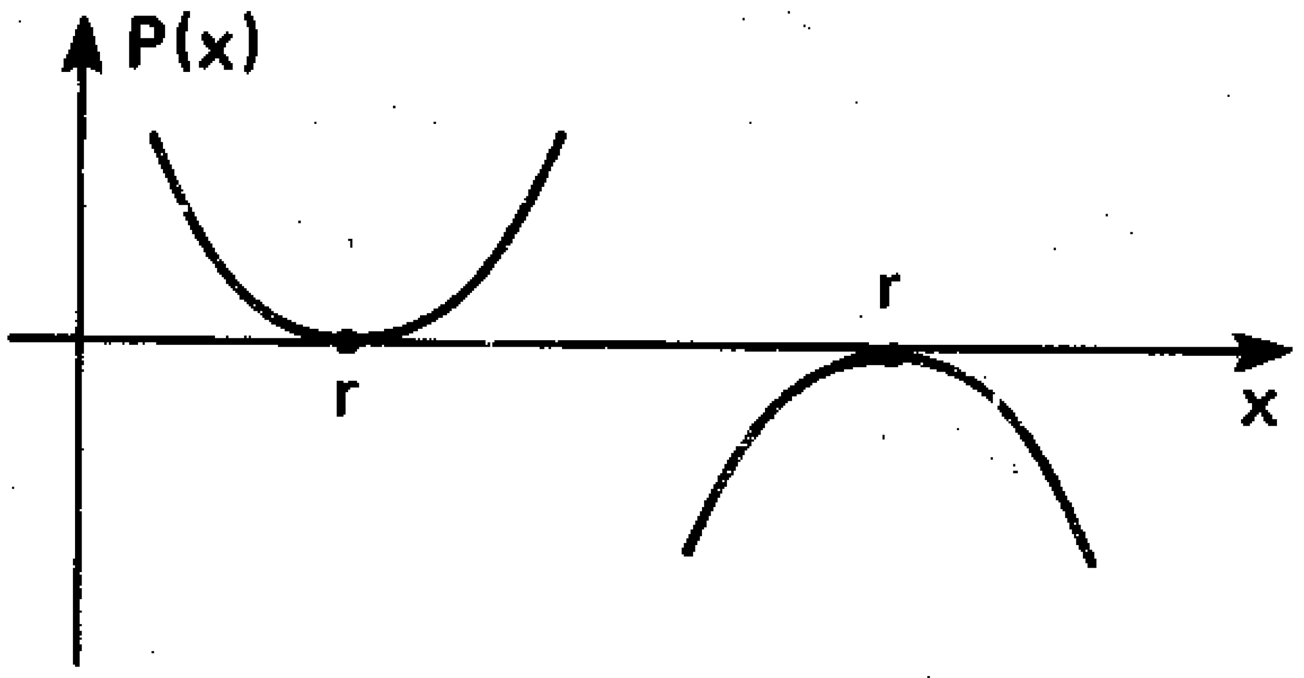


Fig. 18.5

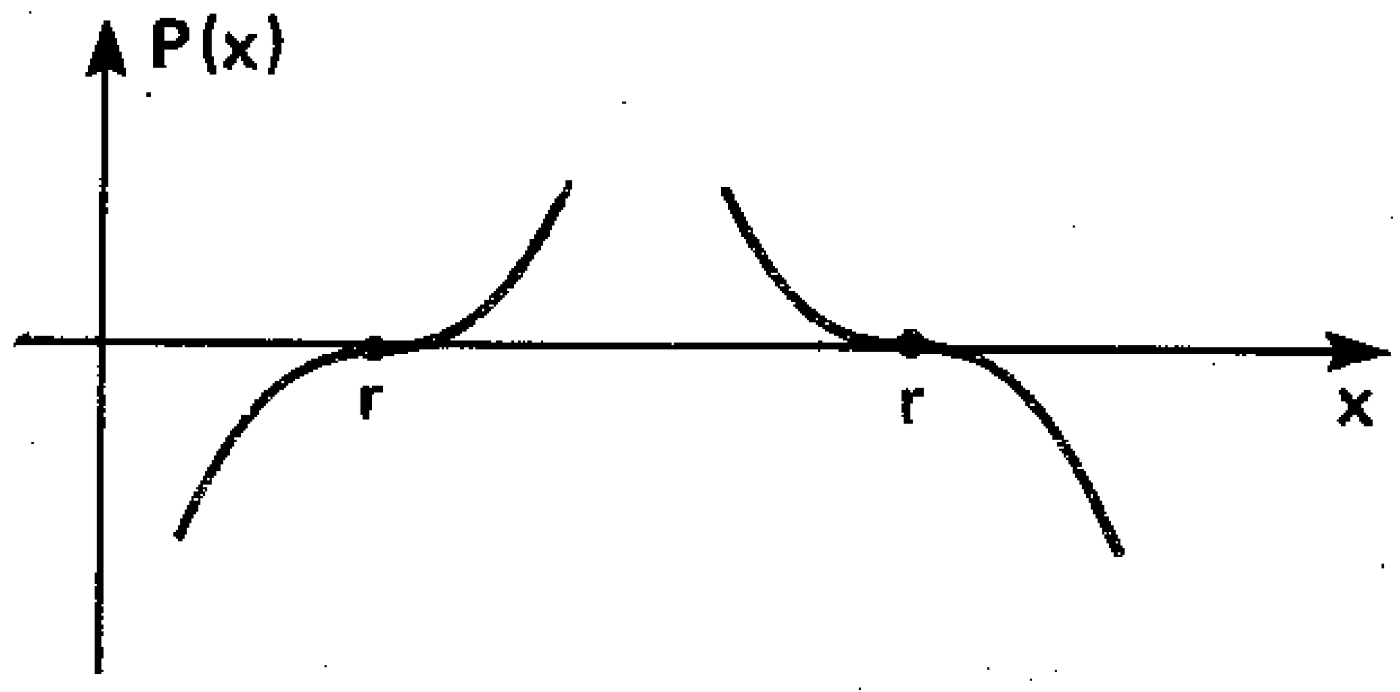


Fig. 18.6

Para aqueles valores de **x** para os quais a função é crescente (fig. 18.7), o polinômio derivado $P^{(1)}(x)$ assume valores **positivos**. Para os valores de **x** para os quais a função é decrescente (fig. 18.8), o polinômio derivado $P^{(1)}(x)$ assume valores **negativos**.

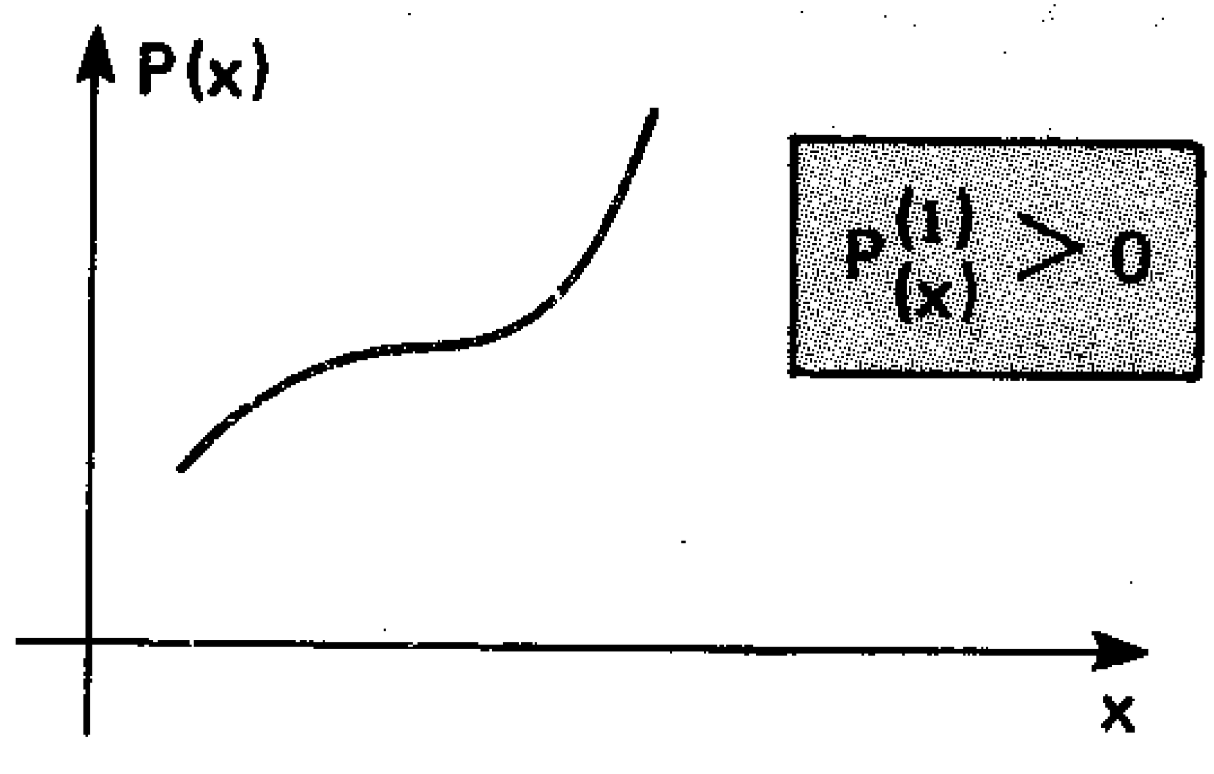


Fig. 18.7

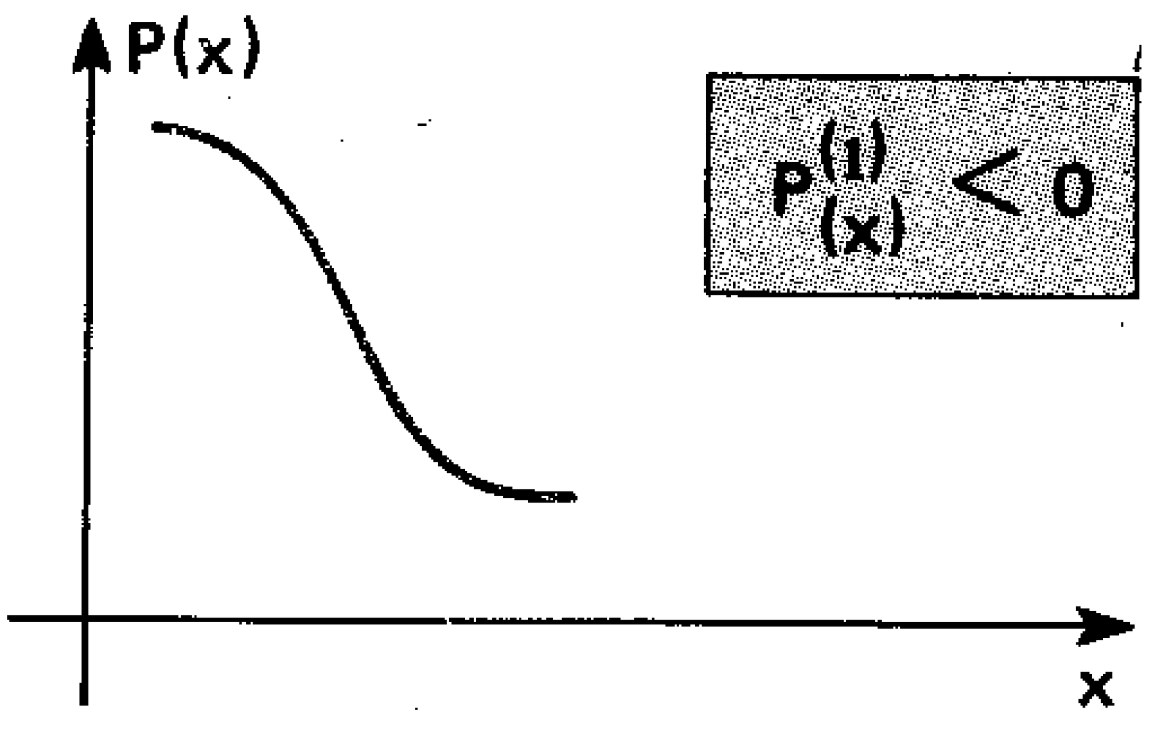


Fig. 18.8

Seja **k** um número real tal que $P^{(1)}(k) = 0$. Então, a reta tangente ao gráfica no ponto (k; P(k)) é paralela ao eixo horizontal (veja figuras 18.9, 18.10 e 18.11).

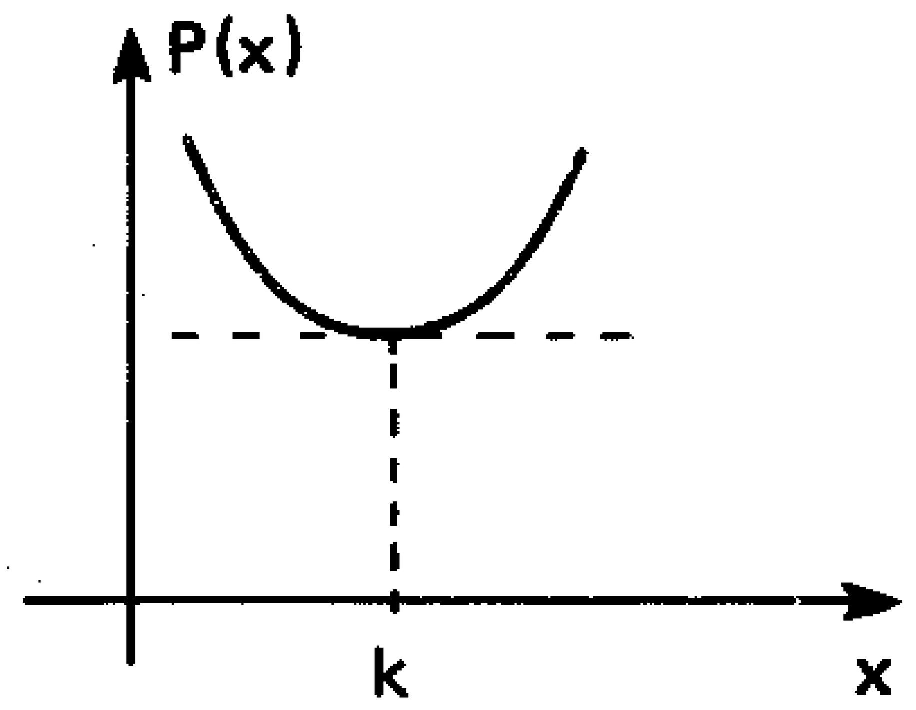


Fig. 18.9

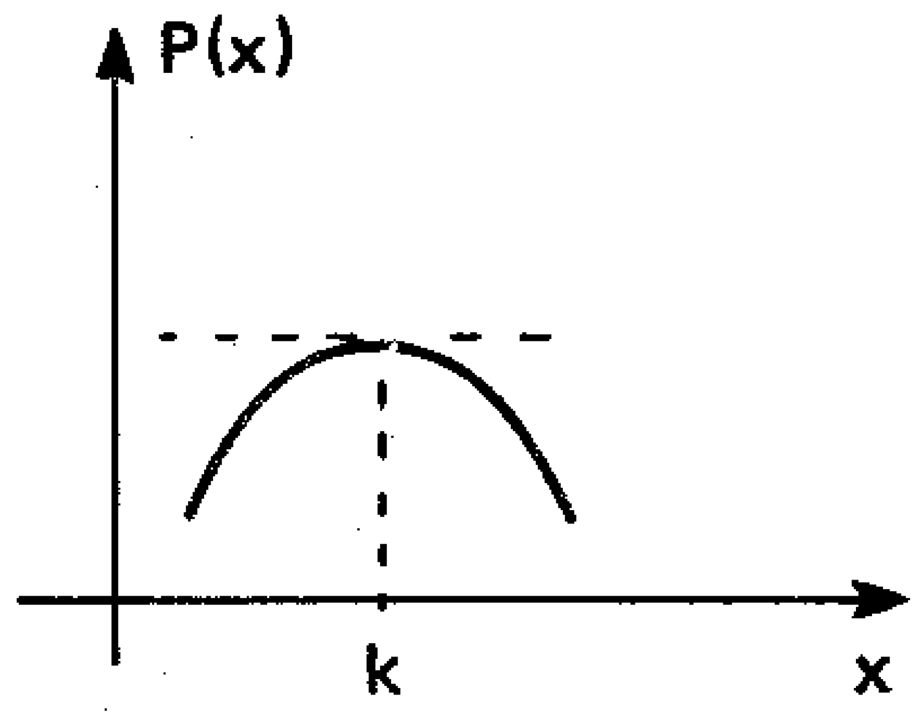


Fig. 18.10

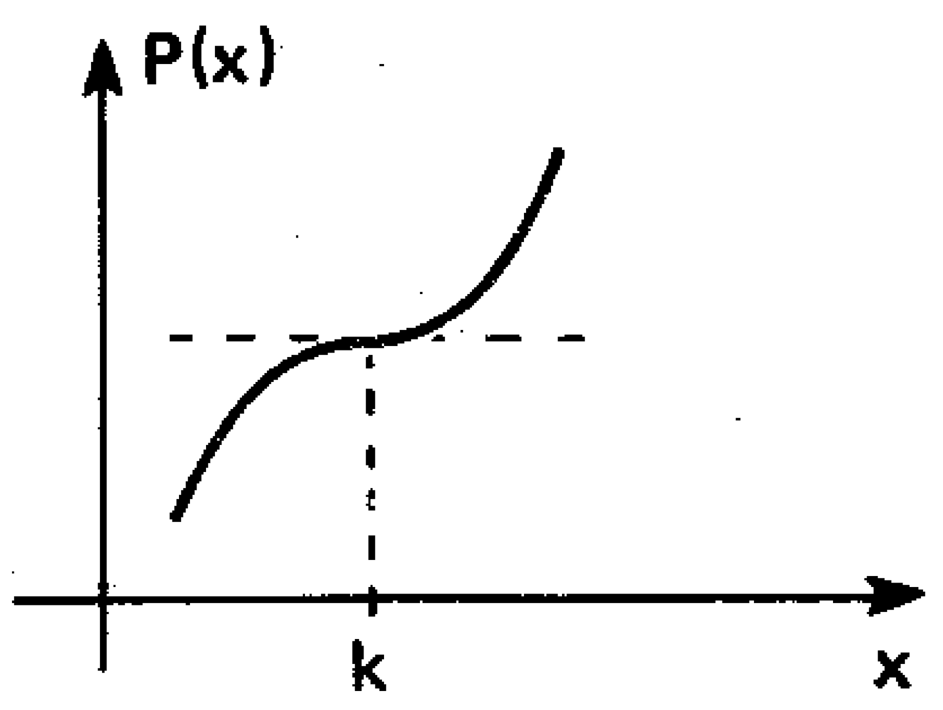


Fig. 18.11

Suponhamos que o polinômio seja de grau par. Sendo a_n o coeficiente do termo de mais alto grau, demonstra-se que:

1.º) se $a_n > 0$, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$, teremos $P(x) \to +\infty$ (como, por exemplo, na figura 18.12);

2.º) se $a_n < 0$, tanto para $x \to +\infty$ como para $x \to -\infty$, teremos $P(x) \to -\infty$ (como, por exemplo, na figura 18.13).

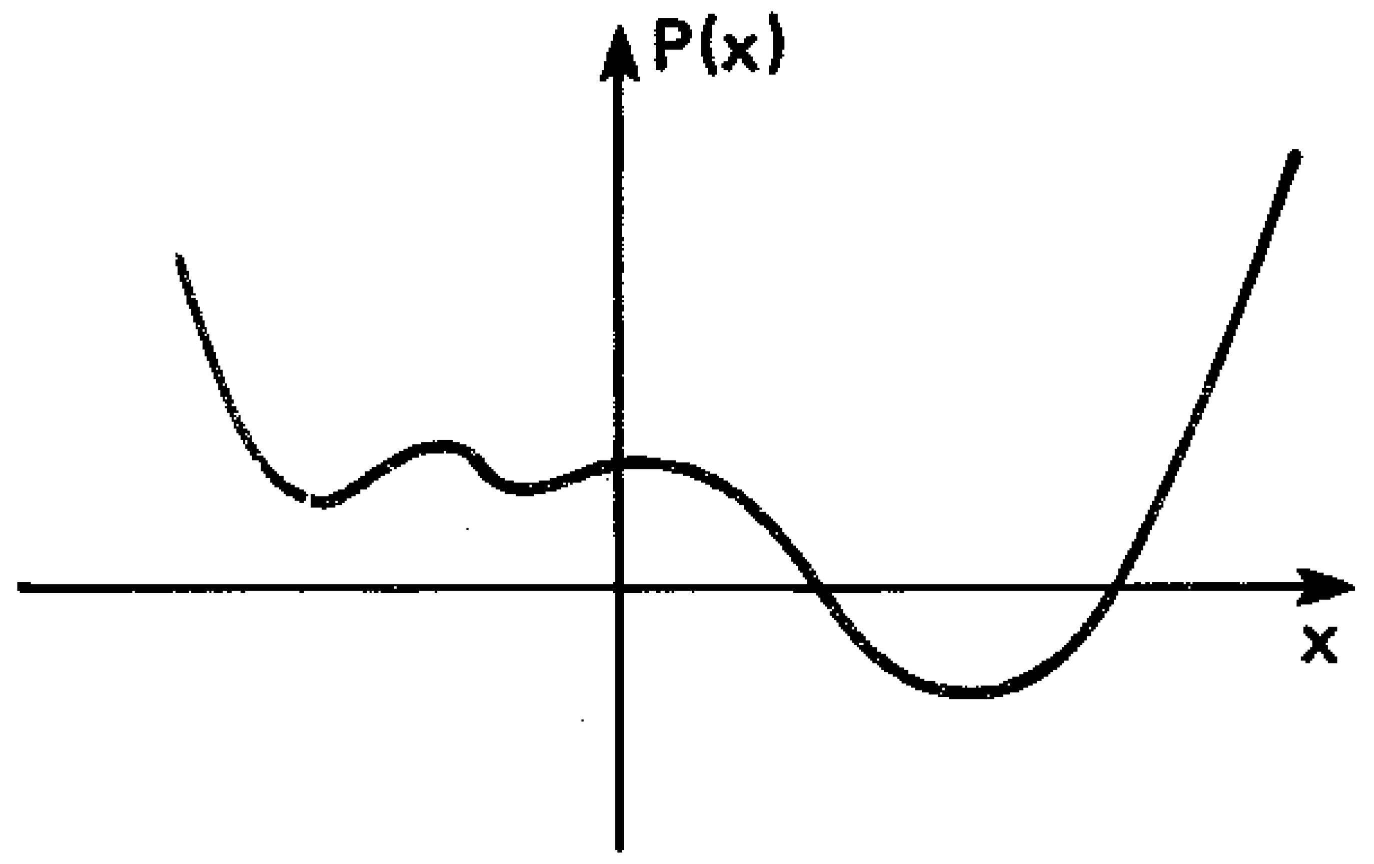


Fig. 18.12

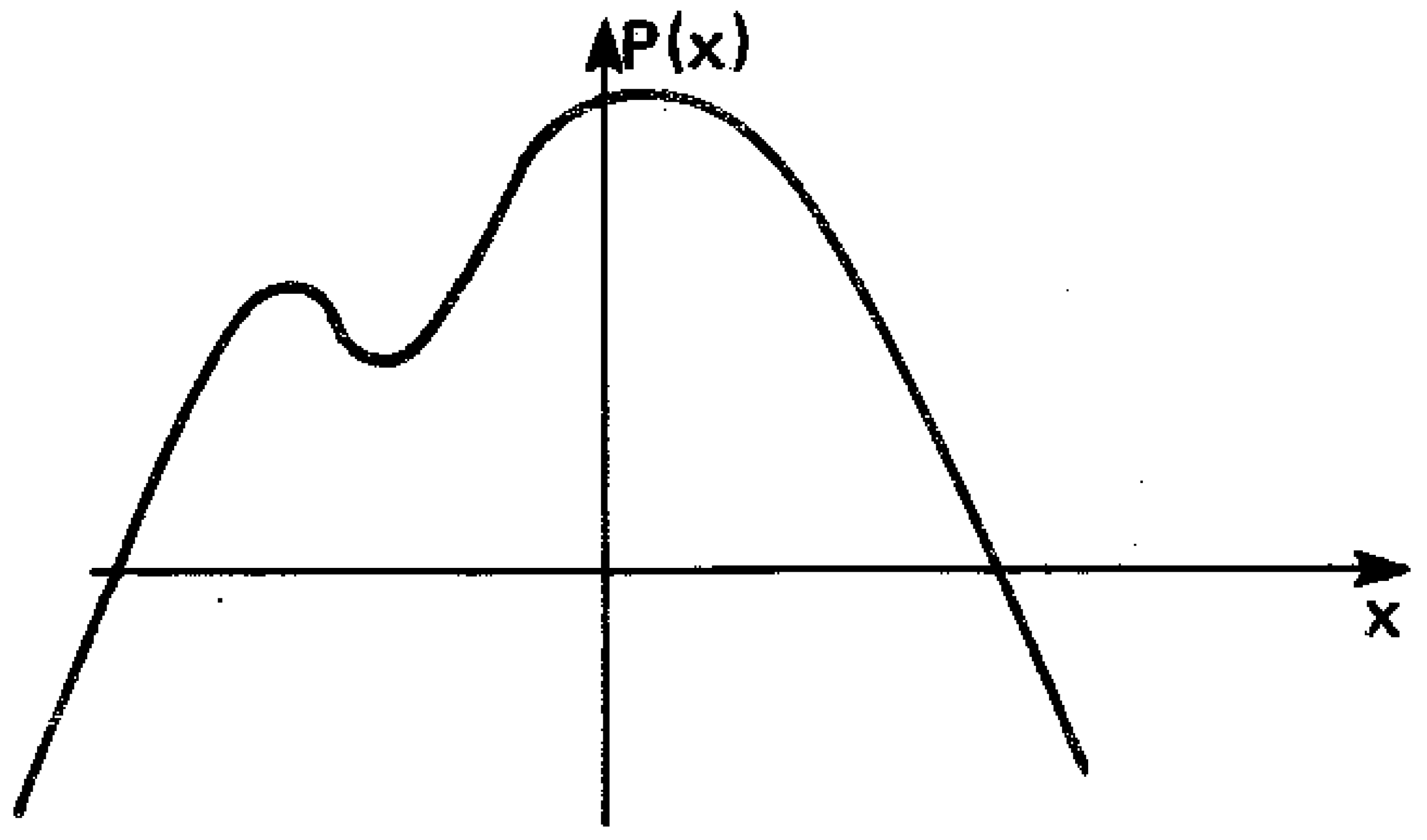


Fig. 18.13

Suponhamos agora que o polinômio seja de grau ímpar. Demonstra-se que:

1.º) $a_n > 0$

$$\begin{cases} \text{para } x \to +\infty \text{ vem } P(x) \to +\infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to -\infty \end{cases} \quad \text{(veja figura 18.14)}$$

2.º) $a_n < 0$

$$\begin{cases} \text{para } x \to +\infty \text{ vem } P(x) \to -\infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to +\infty \end{cases} \quad \text{(veja figura 18.15)}$$

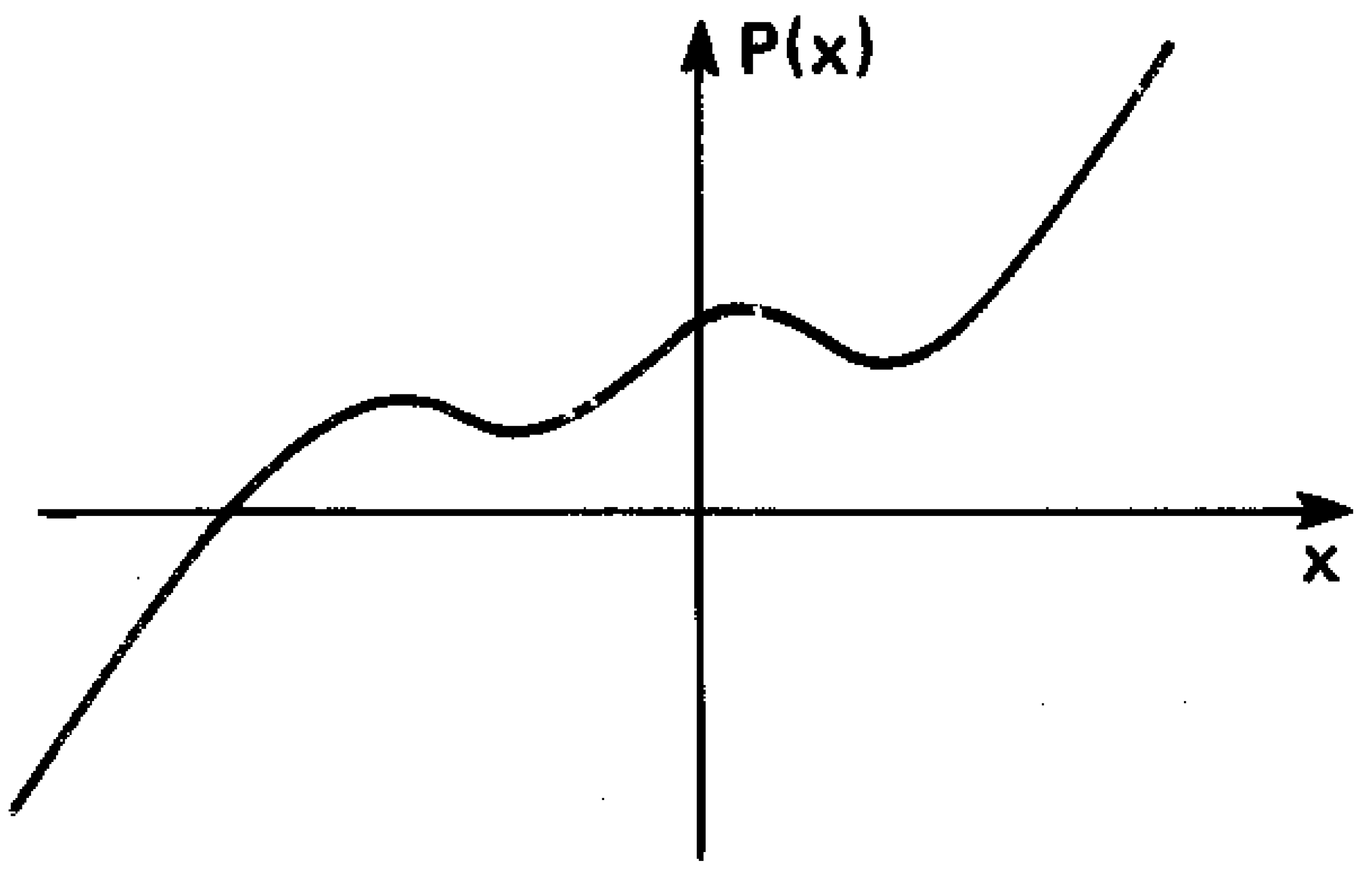


Fig. 18.14

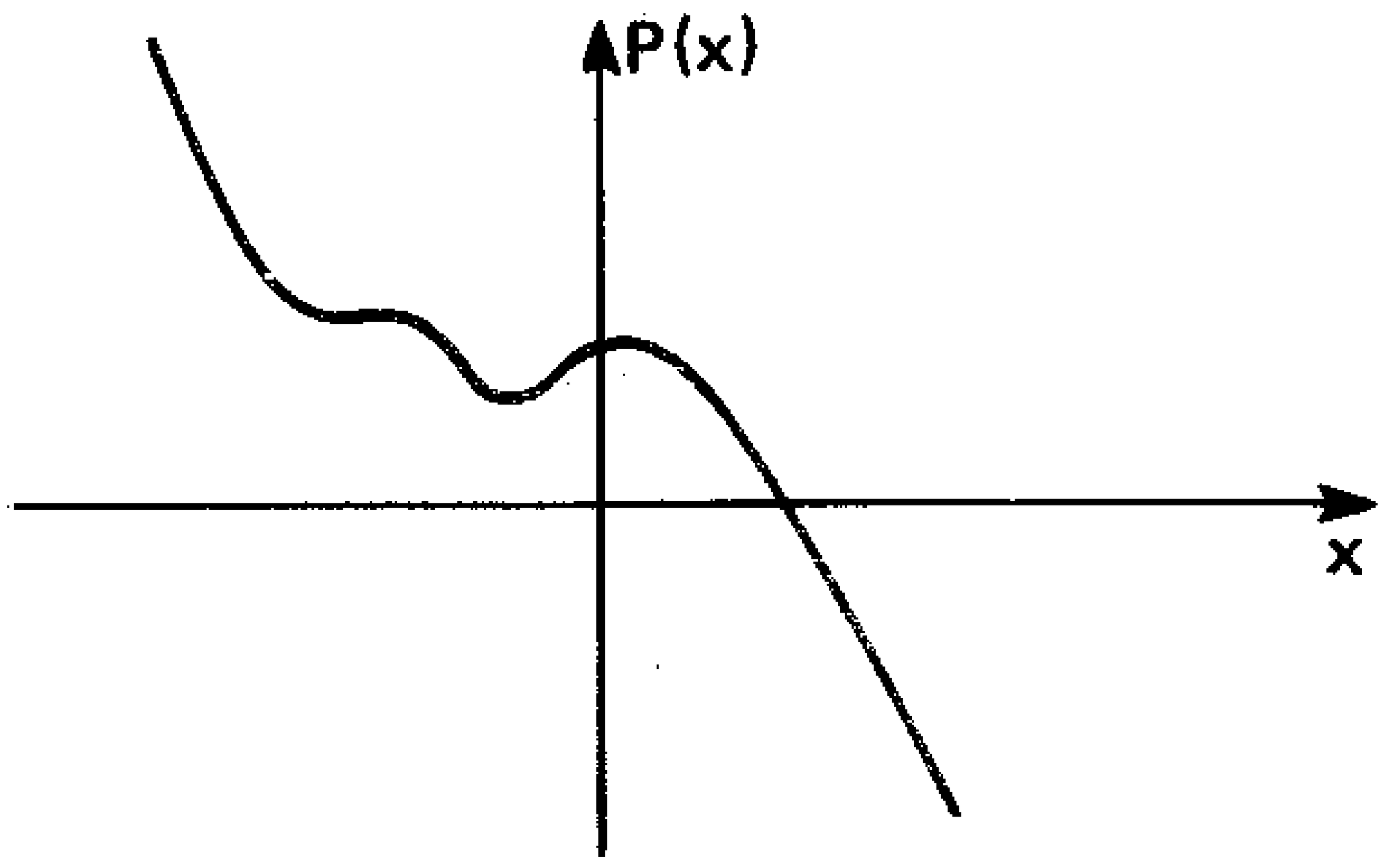


Fig. 18.15

Exercícios Resolvidos

18.1) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 2$.

a) Mostre que P(x) tem apenas uma raiz real.
b) Mostre que essa raiz real é negativa.
c) Mostre que essa raiz real é irracional.

Solução

a) Como P(x) é de grau ímpar e tem coeficientes reais, podemos garantir que ele possui pelo menos uma raiz real **r**; resta mostrar que **r** é a única raiz real. Para isso, determinemos o polinômio derivado de P(x):

$$P^{(1)}(x) = 3x^2 + 6x + 5$$

O discriminante Δ desse polinômio é:

$$\Delta = 6^2 - 4(3)(5) = 36 - 60 = -24 < 0$$

Concluímos então (veja capítulo 4 do volume 1 desta coleção) que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, teremos $P^{(1)}(x) > 0$ e, portanto, a função polinomial P(x) é sempre crescente. Isto significa que o gráfico corta o eixo horizontal apenas uma vez (sem tangenciá-lo, pois $P^{(1)}(x) \neq 0$) e deve ter o aspecto da figura **a** ou da figura **b**.

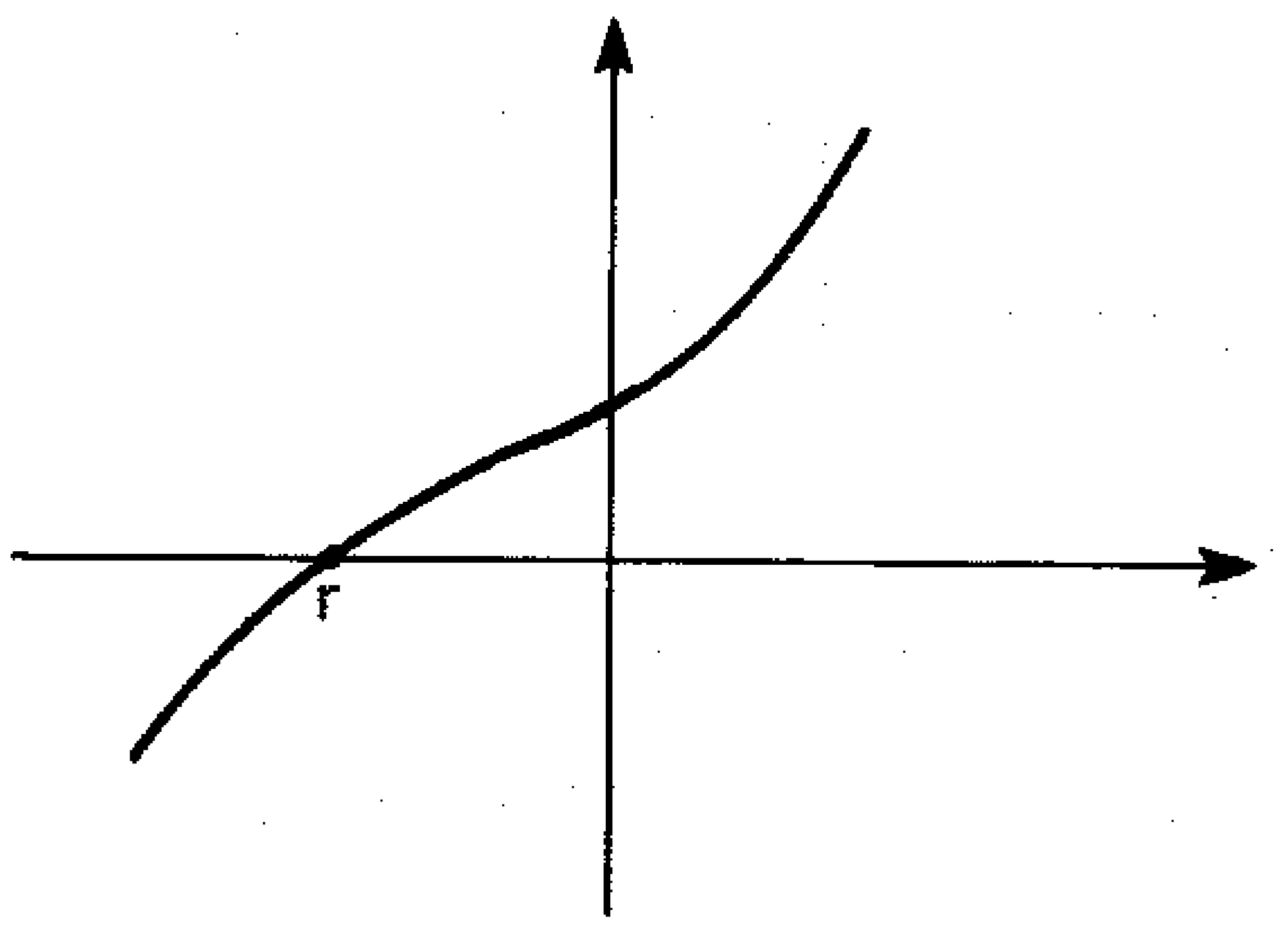


Fig. a

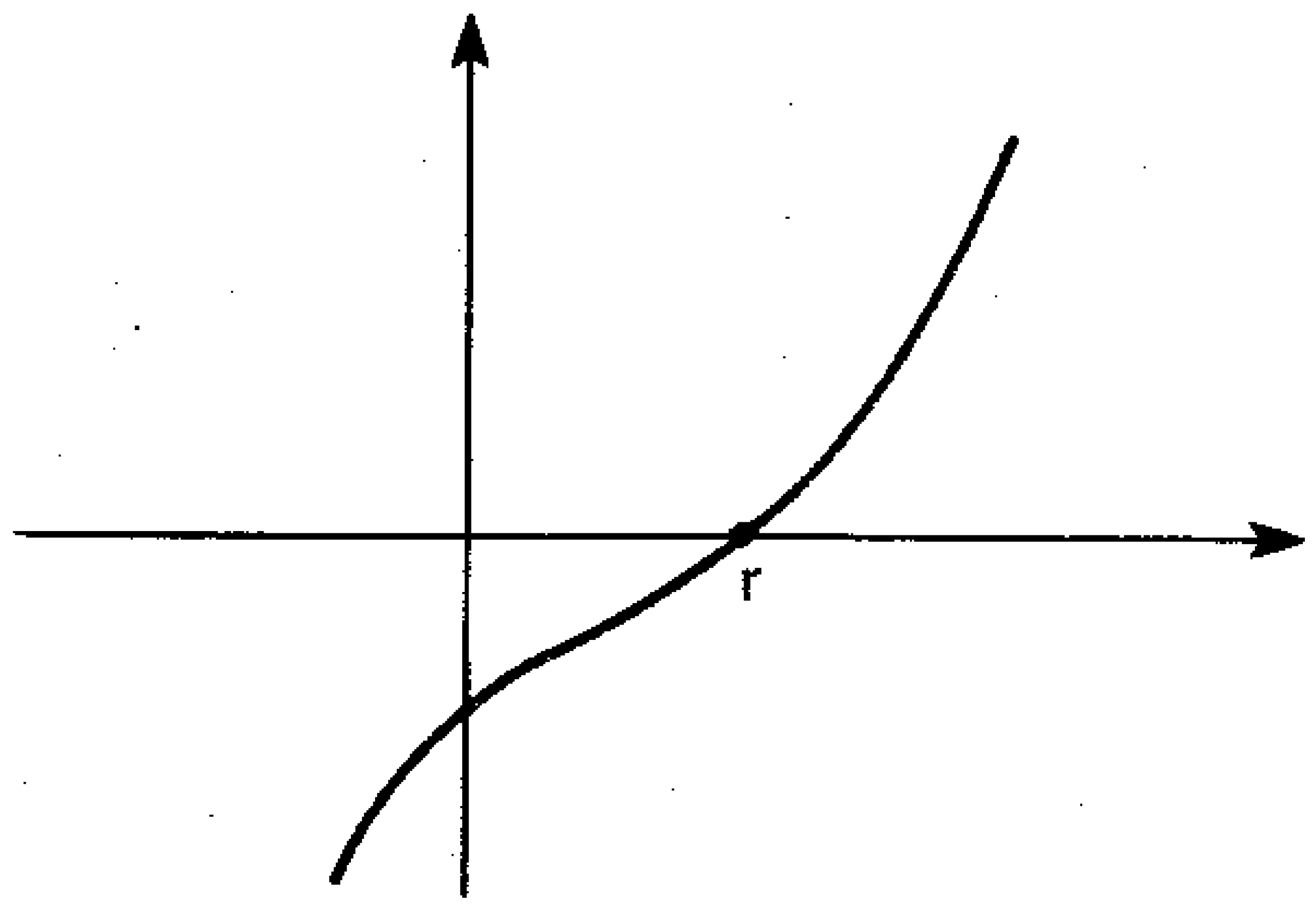


Fig. b

b) O termo independente é $a_0 = 2$ e o coeficiente do termo de maior grau é $a_n = 1$ (isto é, $a_n > 0$). Como o polinômio é de grau ímpar, o seu gráfico deve ter um aspecto parecido com o da figura **c** e, portanto, a raiz real **r** é negativa.

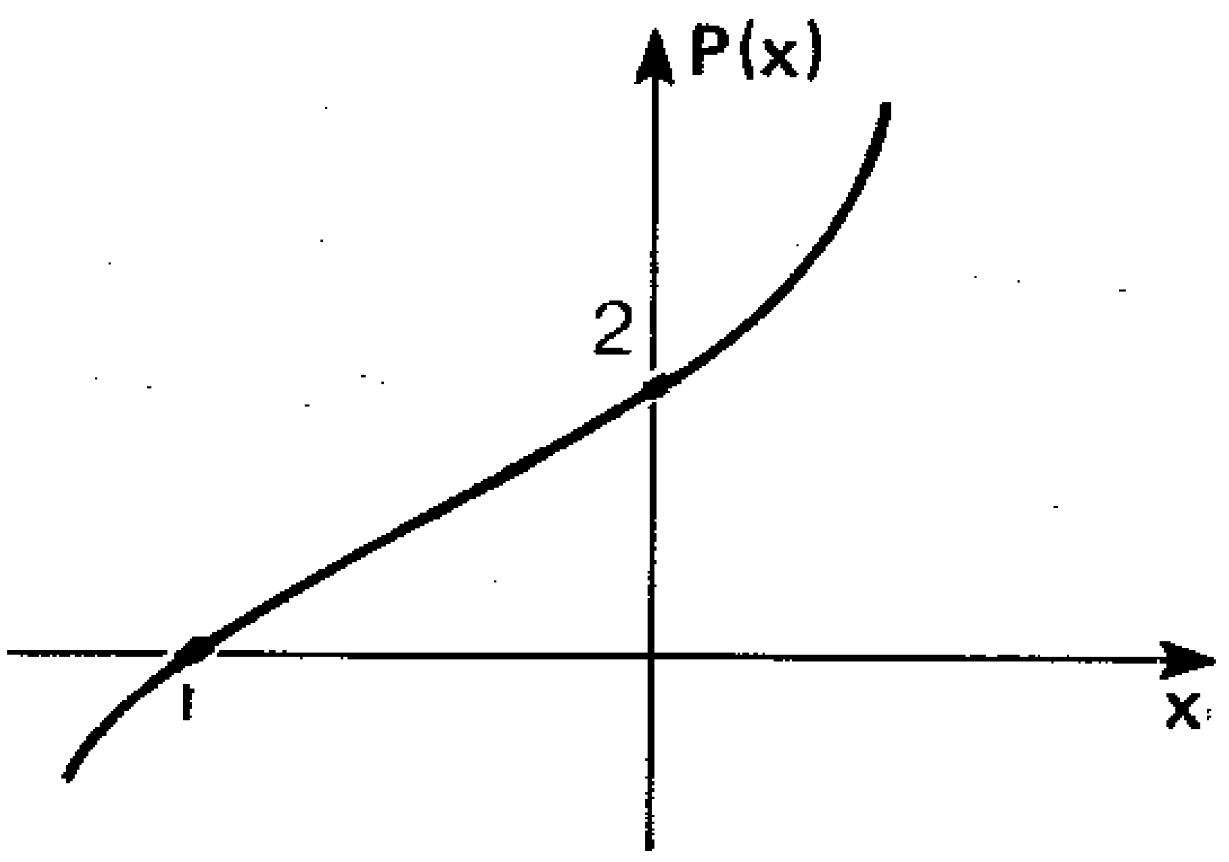


Fig. c

c) De acordo com o teorema visto no capítulo 15, as únicas raízes racionais possíveis seriam 1, −1, 2 e −2. Mas, já sabemos que a raiz real é negativa, assim, restam −1 e −2. No entanto, fazendo a verificação, vemos que $P(-1) \neq 0$ e $P(-2) \neq 0$. Portanto, P(x) não admite raízes racionais e a raiz real **r** deve ser **irracional**.

18.2) Consideremos o polinômio $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, de coeficientes reais e grau ímpar. Mostre que, se $a_n > 0$, o polinômio P(x) admite pelo menos uma raiz real de sinal contrário ao do termo independente a_0 (supondo $a_0 \neq 0$).

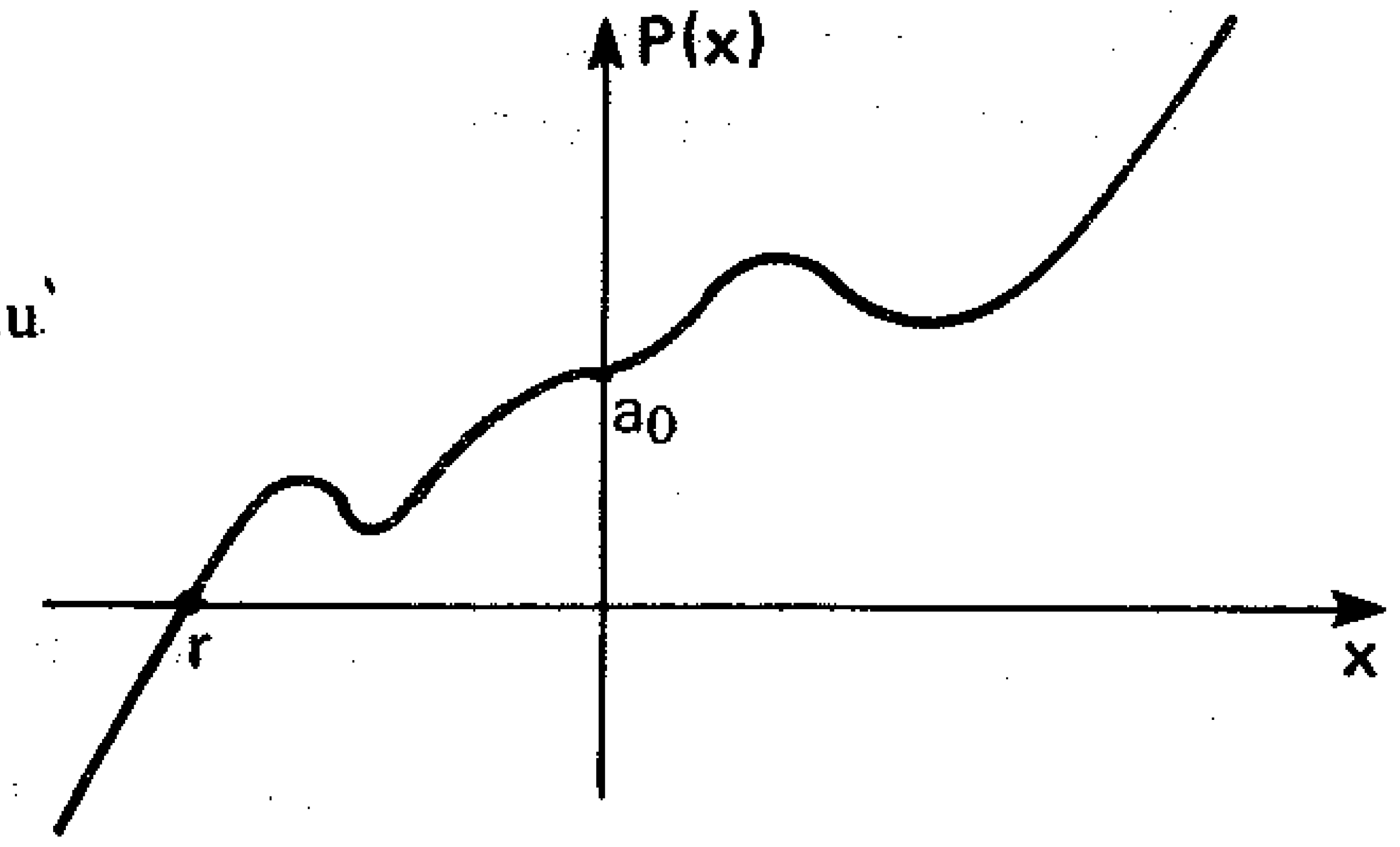
Solução

O polinômio é de grau ímpar e tem coeficientes reais; podemos então concluir que ele tem pelo menos uma raiz real. Consideremos então dois casos:

1.° caso: $a_0 > 0$

Como $a_n > 0$ e o polinômio é de grau ímpar, temos:

$$\begin{cases} \text{para } x \to \infty \text{ vem } P(x) \to \infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to -\infty \end{cases}$$

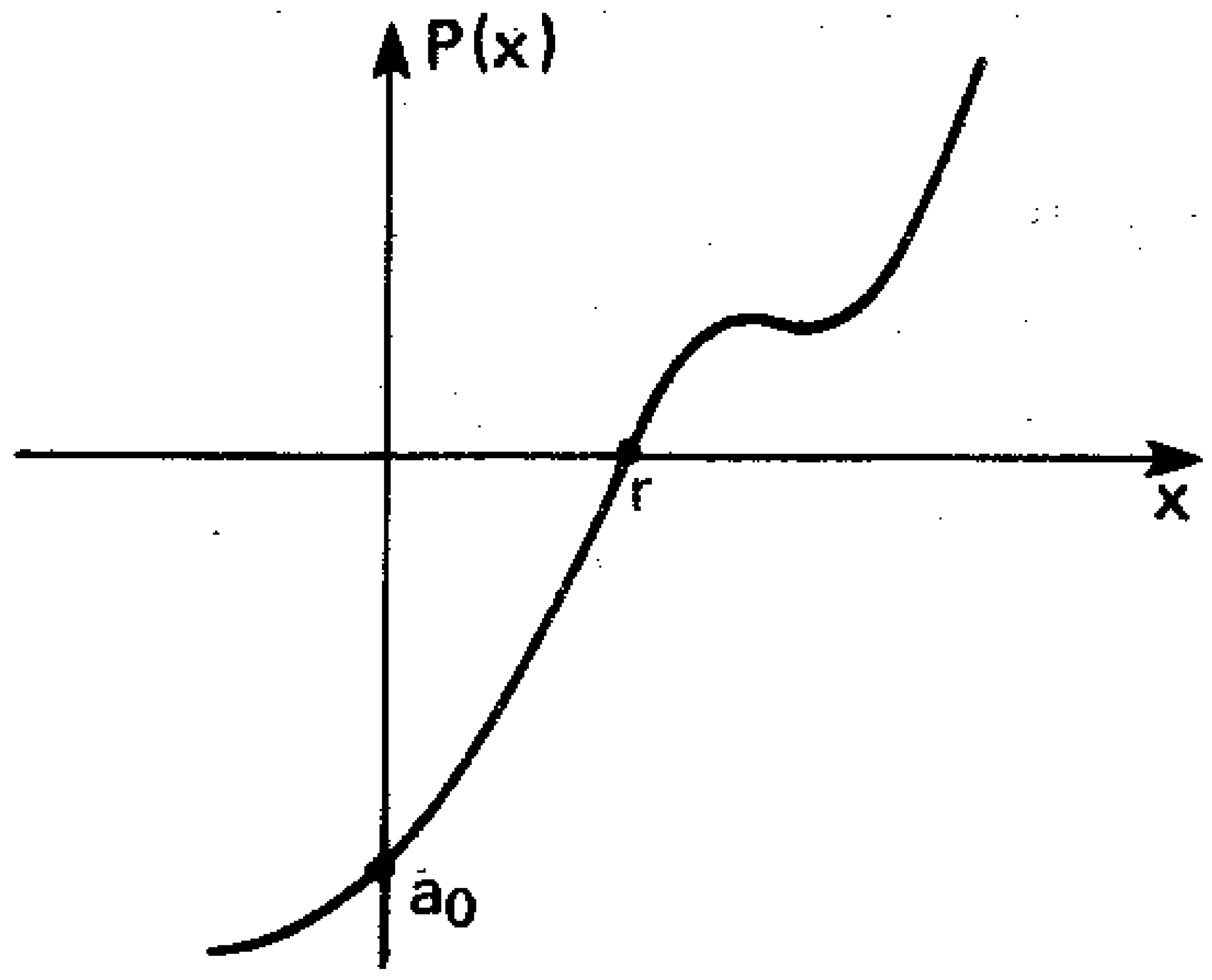


Portanto, há pelo menos uma raiz real **r** negativa, isto é, de sinal contrário ao de a_0 (obviamente, poderá ter também raízes positivas).

2.° caso: $a_0 < 0$

Como $a_n > 0$ e o polinômio é de grau ímpar, temos:

$$\begin{cases} \text{para } x \to \infty \text{ vem } P(x) \to \infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to -\infty \end{cases}$$



Assim, há pelo menos uma raiz positiva **r** (de sinal contrário ao de a_0).

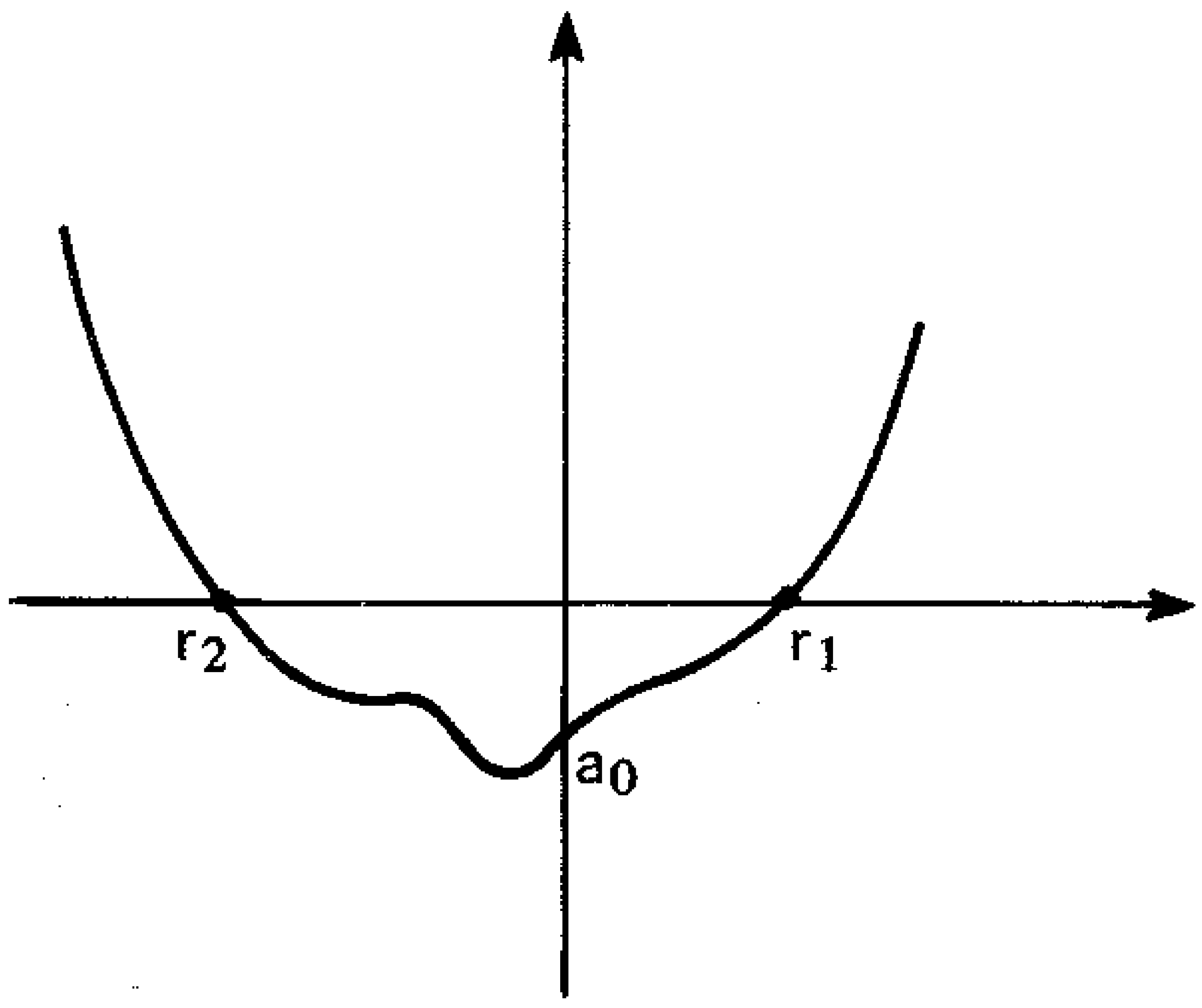
18.3) Consideremos o polinômio $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, de grau par (não nulo), tal que $a_n > 0$ e $a_0 < 0$. Mostre que esse polinômio admite pelo menos duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa.

Solução

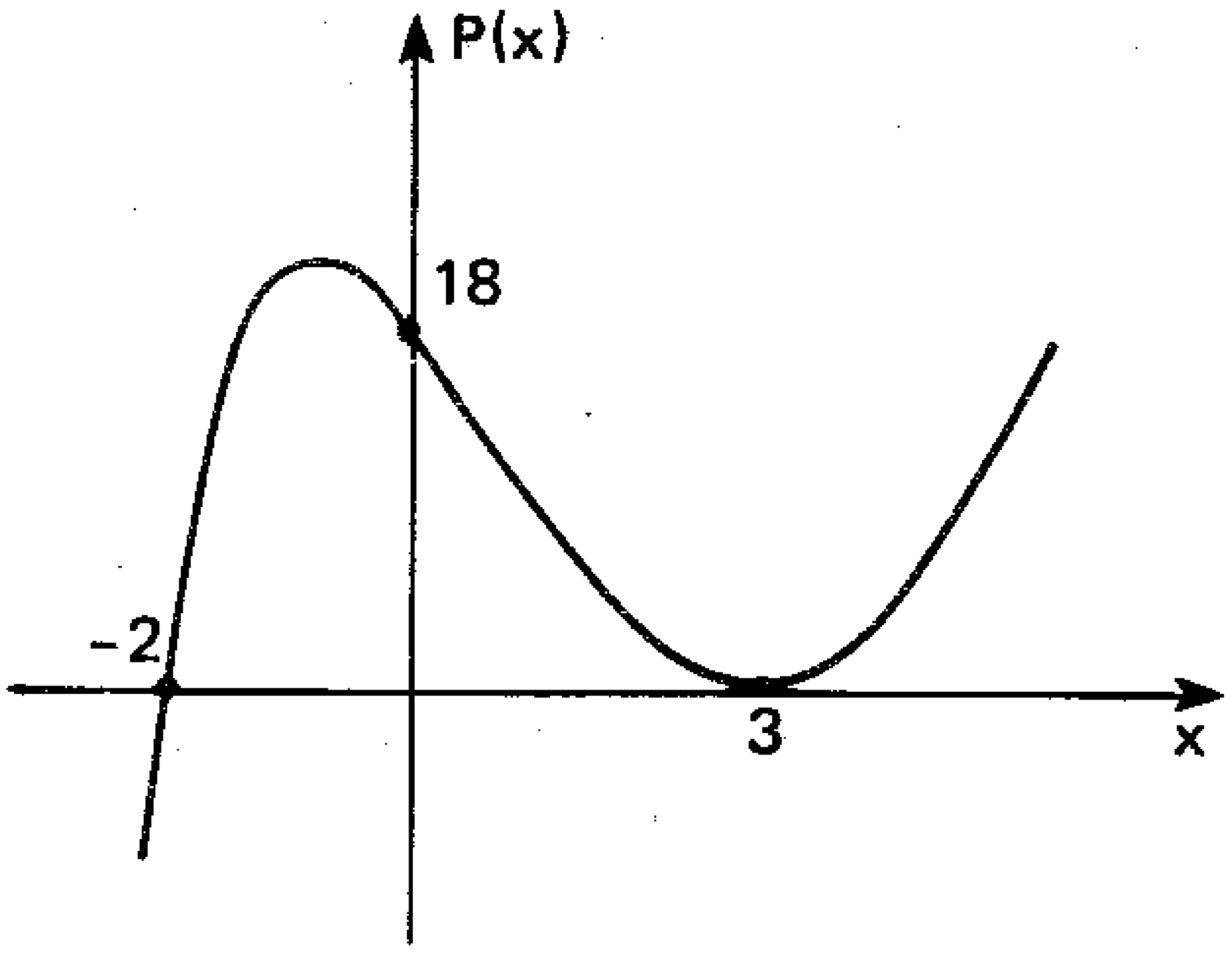
O polinômio é de grau par e $a_n > 0$. Portanto temos:

$$\begin{cases} \text{para } x \to +\infty \text{ vem } P(x) \to +\infty \\ \text{para } x \to -\infty \text{ vem } P(x) \to +\infty \end{cases}$$

Como $a_0 < 0$, o gráfico deve ser "algo parecido" com o gráfico da figura ao lado e, portanto, o polinômio admite pelo menos uma raiz positiva r_1 e pelo menos uma raiz negativa r_2.



18.4) Determine o polinômio P(x), cujo gráfico é dado ao lado, sabendo que seu grau é 3.



Solução

Vemos que -2 é raiz simples e 3 é raiz de multiplicidade par. Mas, como P(x) é de grau 3 (e portanto tem três raízes), concluímos que o número 3 é raiz dupla. Portanto, temos:

$$P(x) = a(x + 2)(x - 3)^2$$

Mas o gráfico nos informa ainda que $P(0) = 18$. Assim:

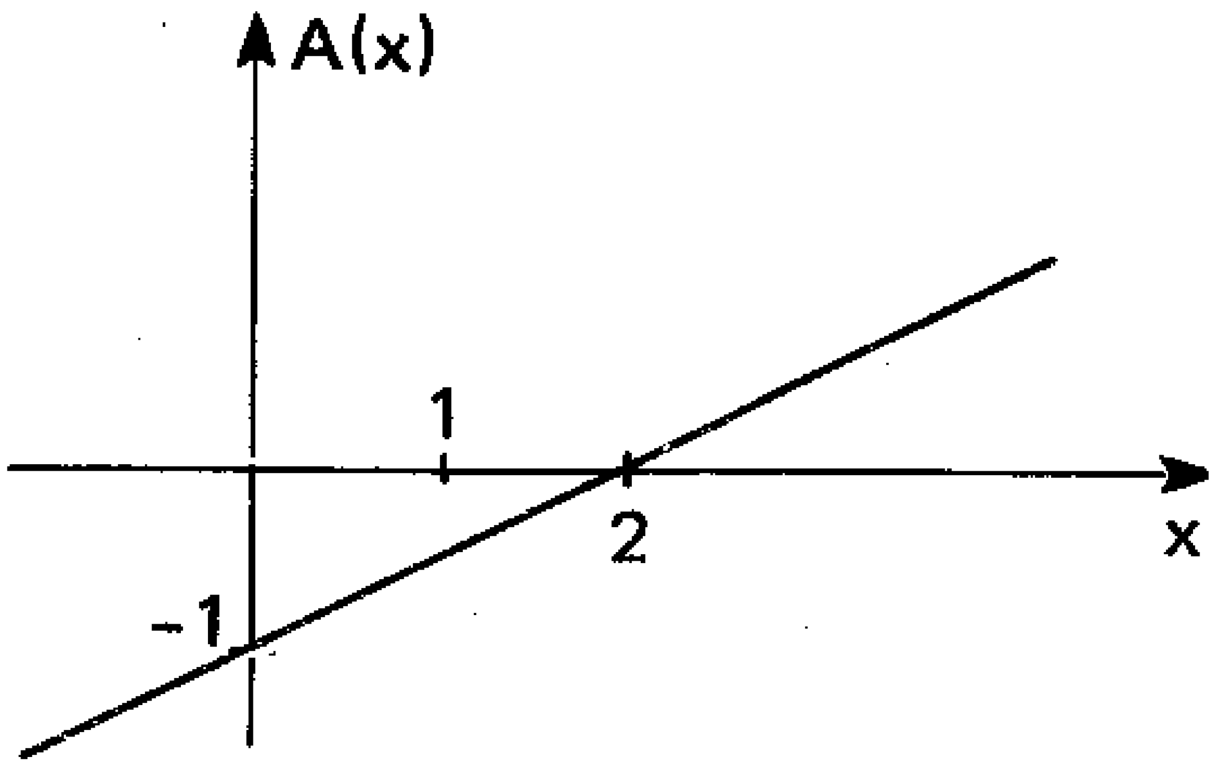
$$P(0) = a(0 + 2)(0 - 3)^2 = 18$$

donde tiramos $a = 1$.

Portanto, $P(x) = (x + 2)(x - 3)^2$

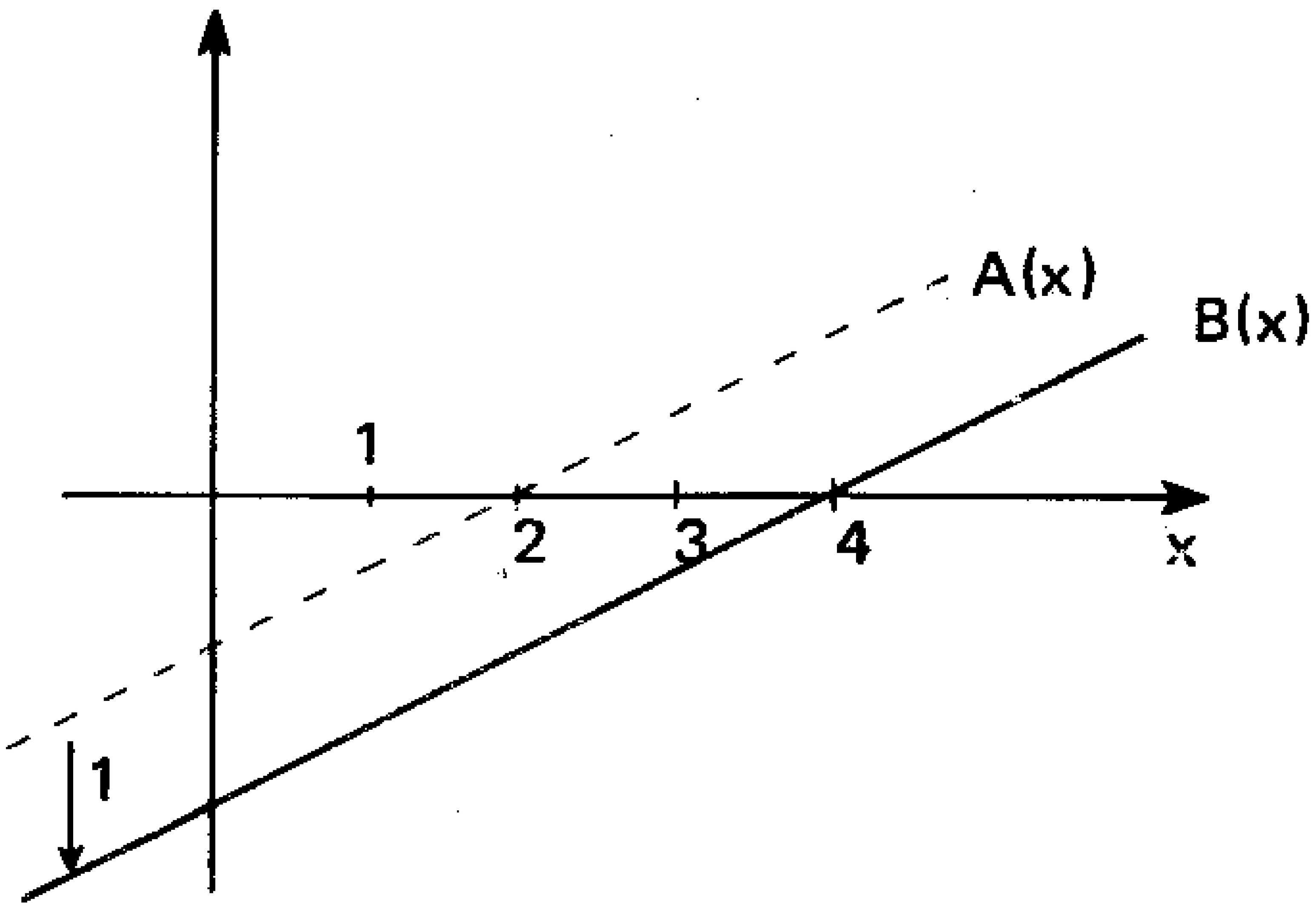
ou, desenvolvendo, $P(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$.

18.5) Temos ao lado o gráfico de um polinômio A(x). Esboce o gráfico do polinômio B(x) tal que $B(x) = A(x) - 1$.



Solução

Ao subtrairmos 1 unidade do polinômio A(x), o seu gráfico deve "descer" 1 unidade (veja capítulo 6 do volume 1 desta coleção).



18.6) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + (k^2 - 6k + 1)$, onde **k** é real.

a) Mostre que, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$, P(x) admite uma única raiz real.

b) Determine o valor de **k** para o qual essa raiz real tenha o maior valor possível.

c) Determine essa maior raiz real.

Solução

a) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \underbrace{(k^2 - 6k + 1)}_{a_0}$

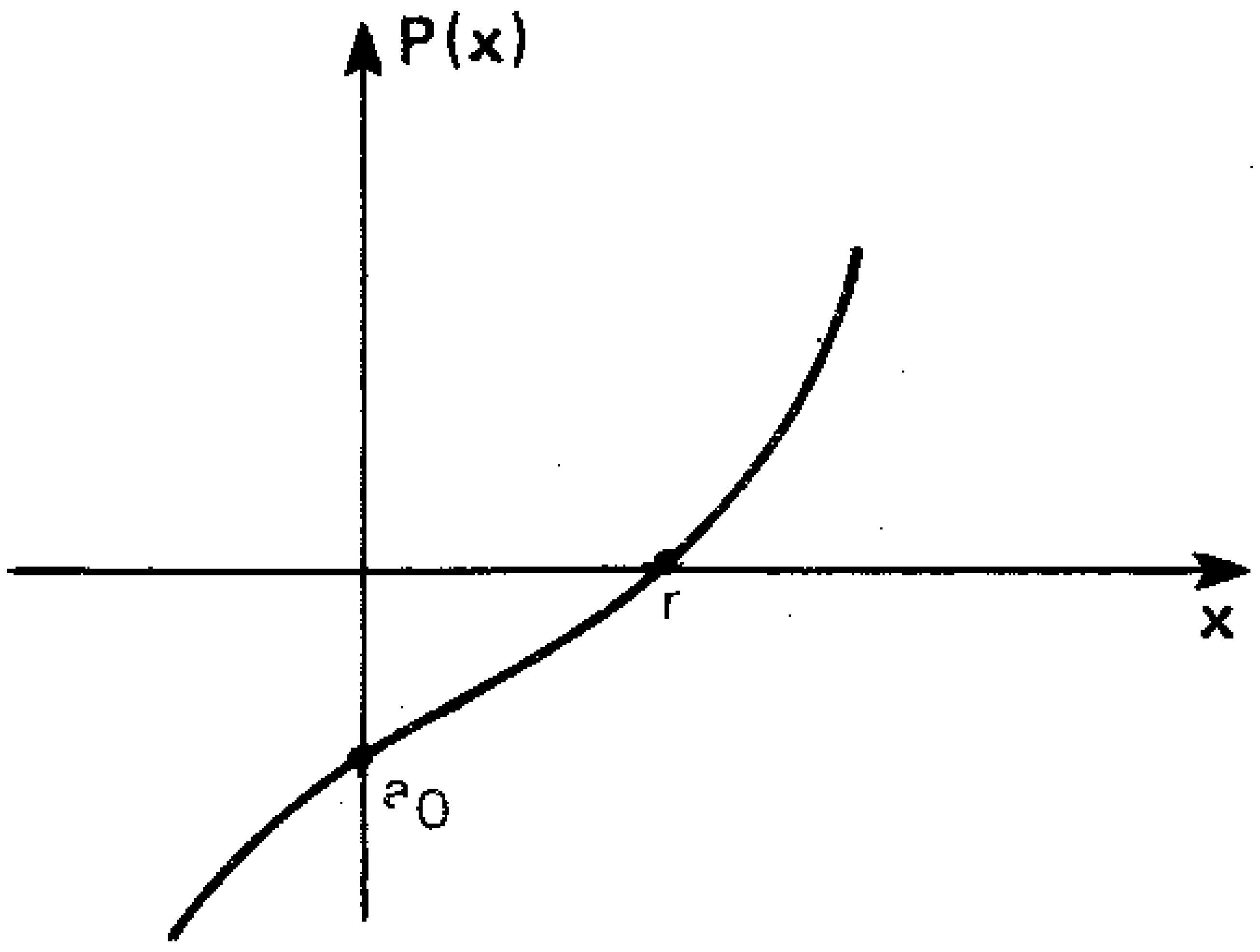
onde a_0 é uma constante (para cada valor de **k**), isto é, é o termo independente. Derivando P(x) temos:

$$P^{(1)}(x) = 3x^2 - 4x + 4$$

cujo discriminante é:

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(4) = -32 < 0$$

e, portanto, $P^{(1)}(x)$ é sempre positivo, o que acarreta que P(x) é sempre crescente. Como o grau de P(x) é ímpar e o coeficiente do termo de mais alto grau é positivo, o gráfico é "algo parecido" com o gráfico ao lado, e o polinômio admite uma única raiz **r**.



b) Observando o gráfico, percebemos que, para que **r** aumente, a_0 deve diminuir. Portanto, a raiz **r** atinge o seu valor **máximo** quando a_0 atingir o seu valor mínimo. Mas:

$$a_0 = k^2 - 6k + 1$$

e o valor **mínimo** de a_0 (veja capítulo 4 do volume 1 desta coleção) é obtido quando $k = 3$.

c) Para $k = 3$ temos $a_0 = 3^2 - 6(3) + 1 = -8$ e o polinômio fica:

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$$

Fazendo a pesquisa das raízes racionais, concluímos que 2 é raiz e, portanto, a maior raiz real possível para P(x) é o número 2.

Exercícios Propostos

18.7) Consideremos o polinômio $P(x) = 5x^3 - 4x^2 + 2x + 7$. Mostre que ele é sempre crescente.

18.8) Mostre que o polinômio $P(x) = -x^3 + x^2 + 3x + 4$ é sempre decrescente.

18.9) Considere novamente o polinômio do exercício anterior. Mostre que P(x) tem apenas uma raiz real, que é positiva e irracional.

18.10) Damos a seguir apenas o termo de mais alto grau e o termo independente de uma série de polinômios de coeficientes reais.

$A(x) = 6x^{53} + \ldots + 7$	$E(x) = 8x^{42} + \ldots + 7$
$B(x) = 6x^{53} + \ldots - 7$	$F(x) = 8x^{42} + \ldots - 7$
$C(x) = -6x^{53} + \ldots + 9$	$G(x) = -8x^{42} + \ldots + 7$
$D(x) = -6x^{53} + \ldots - 9$	$H(x) = -8x^{42} + \ldots - 7$

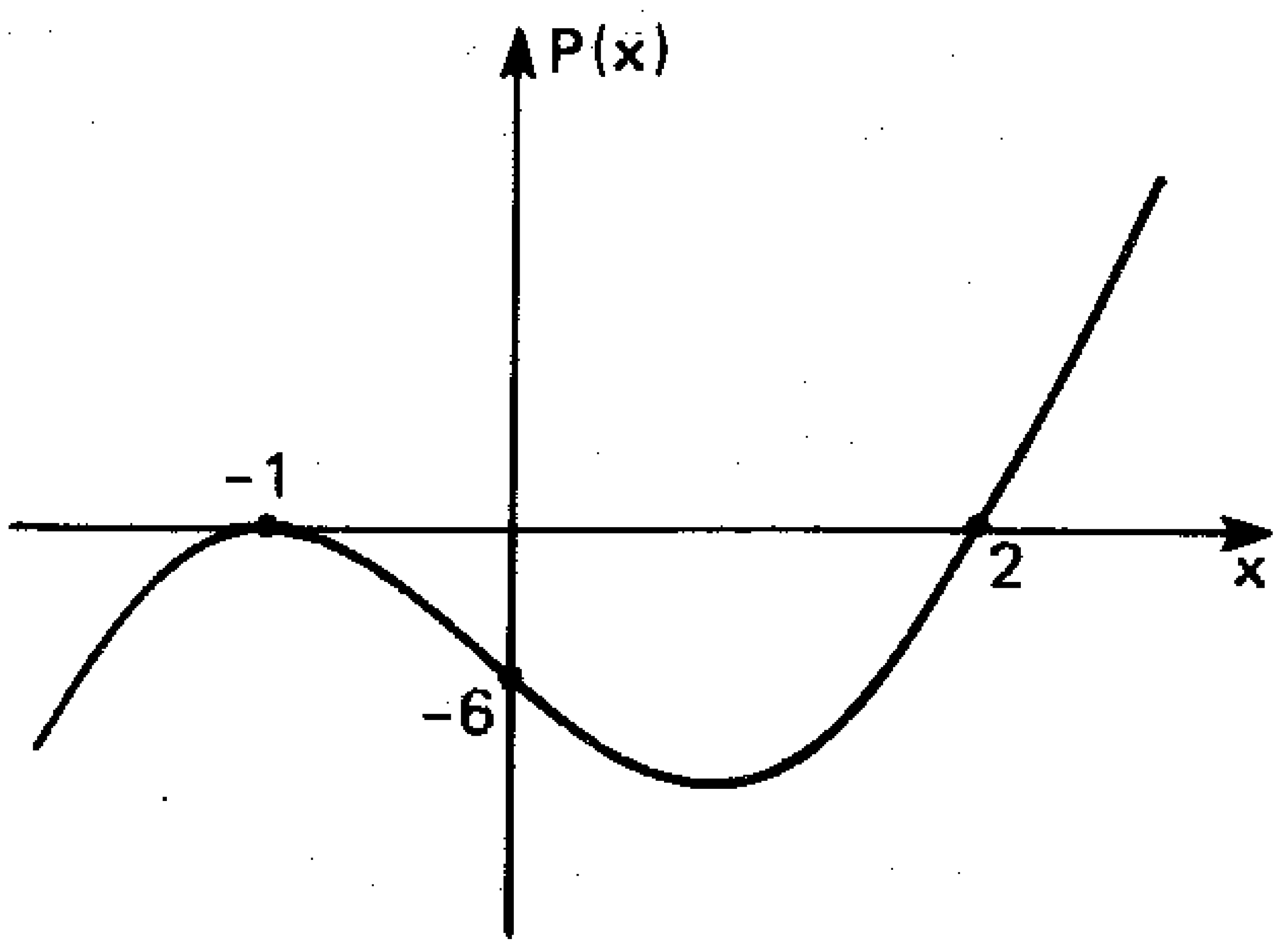
Analise cada sentença a seguir e diga se é *verdadeira* ou *falsa*.

a) A(x) tem pelo menos uma raiz real positiva.
b) A(x) tem pelo menos uma raiz real negativa.
c) B(x) tem pelo menos uma raiz real positiva.
d) B(x) tem pelo menos uma raiz real negativa.
e) C(x) tem pelo menos uma raiz real positiva.
f) C(x) tem pelo menos uma raiz real negativa.
g) D(x) tem pelo menos uma raiz real positiva.
h) D(x) tem pelo menos uma raiz real negativa.
i) E(x) tem pelo menos duas raízes reais.
j) F(x) tem pelo menos duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa.
k) G(x) tem pelo menos duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa.
l) H(x) tem pelo menos duas raízes reais, sendo uma positiva e outra negativa.

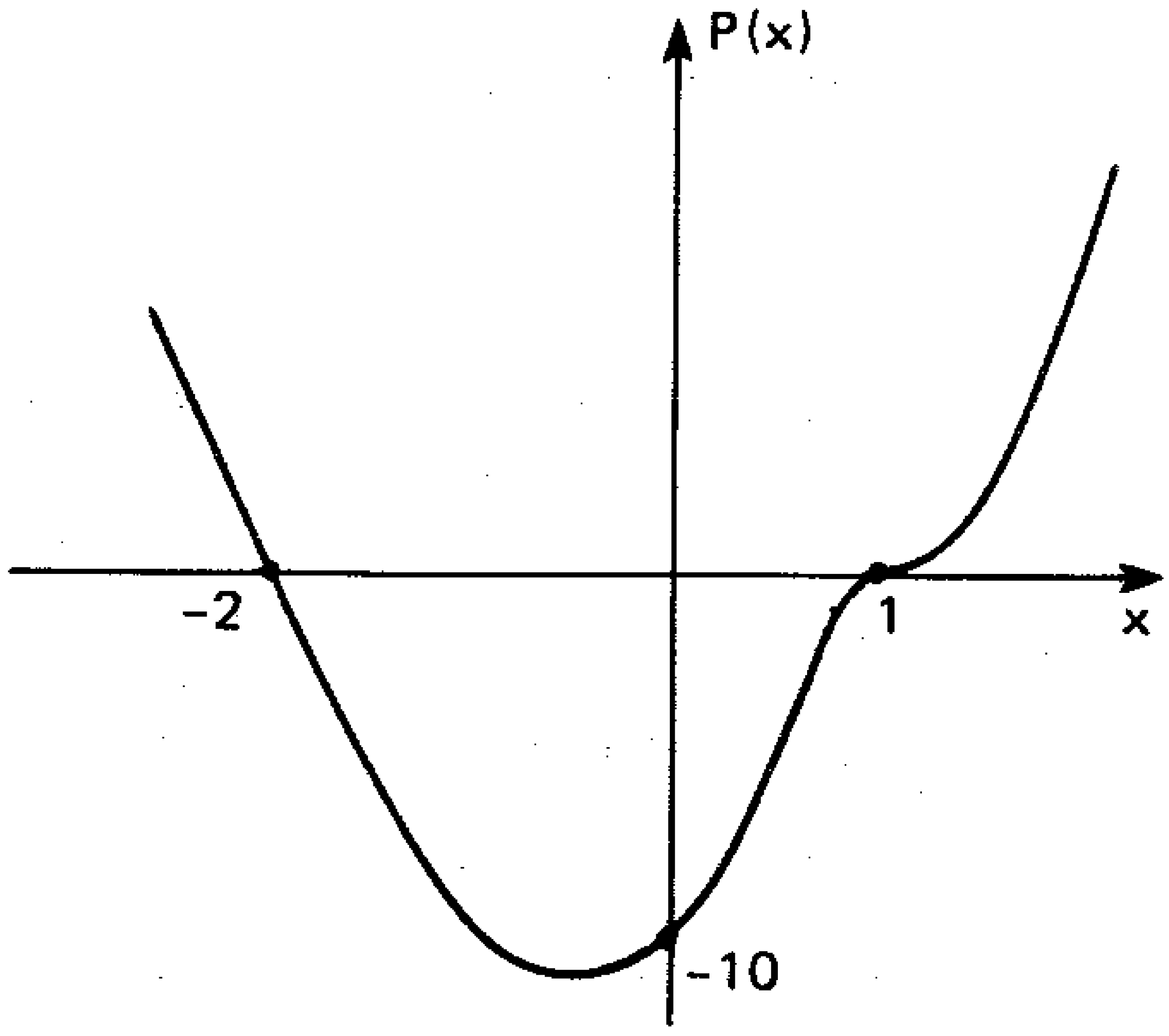
18.11) Temos, ao lado, o gráfico de um polinômio de coeficientes reais.

a) Determine esse polinômio, supondo que ele seja do terceiro grau.

b) Determine esse polinômio, supondo que ele seja de grau 5.



18.12) Temos, ao lado, o gráfico de um polinômio de grau 4 e coeficientes reais. Determine o polinômio.



18.13) Consideremos o polinômio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + k$, onde **k** é real.

a) Determine os valores de **k** para os quais o polinômio admite uma raiz dupla.
b) Determine os valores de **k** para os quais o polinômio tem 3 raízes reais distintas.
c) Determine os valores de **k** para os quais o polinômio admite uma raiz real e duas raízes imaginárias.

18.3 — TEOREMA DE BOLZANO

Consideremos um polinômio P(x), de grau $n > 0$ e de coeficientes reais. Consideremos também dois números reais quaisquer **a** e **b**, que não sejam raízes de P(x), com $a < b$. O teorema de Bolzano (matemático tcheco, de origem italiana, 1781-1848) afirma que:

> 1.º) Se P(a) e P(b) têm sinais contrários, há um número ímpar de raízes reais entre **a** e **b**.
> 2.º) Se P(a) e P(b) têm o mesmo sinal, há um número par de raízes reais entre **a** e **b**.

Ao enunciarmos esse teorema, estamos considerando que o número 0 também é par.

A demonstração deste teorema será feita no exercício 18.17; agora daremos apenas algumas ilustrações gráficas.

Exemplos

a) Na figura 18.16 temos P(a) e P(b) de sinais contrários e uma raiz real entre **a** e **b** (isto é, um número ímpar de raízes reais entre **a** e **b**).
Na figura 18.17 temos P(a) e P(b) de sinais contrários e três (número ímpar) raízes reais entre **a** e **b**.

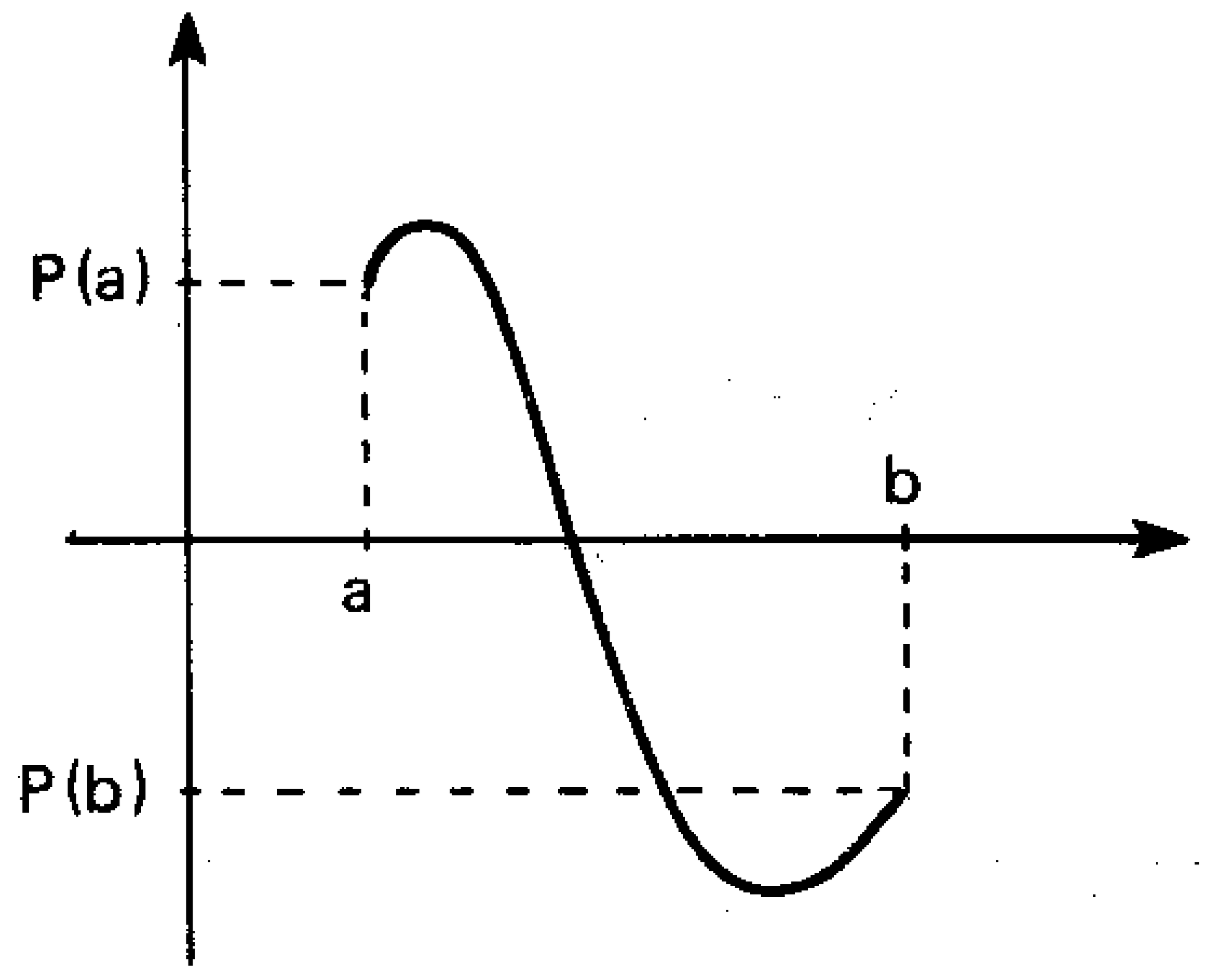


Fig. 18.16

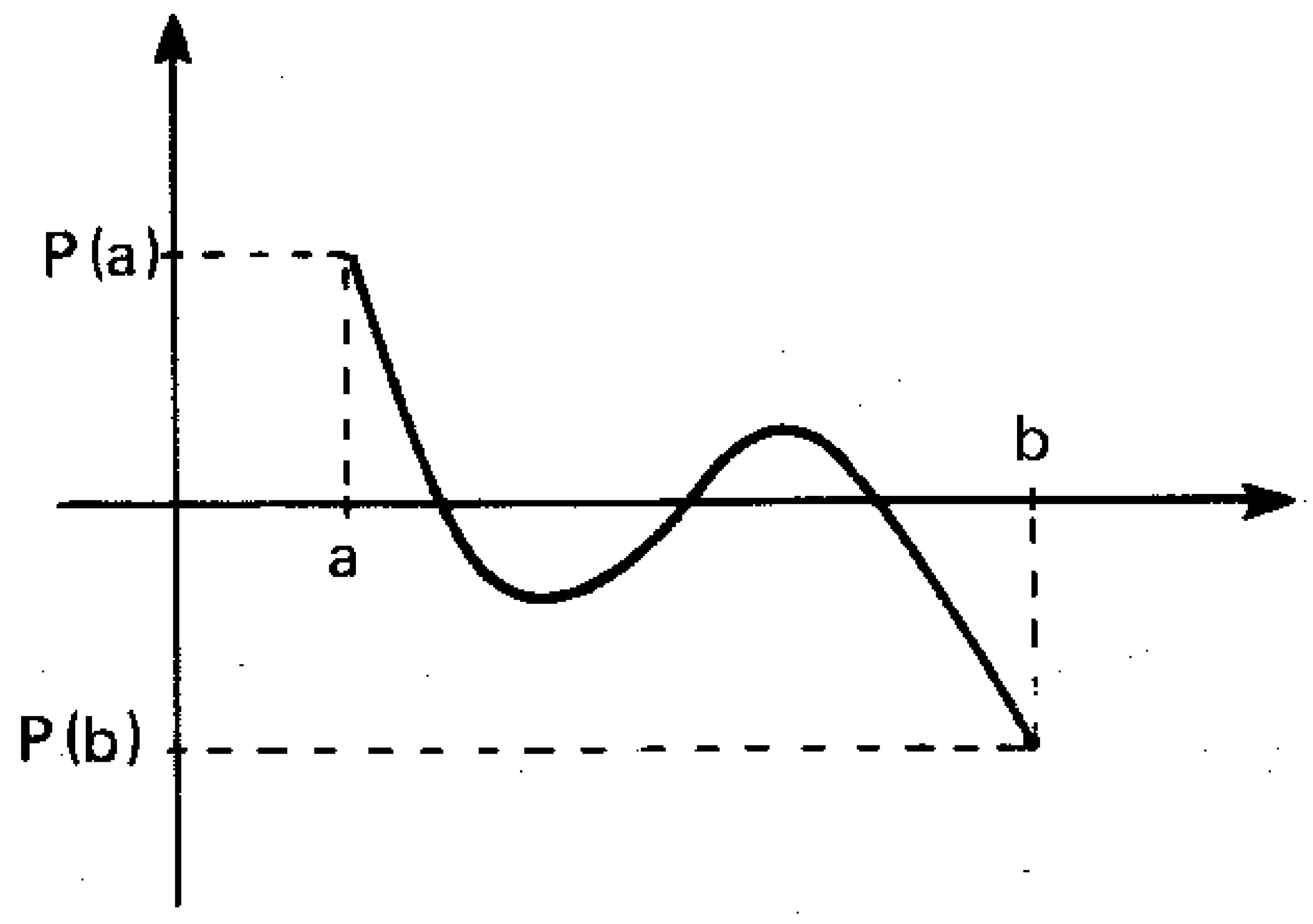


Fig. 18.17

b) Na figura 18.18 temos P(a) e P(b) de sinais contrários. O número r_1 é raiz de multiplicidade par. O número r_2 é raiz de multiplicidade 1 (raiz simples). Portanto, no total, temos um número ímpar de raízes reais entre **a** e **b**.

Na figura 18.19 temos P(a) e P(b) de sinais contrários. O número r_1 é raiz de multiplicidade ímpar e o número r_2 é raiz de multiplicidade par. Portanto, no total, temos um número ímpar de raízes reais entre **a** e **b**.

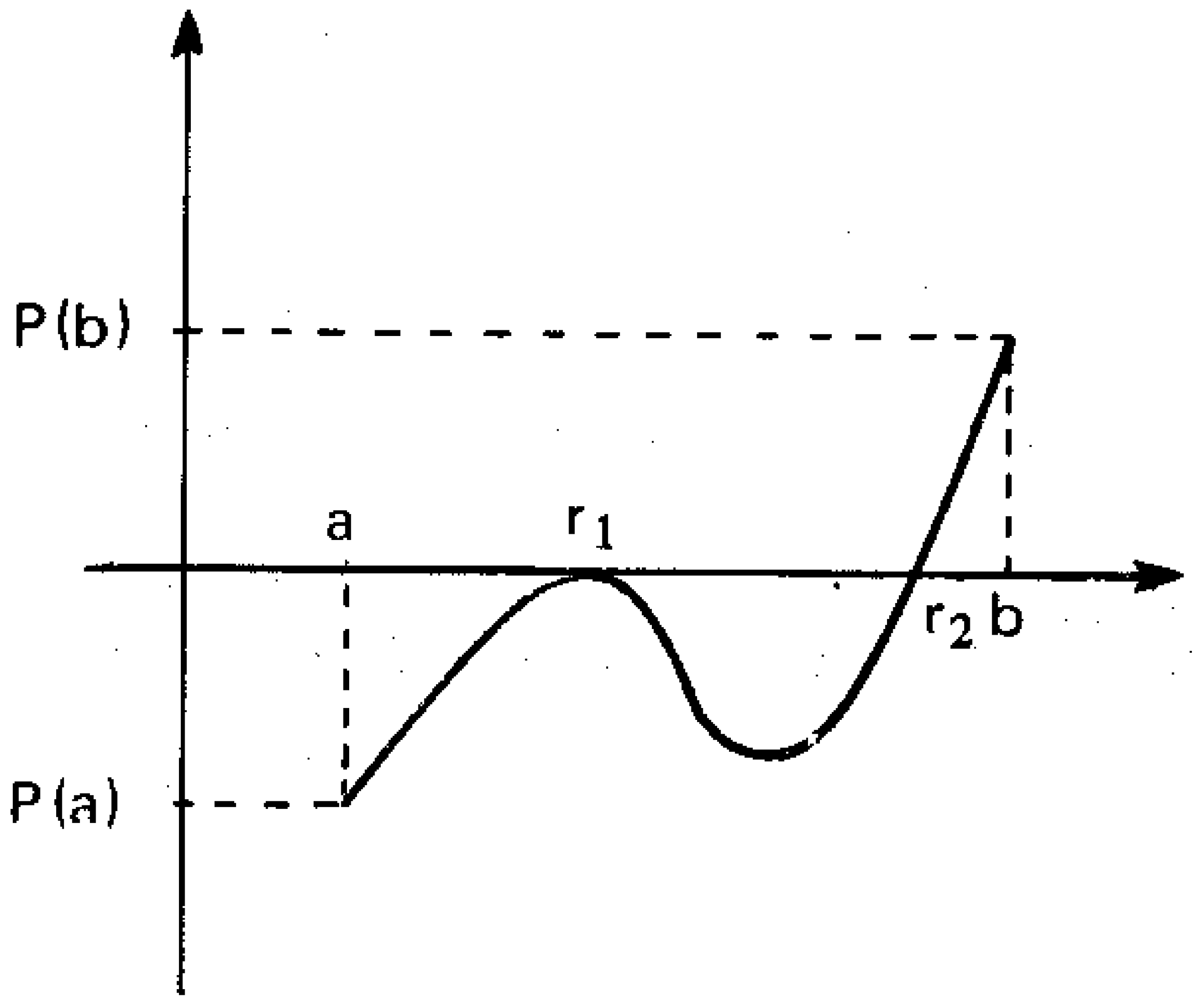


Fig. 18.18

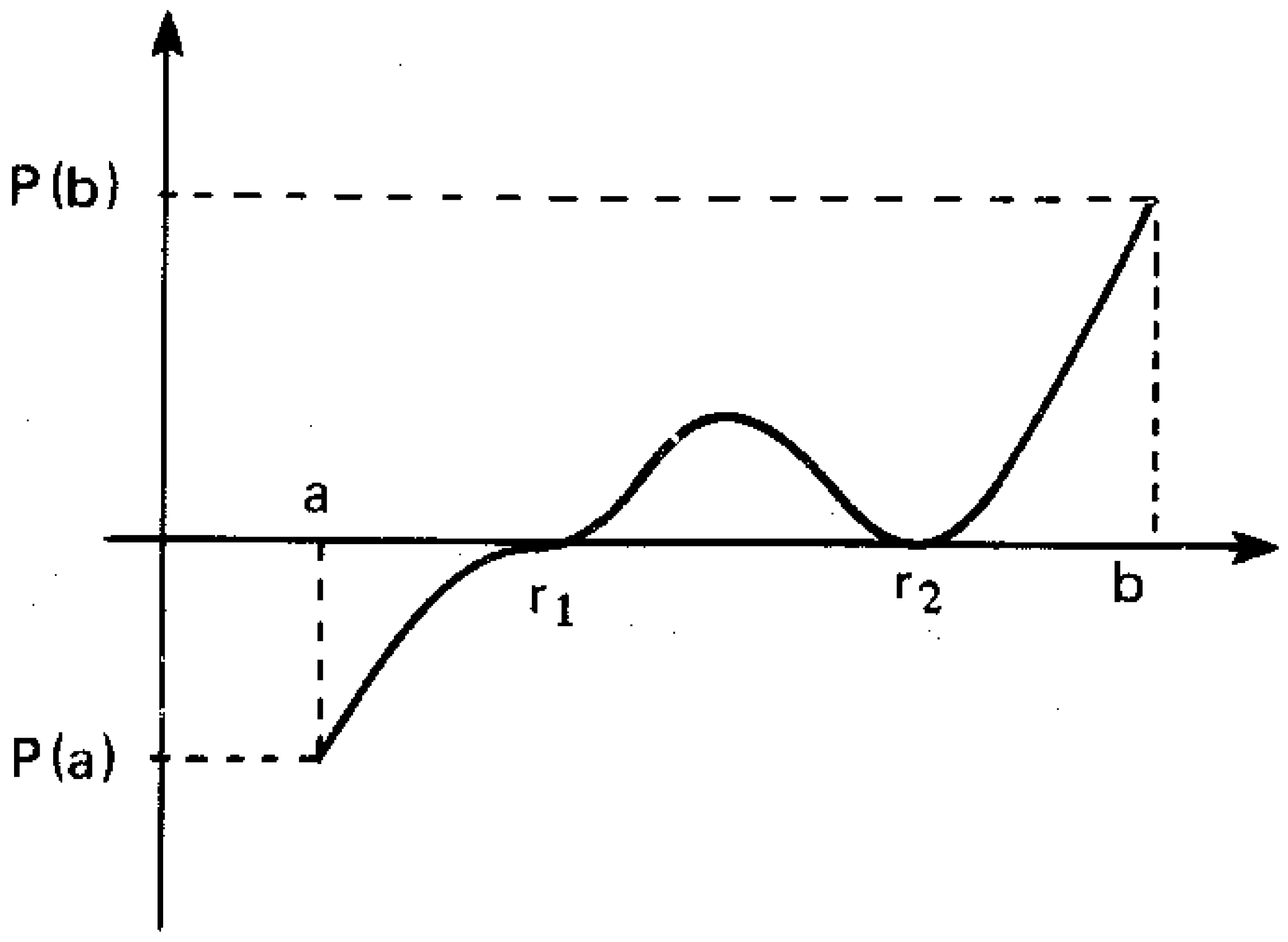


Fig. 18.19

c) Na figura 18.20, P(a) e P(b) têm o mesmo sinal. Há duas (número par) raízes entre **a** e **b**.
Na figura 18.21, P(a) e P(b) têm o mesmo sinal. Não há raízes reais entre **a** e **b**, isto é, o número de raízes reais entre **a** e **b** é zero (número par).

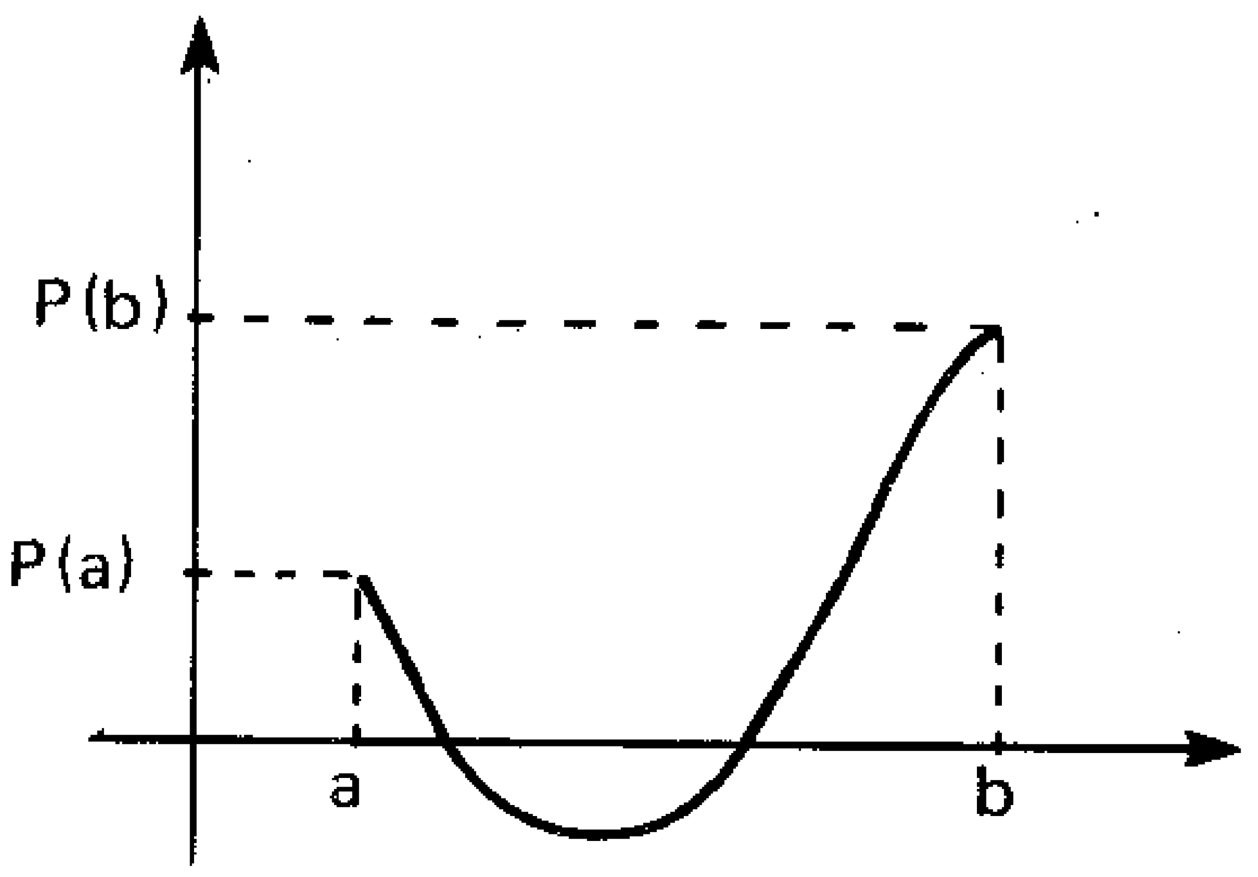


Fig. 18.20

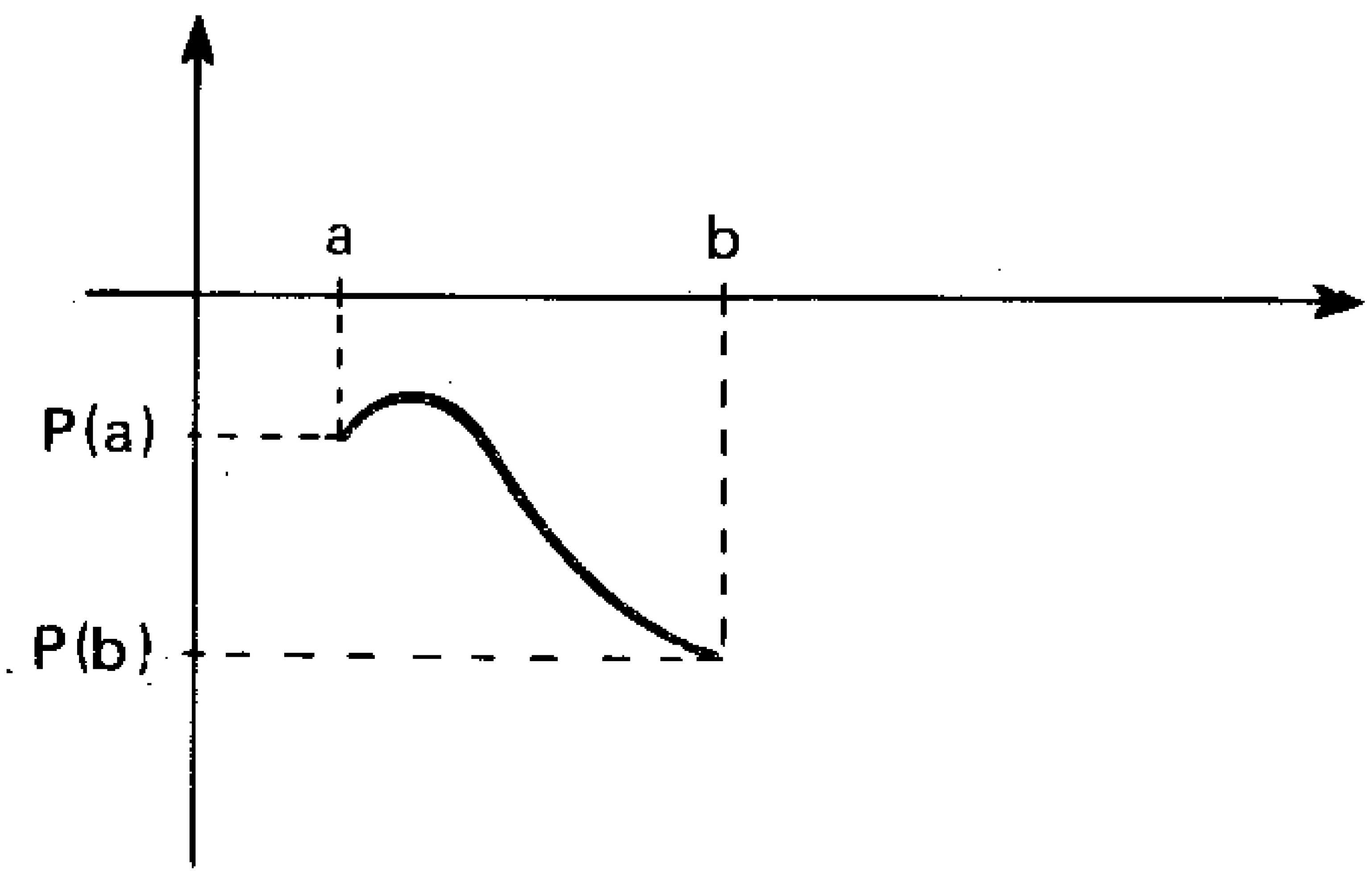


Fig. 18.21

d) Na figura 18.22, P(a) e P(b) têm o mesmo sinal. O número r_1 é raiz de multiplicidade par e os números r_2 e r_3 são raízes simples. Portanto, no total, temos um número par de raizes reais entre **a** e **b**.

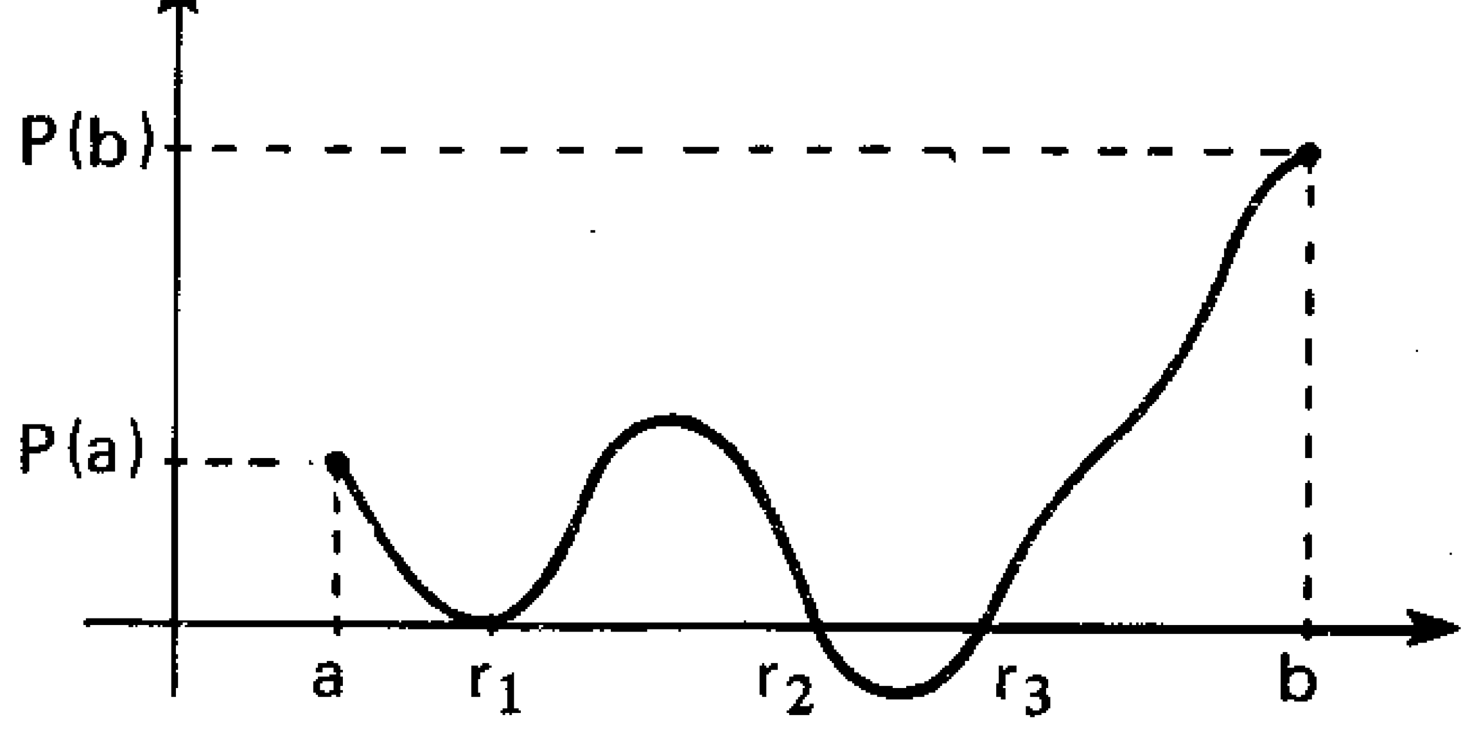


Fig. 18.22

Exercícios Resolvidos

18.14) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$. Quantas raízes reais ele poderia ter no intervalo $]-1; 1[$?

Solução

$$\begin{cases} P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 + 4(-1) - 1 = -8 \\ P(1) \quad = 1^3 - 2(1)^2 + 4(1) - 1 = 2 \end{cases}$$

Como $P(-1)$ e $P(1)$ têm sinais contrários, há um número ímpar de raízes reais entre -1 e 1: pode ser uma ou três raízes reais.

18.15) Mostre que o polinômio $P(x) = x^3 + 7x^2 + 6x - 20$ admite pelo menos uma raiz positiva menor que 2.

Solução

$$\begin{cases} P(0) = -20 \\ P(2) = 2^3 + 7(2)^2 + 6(2) - 20 = 28 \end{cases}$$

Como $P(0)$ e $P(2)$ têm sinais contrários, concluímos que há um número ímpar (pelo menos uma) de raízes reais entre 0 e 2, isto é, há pelo menos uma raiz real menor que 2 e positiva.

18.16) Determine os valores reais de **k** de modo que o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + (k + 7)$ admita um número par de raízes reais entre os números 1 e 2 (mas de modo que 1 e 2 não sejam raízes).

Solução

$$\begin{cases} P(1) = 1 - 3 + 4 + (k + 7) = k + 9 \\ P(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4(2) + k + 7 = k + 11 \end{cases}$$

Para que haja um número par de raízes reais entre 1 e 2, devemos ter $P(1)$ e $P(2)$ com o mesmo sinal, isto é:

$$P(1) \cdot P(2) > 0$$

Assim, temos a inequação:

$$(k + 9)(k + 11) > 0$$

que, resolvida, nos dá:

$$k < -11 \text{ ou } k > -9$$

18.17) Demonstre o teorema de Bolzano.

Solução

Sejam:

$z_1, z_2, \ldots, z_p$ as raízes imaginárias de $P(x)$

$x_1, x_2, \ldots, x_q$ as raízes reais entre **a** e **b**

$r_1, r_2, \ldots, r_h$ as raízes reais fora do intervalo $[a, b]$

Temos:

$$P(x) = \underbrace{a_n(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_p)}_{A(x)}\underbrace{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_q)}_{B(x)}\underbrace{(x - r_1)\ldots(x - r_h)}_{C(x)}$$

Como os coeficientes de P(x) são reais, as raízes imaginárias (se existirem) virão aos pares e, ao decompormos A(x), obteremos pares do tipo $(x - z)(x - \bar{z})$. Sendo $z = \alpha + \beta i$ e $\bar{z} = \alpha - \beta i$ (com $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}^*$) temos:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = [x - (\alpha + \beta i)][x - (\alpha - \beta i)] = (x - \alpha)^2 + \beta^2$$

Mas, para qualquer valor de $x \in \mathbb{R}$, temos $(x - \alpha)^2 + \beta^2 > 0$ e, portanto, $A(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} P(a) = a_n\, A(a)\, B(a)\, C(a) \\ P(b) = a_n\, A(b)\, B(b)\, C(b) \end{cases}$$

$$P(a) \cdot P(b) = a_n^2 \cdot A(a) \cdot A(b) \cdot B(a) \cdot B(b) \cdot C(a) \cdot C(b)$$

Como as raízes $r_1, r_2, \ldots, r_h$ estão fora do intervalo $[a; b]$, o produto $C(a) \cdot C(b)$ será sempre positivo. Assim, temos:

$$P(a) \cdot P(b) = \underbrace{[a_n^2 \cdot A(a) \cdot A(b) \cdot C(a) \cdot C(b)]}_{D} \cdot B(a) \cdot B(b) = D \cdot B(a) \cdot B(b)$$

onde $D > 0$. Portanto, o sinal de $P(a) \cdot P(b)$ depende do sinal de $B(a) \cdot B(b)$.

$$B(a) \cdot B(b) = \underbrace{(a - x_1)(b - x_1)}_{< 0} \underbrace{(a - x_2)(b - x_2)}_{< 0} \ldots \underbrace{(a - x_q)(b - x_q)}_{< 0}$$

Cada um dos produtos $(a - x_j)(b - x_j)$ é negativo. Daí concluímos que:

1.º) se **q** é ímpar, $B(a) \cdot B(b) < 0$ e $P(a) \cdot P(b) < 0$. Isto significa que P(a) e P(b) têm sinais contrários;

2.º) se **q** é par, $B(a) \cdot B(b) > 0$ e $P(a) \cdot P(b) > 0$. Isto quer dizer que P(a) e P(b) têm o mesmo sinal.

Exercícios Propostos

18.18) Consideremos o polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$. Quantas raízes reais ele poderia ter no intervalo $]1; 4[$?

18.19) Mostre que o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 3$ admite pelo menos uma raiz irracional no intervalo $]1; 3[$.

18.20) Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - 8x + k$ admita um número ímpar de raízes no intervalo $]1; 3[$.

Exercícios Suplementares

III.1) Resolva a equação $2x^4 + x^3 - 4x^2 + 6x + 4 = 0$, sabendo que duas de suas raízes são os números -2 e $-\frac{1}{2}$.

III.2) Resolva a equação $2x^6 + x^5 + 13x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 16x - 48 = 0$, sabendo que $2i$ é raiz dupla.

III.3) Resolva a equação $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$, sabendo que suas raízes formam uma progressão aritmética.

III.4) Resolva as equações:

a) $x^3 + 12x^2 + 17x + 15 = 0$
b) $2x^3 - 17x^2 + 48x - 20 = 0$

III.5) Resolva a equação $x^3 + 8x^2 + 5x - 50 = 0$, sabendo que possui uma raiz dupla.

III.6) Verifique se o número $x = \sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}}$ é inteiro.

III.7) Verifique se o número $\sqrt[3]{3 + \sqrt{8}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{8}}$ é racional ou irracional.

III.8) Seja **n** um número natural tal que $n > 1$. Consideremos também um número real $k \neq 0$. Dê o valor *verdadeiro* ou *falso* a cada sentença a seguir, as quais se referem às raízes n-ésimas do número **k**.

a) Se **n** é ímpar, apenas uma das raízes é real.
b) Se **n** é par e $k < 0$, nenhuma das raízes é real.
c) Se **n** é par e $k > 0$, há duas raízes reais.
d) Para todo **n**, desde que haja raízes imaginárias, elas formam pares de números conjugados.

TESTES DE VESTIBULARES

NÚMEROS COMPLEXOS

1) (MACKENZIE-SP) O valor da expressão $y = i + i^2 + i^4 + i^5 + \ldots + i^{1001}$ é:

a) 1 b) i c) $-i$ d) -1 e) $1 + i$

2) (PUC-RJ) Seja **i** o número complexo (0; 1). Então a soma:

$$1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{4n-1}$$

a) é um imaginário puro
b) é um real positivo
c) é real se e só se **n** é ímpar
d) é uma potência inteira de **i**
e) é nula

3) (MACKENZIE-SP) A igualdade $(1 + i)^n = (1 - i)^n$ verifica-se para todos os números naturais divisíveis por:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) n.r.a.

4) (F.M. ABC-SP) Chama-se "rival" de um número complexo $z = x + iy$ o número complexo $\hat{z}$ tal que $\hat{z} + z = 2yi$

a) $\hat{z} = \dfrac{1}{z}$
b) $\hat{z} = x - iy$
c) $\hat{z} = -z$
d) $\hat{z} \cdot z = x^2 + y^2$
e) $z - \hat{z} = 2x$

5) (PUC-RJ) Considere os números complexos $z = 2 - i$ e $\omega = \dfrac{5}{2 + i}$

Então, se $\overline{\omega}$ indica o complexo conjugado de ω:

a) $z = -\omega$ b) $z = \overline{\omega}$ c) $z = -\overline{\omega}$ d) $z = \dfrac{1}{\omega}$ e) $z = \omega$

6) (U.F.BA) O número complexo **z** que satisfaz a igualdade $(2 + i) \cdot z + 7 + 5i = 8 - 3i$ é:

a) $-\dfrac{14}{5} - \dfrac{17}{5}i$
b) $-\dfrac{6}{5} - \dfrac{17}{5}i$
c) $\dfrac{32}{5} - \dfrac{11}{5}i$
d) $2 - \dfrac{17}{3}i$
e) $2 - \dfrac{17}{5}i$

7) (U.C.MG) O produto $(x + yi)(2 + 3i)$ é um número real, quando **x** e **y** são reais e:

a) $x - 3y = 0$
b) $2y - 3x = 0$
c) $2x + 2y = 0$
d) $2x + 3y = 0$
e) $3x + 2y = 0$

8) (EPUSP) O quociente do número complexo $a + ib$ pelo número complexo não nulo $c + id$ será um número real se:

a) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
b) $a + b = c + d$
c) $ac = bd$
d) $a + c + b + d = 0$
e) n.r.a.

9) (CESGRANRIO) Seja $z = x + iy$ um número complexo não nulo, onde **x** e **y** são reais. Se **a** e **b** são números reais tais que: $\frac{x - iy}{x + iy} = a + ib$

podemos afirmar que:

a) $|a| + |b| < 1$
b) $a = -b$
c) $a = b = 1$
d) $a^2 + b^2 = 1$
e) $a > 0$ e $b > 0$

10) (OSEC-SP) Determinando-se os valores reais de **m** e **n** de modo que se tenha: $2(m - ni) + i(m + ni) - i = 0$, pode-se afirmar que a soma de **m** e **n** é igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

11) (CESESP-PE) Assinale a alternativa que completa corretamente a sentença: A equação $z^3 = \bar{z}$, onde $z = a + bi$ com **a** e **b** reais, definida em $\mathbb{C}$, não admite soluções:

a) reais
b) da forma bi, com $b \neq 0$
c) da forma $a + bi$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$
d) em $\mathbb{C}$
e) inteiras

12) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) Dados os números complexos:

$$z_1 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$
$$z_2 = \rho(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)$$

então $z_1 - iz_2$ é igual a:

a) $|z_1| - 3|z_2|$
b) $2\rho\cos\theta$
c) $\rho\cos\theta$
d) $|z_1| + 2|z_2|$
e) $|z_1| + |z_2|$

13) (FATEC-SP) Sejam $i^2 = -1$ e $z = \frac{1}{1 + i\operatorname{sen}\theta}$. Se $A = \{\theta \in \mathbb{R} \mid |z| = 1\}$, então **A** é igual a:

a) $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
b) $\left\{\frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
c) $\left\{\frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
d) $\{(2k + 1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
e) $\left\{\frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{k\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

14) (MACKENZIE-SP) O número de soluções distintas do sistema:

$$\begin{cases} |z| = 2 \\ |z - i| = 1 \end{cases}$$

é:

a) zero b) 1 c) 2 d) 3 e) maior que 3

15) (CESGRANRIO) Seja $z = x + iy$ um número complexo não nulo, onde **x** e **y** são reais. Se **a** e **b** são números reais tais que: $\frac{x - iy}{x + iy} = a + ib$ podemos afirmar que:

a) $|a| + |b| < 1$
b) $a = -b$
c) $a = b = 1$
d) $a^2 + b^2 = 1$
e) $a > 0$ e $b > 0$

16) (MACKENZIE-SP) Se $z + \frac{1}{z} = -1$, então o valor de $|z|$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) 4

17) (MACKENZIE-SP) O número complexo $z = a + bi$ é tal que $\left|\frac{z - i}{z - 1}\right| = 1$. Então:

a) $a = -b$
b) $a = b$
c) $a = 2b$
d) $a = 3b^2$
e) $a = -7b$

18) (F.F.C.L.-USP) Se **z** e **w** são dois números complexos quaisquer tais que

$$|z| = |w| = 1 \text{ e } 1 + zw \neq 0$$

então o número complexo $\frac{z + w}{1 + zw}$ é:

a) de valor absoluto 1
b) imaginário puro
c) não real
d) real
e) n.r.a.

19) (ITA-SP) Suponhamos que $z_1 = a + xi$ e $z_2 = a + yi$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, são dois números complexos, tais que $z_1 \cdot z_2 = 2$. Então temos:

a) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = 2$
b) $z_1 = z_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$
c) $z_1 = \bar{z}_2$ e $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}$
d) $z_1 + z_2 = 2a$ e $a^2 + y^2 = 4$
e) n.r.a.

20) (MACKENZIE-SP) O número complexo $z = x + yi$ é tal que $|z - 3| = 2$. Então, necessariamente:

a) $0 < x < 2$ e $0 < y < 2$
b) $1 \leqslant x \leqslant 5$ e $-2 \leqslant y \leqslant 2$
c) $-1 \leqslant x \leqslant 2$ e $-3 \leqslant y \leqslant 3$
d) $0 \leqslant x \leqslant 3$ e $0 \leqslant y \leqslant 3$
e) $0 \leqslant x \leqslant 3$ e **y** não tem restrição

21) (MACKENZIE-SP) Representando-se graficamente, no plano de Argand-Gauss, os números complexos **z** tais que $z^2 = \bar{z}i$, o número de pontos obtidos é:

a) **i** b) 2 c) 3 d) 4 e) não sei

22) (CESGRANRIO) O conjunto dos pontos $z = x + iy$ do plano complexo que satisfazem $|z - 1|^2 = 2x$ e $y \geqslant 2$ é:

a) o conjunto vazio
b) uma região não limitada do plano
c) todos os pontos $x + iy$ tais que $y \geqslant 2$
d) uma reta
e) diferente dos quatro anteriores

23) (MACKENZIE-SP) Os números complexos **z** tais que $(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$, com **a** complexo e **r** real, representados no plano de Argand-Gauss, formam:

a) uma reta
b) uma parábola
c) uma elipse com focos em **a** e $\bar{\mathbf{a}}$
d) uma circunferência com centro em **a** e raio **r**
e) uma hipérbole

24) (MACKENZIE-SP) Seja $t = 2 + 3i$ um número complexo. Se

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - t| \leqslant 1\} \quad \text{e}$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z = a + bi \text{ e } b \leqslant 3\}$$

então no plano de Argand-Gauss, $A \cap B$ é:

a) um conjunto vazio
b) uma semicircunferência
c) um semicírculo
d) uma circunferência
e) um círculo

25) (ITA-SP) Seja **z** um número complexo. Se $z + \dfrac{1}{z}$ é um número real, então podemos afirmar:

a) $z \neq 0$ e $Re(z) \geqslant 0$
b) $I_m(z) = 0$ ou $|z| = 1$
c) é necessariamente um número real
d) $z^2 = -1$
e) n.r.a.

26) (ITA-SP) O lugar geométrico, no plano complexo, representado pela equação:

$$z \cdot \bar{z} - z_0 \cdot \bar{z} - \bar{z}_0 \cdot z + k = 0$$

onde **k** um número real positivo e $|z_0^2| > k$, é:

a) uma hipérbole com centro z_0
b) uma elipse com um dos focos em z_0
c) uma circunferência com centro em z_0
d) uma parábola com vértice em z_0
e) n.r.a.

27) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) Sejam **O**, $\mathbb{Z}_1$ e $\mathbb{Z}_2$ as representações gráficas dos complexos $(0 + 0i)$, $(2 + 3i)$ e $(-5 - i)$, respectivamente. A menor determinação positiva do ângulo $\mathbb{Z}_1\hat{O}\mathbb{Z}_2$ é:

a) 135° b) 150° c) 165° d) 120° e) 175°

28) (CESGRANRIO) O módulo do número complexo $(1 + 3i)^4$ é:

a) 256 b) 100 c) 81 d) 64 e) 16

29) (FATEC-SP) A representação gráfica do conjunto do **z**, $z \in \mathbb{C}$, tais que $\left|\frac{z}{z-1}\right| = 2$, no plano de Argand-Gauss é uma circunferência de raio $\frac{2}{3}$ e centro em:

a) $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ b) $\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$ c) $\left(0; \frac{4}{3}\right)$ d) $\left(0; -\frac{4}{3}\right)$ e) $(0; 0)$

30) (CESESP-PE) Sendo **z** um número complexo, assinale a alternativa que não está correta.

a) $\overline{z + z}$ é um número real

b) $z \cdot \bar{z}$ é um número real

c) se $|z| = 1$ então $\bar{z} = \frac{1}{z}$

d) $z - \bar{z}$ é sempre um número complexo não real

e) $z + \bar{z}$ é sempre um número real

31) (CESGRANRIO) No plano complexo, o conjunto dos pontos $z = x + iy$ tais que $|z| \leq i$ e $y \geq 0$ é:

a) uma circunferência

b) um círculo

c) um quadrado centrado na origem

d) um semicírculo

e) um segmento de reta

32) (MACKENZIE-SP) A função **f** associa a cada complexo seu argumento. O valor de cotg $[f(-1-i)]$ é:

a) -1 b) 0 c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

33) (CESGRANRIO) Determinando seu argumento, pode-se concluir que o número complexo $(1 + i)^{12}$:

a) tem parte real igual à parte imaginária
b) tem parte real positiva e parte imaginária negativa
c) é real negativo
d) é real positivo
e) é imaginário puro

34) (F.M. ABC-SP) Os números complexos z_1 e z_2, ambos diferentes de zero, têm os ângulos polares opostos e módulos inversos.

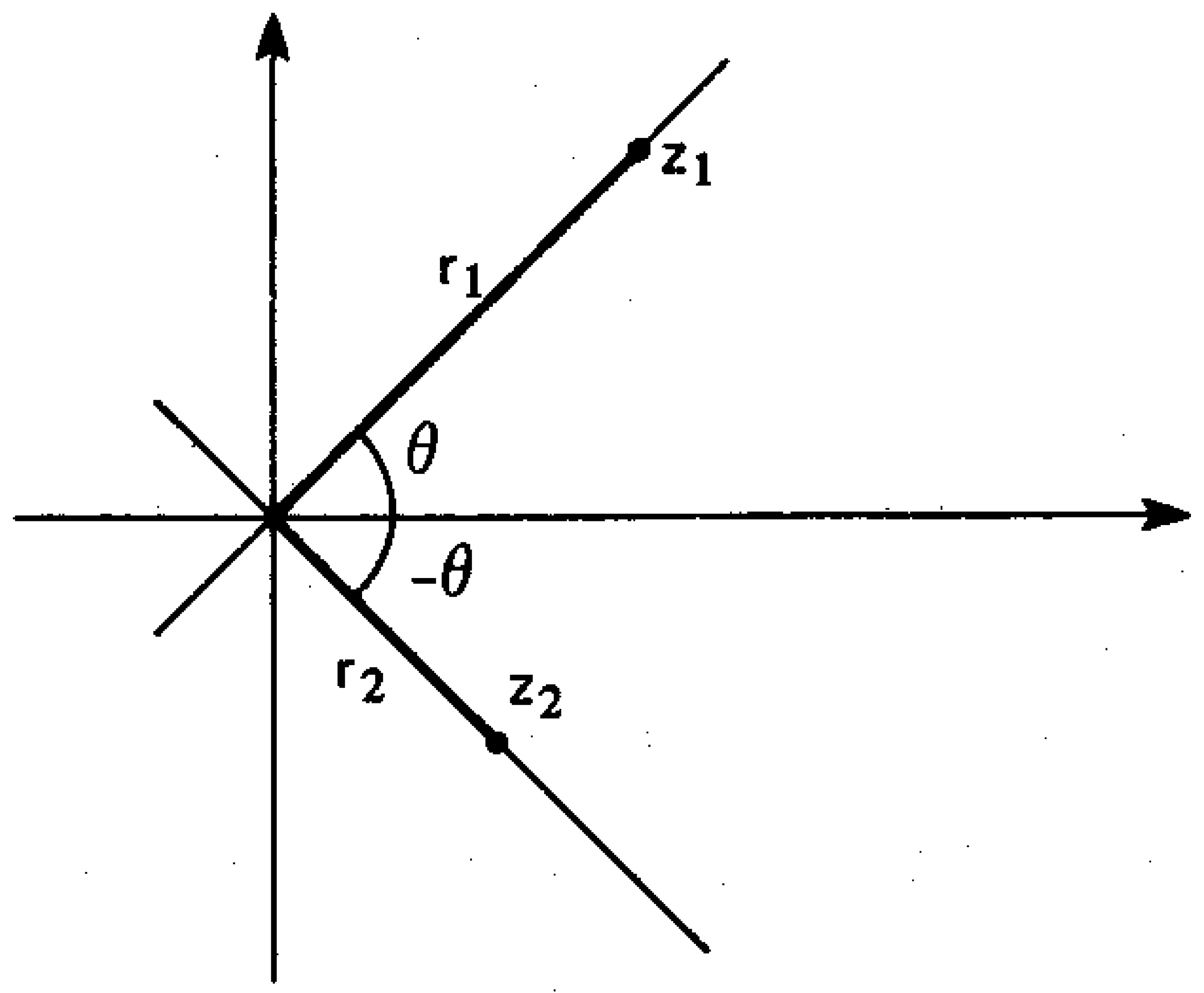
a) $|z_1 + z_2| = r_1 - r_2$

b) $z_1 \cdot z_2 = 1$

c) $z_1 : z_2 = 1$

d) $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_1}$

e) $z_2 = -\frac{1}{z_1}$



35) (F. FRANCISCANAS-SP) O número complexo $z = -2 - 2i$ é escrito na forma trigonométrica como:

a) $z = \sqrt{8} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right)$

b) $z = \sqrt{8} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$

c) $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}\right)$

d) $z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

e) $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)$

36) (PUC-SP) Se $b = 2(\cos 30° + i \cdot \operatorname{sen} 30°)$ e $z = \rho \cdot (\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$, os afixos correspondentes a b, $b + z$, $b + z + iz$, $b + iz$ são os vértices de um:

a) trapézio
b) losango
c) quadrado
d) quadrilátero qualquer
e) n.r.a.

37) (CESCEM-SP) As funções hiperbólicas cosh z e sinh z são definidas como:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

onde $z = x + iy$ e $e^{x+iy} = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$.
Nestas condições, podemos dizer que cosh z é igual a:

a) $\sinh x \cdot \sin y + i \cosh x \cdot \cos y$
b) $\sinh x \cdot \cos y + i \cosh x \cdot \sin y$
c) $\cosh x \cdot \cos y + i \sinh x \cdot \sin y$
d) $\cosh x \cdot \sin y + i \sinh x \cdot \cos y$
e) $\cosh x \cdot \sinh x + i \sin x \cdot \cos y$

38) (F. C. CHAGAS-SP) Dado o número complexo $z = \cos \frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{16}$, o valor de z^{12} é:

a) $\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\sqrt{2} + i$

d) $-1 + i\sqrt{2}$

e) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

39) (F. M. SANTA CASA-SP) Se $x^3 = 4\sqrt{3} + 4i$, x é dado por:

a) $2\cos(30° + k \cdot 150°) + 2i \operatorname{sen}(30° + k \cdot 150°)$

b) $\sqrt[3]{4}\,[\cos(60° + k \cdot 120°) + i \operatorname{sen}(60° + k \cdot 120°)]$

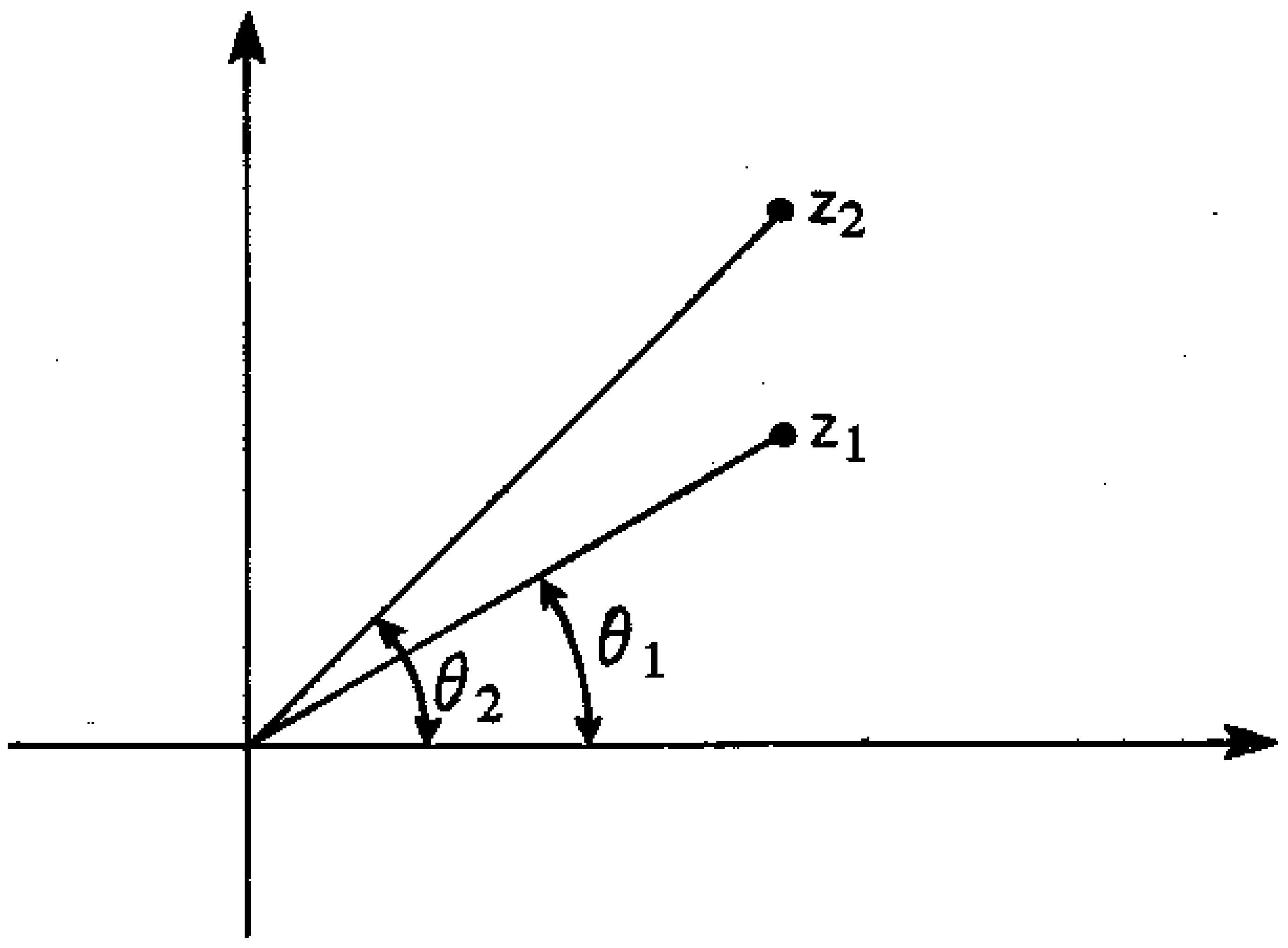
c) $\sqrt[3]{3}\,[\cos(60° + k \cdot 120°) + i \operatorname{sen}(30° + k \cdot 120°)]$

d) $2\left[\cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$

e) $2\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$

40) (F. FRANCISCANAS-SP) Dados dois números complexos z_1 e z_2, representados geometricamente abaixo, e sabendo que $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ e $0 < \theta_2 < \frac{\pi}{4}$, então podemos afirmar que:

a) $R_e(z_1 \cdot z_2) < 0$ e $I_m(z_1 \cdot z_2) = 0$
b) $R_e(z_1 \cdot z_2) > 0$ e $I_m(z_1 \cdot z_2) > 0$
c) $R_e(z_1 \cdot z_2) = 0$ e $I_m(z_1 \cdot z_2) < 0$
d) $R_e(z_1 \cdot z_2) < 0$ e $I_m(z_1 \cdot z_2) < 0$
e) n.r.a.



41) (U. F.PR) Escrevendo-se $E_x = \cos x + i \operatorname{sen} x$, onde **i** é a unidade imaginária ($i^2 = -1$), então $E_u + E_v$ é igual a:

a) $E_u + E_v$ b) $E_u + i\,E_v$ c) E_{uv} d) E^2_{uv} e) E_{u+v}

42) (F. M. SANTOS-SP) As cinco raízes quintas de $z = 16 - 16\sqrt{3}\,i$ têm o mesmo módulo e seus argumentos formam uma PA cuja razão é:

a) 60°   b) 120°   c) 204°   d) 216°   e) n.r.a.

43) (F. C. CHAGAS-SP) O número complexo **z** tem módulo e argumento respectivamente iguais a $2 \cdot \theta$. Se $\cos \theta = \frac{1}{2}$, então z^3

a) tem sua imagem no eixo real
b) tem módulo igual a 6
c) é igual a $3 + 3\sqrt{3}\,i$
d) é imaginário puro
e) tem argumento igual a 120°

44) (F. M. SANTA CASA-SP) Seja o número complexo $z = (2 - 2i)^n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$. Se $|z| = 512$ o número **n** é:

a) primo
b) quadrado perfeito
c) divisível por 5
d) múltiplo de 4
e) divisível por 3

45) (ITA-SP) Seja **z** um número complexo de módulo 1 e de argumento θ. Se **n** é um número inteiro positivo, $z^n + \frac{1}{z^n}$ é igual a:

a) $\cos(n\,\theta)$
b) $2\cos(n\,\theta)$
c) $\operatorname{sen}(n\,\theta)$
d) $2\operatorname{sen}(n\,\theta)$
e) $\operatorname{sen}(n\,\theta) + \cos(n\theta)$

46) (F. M. SANTA CASA-SP) O menor valor de **n** inteiro e positivo para o qual $y^n = (2 + 2\sqrt{3}\, i)^n$ seja real e positivo é (obs.: $i = \sqrt{-1}$):

a) 3 b) 12 c) 6 d) 9 e) n.r.a.

47) (F. M. SANTA CASA-SP) O número complexo $z = \sqrt[8]{2}\left(\cos \frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{16}\right)$ é uma das raízes quartas do número complexo:

a) $1 - i$ b) $1 + i$ c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$ d) $1 - \frac{1}{2} i$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

48) (F. M. SANTA CASA-SP) Considere o produto $(x - z) \cdot (x - \bar{z})$, onde $z = \alpha + \beta i$, com α e β pertencentes ao conjunto dos números reais e $\alpha \cdot \beta \neq 0$. Então podemos afirmar que:

$$[(x - z) \cdot (x - \bar{z})]^m, \forall x \in \mathbb{R}$$

a) é negativo caso **m** seja ímpar
b) é sempre um número par
c) é positivo para qualquer **m** real
d) vale 3
e) não satisfaz a nenhuma das alternativas anteriores

49) (ITA-SP) Sejam **a** e **k** constantes reais, $a > 0$ e $0 < k < 1$. De todos os números complexos **z** que satisfazem a relação $|z - ai| \leqslant ak$, qual é o de menor argumento?

a) $z = ak\sqrt{1 - k^2} + ia(1 - k^2)$
b) $z = k\sqrt{1 - k^2} - ia(1 - k^2)$
c) $z = k\sqrt{1 - k^2} - i\sqrt{1 - k^2}$
d) $z = -k\sqrt{1 - k^2} - ia(1 - k^2)$
e) $z = a + ik$

50) (MACKENZIE-SP) O número de soluções da equação $z^2 + |z| = 0$, onde $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$, é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

POLINÔMIOS

51) (ESAN-SP) Sendo $P(x) = Q(x) + x^2 + x + 1$ e sabendo que 2 é raiz de P(x) e que 1 é raiz de Q(x), então $P(1) - Q(2)$ vale:

a) 0 b) 2 c) 3 d) 6 e) 10

52) (MACKENZIE-SP) $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é um polinômio; $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ é a soma dos coeficientes do polinômio P(x). A soma dos coeficientes do polinômio $(4x^3 - 2x^2 - 2x - 1)^{36}$ é:

a) 0
b) -36
c) 1
d) -1
e) impossível de calcular no tempo disponível

53) (ITA-SP) O coeficiente da maior potência de um polinômio P(x) do 3.º grau é 1. Sabendo-se que $P(1) = P(2) = 0$ e $P(3) = 30$, então $P(-1)$ vale:

a) 48 b) 66 c) 18 d) -2 e) 68

54) (CESESP-PE) Considere o polinômio:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Assinale a alternativa *falsa*.

a) $P(-1) = 0$, se e somente se a soma dos coeficientes de ordem par for igual à soma dos coeficientes de ordem ímpar.

b) $P(1) = 0$, se e somente se a soma dos coeficientes de ordem par for igual ao simétrico da soma dos coeficientes de ordem ímpar.

c) $P(-2) = 0$, se e somente se a soma dos coeficientes de ordem par for o dobro da soma dos coeficientes de ordem ímpar.

d) $P(0) = 0$, se e somente se $a_0 = 0$.

e) $P(1) = P(-1) = 0$, se e somente se a soma dos coeficientes de ordem par for igual à soma dos coeficientes de ordem ímpar e igual a zero.

55) (CESGRANRIO) O polinômio $P(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ se anula para 4 valores distintos de **x**. Podemos concluir que:

a) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$

b) $a_0a_1a_2a_3 = 4$

c) $a_0 < a_1 < a_2 < a_3$

d) $a_0 > a_1 > a_2 > a_3$

e) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

56) (MACKENZIE-SP) Os valores de **m**, **n** e **l** para os quais

$$p(x) = (2m - 1)x^3 - (5n - 2)x^2 + (3 - 2\ell)$$

é um polinômio nulo são, respectivamente:

a) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, \frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}$ c) $-1, -3, 1$ d) $-2, -5, 2$ e) $0, 0, 0$

57) (PUC-SP) Os valores de **m**, **n** e **p** de modo que sejam idênticos os polinômios:

$$P_1(x) = (m + n + p)x^4 - (p + 1)x^3 + mx^2 + (n - p), + n$$

e

$$P_2(x) = 2mx^3 + (2p + 7)x^2 + 5mx + 2m$$

são, respectivamente:

a) 1, 2, −3 b) 2, 3, 1 c) −1, 2, 2 d) 2, 1, −3 e) 1, −3, 2

58) (U. F.RS) Se $r(x) = a \cdot p(x) + b \cdot q(x)$, com $r(x) = 4x^2 + kx - 8$, $p(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $q(x) = x^2 - 5x + 1$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$, então $a + b + k$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

59) (OSEC-SP) Escolha o termo que se deve acrescentar ao binômio $\frac{x^2}{4} + \frac{b^3x}{3}$ de maneira a obter trinômio que seja quadrado perfeito, entre as alternativas abaixo:

a) $\frac{b^6}{3}$ b) $\frac{b^6}{9}$ c) $\frac{b^3}{3}$ d) $\frac{b^6}{2}$ e) $\frac{b^3}{6}$

60) (ITA-SP) Considere o conjunto C dos polinômios P(x) de grau 3, tais que $P(x) = P(-x)$ para todo x real. Temos, então, que:

a) C tem apenas dois elementos

b) C é o conjunto de todos os polinômios da forma $P(x) = a_0x^3 + bx$

c) C tem apenas um elemento

d) C tem uma infinidade de elementos

e) n.r.a.

61) (EPUSP) Seja a_n o coeficiente de x^n num polinômio de coeficientes complexos de grau 30. Sendo $a_0 = -1$ e $a_{n+1} = 1 + ia_n (n \geqslant 0)$, então a_{30} é igual a:

a) $-i$ b) $1 - i$ c) i d) $2i$ e) n.r.a.

62) (ITA-SP) Os coeficientes A, B, C e D do polinômio $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ devem satisfazer certas relações para que P(x) seja um cubo perfeito. Assinale a opção correta para que isto se verifique:

a) $D = \frac{C^2A}{3B}$

b) $C = \frac{B}{3A^3}$ e $D = \frac{B^2}{27A^3}$

c) $BC = 3A$ e $CD^2 = B^2A^2$

d) $C = \frac{B^2}{3A}$ e $D = \frac{B^3}{27A^2}$

e) n.r.a.

63) (PUC-SP) Se $\frac{5 - 3x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x - 3}$, então os valores de A, B e C são, respectivamente:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, -\frac{4}{3}$

c) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}$

d) $\frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$

e) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}$

64) (U. F.SE) Se $\frac{2x - 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x - 1}$, então:

a) $B - A = 6$ b) $B = 2A$ c) $A = \frac{1}{3} B$ d) $A + B = 2$ e) $\frac{B}{A} = 7$

65) (CEUB-DF) A condição para que o polinômio $f = (ax + b)^2 + (cx + d)^2$, onde **a**, **b** e **c** são reais e não nulos seja um quadrado perfeito é:

a) $ad = bc$ b) $cd = ab$ c) $abc = d$ d) $ad = b^2c + a$

66) (ITA-SP) Dizemos que os polinômios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente independentes (L. I.) se a relação $a_1pp_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) = 0$ implica $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, onde a_1, a_2, a_3 são números reais. Caso contrário, dizemos que $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente dependentes (L. D.). Os polinômios $p_1(x) = x^2 + 2x + 1$, $p_2(x) = x^2 + 1$ e $p_3(x) = x^2 + 2x + 2$ são:

a) L. I.

b) nem L. I. nem L. D.

c) L. I. se $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ tiverem as raízes reais.

d) L. D.

e) n.r.a.

67) (MACKENZIE-SP) O valor de

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} + \ldots \text{ é:}$$

Sugestão: determine duas constantes **A** e **B** tais que $\frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{A}{2n - 1} + \frac{B}{2n + 1}$

a) 1 b) -1 c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) não sei

68) (CESCEA-SP) Determine **a** e **b** de modo que a expressão:

$$\frac{3x^2 + 5x - 8}{ax^2 - 10x + b}$$

não dependa de **x**. Então a + b é igual a:

a) -10 b) 10 c) 8 d) não sei

69) (CESCEM-SP) Seja r(x) uma função racional. Ela pode ser representada de forma única como o quociente de dois polinômios primos entre si, $\frac{P(x)}{q(x)}$, onde q(x) tem o coeficiente do termo de maior grau, unitário. Nestas condições, definimos **ordem** K de r(x) como:

$$K = \begin{cases} 2 \times \text{grau}(q(x)) & \text{se grau } (p(x)) \text{ é grau } (q(x)) \\ 2 \times \text{grau de } (p(x)) - 1 & \text{se grau } (p(x)) > \text{grau } (q(x)) \end{cases}$$

Assim, dado o polinômio $r(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x - 4}$ a ordem de r(x) é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

70) (CESCEM-SP) $P_1(x)$ é um polinômio de grau **n** tal que:

$$P_1(0) \neq 0, \text{ isto é, } P_1(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots (a_0 \neq 0)$$

$$\text{e} \quad P_2(x) = \begin{cases} x^n \cdot P_1\left(\frac{1}{x}\right); & x \neq 0 \\ a_0; & x = 0 \end{cases}$$

então $P_2(x)$ é:

a) um polinômio de grau **n**
b) uma função racional não inteira
c) uma função irracional
d) uma função transcendente
e) n.r.a.

71) (MACKENZIE-SP) O polinômio $P(x) = (m - 4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m + 4)x + 4$ é de grau 2:

a) se e somente se $m = 4$ ou $m = -4$
b) se e somente se $m \neq 4$
c) se e somente se $m \neq -4$
d) se e somente se $m \neq 4$ e $m \neq -4$
e) para nenhum valor de **m**

72) (U. F.AL) Se os graus dos polinômios **f** e **g** são, respectivamente, 2 e 3, o grau do polinômio $h = f^2 - 4g$ é:

a) 4 b) 3 c) 2 d) 1 e) 0

73) (FUVEST-SP) O grau dos polinômios **f**, **g** e **h** é 3. O número natural **n** pode ser o grau do polinômio não nulo $f \cdot (g + h)$ se e somente se:

a) $n = 6$ b) $n = 9$ c) $0 \leqslant n \leqslant 6$ d) $3 \leqslant n \leqslant 9$ e) $3 \leqslant n \leqslant 6$

74) (MACKENZIE-SP) Dados três polinômios de graus 3, 5 e 5, respectivamente:

a) pode-se somar esses polinômios e o grau da soma é necessariamente 5
b) pode-se somar esses polinômios e o grau da soma pode ser menor que 5
c) não se pode somar esses polinômios, porque seus graus são diferentes
d) não se pode multiplicar esses polinômios, porque seus graus são diferentes
e) o produto desses polinômios tem grau 75

75) (CESESP-PE) Sejam **f** e **g** dois polinômios não nulos de coeficientes reais. Assinale a alternativa correta.

a) grau $(f \cdot g)$ = grau (f) $\cdot$ grau (g)
b) grau (f) $\geqslant$ grau $(f \cdot g)$
c) grau $(f \cdot g)$ = grau (f) + grau (g)
d) grau $(f + g)$ = grau (f) + grau (g)
e) grau $(f + g)$ = máx. {grau (f), grau (g)}

76) (F. M. SANTA CASA-SP) Indica-se o grau do polinômio **f** por ∂f. Sejam **f** e **g** dois polinômios tais que $\partial f = 2n$ e $\partial g = n - 1$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$.
Se na divisão de **f** por **g** obtém-se quociente **q** e resto **r**, $r \neq 0$, podemos afirmar que:

a) $\partial q = \partial r = n - 1$
b) $\partial q = \partial r = n + 1$
c) $\partial q = n - 1$ e $\partial r = n - 2$
d) $\partial q = n - 1$ e $\partial r < n - 1$
e) $\partial q = n + 1$ e $\partial r < n - 1$

77) (CESCEM-SP) Dividindo $(x^3 - 4x^2 + 7x - 3)$ por um certo polinômio p(x) obtemos quociente $(x - 1)$ e resto $(2x - 1)$. O polinômio p(x) é igual a:

a) $2x^2 - 3x + 2$
b) $x^2 - 3x + 2$
c) $x^2 - x + 1$
d) $2x^2 - 3x + 1$
e) n.r.a.

78) (ENG. S. CARLOS-USP) Seja Q o quociente e R o resto da divisão de um polinômio A por um polinômio B. Então, quando A é dividido por 2B:

a) o quociente é 2Q e o resto 2R
b) o quociente é $\frac{Q}{2}$ e o resto $\frac{R}{2}$
c) o quociente é $\frac{Q}{2}$ e o resto é R
d) o quociente é 2Q e o resto R
e) o quociente é 2Q e o resto $\frac{R}{2}$

79) (U. F.PR) Determine **m** e **n** de modo que o resto da divisão do polinômio $y^5 - my^3 + n$ por $y^3 + 3y^2$ seja 5.

a) $m = 9$ e $n = -5$
b) $m = 9$ e $n = 5$
c) $m = -4$ e $n = -5$
d) $m = 4$ e $n = 5$
e) $m = -9$ e $n = -5$

80) (MACKENZIE-SP) Se $A(x) = 3(x - 2)(x^2 - 1) - (2x - 4)(x^2 + 3)$

$$B(x) = -2x - 6 + (3 - x)(x - 4)$$

$$F(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$$

então, para todo **x** do domínio de **F** tem-se:

a) $F(x) = x + 3$
b) $F(x) = -x - 3$
c) $F(x) = -x + 3$
d) $F(x) = x - 3$
e) n.r.a.

81) (PUC-SP) Para que valores de **m** o resto da divisão de $P_1(x) = 4x^3 - 3x^2 + mx + 1$ por $P_2(x) = 2x^2 - x + 1$ é independente de **x**?

a) $m = \frac{2}{5}$ b) $m = \frac{1}{5}$ c) $m = \frac{3}{5}$ d) $m = \frac{5}{2}$ e) n.r.a.

82) (U. F.GO) Se o polinômio $x^3 + kx^2 - 2x + 3$ é divisível pelo polinômio $x^2 - x + 1$, então o quociente é:

a) $x - 3$ b) $x + 3$ c) $x - 1$ d) $x + 1$ e) $x + 2$

83) (CESGRANRIO) O polinômio $x^3 + px + q$ é divisível por $x^2 + 2x + 5$. Os valores de **p** e **q** são, respectivamente:

a) 2 e 5   b) 5 e 2   c) 1 e 5   d) 1 e −10   e) 3 e 6

84) (F. M. SANTA CASA-SP) O polinômio $P_1(x) = x^3 + px + q$ é divisível por $P_2(x) = x^2 + mx - 1$ se: (Obs.: **m**, **p** e **q** são reais.)

a) $p = -q^2 - 1$ e $m = q$
b) $m^2 - 1 = p$ e $m - q = 0$
c) $q + p \doteq 1$ e $m = 0$
d) $m = -q$ e $p = 1 + q^3$
e) n.r.a.

85) (U. F.SC) A divisão de $(x^3 - 6x - 1)$ por $(mx^2 + nx + p)$ apresenta como quociente $(x - 3)$ e como resto $(x + 5)$. Os valores de **m**, **n** e **p** são, respectivamente:

a) (3; 2; 1)   b) (2; 1; 3)   c) (1; 3; 2)   d) (2; 3; 1)   e) (1; 2; 3)

86) (F. M. SANTA CASA-SP) Um polinômio P(x) dividido por $x - 2$ dá resto 3 e dividido por $x^2 - 2$ dá resto $3x - 1$. O resto da divisão de P(x) por $(x - 2)(x^2 - 2)$ é:

a) $-x^2 + 3x + 1$ b) $9x - 3$ c) $x^2 - 3x - 1$ d) $4x^2 + 2x - 3$ e) n.r.a.

87) (PUC-SP) O resto da divisão do polinômio $P(x) = 2x^4 - 3x + 1$ por $g(x) = 2x - 1$, é:

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $-\frac{3}{8}$ e) $\frac{2}{5}$

88) (F. G. V.-SP) O resto da divisão do polinômio:

$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$$

pelo binômio $x + 1$ é:

a) 0 b) 1 c) -1 d) 3 e) 2

89) (CESGRANRIO) O resto da divisão do polinômio x^{100} por $x + 1$ é:

a) $x - 1$ b) x c) -1 d) 0 e) 1

90) (CESCEA-SP) Se $n > 1$ é um número natural, então o polinômio $P(x) = 5x^n - 4x^{n-1} - 1$ é tal que:

a) P(x) é divisível por $x - n$
b) P(x) é divisível por $x + 1$
c) P(x) é divisível por $x - 1$
d) P(x) é divisível por $x^2 - 1$
e) P(x) é divisível por $x + 2$

91) (CESESP-PE) Seja p(x) o polinômio definido por:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{100} ix^i$$

Assinale a alternativa que corresponde ao resto da divisão de p(x) por $x - 1$.

a) i^2 b) i! c) 0 d) 1 e) 5.050

92) (F. E. E. QUEIROZ-CE) Sabendo que $x^4 + ma^2x^2 - 5a^3x + a^4$ é divisível por $x - a$, $a \neq 0$, então **m** vale:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7

93) (CESCEA-SP) Os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ do polinômio:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

formam, nesta ordem, uma PG de razão $\frac{1}{2}$. Então, o resto da divisão de P(x) por $x + 2$ é:

a) **0** se **n** é ímpar
b) **0** se **n** é par
c) **0** se $a_0 = 1$
d) não sei

94) (MACKENZIE-SP) O resto da divisão de $p(x) = x^{2n} + 1$ (**n**, número natural não nulo) por $q(x) = x + 1$ é:

a) sempre 0
b) sempre 2
c) 0 se e somente se **n** for ímpar
d) 2 se e somente se **n** for par
e) n.r.a.

95) (MACKENZIE-SP) O resto da divisão de $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - mx + 5$ por $x + 2$ é 1. Então, **m** é igual a:

a) 22 b) -20 c) 20 d) 10 e) -10

96) (FACESP) Dados os polinômios $f = x^3 + (p - q)x + 2p$ e $g = x^2 - (p + q)$ com **p** e **q** reais, para que ambos os polinômios sejam divisíveis por $3 - x$, devemos ter:

a) $p = q = 0$ b) $p = q = 3$ c) $p = 3, q = 0$ d) $p = 0, q = 3$ e) n.r.a.

97) (MACKENZIE-SP) O resto da divisão por $x - b$ do polinômio:

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ se $abcd \neq 0$
b) em geral, um polinômio não nulo de grau 3
c) o polinômio nulo, se e somente se $a = b = c = d$
d) sempre o polinômio nulo
e) não sei

98) (FATEC-SP) Seja $\mathbb{R}[x]$ o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, $p \in \mathbb{R}[x]$, $p = ax^2 - 3x + b$. Se os coeficientes **a**, -3, **b**, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, então o resto da divisão de **p** por $x + 1$, em $\mathbb{R}[x]$, é:

a) -3 b) -6 c) 0 d) -1 e) 1

99) (CESCEM-SP) Se $P(x)$ é um polinômio divisível por $x - a$ e por $x - b$, podemos concluir que $(x - a)(x - b)$ divide $P(x)$:

a) sempre
b) desde que $P'(a) = P'(b) = 0$
c) desde que $P(a + b) = P(ab) = 0$
d) desde que $a \neq b$
e) n.r.a.

100) (U. F.CE) Sejam **a**, **b** e **c** números reais distintos, não nulos, tais que o polinômio $p(x) = x^2 + x + c$ é dividido exatamente por $x - a$ e por $x - b$. Então $a + b$ é igual a:

a) -1 b) 2 c) -2 d) 1

101) (U. F.BA) Na divisão de um polinômio pelo binômio $ax + b$, usou-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini e encontrou-se:

	1	p	-3	4	-5
-2	q	-4	5	r	7

Os valores de **a**, **b**, **p**, **q** e **r** são, respectivamente:

a) 1, -2, 1, -6, 6
b) 1, -2, 1, 1, 4
c) 1, 2, -2, -2, -6
d) 1, 2, 1, -4, 4
e) 1, 2, -2, 1, -6

102) (CESCEA-SP) O quadro

1,32	1	0	−0,52	−1,626
		1,32	1,7424	1,613568
	1	1,32	1,2224	−0,012432

é o dispositivo prático de Briot-Ruffini, da divisão de determinado polinômio P(x) por determinado binômio linear D(x). Então, o valor de P(x) + D(x) no ponto x = 1 é:

a) −1,466 b) −0,826 c) 1 d) −0,332432 e) 0,854

103) (MACKENZIE-SP) Na divisão do polinômio $5x^5 + ax^3 + bx^2 + 3x + 1$ por $x - 2$, encontrou-se o quociente $5x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 115$. O resto é:

a) −229
b) 229
c) −231
d) 231
e) impossível de determinar sem conhecer **a**, **b**, **c**, **d**, **e**

104) (CONSART-RJ) O polinômio P(x) que satisfaz a igualdade

$$(3x + 2) \cdot P(x) = 3x^3 + x^2 - 6x - 2 + P(x)$$

é:

a) $x^3 - 2x - 2$
b) $x^2 - 2$
c) $x^3 + 3$
d) $x^3 - 6x - 2$
e) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$

105) (ITA-SP) Os valores reais **a** e **b** tais que os polinômios $x^3 - 2ax^2 + (3a + b)x - 3b$ e $x^3 - (a + 2b)x + 2a$ sejam divisíveis por $x + 1$, são:

a) dois números inteiros positivos
b) dois números inteiros negativos
c) números inteiros, sendo que um é positivo e o outro negativo
d) dois números reais, sendo um racional e o outro irracional
e) n.r.a.

106) (F. M. SANTA CASA-SP) O polinômio $f = x^3 + ax^2 + (a - 18)x + 1$ é divisível por $x - 1$. O polinômio $g = ax^3 + bx^2 + bx + a$ é um cubo perfeito se **b** for igual:

a) 24 b) 18 c) 12 d) 8 e) 6

107) (PUC-SP) A divisão do polinômio P(x) por $x - a$ fornece o quociente $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e o resto P(a) = 1. Sabendo que P(0) = −15, o valor de **a** é:

a) 13 b) −13 c) 14 d) −16 e) 16

108) (CESCEA-SP) As raízes do polinômio $P(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ são 1, 2 e 3. O quociente de P(x) por $x - 3$ é:

a) $x^2 + 2$ b) $x^2 - 3x + 2$ c) $x^2 + 3x - 2$ d) $x^2 - 2x + 1$ e) $x^2 - 2$

109) (U. F.GO) **Observação**: um polinômio é chamado **mônico** quando o coeficiente do termo de maior grau é 1.
Seja P(x) um polinômio mônico de grau 2, divisível por $x - 1$ e assumindo valor 2 em $x = 3$.
Seja Q(x) um polinômio mônico de grau 3, divisível por $x - 1$, divisível por $x - 2$ e assumindo valor 6 em $x = 3$.
O quociente de P(x) por Q(x) é:

a) $\frac{2}{x - 1}$ b) $\frac{1}{x + 1}$ c) $\frac{1}{x}$ d) $\frac{1}{x - 2}$ e) $\frac{2}{6(x - 2)}$

110) (FACESP) Para que o polinômio $x^3 + 2x^2 + (a + 5b)x + (a + 2b)$ seja divisível por $x^2 - x$, os valores de **a** e **b** devem ser, respectivamente:

a) -2 e 1 b) 1 e 2 c) 2 e -1 d) -1 e -2 e) n.r.a.

111) (FUMEC-MG) Para que o polinômio $2x^4 - x^3 + mx^2 - nx + 2$ seja divisível por $x^2 - x - 2$, devemos ter:

a) $m = 1$ e $n = -6$
b) $m = -6$ e $n = -1$
c) $m = 6$ e $n = 1$
d) $m = -6$ e $n = 1$
e) $m = 6$ e $n = -1$

112) (F. G. V.-SP) Determinando-se **m** e **n** de forma que $x^4 - x^3 - 22x^2 + mx + n$ seja divisível por $x^2 - 5x - 6$, o quociente dessa divisão será:

a) $x^2 + 4x + 4$
b) $x^2 - 4$
c) $x^2 + 4x - 10$
d) $x^3 - 3x + 1$
e) $(x - 3)(x + 4)$

113) (MACKENZIE-SP) O polinômio $P(x) = (\cos\theta + x \operatorname{sen}\theta)^n - \cos n\theta - x \operatorname{sen} n\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, é divisível por $P_1(x) = x^2 + 1$:

a) somente se $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$
b) somente se $\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$
c) somente se $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3}$
d) somente se $n\theta \neq k\pi$
e) sempre

114) (MACKENZIE-SP) Um polinômio desconhecido, ao ser dividido por $x - 1$, deixa resto 2 e, ao ser dividido por $x - 2$, deixa resto 1. Então, o resto da divisão desse polinômio por $(x - 1)(x - 2)$ é:

a) $x - 3$ b) $-x + 3$ c) $x + 3$ d) $x - 5$ e) $-x + 5$

115) (CESCEA-SP) O coeficiente de x^3 no polinômio P(x) do terceiro grau que se anula para $x = -1$ e tal que dividido separadamente por $x - 1$, $x + 2$ e $x + 3$ deixa sempre resto 10, é:

a) 5 b) 10 c) 1 d) $\frac{5}{2}$ e) não sei

116) (PUC-SP) Os restos das divisões de um polinômio P(x) pelos binômios $(x + 1)$, $(x - 1)$ e $(x - 2)$ são, respectivamente, 5, -1, -1. Então o resto da divisão de P(x) por $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$ é:

a) $x^2 + 3x - 1$
b) $x^2 + 3x + 2$
c) $x^2 - 3x + 2$
d) $x^2 - 3x + 1$
e) $x^2 + 3x + 3$

117) (ITA-SP) Suponhamos que os polinômios P(x), Q(x), p(x) e q(x) satisfazem as seguintes condições:

$$P(x) \cdot p(x) + Q(x) \cdot q(x) = 1 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \text{ complexo}$$
$$P(q(1)) = 0, \; Q(0) = 0$$

Assinale a afirmação correta:

a) P(x) é divisível por S(x) = x
b) P(x) e Q(x) não são primos entre si
c) Q(p(1)) = 0
d) p(x) não é divisível por R(x) = x − 1
e) p(0) = 0

118) (ITA-SP) Seja $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{100}x^{100}$, onde $a_{100} = 1$, um polinômio divisível por $(x + 9)^{100}$. Nestas condições temos:

a) $a_2 = 50 \cdot 99 \cdot 9^{98}$
b) $a_2 = \dfrac{100!}{2!\ 98!}$
c) $a_2 = \dfrac{99!}{2!\ 98!}$
d) $a_2 = \dfrac{100!\ 9^2}{2!\ 98!}$
e) n.r.a.

119) (UnB-DF) $P_1(x)$ e $P_2(x)$ são polinômios do 2.º grau que se anulam quando x = 0. O resto da divisão de $P_1(x)$ por (x − 1) (x + 2) é 3x + 1. O resto da divisão de $P_2(x)$ por (x + 1) (x + 2) é 2x − 1.
Então, o quociente da divisão de $P_1(x)$ por $P_2(x)$ é:

a) 1
b) 0
c) x + 1
d) n.r.a.

120) (PUC-SP) Os valores de **a** e **b** de modo que o polinômio $P_1(x) = x^3 + ax + b$ seja divisível pelo polinômio $P_2(x) = (x - 1)^2$ são:

a) a = 2 e b = −3
b) a = 3 e b = −2
c) a = 1 e b = 3
d) a = 3 e b = −1
e) a = −3 e b = 2

121) (U.F.RS) O máximo divisor comum dos polinômios $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ e $q(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ é:

a) (x + 2) (x − 2)
b) (x + 1) (x − 1)
c) (x − 1) (x − 2)
d) (x + 1) (x − 2)
e) (x − 1) (x + 2)

122) (F.G.V-SP) O máximo divisor comum entre os polinômios

$$A(x) = 2x^2 + 5x - 3$$
$$B(x) = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$
$$C(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$$

é:

a) 1
b) x − 3
c) x + 3
d) $(x + 3)(2x - 1)(x^2 - 3x + 9)(x - 3)$
e) (x + 3) (2x − 1)

123) (CESCEM-SP) Se $p(x) = 2x^3 + x^2 - 8x$ e $q(x) = x^2 - 4$, então $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ é:

a) 2x + 1
b) 2x + 5
c) $2x + 1 + \dfrac{4}{x^2 - 4}$
d) $2x + 1 - \dfrac{4}{x^2 - 4}$
e) $2x + 1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$

124) (CESCEM-SP) Um polinômio de coeficientes inteiros na variável **x** tem grau par, seu termo independente é ímpar e o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1. Assinale a resposta *falsa*:

a) o valor do polinômio para $x = 0$ é um número ímpar
b) o zero não é raiz desse polinômio
c) o polinômio derivado tem grau ímpar
d) o coeficiente do termo de maior grau do polinômio derivado é um número ímpar
e) nenhum número par pode ser raiz desse polinômio

125) (CESGRANRIO) O polinômio $x^3 + 2x^2 + mx + n$ é divisível por $x^2 + x + 1$. O valor de $m + n$ é:

a) -3 b) -1 c) 1 d) 2 e) 3

126) (EPUSP) Sejam **u** e **v** dois números complexos tais que $u^2 - v^2 = 6$ e $\bar{u} + \bar{v} = 1 - i$ ($\bar{u}$ e $\bar{v}$ conjugados de **u** e **v**). Então $u - v$ é igual a:

a) $1 - i$ b) $1 + i$ c) $3 - 3i$ d) $3 + 3i$ e) n.r.a.

127) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) O polinômio $p(x) = x^5 - 3x^4 + 8x^2 - 9x + 3$ é divisível por:

a) $x - 2$ b) $x + 1$ c) x d) $x + 2$ e) $x - 1$

128) (FACESP) Se $A(x - 1) + (Bx + C)(x + 1) \equiv 3x(x + 3)$ é uma identidade, então o valor de $A + B + C$ é:

a) 9 b) 12 c) 3 d) 6 e) n.r.a.

129) (CICE-RJ) Seja $z = x + iy$, $x^2 + y^2 \neq 0$ ($i^2 = -1$, **x** e **y** reais); $z + \dfrac{1}{z}$ é real se e somente se:

a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$
b) $x^2 + y^2 + 1 = 0$
c) $y = 0$ e $x^2 + y^2 = 1$
d) $x = 0$ e $|z| = 1$
e) $y = 0$ e $|z| = 1$

130) (F.C. CHAGAS-SP) O módulo do número complexo $z = \dfrac{a + bi}{a - bi}$, onde **a** e **b** são números reais, é:

a) 0 b) 1 c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{a^2 + b^2}$ e) $\dfrac{a + b}{a^2 + b^2}$

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

131) (PUC-RJ) Sobre as raízes da equação $x^3 - x^2 + 3x - 3 = 0$ podemos afirmar:

a) nenhuma raiz é real
b) há uma raiz real e duas imaginárias conjugadas
c) há três raízes reais cuja soma é 3
d) há três raízes reais cuja soma é 1
e) há três raízes reais cuja soma é -3

132) (F.G.V-SP) Sabendo que $P(x) = -x^4 + 11x^3 - 38x^2 + 52x - 24$ tem uma raiz dupla $x = 2$, o domínio de definição da função $f(x) = \log[P(x)]$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq 3\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 6\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 7\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } 2 < x < 6\}$

133) (MACKENZIE-SP) Sabe-se que o número complexo **i** é solução da equação $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. Então:

a) essa equação tem uma solução de multiplicidade 2
b) as soluções dessa equação formam uma progressão
c) a equação tem 2 soluções reais irracionais
d) a equação tem 2 soluções reais racionais
e) a equação não tem soluções reais

134) (U.F.RS) O maior número real, cuja soma com o próprio quadrado é igual ao seu cubo, é:

a) 0
b) $\dfrac{-1 - \sqrt{3}}{2}$
c) $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$
d) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$
e) $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$

135) (U.F.RS) Se $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) > 0\}$ é:

a) $(0; 1)$
b) $(1; 2)$
c) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$
d) $(0; 1) \cup (2; +\infty)$
e) $(-\infty; 0) \cup (1; 2)$

136) (CESGRANRIO) Uma das raízes do polinômio $x^3 + 4x^2 + x - 6$ é 1. Com relação às outras raízes do polinômio podemos afirmar que:

a) ambas são negativas
b) uma é negativa e a outra é positiva
c) ambas são positivas
d) uma delas é nula
e) são complexas com a mesma parte real

137) (PUC-SP) O produto das raízes da equação $x(x + 1)(x + 2) \ldots (x + 9) = 0$ é:

a) 9^9
b) $9!$
c) -9
d) 45
e) 0

138) (FATEC-SP) O número 2 é uma das raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + m$, onde $m \in \mathbb{R}$. Quanto às raízes reais de $P(x)$, podemos afirmar que:

a) sua soma é -4
b) o quadrado da sua soma é 30
c) a soma de seus quadrados é 36
d) formam uma progressão geométrica
e) formam uma progressão aritmética

139) (CESGRANRIO) Dada a equação $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$, tem-se que:

a) admite 4 raízes reais irracionais
b) admite 8 raízes reais
c) não admite raízes reais
d) admite 4 raízes reais inteiras
e) as 4 afirmativas anteriores são falsas

140) (ITA-SP) Se $\dfrac{6 - 5x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \dfrac{A}{x - a} + \dfrac{B}{x - b} + \dfrac{C}{x - c}$, onde A, B e C são reais e **a**, **b** e **c** são raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$, então:

a) $A = -2$, $B = -1$ e $C = 0$
b) $A = 2$, $B = 4$ e $C = 1$
c) $A = 1$, $B = -3$ e $C = 2$
d) $A = 5$, $B = 2$ e $C = 1$
e) n.r.a.

141) (EPUSP) O polinômio

$$x^{180} + (\text{sen } 1° + \cos 1°)x^{179} + (\text{sen } 1° + \cos 1°)(\text{sen } 2° + \cos 2°)x^{178} + \\ + (\text{sen } 1° + \cos 1°)(\text{sen } 2° + \cos 2°)(\text{sen } 3° + \cos 3°)x^{177} + \ldots$$

a) tem o produto das raízes igual a 1
b) admite zero como raiz simples
c) admite zero como raiz de multiplicidade 46
d) não admite raízes reais
e) n.r.a.

142) (CESCEM-SP) Os valores de **m** e **n** a fim de que a equação

$x^7 - 5x^6 + 4x^5 - 3x^4 + 2x^3 + (m - 5n)x^2 + \left(\dfrac{3}{5}m - n + 2\right)x + (5 - m \cdot n) = 0$ admita duas, e apenas duas raízes nulas, são, respectivamente:

a) $\dfrac{5}{3}$ e -5
b) -5 e 3
c) $\dfrac{5}{3}$ e 3
d) -5 e -1
e) $\dfrac{5}{3}$ e -1

143) (CESCEA-SP) Sabendo-se que um polinômio P(x) do 4.º grau é divisível por $(x - 2)^3$ e que $P(0) = -8$ e $P(1) = -3$, o valor de $P(3)$ é:

a) 10
b) −8
c) 6
d) 7
e) 3

144) (EPUSP) Qual é o coeficiente de x^{n+1} no polinômio $x^{n+3} + ax^{n+2} + \ldots$ cujos zeros são 0 com multiplicidade 3, 2 com multiplicidade **n**?

a) 0
b) $2n$
c) $2n(n + 1)$
d) $2n(n - 1)$
e) n.r.a.

145) (ITA-SP) A equação $x^n - 1 = 0$, onde **n** é um número natural maior do que 5, tem:

a) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n - 2)$ raízes imaginárias quando **n** é par
b) 1 raiz positiva, $(n - 1)$ raízes não reais quando **n** é par
c) 1 raiz negativa, $(n - 1)$ raízes imaginárias quando **n** é ímpar
d) 1 raiz positiva, 1 raiz negativa e $(n - 2)$ raízes imaginárias quando **n** é um número natural qualquer
e) n.r.a.

146) (MACKENZIE-SP) Dado o polinômio $P(x) = x^n - 1, n \in \mathbb{N}^*$, cujas raízes são $1, a, b, c, \ldots, t$, então $(1 - a)(1 - b)(1 - c)\ldots(1 - t)$ vale:

a) **n**, somente se o grau do polinômio for par
b) **n**, somente se o grau do polinômio for ímpar
c) 2n, somente se o grau do polinômio for ímpar
d) 3n, somente se o grau do polinômio for ímpar
e) **n**, qualquer que seja o grau do polinômio

147) (PUC-SP) Sobre um polinômio na indeterminada **x** de coeficientes inteiros e de grau no máximo **n** que se anula para $n + 1$ valores distintos de **x**, pode-se afirmar:

a) é constante
b) é de grau ímpar
c) é de grau par
d) é identicamente nulo
e) n.r.a.

148) (ITA-SP) Seja z_k um número complexo, solução da equação $(z + 1)^5 + z^5 = 0, k = 0, 1, 2, 3, 4$. Podemos afirmar que:

a) todos os z_k (para $k = 0, 1, 2, 3, 4$) estão sobre uma circunferência
b) todos os z_k estão sobre uma reta paralela ao eixo real
c) todos os z_k estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário
d) a equação não admite solução
e) n.r.a.

149) (FATEC-SP) O polinômio $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$:

a) tem uma raiz real com multiplicidade 3
b) tem três raízes reais distintas entre si
c) tem duas raízes complexas e não reais
d) tem exatamente uma raiz complexa e não real
e) não tem raízes reais

150) (MOJI-SP) A equação $x^4 + px^3 + 3x^2 + qx - 4 = 0$ admite a raiz 2 com multiplicidade superior a 1. Então:

a) $p = 4$ e $q = 4$
b) $p = -4$ e $q = -4$
c) $p = -4$ e $q = 4$
d) $p = -2$ e $q = -2$
e) $p = 2$ e $q = -2$

151) (F.F.C.L.-USP) **Para que a equação $x^3 - (4 + m)x^2 + (4 + 4m)x - 4m = 0$, onde $m \in \mathbb{R}$, tenha uma raiz dupla igual a 2, devemos ter:**

a) $m \neq 2$
b) $m = 2$
c) $m > 0$
d) $m < 3$
e) n.r.a.

152) (F.M. SANTA CASA-SP) Os valores de **p** e **q** para os quais a equação $\frac{x^3}{3} - 2x^2 + px + q = 0$ admite uma raiz de multiplicidade 3 são, respectivamente:

a) 3 e 4 b) $\frac{4}{3}$ e -8 c) 4 e $-\frac{8}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$ e 4 e) n.r.a.

153) (MACKENZIE-SP) Os números complexos $1 + i$, $1 + i^2$ e $2 - i$ são raízes do polinômio P de coeficientes reais. Podemos afirmar que o grau de **P** é, necessariamente:

a) par
b) ímpar
c) maior ou igual a seis
d) maior ou igual a quatro
e) igual a três

154) (F.C. CHAGAS-SP) Se o número complexo $2 + i$ é uma das raízes da equação $x^2 + kx + t = 0$, onde **k** e **t** são reais, o valor de $k + t$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 2 e) 1

155) (MACKENZIE-SP) Uma das raízes da equação $x^2 + ax + 2b = 0$, **a** e **b** reais, é $1 - \sqrt{2}\,i$. Os valores de **a** e **b** são, respectivamente:

a) -2 e $\frac{3}{2}$
b) -2 e $-\frac{3}{2}$
c) 2 e $-\frac{3}{2}$
d) 2 e $\frac{2}{3}$
e) 2 e $\frac{3}{2}$

156) (FUVEST-SP) A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, onde **m** e **n** são números reais, admite $1 + i$ (sendo **i** a unidade imaginária) como raiz. Então **m** e **n** valem, respectivamente:

a) 2 e 2
b) 2 e 0
c) 0 e 2
d) 2 e -2
e) -2 e 0

157) (CESCEM-SP) O número $2 + 3i$ é raiz da equação $x^2 + bx + c = 0$, com **b** e **c** reais. Podemos então afirmar que:

a) **c** é um número ímpar
b) **b** é um número irracional
c) **c** é um número irracional
d) **b** e **c** não estão univocamente determinados
e) **b** é um número ímpar

158) (U.F.RS) Se os números **−3**, **a** e **b** são as raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$, o valor de $a + b$ é:

a) -6 b) -2 c) -1 d) 2 e) 6

159) (MACKENZIE-SP) A equação $x^3 - 5x + 4 = 0$ admite a raiz 1. Se **a** e **b** correspondem às outras raízes, o valor de $a + b$ é:

a) $+1$ b) -1 c) -5 d) 5 e) -4

160) (U.F.MG) A média aritmética das raízes da equação $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$ é:

a) -1 b) $-\frac{2}{3}$ c) 0 d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

161) (PUC-SP) Qual é a raiz real de $3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = 0$, se uma de suas raízes é $1 - i$?

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) -3 e) -1

162) (CESGRANRIO) O produto de duas das raízes da equação $2x^3 - 19x^2 + 37x - 14 = 0$ é 1. A soma das duas maiores raízes da equação é:

a) 7 b) 8 c) 9 d) 19/2 e) 19

163) (U.F. UBERLÂNDIA-MG) O número $2 + 3i$ é raiz da equação $x^2 + bx + c = 0$, com **b** e **c** reais. Podemos, então, afirmar que:

a) **b** é um número irracional
b) **c** é um número imaginário puro
c) **c** é um número irracional
d) **c** é um número ímpar
e) **c** é um número par

164) (CESGRANRIO) As raízes da equação $x^2 + bx + 47 = 0$ são inteiras. Podemos afirmar que:

a) a diferença entre as duas raízes tem módulo 46
b) a soma das duas raízes tem módulo 2
c) **b** é positivo
d) o módulo da soma das duas raízes é igual a 94
e) **b** é negativo

165) (MACKENZIE-SP) Sejam **a** e **b** as raízes da equação $x^2 - 3kx + k^2 = 0$, tais que $a^2 + b^2 = 1{,}75$. O valor de k^2 é:

a) $(1{,}75)^2$ b) 17,5 c) 175 d) 0,5 e) 0,25

166) (MACKENZIE-SP) Um valor de **k** para o qual uma das raízes da equação $x^2 - 3kx + 5k = 0$ é o dobro da outra é:

a) $\frac{5}{2}$ b) 2 c) -5 d) -2 e) $-\frac{5}{2}$

167) (F.M. SANTA CASA-SP) Seja a equação $x^3 + x^2 + kx + t = 0$, onde **k** e **t** são coeficientes reais. Se o complexo $1 - 2i$ é uma das raízes dessa equação, o produto das três raízes é:

a) -15 b) -12 c) -9 d) 9 e) 15

168) (CESGRANRIO) Se $z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ é um polinômio com coeficientes complexos, cujas raízes são todas de módulo menor do que 1, podemos afirmar que:

a) $|a_n| = 1$ b) $|a_n| < 1$ c) $|a_n| > 1$ d) $|a_n| = 0$ e) $|a_n| \neq 0$

169) (UNESP) As três raízes da equação $x^3 - 12x^2 + mx - 8 = 0$ estão em progressão aritmética. Então:

a) $m = 26$ b) $m = 28$ c) $m = 30$ d) $m = 32$ e) $m = 34$

170) (ITA-SP) Considere a equação $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, de coeficientes reais, cujas raízes estão em progressão geométrica. Qual das relações é verdadeira?

a) $p^2 = rq$ b) $2p + r = q$ c) $3p^2 = r^2q$ d) $p^3 = rq^3$ e) $q^3 = rp^3$

171) (ITA-SP) Sendo $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, o valor real de **m** para o qual a equação

$$x^3 - 9x^2 + (\log_e a^m + 8)x - \log_e a^m = 0$$

tenha raízes em progressão aritmética, é dado por:

a) $m = \log_e a - 8$ ou $m = -9a$

b) $m = \log_e a - 9$

c) $m = 15/\log_e a$

d) $m = -\frac{9}{8}\log_e a$

e) n.r.a.

172) (FEI-SP) Sendo **a**, **b** e **c** as raízes da equação $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$, o valor da expressão $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$ é:

a) 19 b) 31 c) $\frac{19}{4}$ d) $\frac{31}{4}$ e) n.r.a.

173) (MACKENZIE-SP) O determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a & a & -c \\ 0 & b & c \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 - 5x^2 + 4 = 0$ é:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) 3

174) (ITA-SP) Se **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 - rx + 20 = 0$, onde **r** é um número real, o valor de $a^3 + b^3 + c^3$ é:

a) -60 b) $62 + r$ c) $62 + r^2$ d) $62 + r^3$ e) $62 - r$

175) (ITA-SP) Seja $M = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, onde **a**, **b** e **c** são as raízes da equação $x^3 - \sqrt{3}\,x^2 + 54 = 0$. Então:

a) $\log_3 M$ é um número irracional

b) $\log_3 M$ é um número primo

c) $\log_3 M = \frac{5}{3}$

d) $\log_3 M = -\frac{5}{2}$

e) n.r.a.

176) (FATEC-SP) Sabe-se que x_1, x_2 e -2 são as raízes da equação

$$2x^3 + (4 - m)x^2 + x + 4m + 2 = 0$$

onde $m \in \mathbb{R}$. Se $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$, então:

a) $m = -1$ b) $m = \frac{1}{3}$ c) $m = 1$ d) $m = -\frac{1}{3}$ e) n.r.a.

177) (ITA-SP) Se as dimensões, em centímetro, de um paralelepípedo reto-retangular são dadas pelas raízes da equação $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 = 0$, então o comprimento da diagonal é igual a:

a) 7/12 cm b) 9/24 cm c) $\sqrt{24}/12$ cm d) $\sqrt{61}/12$ cm e) $\sqrt{73}/12$ cm

178) (U.F.MG) **Se a, b e c** são as raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$, então $\log\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ é igual a:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) n.r.a.

179) (ITA)-SP) **Sendo a, b, c e d as raízes da equação $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$, podemos** afirmar que:

a) **a, b, c e d são reais positivas**

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ é igual a $\frac{13}{5}$

c) **a, b, c e d não são reais**

d) $\frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc}$ é a soma das raízes

e) n.r.a.

180) (F.M. SANTA CASA-SP) Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Uma outra equação do terceiro grau, cujas raízes são $y_1 = x_2 \cdot x_3$, $y_2 = x_3x_1$ e $y_3 = x_1x_2$, é:

a) $y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0$
b) $y^3 + y^2 + 2y - 1 = 0$
c) $-2y^3 - y^2 + y + 1 = 0$
d) $y^3 - y^2 - 2y - 1 = 0$
e) n.r.a.

181) (CESCEM-SP) Dentre as frações $\frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{6}{10}, \frac{5}{11}, \frac{7}{12}, \frac{11}{13}, \frac{9}{15}, \frac{13}{16}$ podem ser raízes da equação $16x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + 45 = 0$ (**a**, **b**, **c**, **d** e **e** inteiros)

a) $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{8}$ b) $\frac{9}{15}$ e $\frac{7}{8}$ c) $\frac{3}{7}$ e $\frac{11}{13}$ d) $\frac{5}{11}$ e $\frac{7}{12}$ e) $\frac{13}{16}$ e $\frac{5}{11}$

182) (PUC-SP) Qual dos números abaixo é raiz da equação $15x^3 + 7x^2 - 7x + 1 = 0$?

a) $\frac{7}{15}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{1}{3}$

183) (ITA-SP) Calculando as raízes simples e múltiplas da equação

$$x^6 - 3x^5 + 6x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$$

podemos afirmar que esta equação tem:

a) uma raiz simples, duas duplas e uma tripla
b) uma raiz simples, uma dupla e uma tripla
c) duas raízes simples, uma dupla e uma tripla
d) duas raízes simples e duas duplas
e) duas raízes simples e uma tripla

184) (F.M. ABC-SP) A equação algébrica do terceiro grau, a coeficientes inteiros, da qual -1 e $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ são raízes é:

a) $x^3 - 1 = 0$
b) $x^3 + 1 = 0$
c) $x^3 - 2x - 1 = 0$
d) $x^3 + 2x - 1 = 0$
e) $x^3 - x^2 + x = 0$

185) (CESCEM-SP) Um polinômio de coeficientes inteiros tem uma raiz dupla igual a $a + \sqrt{b}$, onde **a** e **b** são números primos. Podemos concluir que este polinômio:

a) tem grau 2
b) tem grau pelo menos 4
c) tem uma única raiz complexa dupla
d) admite pelo menos uma raiz complexa
e) não existe

186) (MACKENZIE-SP) Considere as afirmações:

(I) Qualquer raiz racional da equação $x^3 + 3x^2 - 3x - 9 = 0$ é inteira.
(II) O menor grau da equação polinomial de coeficientes reais, que admite as raízes 3, $2 + i$ e $-i$, é 5.
(III) Toda equação polinomial da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, de coeficientes reais e $a \neq 0$, necessariamente possui raiz real.

Então:

a) todas as afirmações são verdadeiras
b) somente as afirmações I e II são verdadeiras
c) somente I e III são verdadeiras
d) somente II e III são verdadeiras
e) nenhuma afirmação é verdadeira

187) (PUC-SP) Os valores de **a**, **b** e **c**, de modo que a equação:

$$x^6 + 8ax^5 + (b - 2)x^4 + (4a + b + c)x^3 + 2ax^2 + (b - 2a)x - 1 = 0$$

seja recíproca, são:

a) $a = 1$; $b = 3$; $c = -\frac{1}{2}$
b) $a = 1$; $b = 2$; $c = 1$
c) $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = -1$
d) $a = -\frac{1}{2}$; $b = 1$; $c = 3$
e) $a = -\frac{1}{2}$; $b = 3$; $c = -1$

188) (ITA-SP) O valor absoluto da soma das duas menores raízes da equação:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$$

é:

a) 2
b) 3
c) $\frac{4 - \sqrt{3}}{2}$
d) 4
e) n.r.a.

189) (ITA-SP) Os valores reais de **a** e **b**, para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ tem duas raízes comuns, são:

a) $a = 1$; $b = 2$
b) $a = -1$; $b = 4$
c) $a = 5$; $b = 3$
d) $a = -4$; $b = 1$
e) n.r.a.

190) (MACKENZIE-SP) As equações $kx^3 - x^2 - x - (k + 1) = 0$ e $kx^2 - x - (k + 1) = 0$, ($k \in \mathbb{R}^*$), possuem uma raiz comum:

a) somente se $k = -1$
b) somente se $k = 3$
c) somente se $k = 4$
d) qualquer que seja $k \neq 0$
e) n.r.a.

191) (F.C. CHAGAS-SP) Se as equações $x^3 + ax + b = 0$ e $x^2 + x - 2 = 0$ têm duas soluções comuns, os números **a** e **b** são tais que:

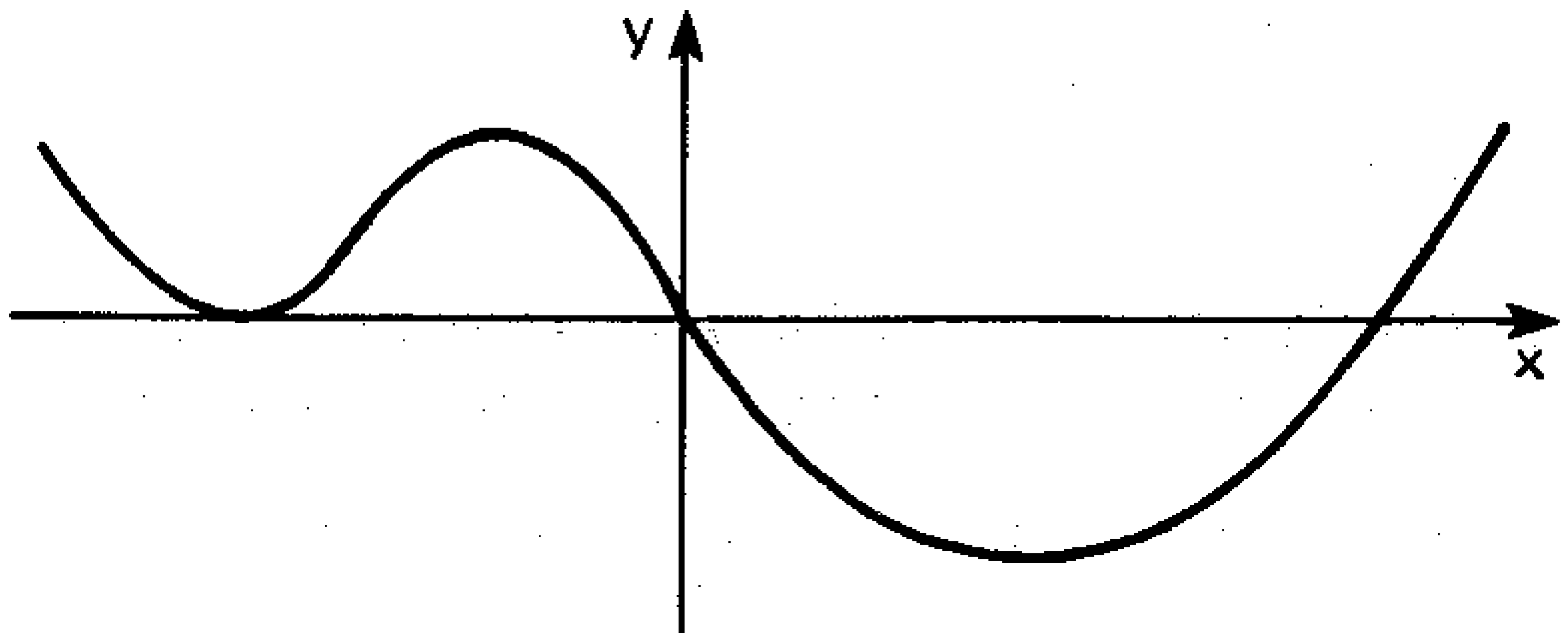
a) $a + b = 1$ b) $a \cdot b > 4$ c) $\frac{a}{b} < -1$ d) $(a - b)^{-1} = 5$ e) $\log b^a > 0$

192) (F.F.C.L.-USP) Se $(x - \alpha)$ é mdc de $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ e de $Q(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$, então:

a) α é raiz simples de P(x)
b) α é raiz dupla de P(x)
c) α é raiz tripla de P(x)
d) α não é raiz de P(x)
e) n.r.a.

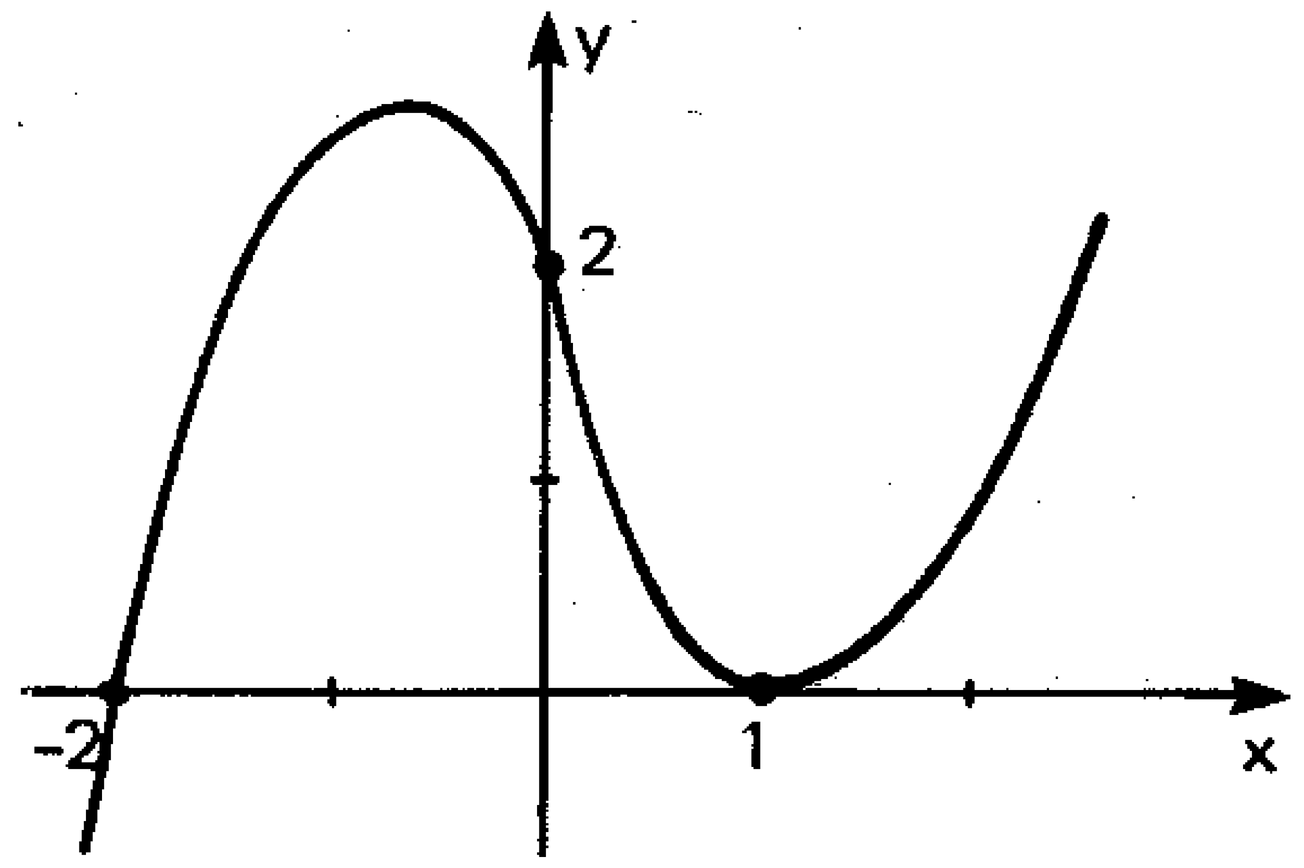
193) (CESCEM-SP) O gráfico abaixo é o de um polinômio cujas raízes reais estão todas no trecho desenhado. Esse polinômio:

a) pode ser do 3.° grau
b) pode ser do 5.° grau
c) pode ser do 6.° grau
d) pode ser quadrado perfeito
e) n.r.a.



194) (PUC-RS) O gráfico da figura é de uma função f: IR → IR, em que f(x) é um polinômio do terceiro grau. Para f(x), afirmamos:

(I) O termo independente é igual a 2.
(II) Suas raízes são −2, 2 e 1.
(III) Suas raízes são −2, −2 e 1.
(IV) Suas raízes são −2, 1 e 1.



Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

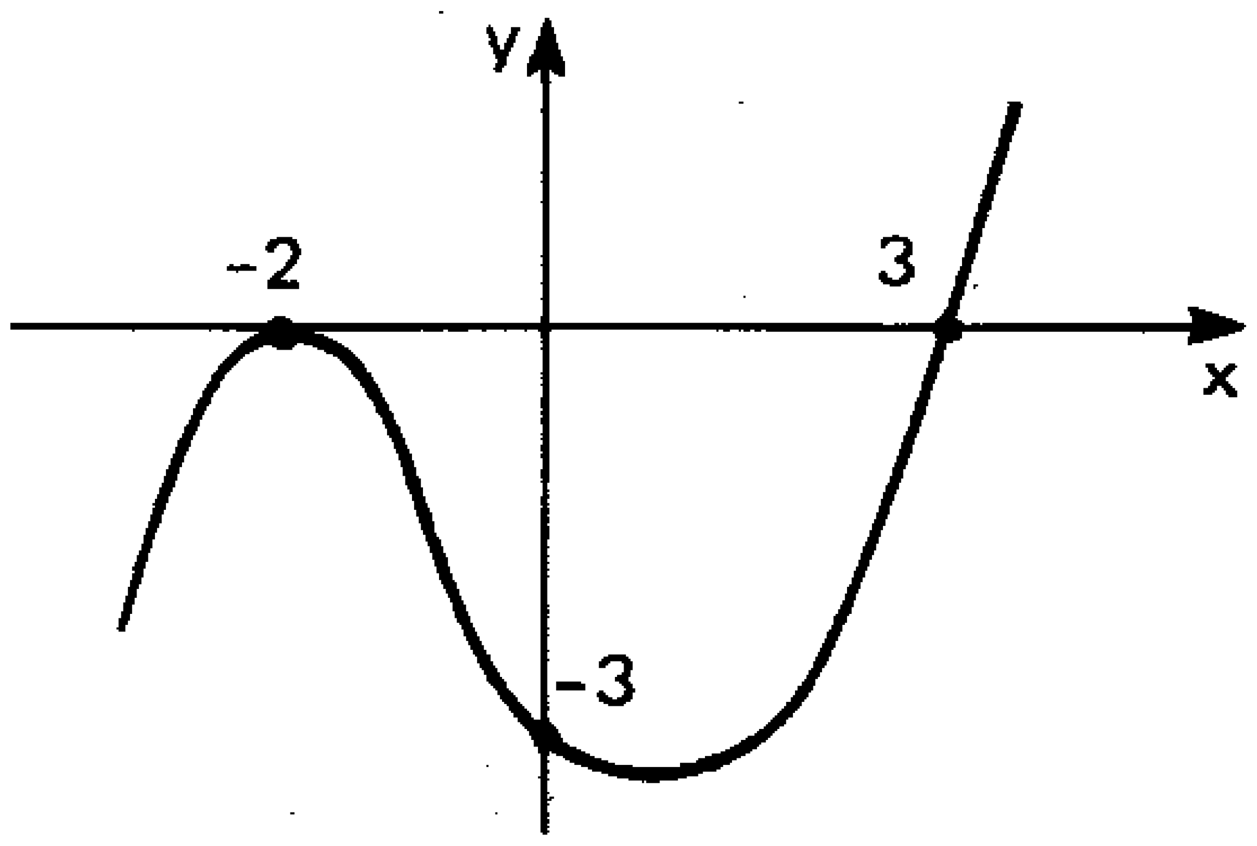
a) II b) III c) I e II d) I e III e) I e IV

195) (CESCEM-SP) Sobre o polinômio P(x), de grau 3, cujo gráfico está esboçado na figura, fazemos as afirmações:

(I) P(x) tem uma raiz igual a −2, uma raiz igual a 3 e uma raiz imaginária.
(II) P(x) tem termo independente igual a −3.
(III) P(x) tem uma raiz real e duas imaginárias.

Podemos dizer que:

a) somente I é correta
b) somente II é correta
c) somente III é correta
d) apenas I e II são corretas
e) apenas II e III são corretas



196) (PUC-CAMPINAS-SP) O polinômio $P(x) = x^4 - x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}$ tem:

a) duas raízes reais no intervalo fechado $[1; 3]$
b) duas raízes reais no intervalo fechado $[-1; 0]$
c) pelo menos uma raiz real no intervalo aberto $\left]0; \frac{2}{3}\right[$
d) pelo menos uma raiz real no intervalo aberto $]2; 3[$
e) n.r.a.

197) (ITA-SP) A equação $3x^5 - x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$ possui:

a) três raízes imaginárias e duas reais
b) pelo menos uma raiz real positiva
c) todas as raízes inteiras
d) uma raiz imaginária
e) n.r.a.

198) (CEUB-DF) Determine **m** de modo que a equação $x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x + (m - 3) = 0$ tenha ao menos uma raiz real compreendida entre 0 e 2:

a) $-1 \leqslant m \leqslant 4$ b) $-5 \leqslant m \leqslant 5$ c) $-2 \leqslant m \leqslant 2$ d) $-3 < m < 3$

199) (F.M. SANTA CASA-SP) Admitamos $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ um polinômio de coeficientes reais que tem apenas raízes imaginárias. Então, para um intervalo aberto qualquer $]a; b[$, onde **a** e **b** são reais, temos:

a) $P(a) + P(b) = 0$
b) $P(a) \cdot P(b) < 0$
c) $P(a) \cdot P(b) > 0$
d) $\frac{P(a)}{P(b)} = 1$
e) n.r.a.

200) (ITA-SP) O conjunto dos valores de **k** para os quais $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - k$ tem uma ou três raízes reais entre 1 e 2 é:

a) $k < 2$ b) $1 < k < 2$ c) $2 > k$ ou $k > 6$ d) $k > 7$ e) n.r.a.

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

CAPÍTULO 1

1.7) a) $S = \{-3i;\ 3i\}$
b) $S = \{-i\sqrt{5};\ i\sqrt{5}\}$
c) $S = \{-1;\ 1;\ -i;\ i\}$
d) $S = \{-4;\ 4;\ -4i;\ 4i\}$

1.8) a) $S = \{1 + i;\ 1 - i\}$
b) $S = \left\{2 + \frac{1}{2}i;\ 2 - \frac{1}{2}i\right\}$
c) $S = \{3 + 2i\sqrt{2};\ 3 - 2i\sqrt{2}\}$
d) $S = \{5 + i\sqrt{15};\ 5 - i\sqrt{15}\}$

1.9) $S = \left\{-1;\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

1.10) Faça as substituições.

1.14) a) $(-1;\ 2)$
b) $(-1;\ 5)$
c) $(6;\ -10)$
d) $(30;\ 18)$
e) $(12;\ -16)$
f) $(-24;\ 8)$
g) $(-3;\ -4)$

1.15) a) $x = 0;\ y = \frac{5}{2}$ b) $x = 5;\ y = -2$

1.16) a) $z = (-5;\ 5)$
b) $z = \left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$
c) $z = \left(\frac{21}{5};\ -\frac{27}{5}\right)$
d) $z = \left(\frac{1}{25};\ \frac{3}{25}\right)$

1.17) $S = \{(2;\ -2);\ (-2;\ 2)\}$

1.19) a) $\left(\frac{12}{13};\ \frac{-5}{13}\right)$ b) $\left(\frac{1}{5};\ 0\right)$ c) $\left(0;\ -\frac{1}{3}\right)$

1.20) a) $\left(\frac{17}{13};\ \frac{7}{13}\right)$ b) $(0;\ -1)$ c) $(0;\ 1)$

1.21) O inverso de $z = (a; b)$ é $z^{-1} = (c; d) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}; \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

Da definição de igualdade, vem que $c = \frac{a}{a^2 + b^2}$ e $d = \frac{-b}{a^2 + b^2}$. Então:

$$[a^2 + b^2] \cdot [c^2 + d^2] = [a^2 + b^2] \cdot \left[\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)^2\right] =$$

$$= [a^2 + b^2]\left[\frac{a^2 + b^2}{(a^2 + b^2)^2}\right] = \frac{[a^2 + b^2]^2}{(a^2 + b^2)^2} = 1$$

1.22) $z = (-6; 6)$

CAPÍTULO 2

2.11) a) $4 + 4i$ b) $-4 - 18i$ c) $-27 + 5i$ d) -5 e) $16 + 28i$ f) $28 - 30i$

2.12) a) $-243i$ b) -4 c) $-8i$ d) $-32i$

2.13) a) $x = \pm 2$ b) $x \neq 2$ e $x \neq -2$ c) $x = \frac{3}{4}$

2.14) $x^2 + y^2 \neq 0$

2.15) a) $a \geqslant 5$ b) $-3 < a < 3$ c) $a \leqslant -3$ ou $3 \leqslant a < 5$

2.16) a) $x = 11$ e $y = -1$ b) $\left(x = \frac{1}{2} \text{ e } y = 1\right)$ ou $\left(x = -\frac{1}{2} \text{ e } y = -1\right)$

2.17) a) $x = -3$ b) Não existe x.

2.18) a) $z = 2 + i$ ou $z = -2 - i$ b) $z = -3$ ou $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

2.19) a) $z = 1 + i\sqrt{2}$ ou $z = 1 - i\sqrt{2}$ b) $z = -7 + i$ ou $z = -7 - i$

2.20) Seja $x = yi$, $(y \neq 0)$, o imaginário puro raiz da equação. Então:

$$(yi)^2 + (a + bi)\,yi + c + di = 0$$
$$-y^2 + ayi - by + c + di = 0$$
$$(-y^2 - by + c) + (ay + d)\,i = 0 + 0i$$

Portanto:

$$\begin{cases} -y^2 - by + c = 0 & \text{(I)} \\ ay + d = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (II), $y = -\frac{d}{a}$; substituindo em (I):

$$-\left(-\frac{d}{a}\right)^2 - b\left(-\frac{d}{a}\right) + c = 0 \Rightarrow -d^2 + abd + a^2c = 0$$

Logo: $abd = d^2 - a^2c$.

2.21) a) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ b) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$

2.22) $a + bi = \text{sen}\,\alpha \cos\alpha - i\,\text{sen}^2\alpha + i\cos^2\alpha - i^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha$

$a + bi = (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha) + (\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)\,i$

$a + bi = \text{sen}\,2\alpha + i\cos 2\alpha$

Então: $a = \text{sen}\,2\alpha$ e $b = \cos 2\alpha$;

logo: $a^2 + b^2 = \text{sen}^2\,2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1,\ \forall\alpha \in \mathbb{R}$.

2.23) $z = (1 + i\,\text{tg}\,\alpha)(1 - i\,\text{tg}\,\alpha) = 1 - i^2\,\text{tg}^2\,\alpha$

$z = (1 + \text{tg}^2\,\alpha) + 0i = \sec^2\alpha + 0i$

Então: $\text{Im}(z) = 0$ e $\text{Re}(z) = \sec^2\alpha$.

Como, na Trigonometria, $\sec\alpha \leqslant -1$ ou $\sec\alpha \geqslant 1$, temos $\sec^2\alpha \geqslant 1$, isto é, $\text{Re}(z) \geqslant 1$.

2.26) a) -1 b) $-i$ c) 1 d) i e) $2 - 3i$ f) -16384

2.27) a) $A = \pm 1$ b) $A = 1 + i;\ -1 + i;\ -1 - i;\ 1 - i$ c) $A = \pm i$

2.28) um só valor ($A = 0$)

2.29) a) $m + n = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$ b) $m - n = 4k + 3,\ k \in \mathbb{Z}$

2.37) a) $\frac{7}{13} + \frac{4}{13}i$ b) $\frac{7}{10} - \frac{31}{10}i$ c) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$ d) i e) $(\sqrt{3} + 2) + (\sqrt{3} - 2)\,i$ f) $-3 + 3i$

2.38) a) $\frac{i}{3}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ c) $-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$ d) $\cos x - i\,\text{sen}\,x$

2.39) a) $x = \pm 2\sqrt{2}$ b) $x \neq -5,\ x \neq 2\sqrt{2}$ e $x \neq -2\sqrt{2}$

2.40) $ac = -bd$ e $bc \neq ad$

2.41) $w = -i$ ou $w = 4i$

2.42) $\frac{z^2 + 1}{z} = \frac{(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)^2 + 1}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} =$

$$= \frac{\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha \overbrace{-\ \text{sen}^2\alpha + 1}^{\cos^2\alpha}}{\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{(2\cos^2\alpha + 2i\cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)}{(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos^3\alpha - 2i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 2i\cos^2\alpha\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\alpha\,\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha} =$$

$$= 2\cos\alpha(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) + 0i = 2\cos\alpha \in \mathbb{R}$$

2.43) $\frac{1+z}{1+\bar{z}} = \frac{1+\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha - i\cos\alpha} \cdot \frac{1+\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha} = \frac{[(1+\text{sen}\,\alpha) + i\cos\alpha]^2}{(1+\text{sen}\,\alpha)^2 + \cos^2\alpha} =$

$$= \frac{1 + 2\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}^2\,\alpha + 2\,(1+\text{sen}\,\alpha)\,i\cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 2\,\text{sen}\,\alpha + \underbrace{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha}_{1}} =$$

$$= \frac{1 + 2\,\text{sen}\,\alpha + \text{sen}^2\,\alpha - (1 - \text{sen}^2\,\alpha) + 2\,(1+\text{sen}\,\alpha)\,i\cos\alpha}{2 + 2\,\text{sen}\,\alpha} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\,\alpha + 2\,\text{sen}^2\,\alpha}{2\,(1+\text{sen}\,\alpha)} + \frac{2\,(1+\text{sen}\,\alpha)\,i\cos\alpha}{2\,(1+\text{sen}\,\alpha)} = \text{sen}\,\alpha + i\cos\alpha = z$$

2.44) a) $z = -4 - i$

b) $z = 5 + 10i$

c) $z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z = a(1+i),\ \forall a \in \mathbb{R}$

2.45) a) $z = 4 - i$ b) $z = -\frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$ c) $z = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

2.46) a) $4 - 2i$ c) $5 - 5i$ e) i
b) $4 - 2i$ d) $5 - 5i$ f) i

2.47) Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, **a**, **b**, **c** e **d** reais.

1.º) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a+bi) + (c+di)} = \overline{(a+c) + (b+d)i} =$
$= (a+c) - (b+d)i = a + c - bi - di =$
$= (a - bi) + (c - di) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

2.º) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(a+bi)(c+di)} = \overline{ac + adi + bci - bd} =$
$= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i$

$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{(a+bi)} \cdot \overline{(c+di)} = (a - bi)(c - di) =$
$= ac - adi - bci - bd = (ac - bd) - (ad + bc)i$

Logo: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

3.º) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(\frac{a+bi}{c+di}\right)} = \overline{\left[\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}\right]} = \overline{\left[\frac{ac - adi + bci + bd}{c^2 + d^2}\right]} =$

$$= \overline{\left[\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\right]} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \frac{\overline{a+bi}}{\overline{c+di}} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{(a-bi)(c+di)}{(c-di)(c+di)} =$$

$$= \frac{ac + adi - bci + bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Logo: $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},\ z_2 \neq 0$

2.48) Utilizando o **Princípio da Indução Matemática**, temos:

Teorema 1: a igualdade se verifica para n = 0, pois:

$$\overline{(z^0)} = \overline{1} = 1 \text{ e } (\overline{z})^0 = 1$$

Teorema 2: admitindo que a igualdade é verdadeira para **n**, vamos provar que é verdadeira para n + 1, isto é:

$$\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n \Rightarrow \overline{(z^{n+1})} = (\overline{z})^{n+1}$$

$$\overline{(z^{n+1})} = \overline{z^n \cdot z^1} = \overline{(z^n)} \cdot \overline{(z^1)} = (\overline{z})^n \cdot (\overline{z})^1 = (\overline{z})^{n+1}$$

Está então provado que $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$.

2.49) $2(\overline{z})^3 + 3(\overline{z})^2 = 2\overline{(z^3)} + 3\overline{(z^2)} = \overline{2z^3} + \overline{3z^2} = \overline{2z^3 + 3z^2} = \overline{a + bi} = a - bi$

2.50) Como **z** é raiz, temos $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$. Substituindo no primeiro membro da equação dada **x** por **z**, temos:

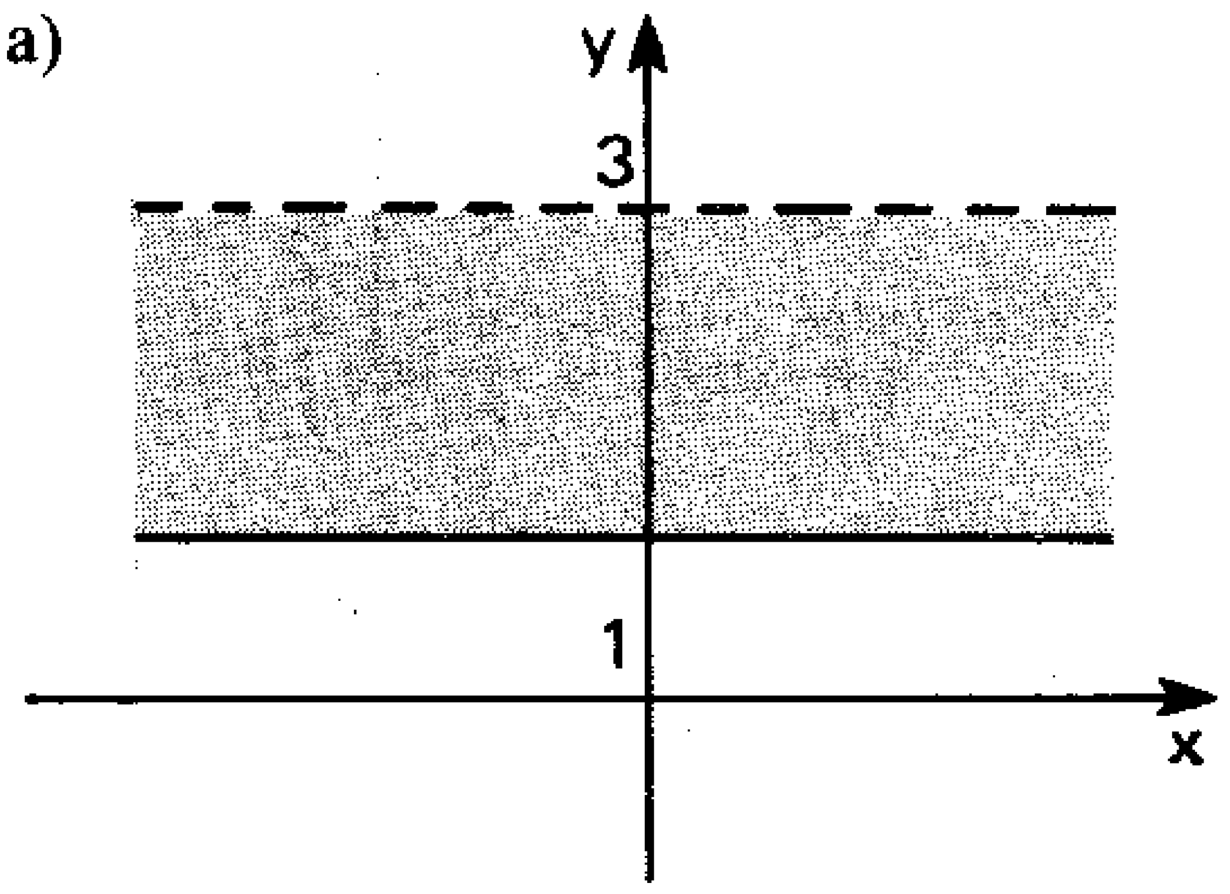
$$\alpha(\overline{z})^2 + \beta\overline{z} + \gamma = \alpha\overline{(z^2)} + \beta\overline{z} + \gamma = \overline{\alpha z^2} + \overline{\beta z} + \overline{\gamma} = \overline{\alpha z^2 + \beta z + \gamma} = \overline{0} = 0$$

Logo: $\overline{z}$ é raiz de (E).

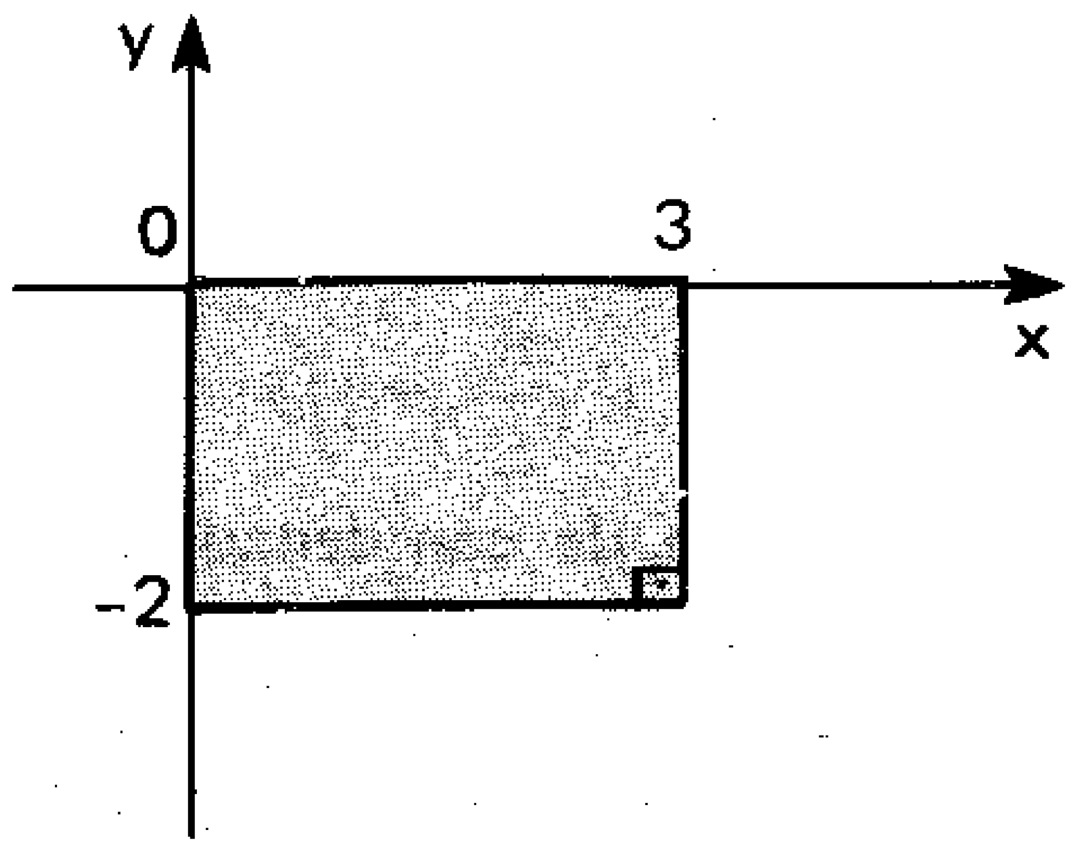
CAPÍTULO 3

3.2)

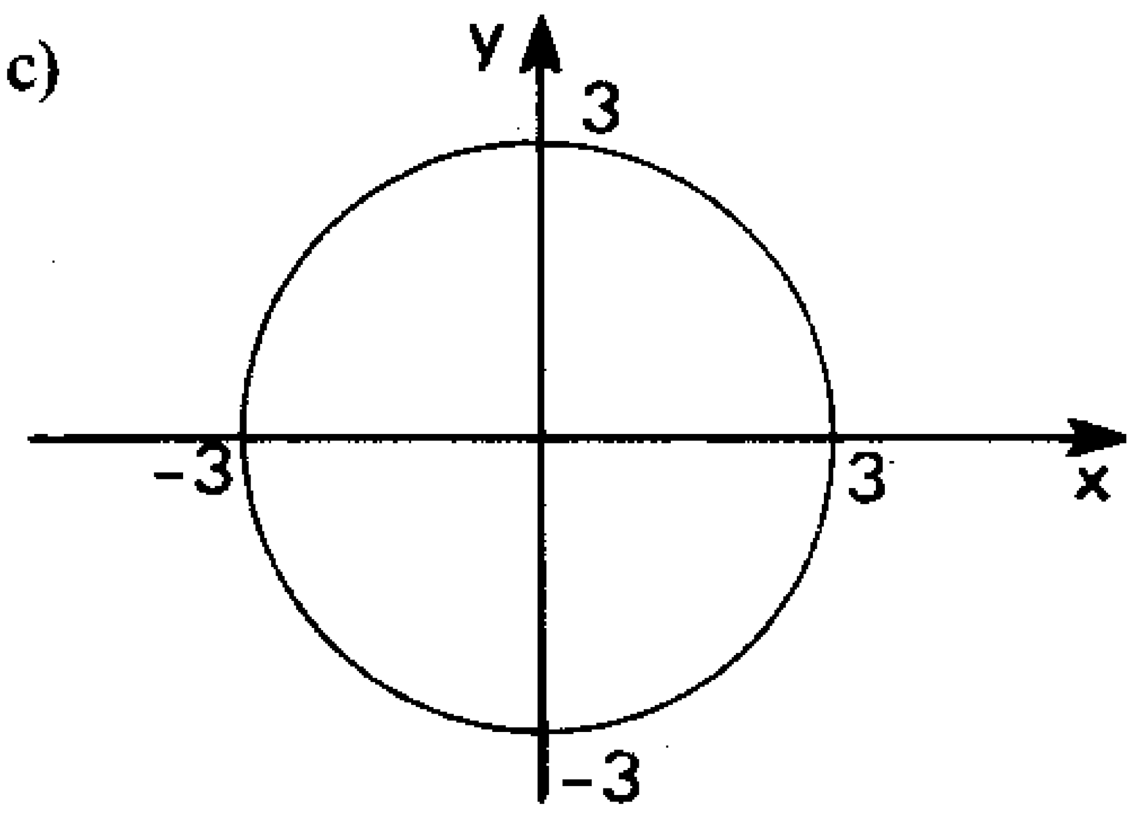
a)



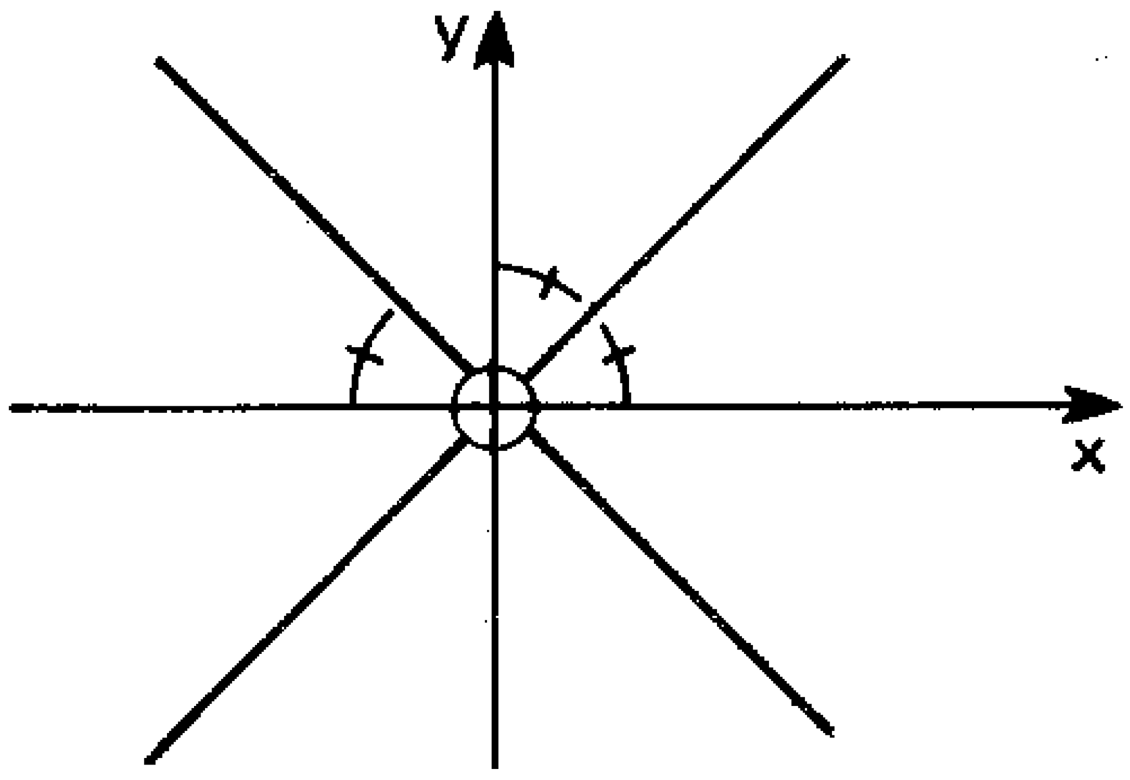
b)



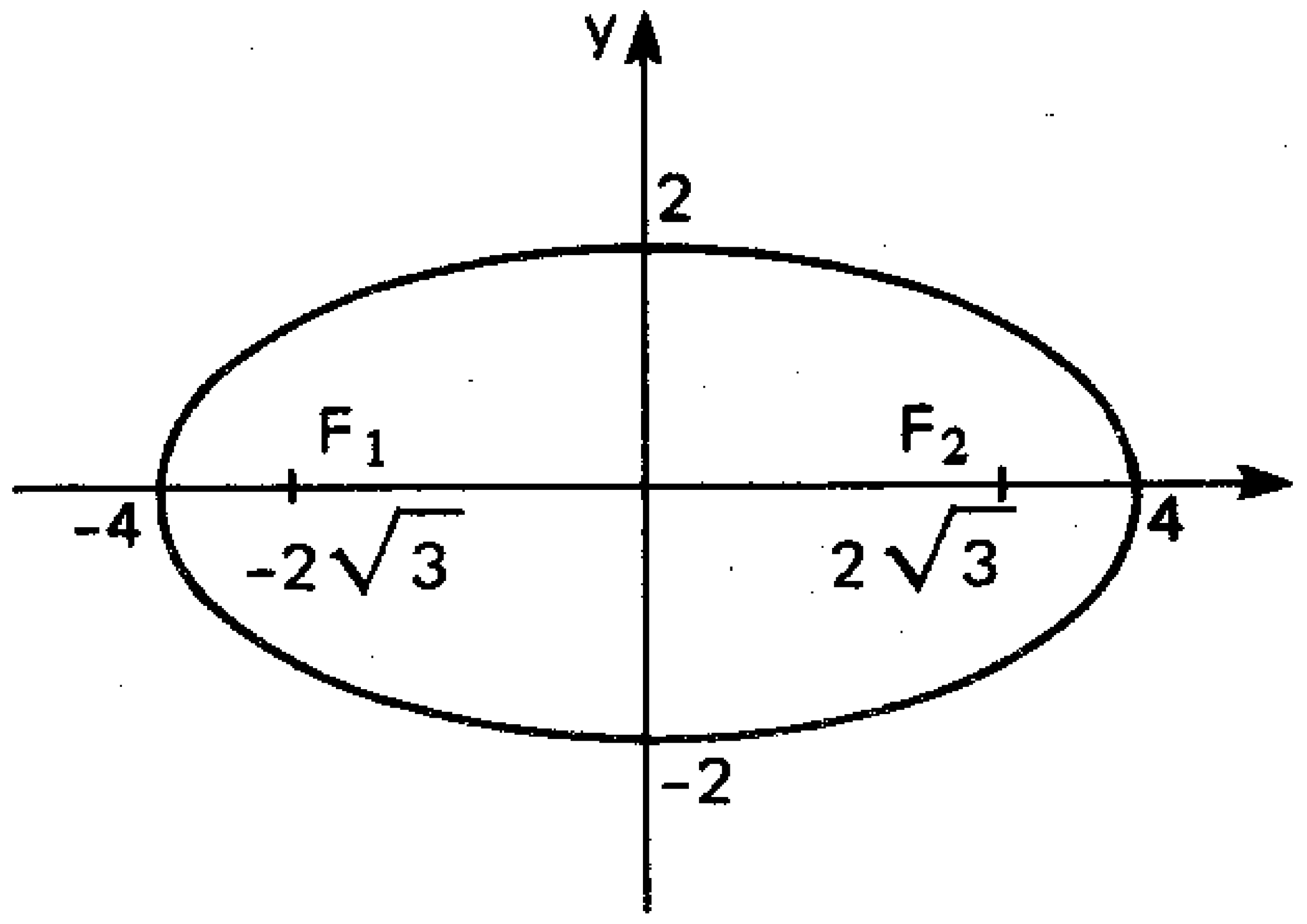
c)



3.3) O lugar é a reunião das bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares, excetuando-se a origem **O**.



3.4)



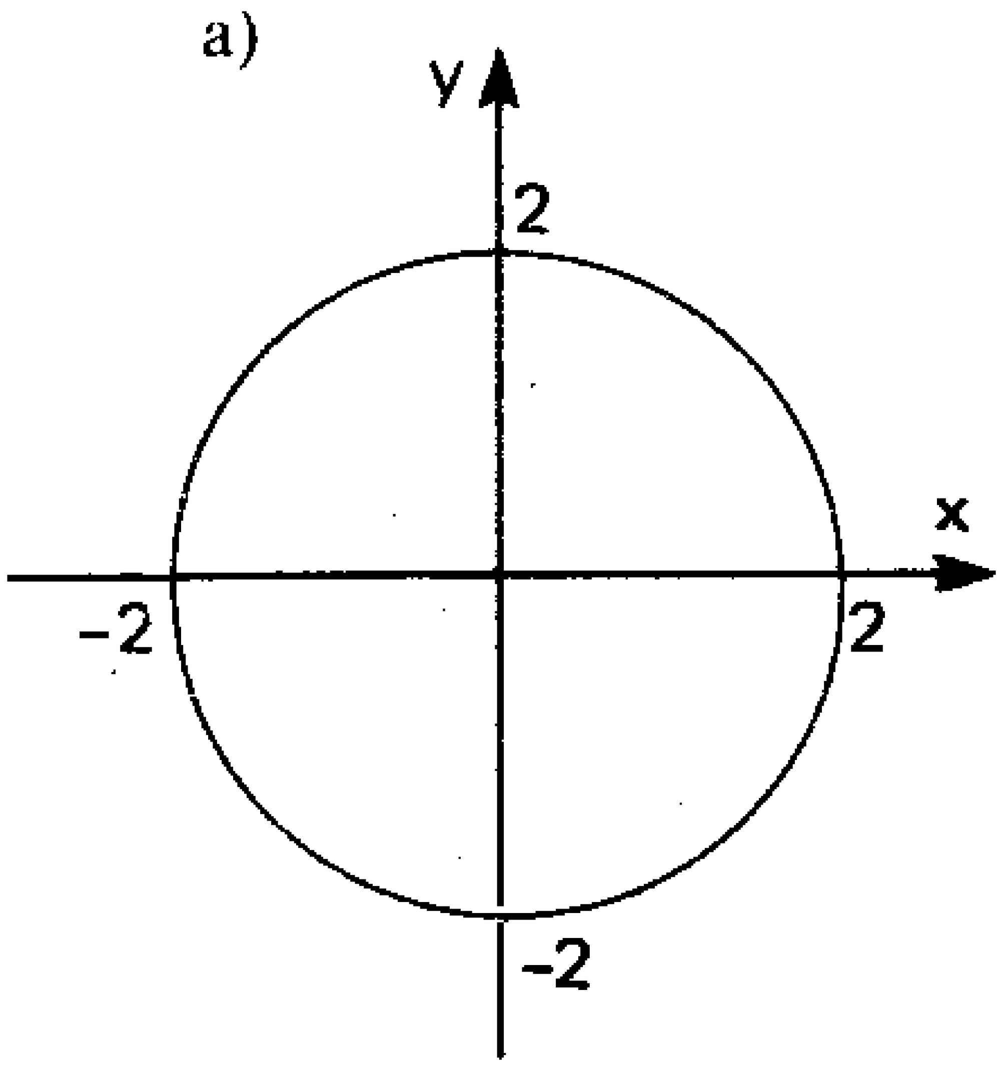
Elipse da equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

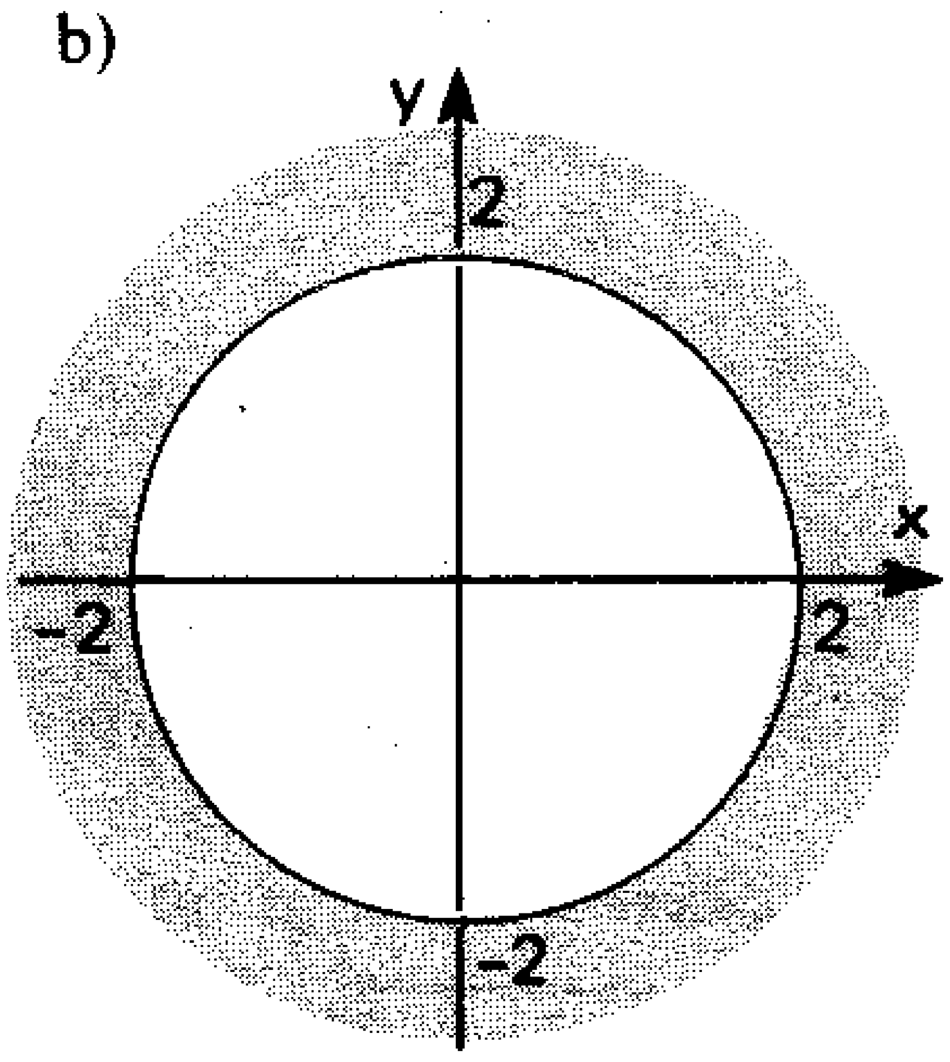
3.12) a) 25 b) $\sqrt{26}$ c) 10 d) 16

3.13)

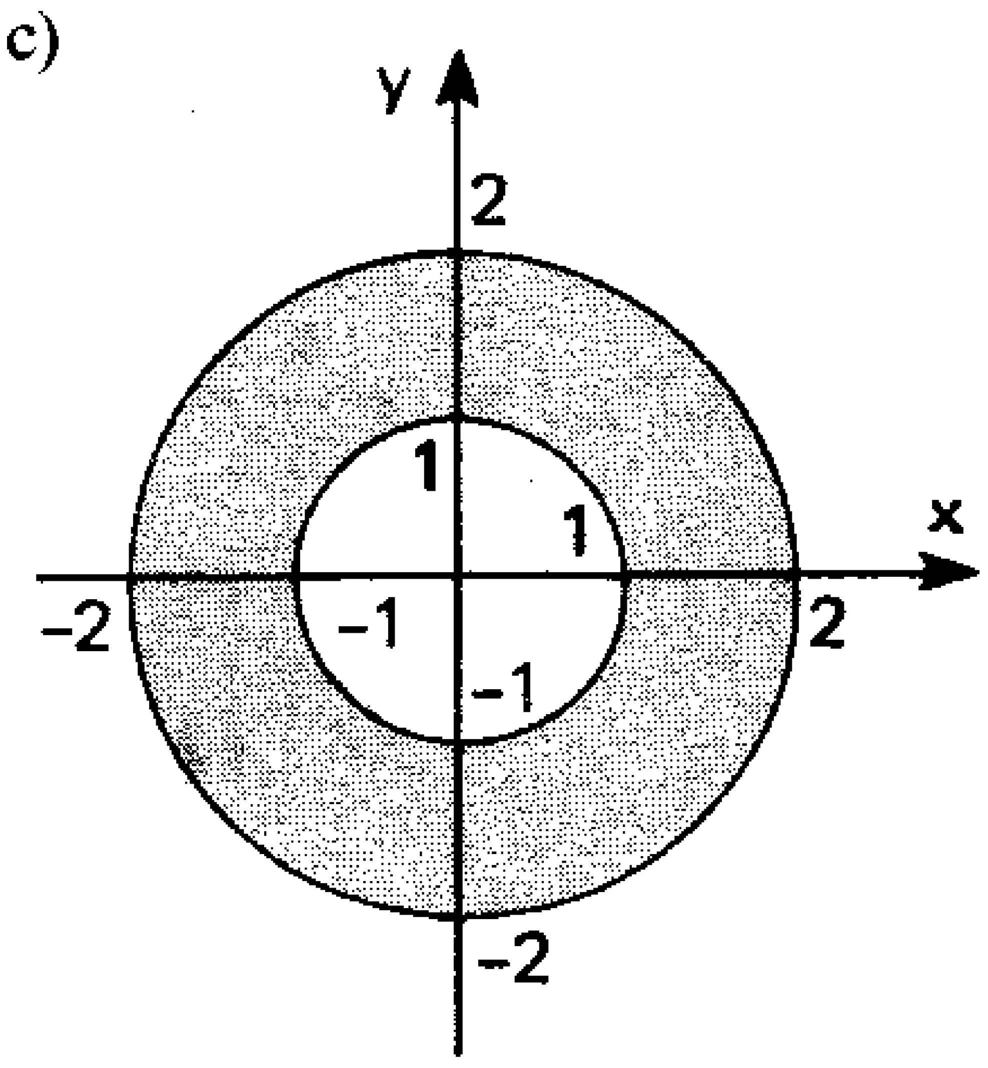
a)



b)



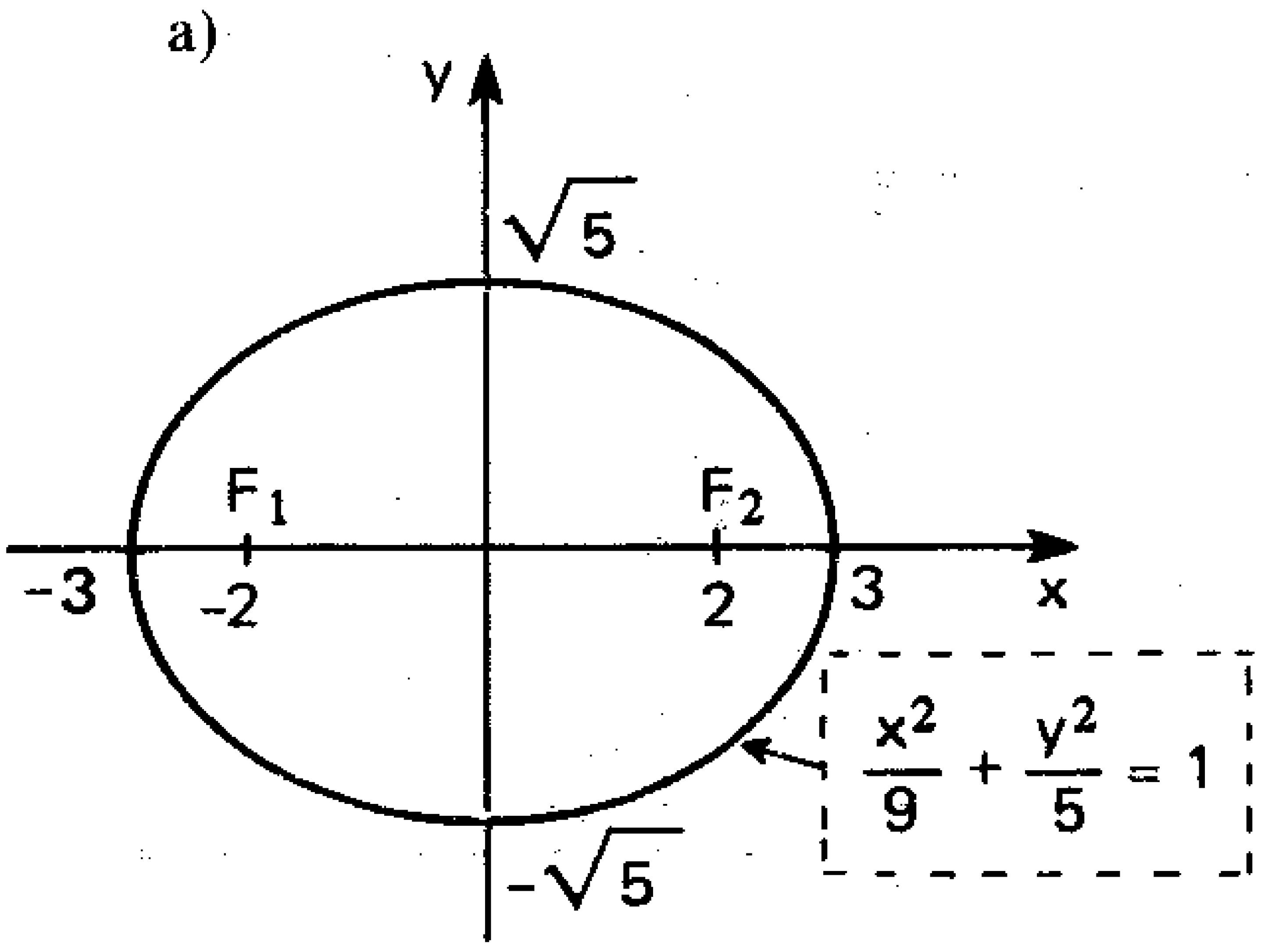
c)



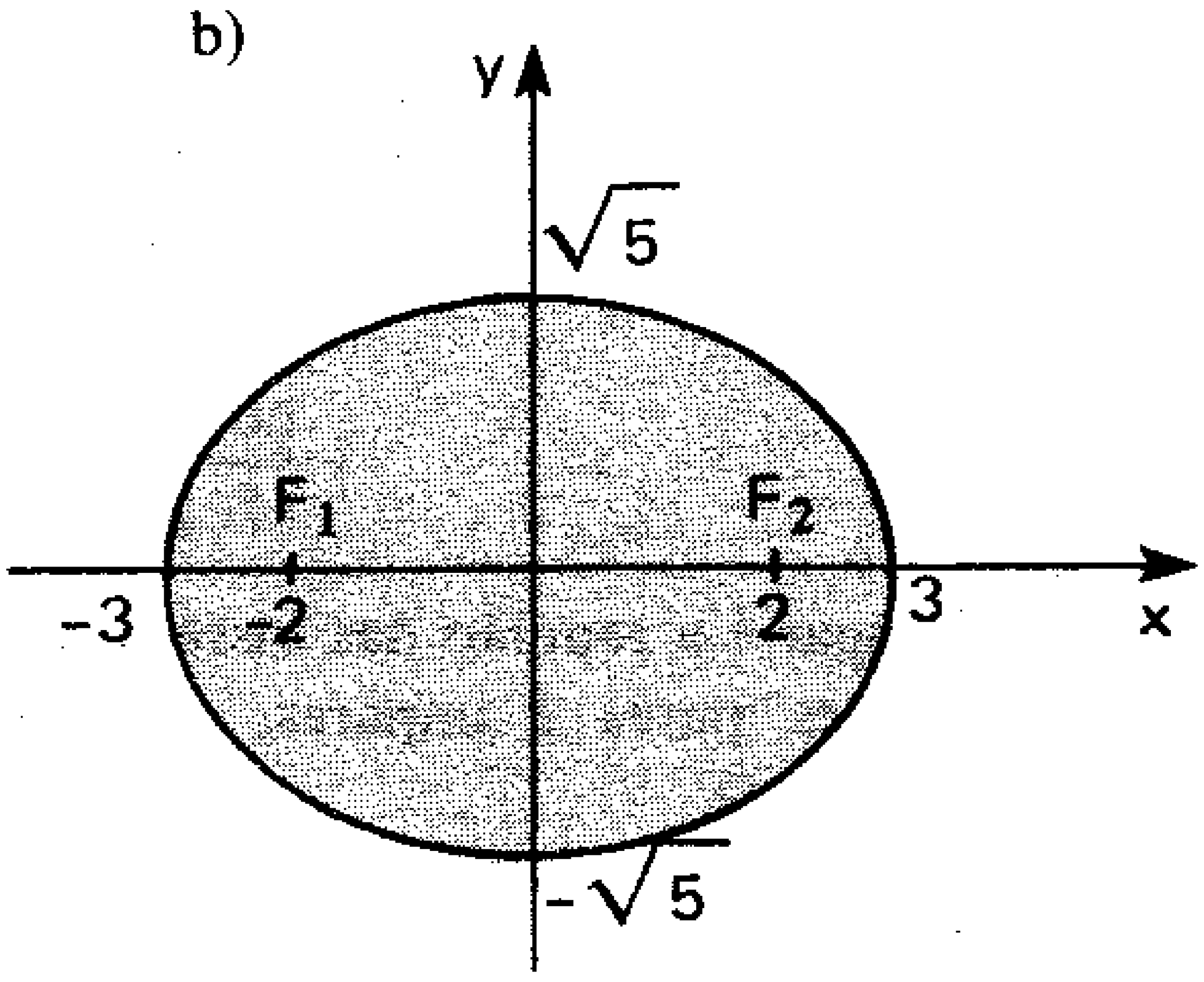
3.14) a) o ponto de coordenadas (– 3; 4)
b) reta de equação 4x + 6y – 5 = 0
c) circunferência de centro **C**(1; – 2) e raio r = 2
d) círculo de centro **C**(1; – 2) e raio r = 2

3.15)

a)



b)



3.16) $|z| = 2\sqrt{2}$

3.17) $\text{Re}\left(\frac{z}{w}\right) = 4$

3.20) Escrevendo $|z - w|$ como $|z + (-w)|$ e utilizando a desigualdade triangular, temos:

$$|z - w| = |z + (-w)| \leqslant |z| + |-w|$$

Assim,

$$|z - w| \leqslant |z| + |(-1) \cdot w|$$
$$|z - w| \leqslant |z| + |-1| \cdot |w|$$

Logo: $|z - w| \leqslant |z| + |w|$

3.21) Pela desigualdade triangular, podemos escrever:

$$|z_1 + (z_2 + z_3)| \leqslant |z_1| + |z_2 + z_3| \qquad \text{(I)}$$

e

$$|z_2 + z_3| \leqslant |z_2| + |z_3| \qquad \text{(II)}$$

Somando membro a membro (I) e (II), temos:

$$|z_1 + (z_2 + z_3)| + |z_1 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2 + z_3| + |z_2| + |z_3|$$

Logo: $|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|$

CAPÍTULO 4

4.1) a) $z = 3(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

b) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$

c) $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$

d) $z = 6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $z = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi$

f) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$

g) $z = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

h) $z = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$

4.2) a) $z = 3 + 3\sqrt{3}i$

b) $z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

c) $z = -\sqrt{3} - i$

4.3) Escrevendo $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, temos: $x^2 = \rho^2(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^2 = \rho^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + i \cdot 2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta)$.

Como $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta$ e $2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$, vem:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$$

Logo: o argumento de z^2 é 2θ.

4.4) Sejam $z_1 = \rho(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = \rho(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$.
Como $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$, podemos escrever:

$$z_2 = \rho[\cos(2\pi - \theta_1) + i \operatorname{sen}(2\pi - \theta_1)]$$

Mas, $\cos(2\pi - \theta_1) = \cos\theta_1$ e $\operatorname{sen}(2\pi - \theta_1) = -\operatorname{sen}\theta_1$.

Então: $z_2 = \rho[\cos\theta_1 + i(-\operatorname{sen}\theta_1)] = \rho\cos\theta_1 - i\rho\operatorname{sen}\theta_1 = \overline{z_1}$

5.5) a) $2^{15} \cdot i$ b) 1 c) $-\frac{i}{2^{27}}$ d) $-\frac{1}{2^{11}} + \frac{\sqrt{3}}{2^{11}}i$

5.6) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

5.7) a) Sendo $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, temos $z^3 = \cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta$ e, também:

$$\begin{aligned} z^3 &= (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^3 = \\ &= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + 3\,i^2\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta + i^3 \operatorname{sen}^3\theta = \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta) + i\,(3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta) \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \\ \operatorname{sen}^3\theta &= 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta \end{aligned}$$

b) $\operatorname{sen} 4\theta = 4 \operatorname{sen}\theta \cos\theta(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$; $\cos 4\theta = \cos^4\theta + \operatorname{sen}^4\theta - 6\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta$

5.8) Sendo $(1 + i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, temos:

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$$

Para que $(1 + i)^n$ seja imaginário puro, devemos ter $\cos\frac{n\pi}{4} = 0$; logo, $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde $\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + k$ e, assim, $n = 2 + 4k$, expressão que representa termos de uma PA de razão $r = 4$.

5.9) a) 6 b) 3

5.10) a) 3 b) 9

5.15) a) $\pm(\sqrt{6} + i\sqrt{2})$

b) $3i$; $\pm\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

c) $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\,i$

5.16) a) $2i$; $\pm\sqrt{3} - i$

b) 1; -1; $\pm\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

5.17) a) $S = \left\{3;\ -\frac{3}{2} \pm \frac{3\sqrt{3}}{2}i;\ -2;\ 1 \pm \sqrt{3}\,i\right\}$

b) $S = \left\{\frac{3}{2} + 2i; -\frac{3}{2}\right\}$

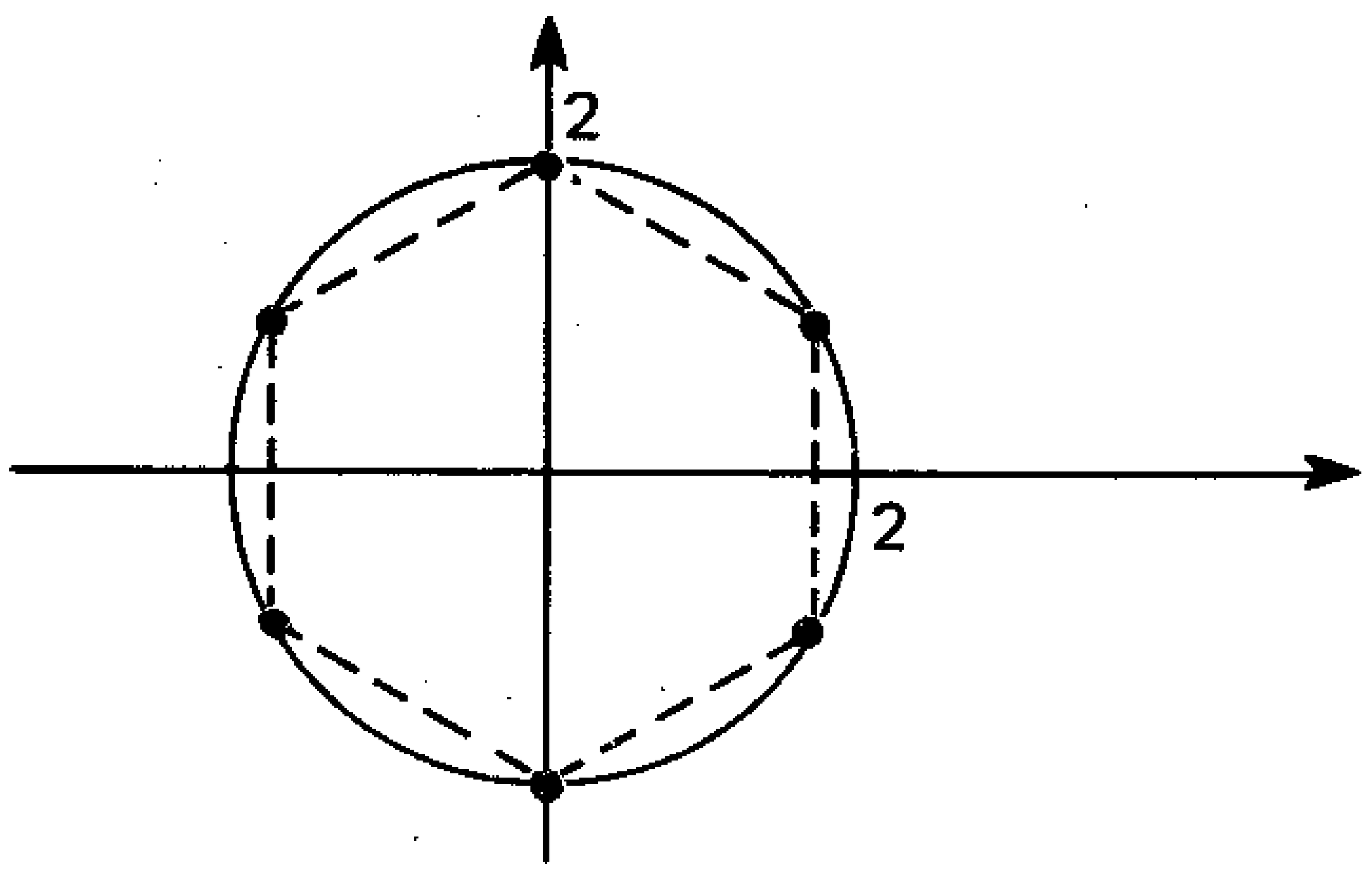
5.18) $-4 \pm 4\sqrt{3}\,i$

5.19) $3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$3\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

5.20)



CAPÍTULO 6

6.6) $f(2) = 18$

6.7) $f(1 + 2i) = -12 - 2i$

6.8) 2 é raiz

6.9) $a = 2$, $b = -1$ e $c = -3$

6.10) $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$

6.11) zero

6.12) $a = -1$ e $b = 0$

6.13) Temos, sucessivamente:

$$\frac{b}{2}x_1^2 + \frac{a}{3}x_1^3 + \frac{b}{2}x_2^2 + \frac{a}{3}x_2^3 = 2\left[\frac{b}{2}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \frac{a}{3}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^3\right]$$

$$\frac{b}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{a}{3}(x_1^3 + x_2^3) = \frac{b}{2}\,\frac{(x_1 + x_2)^2}{2} + \frac{a}{3}\,\frac{(x_1 + x_2)^3}{4}$$

$$\frac{a}{3}\left[x_1^3 + x_2^3 - \frac{(x_1 + x_2)^3}{4}\right] + \frac{b}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2}\right] = 0$$

$$a[x_1(x_1^2 - x_2^2) - x_2(x_1^2 - x_2^2)] + b(x_1 - x_2)^2 = 0$$

e, sendo $x_1 \neq x_2$:

$$a[x_1(x_1 + x_2) - x_2(x_1 + x_2)] + b(x_1 - x_2) = 0$$
$$a[(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)] + b(x_1 - x_2) = 0$$
$$a(x_1 + x_2) + b = 0, \text{ etc.}$$

7.8) $a = 8$, $b = -9$ e $c = 8$

7.9) a) $2x^6 - 7x^5 + 6x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 1$
b) $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3x + 1$

7.10) a) $P(0) = 3$, $P(1) = 2$ e $P(2) = 1$
b) $\partial[P(x)] = \partial[P(2 - x)]$

$$\left.\begin{array}{l}\partial[P(x) + x_1 \cdot P(2 - x)] = 2 \\ \partial[x \cdot P(2 - x)] < \partial[P(x)]\end{array}\right\} \Rightarrow \partial[x_1 \cdot P(x)] = 2 \Rightarrow \partial[P(2 - x)] = 1$$

e daí: $\partial[P(x)] = 1$

7.11) $3 \leqslant n \leqslant 6$

7.12) $b = 3$, $c = d = 2$

7.13) Efetue as operações.

7.14) $a = \dfrac{16}{3}$ e $b = \dfrac{16}{9}$

7.15) 1.º) Desenvolva os quadrados e aplique o resultado do exercício 7.4: $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$.

2.º) Aplique o item 1.º.

7.16) Observe que a soma S_n dos **n** primeiros termos de uma PA é um polinômio em **n**; identifique-o com $\dfrac{1}{2}n^2$. Daí: $a_1 = \dfrac{1}{2}$ e $r = 1$.

7.17) $g(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x$; veja exercício 7.3.

7.18) $P(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{3}x$; veja exercício 7.3.

7.19) $\left(a = \dfrac{1}{k}, b = \dfrac{1}{k}, c = \dfrac{1}{k}\right)$ ou $\left(a = \dfrac{1}{k}, b = -\dfrac{2}{k}, c = \dfrac{1}{k}\right)$ ou
$\left(a = \dfrac{1}{k}, b = 0, c = 0\right)$ ou $\left(a = \dfrac{1}{k}, b = -\dfrac{1}{k}, c = 0\right)$

7.20) $(p = 0$ e $q = 0)$ ou $(p = 1$ e $q = -2)$

7.21) Substitua **x** por 1, 2, 3 e 4; daí $A = 1$, $B = 6$, $C = 7$ e $D = 1$.

7.22) $A = -\dfrac{1}{3}$ e $B = C = \dfrac{1}{3}$

7.23) $A = \dfrac{1}{2}$ e $B = -\dfrac{1}{2}$

7.24) Sejam: $p(x) = a_m x^m + \dots$ e $q(x) = b_n x^n + \dots$

Como $p(x)$ e $q(x)$ não são nulos, tem-se $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$.

O coeficiente de x^{m+n} em $p(x) \cdot q(x)$ é $a_m \cdot b_n$ e $a_m \cdot b_n \neq 0$, pois $a_m \neq 0$ e $b_n \neq 0$. Então, $p(x) \cdot q(x)$ não é nulo.

7.25) Sejam: $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_i x^i + \dots$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_i x^i + \dots$ e $h(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_i x^i + \dots$

O coeficiente de x^i em $p(x) \cdot q(x)$ é $u_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0$.

O coeficiente de x^i em $[p(x) \cdot q(x)] \cdot h(x)$ é:

$$\sum_{i=0}^{n} u_i c_{n-i} = u_0 c_n + u_1 c_{n-1} + \dots + u_n c_0 =$$
$$= a_0 b_0 c_n + (a_0 b_1 + a_1 b_0) c_{n-1} + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) c_0$$

Obtém-se, assim, uma soma da forma $\sum_{j_1 + j_2 + j_3 = n} a_{j_1} \cdot b_{j_2} \cdot c_{j_3}$

Se calcularmos o coeficiente de x^i no produto $p(x) \cdot [q(x) \cdot h(x)]$, chegaremos ao mesmo resultado.

7.26) Sejam $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots$, $q(x) = b_0 + b_1 x + \dots$ e $h(x) = c_0 + c_1 x + \dots$

O coeficiente de x^i em:

1.º) $p(x) \cdot h(x)$ é $\sum_{k=0}^{i} a_k c_{i-k}$

2.º) $q(x) \cdot h(x)$ é $\sum_{k=0}^{i} b_k c_{i-k}$

3.º) $p(x) \cdot h(x) + q(x) \cdot h(x)$ é $\sum_{k=0}^{i} (a_k c_{i-k} + b_k c_{i-k})$

4.º) $[p(x) + q(x)] \cdot h(x)$ é $\sum_{k=0}^{i} (a_k + b_k) c_{i-k}$

(3.º e 4.º) iguais, pois em $\mathbb{C}$ vale a distributividade

7.27) Substitua x por 1 e -1: $\dfrac{3^n + 1}{2}$.

CAPÍTULO 8

8.9) a) $Q(x) = x - 4$ e $R(x) = 3x + 2$

b) $Q(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$ e $R(x) = 11x - 10$

c) $Q(x) = 2x^2 + 3x + 11$ e $R(x) = 25x - 5$

d) $Q(x) = x^2 + x - 2$ e $R(x) \equiv 0$

8.10) $a = 4$ e $b = 6$

8.11) $a = -2$ e $b = 4$

8.12) $m = 5$ e $q = 0$

8.13) a) $x^2 - ax + (a^2 - a - 2)$ b) $b = -a^2 + 3a + 2$ e $c = -2a^2 + 2a + 4$

8.14) Efetue a divisão; $R(x) \equiv 0 \Rightarrow c = b^2$ e $d = b^3$, e daí a tese.

8.15) $a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $a(x) = x \cdot b(x)q'(x) + r(x)$, e então:

$$b(x) \cdot q(x) + r(x) = x \cdot b(x)\, q'(x) + r(x)$$

e daí a tese.

8.16) $\frac{1}{2} \cdot Q(x)$; o resto é o mesmo.

8.17) $m = -23$, $n = 9$ e $p = 21$

8.18) $2x^3 - 3x^2 + 4x + 5$

8.19) Efetue a divisão e $R(x) \equiv 0$.

8.20) $p = \pm\sqrt{2}$ e $q = 1$

8.21) Efetue a divisão de $A(x)$ por $C(x)$ e $R(x) \equiv 0$; em seguida, efetue a divisão de $B(x)$ por $C(x)$ e compare os restos.

8.22) $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

8.23) Observe que $x^3 + 1 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1)$. Ache o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $x^3 + 1$, usando o exercício 8.6; $f(x) \equiv (x^3 + 1) \cdot (x + 2) + r(x)$, e daí $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x - 1$.

8.24) $a = 2$, $b = 1$ e $c = 3$

CAPÍTULO 9

9.18) a) $q(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$ e $r = 5$
b) $q(x) = 2x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 39x + 109$ e $r = -327$
c) $q(x) = 4x^2 - (3 + 4i)x + (-1 + 7i)$ e $r = 8 - 6i$
d) $q(x) = x^2 - 2ix - 5 - 2i$ e $r = -9 + 8i$
e) $q(x) = 2x^2 + 4x + 19$ e $r = 162$
f) $q(x) = 2x - 5$ e $r = 28$

9.19) $f(x)$ é da forma $ax^2 + bx + c$; $f(1) = 1$, $f(2) = 8$ e $f(3) = 27$; daí $f(x) = 6x^2 - 11x + 6$

9.20) $f(-2) = 0$ e $m = -73$

9.21) $4x^4 + 13x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

9.22) $\begin{cases} \textbf{n par}: & q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots - a^{n-1} \text{ e } r = 0 \\ \textbf{n ímpar}: & q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + a^{n-1} \text{ e } r = -2a^n \end{cases}$

9.23) $q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + \ldots + a^{n-1}$ e $r = 2a^n$

9.24) $a = 2$ e $b = -5$

9.25) **p** par e **q** ímpar

9.26) a) Verifique que $f(1) = f(2) = 0$.

b) Verifique que $f(0) = f(-1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

9.27) Verifique que $f(-a) = f(-b) = 0$.

9.28) $q(x) = 2x^2 - 1$

9.29) Veja exercício 9.12; $r(x) = x + 2$.

9.30) Veja exercício 9.12; $r(x) = i \cdot \frac{A(-i) - A(i)}{2} \cdot x + \frac{A(i) + A(-i)}{2}$

9.31) Veja exercício 9.15; $r(x) = -6x + 13$.

9.32) $-\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$

9.33) $x^2 - 3x + 1$

9.34) 7; 1

9.35) $(ax - b) \cdot q_1(x) \equiv (bx - a) \cdot q_2(x)$; substituindo x por $\frac{b}{a}$, vem $q_2\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ e, substituindo x por 1, vem $q_1(1) + q_2(1) = 0$.

9.36) a) r b) $\frac{-br}{a}$ c) $\frac{b^2r}{a^2}$

9.37) $b - a$

9.38) Veja exercício 9.16: $-(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 6$.

9.39) $a = 3$ e $b = -4$

9.40) $q(x) = x^3 + 2ax^2 + 3a^2x + 4a^3$

9.41) Aplique Briot-Ruffini: $q(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + n$.

9.42) Aplique Briot-Ruffini: $q(x) = x^{n-2} + 2ax^{n-3} + 3a^2x^{n-4} + \ldots + (n-1)a^{n-2}$.

9.43) Aplique Briot-Ruffini: $a = 2$, $b = 1$ e $m = 3$.

9.44) O desenvolvimento do determinante nos dá $-2(x - 1)^3$.

9.45) $p = 2$ e $a = 10$

9.46) $2x^3 + x^2 - 8x + 15$

9.47) Note que $x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1) = (x + 1)(x + i)(x - i)$; verifique que $p(-1) = p(i) = p(-i) = 0$.

9.48) $x^n(x^2 + ax + b) \equiv (x - 2)^2q(x) + 2^n(x - 2)$; substituindo x por 2: $2^n(4 + 2a + b) = 0$ e daí $b = -2a - 4$; então:

$$x^n(x^2 + ax - 2a - 4) \equiv (x - 2)^2q(x) + 2^n(x - 2)$$
$$x^n[(x^2 - 4) + a(x - 2)] \equiv (x - 2)^2q(x) + 2^n(x - 2)$$
$$x^n(x - 2)(x + 2 + a) \equiv (x - 2)^2q(x) + 2^n(x - 2)$$
$$x^n(x + 2 + a) \equiv (x - 2)q(x) + 2^n$$

Substituindo x por 2: $a + 4 = 1$ e $a = -3$ e $b = 2$.

9.49) Note que $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$; calcule f(i) e f(− i) usando a fórmula de **De Moivre**.

CAPÍTULO 10

10.6) a) $15x^2 - 6x + 1$
b) $x^2 - 6x^3 + 13x^4 - 12x^5 + 4x^6$
c) $3x^2 + 10x + 5$
d) $30x(5x^2 + 7)^2$
e) $5(1 + 5x - 8x^2)^4 \cdot (5 - 16x)$
f) $bm(a + bx)^{m-1}$

10.7) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$

10.8) $a = 21$, $b = 51$ e $c = -77$ $\left(k = -\frac{7}{3}\right)$

10.9) $x^2 + 2x + 3$ ou $-x^2 - 2x - 3$

10.10) a) $20x^3$, $60x^2$, $120x$
b) 72

10.11) Derive termo a termo, usando o exercício 10.4.

10.12) Propriedade III

a) Demonstramos que a propriedade vale para $p(x) = x^h$ e $q(x) = x^k$
Temos, $p'(x) = h \cdot x^{h-1}$ e $q'(x) = k \cdot x^{k-1}$
Também $p(x) \cdot q(x) = x^{h+k}$ e $[p(x) \cdot q(x)]' = (h + k)x^{h+k-1}$
Temos, então: $p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x) = hx^{h-1} \cdot x^k + kx^{k-1} \cdot x^h =$
$= (h + k)x^{h+k-1} = [p(x) \cdot q(x)]'$

b) Suponhamos agora os polinômios: $p(x) = \sum_{h=0}^{n} a_hx^h$ e $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_kx^k$

Então: $p(x) \cdot q(x) = \sum_h \sum_k a_hb_kx^hx^k$ e daí:

$$[p(x) \cdot q(x)]' = \sum_h \sum_k a_hb_k(x_hb_k)' \overset{1.^o}{=} \sum_h \sum_k a_hb_k[(x^h)'x^k + x^h(x^k)'] =$$
$$= \sum_h a_h(x^h)' \sum_k b_kx^k + \sum_h a_hx^h \sum_k b_k(x^k)' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x)$$

Propriedade IV

Inicialmente, demonstramos pelo **Método da Indução Matemática** que se:
$$p(x) = q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot q_3(x) \ldots q_n(x)$$
tem-se:
$$p'(x) = q_1'(x) \cdot q_2(x) \ldots q_n(x) + q_1(x) \cdot q_2'(x) \cdot q_3(x) \ldots q_n(x) +$$
$$+ q_1(x) \cdot q_2(x) \cdot q_3'(x) \ldots q_n(x) + \ldots + q_1(x) \cdot q_2(x) \ldots q_n'(x)$$

Fazendo $q_1(x) = q_2(x) = \ldots = q_n(x) = q(x)$ vem a tese.

10.13) a) $x^2 - 2x + 3$

b) $x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x + 2$

c) $x + 3$

d) $2x + 7$

e) $x^2 - 2x + 5$

10.14) $(x + 1)(x - 1)$

10.15) $(x - 1)^2 \cdot x$

10.16) 1; 3

10.17) $m = 21$ e $n \neq -8$

10.18) $x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36$

10.19) $x^{15} - x^{14} - x^{13} + x^{12}$; $x - 1$

CAPÍTULO 11

11.14) $P(x) = (2 + i)(x - 1)(x + i)$

11.15) a) 13

b) 13

c) 4

d) 5 (simples); -6 (tripla); $\sqrt{2} - 4$ (dupla) e $\frac{3}{4} + \frac{2i}{5}$ (multiplicidade 7)

e) $\sqrt{3}$

11.16) $S = \{-4; 2; 3\}$

11.17) $P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2 - i)(x - 2 + i)$

11.18) $P(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 1)(x - 3)$

11.19) $A(x) = (x + 2)^2(x - 3i)(x + 3i)$

11.20) $B(x) = 3(x - 2 + i)(x - i)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

11.21) $P(x) = (x - 4)^2(x + 3)$

11.22) raiz tripla

11.23) $p = 10$ e $q = -25$

11.24) $t = 9$; $s = \frac{2}{3}$; $r \neq 6$

11.25) $k = -\frac{3}{2}$

11.26) $k \leqslant 6 - 2\sqrt{6}$ ou $k \geqslant 6 + 2\sqrt{6}$

11.27) $P(x) = 5x^4 + (10 - 10i)x^3 - (20i + 5)x^2 - 10x$

11.28) $P(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 8$

11.29) $S = \{4; -2; 3\}$

11.30) $S = \{0; 2; 3; 4\}$

11.31) $S = \{2; 3\}$

11.32) $S = \{2; -1 + i; -1 - i\}$

11.44) $P(x) = (x + 3)^2(x - 3)(x + 2i)(x - 2i)$

11.45) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ e } x \neq -3\}$

11.46) $S = \{\sqrt{3}; -2\}$

11.47) $S = \{1; w; w^2; w^4; w^5\}$; onde $w = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

11.48) $S = \left\{\frac{3}{1 - w}; \frac{3}{1 - w^2}; \frac{3}{1 - w^3}; \frac{3}{1 - w^4}\right\}$, onde $w = \cos\frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}$

11.49) $S = \{2i; -2i; 2; 3\}$

11.50) a) $\frac{3^n - 1}{2}$ b) n

11.51) $P(x) = (x - 3)(x - 2 + i)(x - 1 + i)$

11.52) α, β e γ

11.53) 20

11.54) Sendo $P(x) = A(x) - B(x)$, $P(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a **n** que se anula para os valores distintos $r_1, r_2, \ldots r_n$. Portanto:

$$P(x) = k(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) \quad \text{(I)}$$

onde **k** é uma constante. Temos, ainda, $P(r_0) = 0$. Mas, como o valor $x = r_0$ não anula nenhum dos fatores $x - r_j$ em (I), concluímos que $k = 0$ e, portanto, $P(x) \equiv 0$. Assim:

$$P(x) \equiv A(x) - B(x) \equiv 0 \Leftrightarrow A(x) \equiv B(x)$$

CAPÍTULO 12

12.7) $S = \{-2; -3\}$

12.8) $S = \{1 - i; 3\}$

12.9) $S = \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$

12.10) $k = 20$ ou $k = 16$

12.11) $k = 20; S = \{-2; -1\}$

12.12) $(k = 5 \text{ e } t = 8)$ ou $\left(k = \frac{7}{4} \text{ e } t = -\frac{5}{16}\right)$

12.13) $k = \frac{40}{3}$

12.14) $k \neq -2$

CAPÍTULO 13

13.10) a) 4 b) 3

13.11) 13

13.12) a) V b) V c) F d) V e) F f) V

13.13) a) V b) F c) F d) V

13.14) $P(x) = -2x^5 + 14x^4 - 36x^3 + 44x^2 - 34x + 30$

13.15) $A(x) = \frac{1}{2}x^9 - x^8 + 7x^7 - 8x^6 + 32x^5 - 16x^4 + 48x^3$

13.16) $S = \{3 + i; 3 - i; -1; 4\}$

13.17) $S = \{0; 1; 2; 4i; -4i\}$

13.18) $S = \{-1; 2; i; -i\}$

13.19) $S = \{1; -2; 5; 2i; -2i\}$

13.20) $S = \{-1; 2; 1; 2i; -2i\}$

13.21) não

13.22) a) $m = 30$ b) $-\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i; -\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i; -3$

13.23) $m = 30$ ou $m = 24$ ou $m = -240$

13.24) $S = \left\{1 - \sqrt{2}\,i; 1 + \sqrt{2}\,i; -3; -\frac{1}{2}\right\}$

13.25) $S = \{0; 2 + i; 2 - i; 2i; -2i; 3; -1\}$

14.27) a) $S = \{3;\ 1 + i;\ 2 - i\}$

b) $S = \left\{\frac{2}{3};\ 2;\ -2\right\}$

c) $S = \{3;\ -2\}$

d) $S = \{5 + 2i;\ 5 - 2i;\ 4\}$

e) $S = \left\{2i;\ -2i;\ -\frac{3}{2}\right\}$

f) $S = \{-3;\ 4;\ -4\}$

g) $S = \left\{3;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$

h) $S = \left\{1;\ -1;\ \frac{5}{2}\right\}$

i) $S = \{4;\ -2;\ -3\}$

j) $S = \left\{-4;\ -\frac{1}{2}\right\}$

k) $S = \left\{6;\ 3;\ \frac{1}{2}\right\}$

l) $S = \{8;\ 6;\ -2\}$

14.28) a) $k = 12$

b) $S = \left\{\frac{3}{2};\ -1;\ 4\right\}$

14.29) $3x^3 - (10 + 3i)x^2 + (9 + 7i)x - (2 + 2i) = 0$

14.30) $x^3 - (12 - i)x^2 + (45 - 10i)x - (50 - 25i) = 0$

14.31) $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$

14.32) $k = 0$

14.33) $k = \frac{1}{2}$

14.34) a) $-\frac{4}{5}$

b) $-\frac{14}{9}$

c) $-\frac{14}{25}$

d) $-\frac{254}{81}$

e) $\frac{116}{27}$

14.35) $\frac{12 + 8i}{9}$

14.36) $k = \frac{9}{2}$

14.37) a) $-\frac{1}{4}$

b) $-\frac{7}{16}$

c) $\frac{7}{2}$

d) $-\frac{3}{8}$

e) $\frac{7}{8}$

f) $-\frac{1\,743}{256}$

g) $\frac{339}{64}$

h) $\frac{7}{32}$

14.38) $\frac{-23-8i}{16}$

14.39) a) $x^3 - 2x^2 + \frac{9}{2}x - 9$

c) $x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

b) $x^3 + 2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{64}{9}$

14.40) $x^2 - 8x - 20$

14.41) 0

14.42) Sendo **a**, **b** e **c** as raízes, temos:

$$a + b + c = 0 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{t} + 2\underbrace{(ab + ac + bc)}_{k} = 0 \Rightarrow k = -\frac{t}{2}$$

mas, como as raízes são reais, $t > 0$ e, portanto, $k < 0$.

14.43) $-2;\ \frac{6}{5} + \frac{8}{5}i;\ \frac{6}{5} - \frac{8}{5}i$

14.44) a) $S = \{-3;\ 1;\ 5\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2};\ 2;\ 8\right\}$

c) $S = \{-1;\ 3;\ 7\}$

d) $S = \{-4;\ -2;\ -1\}$

e) $S = \left\{-4;\ 4;\ \frac{4}{3}\right\}$

f) $S = \{-1;\ 3;\ 5;\ 9\}$

14.45) $k = -4$

14.46) $S = \{2;\ -2;\ 3 + i;\ 3 - i\}$

14.47) $S = \left\{3;\ \frac{1}{3};\ -1;\ -3\right\}$

14.48) $S = \left\{1;\ -1;\ 6;\ \frac{1}{2}\right\}$

14.49) a) $S = \left\{\frac{1}{2};\ -1;\ 2;\ 4\right\}$

b) $k = -11$ e $m = 9$

14.50) $4;\ 3;\ \sqrt{7}$

14.51) $S = 2\sqrt{4k + m - 64}$

14.52) a) 4   b) -1 c) 16

14.53) Imaginemos uma equação do terceiro grau cujas raízes são **a**, **b** e **c**. Como $a + b + c = 0$ e $ab + ac + bc = 0$, essa equação é do tipo $x^3 - m = 0$ (onde $m = abc$), isto é, $x^3 = m$. Portanto, **a**, **b** e **c** são as raízes cúbicas do número **m** e, assim, $|a| = |b| = |c|$.

14.54) a) $k^3 - 4mk + 8t = 0$
b) $mk - t = 0$
c) $4k^3 + 27m^2 = 0$
d) $27t^2 - 9mkt + 2m^3 = 0$
e) $k^2n - t = 0$
f) $k^3 - 4km + 8t = 0$

14.55) $a = -1$; $b = -1$; $c = 1$

14.56) -1

14.57) a) -1 b) $+1$

14.58) a) -1 b) $+1$

14.59) $S = \dfrac{n}{w - 1}$

CAPÍTULO 15

15.8) a) ± 1; ± 2; ± 4 b) $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{3}$; $\pm\frac{1}{6}$; $\pm\frac{2}{3}$; $\pm\frac{4}{3}$

15.9) não

15.10) não

15.11) a) $S = \{3; 4; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}$
b) $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 2 + i; 2 - i\right\}$
c) $S = \{0; 1; -2; 4\}$
d) $S = \left\{-2; 3; \frac{4}{3}\right\}$

15.12) $P(x) = (x - 5)(x + 1)(x - 2 - \sqrt{2})(x - 2 + \sqrt{2})$

15.13) $x = \sqrt[3]{2} + 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x - 1)^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 2 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 3 = 0$

Os únicos números racionais que poderiam ser raízes desta última equação são ± 1 e ± 3; no entanto, nenhum destes números satisfaz a equação. Portanto, o número dado é irracional.

15.14) Fazendo $a = \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$ e $b = \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}$, temos:

$$x = a + b \Rightarrow x^3 = a^3 + b^3 + 3ab\underbrace{(a + b)}_{x} = a^3 + b^3 + 3abx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3 = 26 + 15\sqrt{3} + 26 - 15\sqrt{3} + 3x = 52 + 3x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3 - 3x - 52 = 0$$

A única raiz real desta equação é o número 4.

15.15) $x = \sqrt[3]{2} + i \Rightarrow x - i = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x - i)^3 = (\sqrt[3]{2})^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^3 - 3x^2i + 3xi^2 - i^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 3x - 2 = i(3x^2 + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^3 - 3x - 2)^2 = [i(3x^2 + 1)]^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = -(9x^4 + 6x^2 + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^6 + 3x^4 - 4x^3 + 15x^2 + 12x + 5 = 0$

O número $\sqrt[3]{2} + i$ é uma das raízes desta última equação, a qual tem todos os coeficientes inteiros.

15.16) $S = \{2 + i; 2 - i; -2; \sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$

15.17) $S = \{-2; 3i; -3i\}$

15.18) $S = \left\{2; \frac{1}{2}; i; -i\right\}$

15.19) $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$

15.20) $S = \left\{-1; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$

15.21) não

15.24) $S = \{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; i; -i\}$

15.25) $S = \{\sqrt{2} + \sqrt{5}; \sqrt{2} - \sqrt{5}; -\sqrt{2} + \sqrt{5}; -\sqrt{2} - \sqrt{5}; -1\}$

15.26) $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 2; 3\}$

15.27) $2 + \sqrt{5}; 2 - \sqrt{5}; i; -i$

CAPÍTULO 16

16.5) $a = 2$ e $b = 3$

16.6) ($a = 7$ e $b = 4$) ou ($a = -7$ e $b = -4$)

16.7) a) $S = \left\{3; \frac{1}{3}; i; -i\right\}$

b) $S = \left\{1; -1; 1 + i; 1 - i; \frac{1 + i}{2}; \frac{1 - i}{2}\right\}$

c) $S = \left\{1; -1; 2; \frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right\}$

d) $S = \left\{2; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}\right\}$

16.8) $a = 9$ e $b = -7$

CAPÍTULO 17

17.4) 2

17.5) 1 e 2

17.6) $k = -\frac{3}{2}$ ou $k = -\frac{13}{2}$

17.7) $m = k = -4$

17.8) $\frac{-k - 2}{k}$

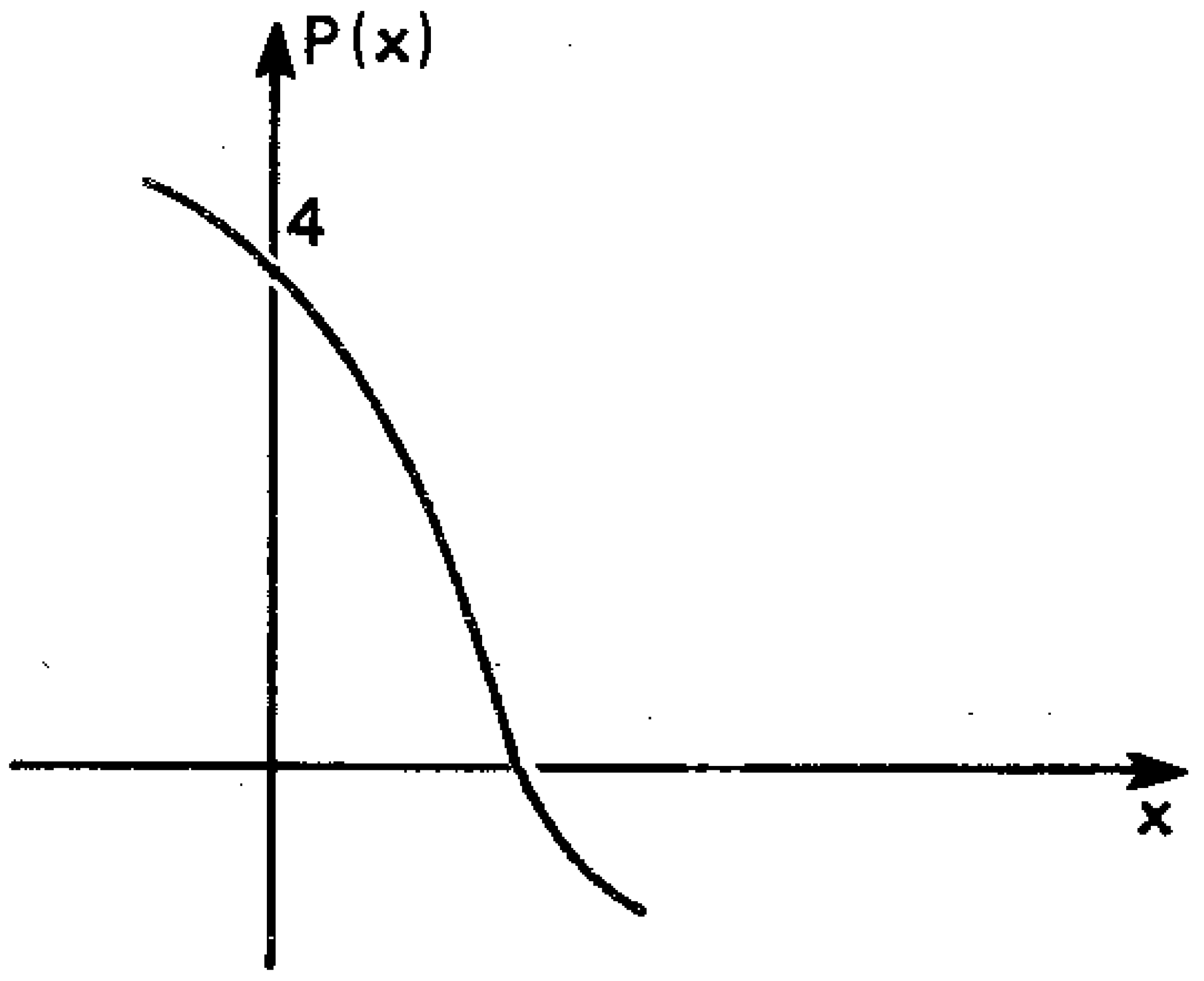
17.11) $S = \{-1; 2\}$; -1 é raiz tripla.

17.12) $S = \left\{2; \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$; 2 é raiz tripla.

18.7) $P^{(1)}(x) = 15x^2 - 8x + 2$ é positivo para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto P(x) é sempre crescente.

18.8) $P^{(1)}(x) = -3x^2 + 2x + 3$ é negativo para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, P(x) é sempre decrescente.

18.9) P(x) é de grau ímpar e tem coeficiente do termo de mais alto grau negativo. Além disso, o termo independente é positivo. Assim, seu gráfico é "algo parecido" com:



18.10) a) F b) V c) V d) F e) V f) F g) F h) V i) F j) V k) V l) F

18.11) a) $P(x) = 3x^3 - 9x - 6$ b) $P(x) = 3x^5 + 6x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 21x - 6$

18.12) $P(x) = 5x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 25x - 10$

18.13) a) $k = 7$ ou $k = -20$ b) $-20 < k < 7$ c) $k < -20$ ou $k > 7$

18.18) duas ou nenhuma

18.19) P(1) e P(3) têm sinais contrários, portanto há pelo menos uma raiz real **r** no intervalo dado. O único número racional que pertence ao intervalo dado e poderia ser raiz de P(x) é o número 2, que no entanto não é raiz. Portanto, **r** é irracional.

18.20) $-12 < k < 6$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) $\pm\sqrt{23}$

I.2) $R_e(z) = 0$; $I_m(z) = \text{tg}\,\alpha + \text{cotg}\,\alpha$

I.3) $z = 0$ ou $z = -i$ ou $z = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

I.4) Se α e βi fossem raízes (α e β reais), então $\alpha \cdot \beta i = c + di$, donde $c = 0$, contra a hipótese de que c é não nulo.

I.5) **Teorema 1**: para $n = 1$ temos:

$$i^{5^n} = i^{5^1} = i^5 = i$$

Teorema 2:

Hipótese: $i^{5^k} = i$

Tese: $i^{5^{k+1}} = i$

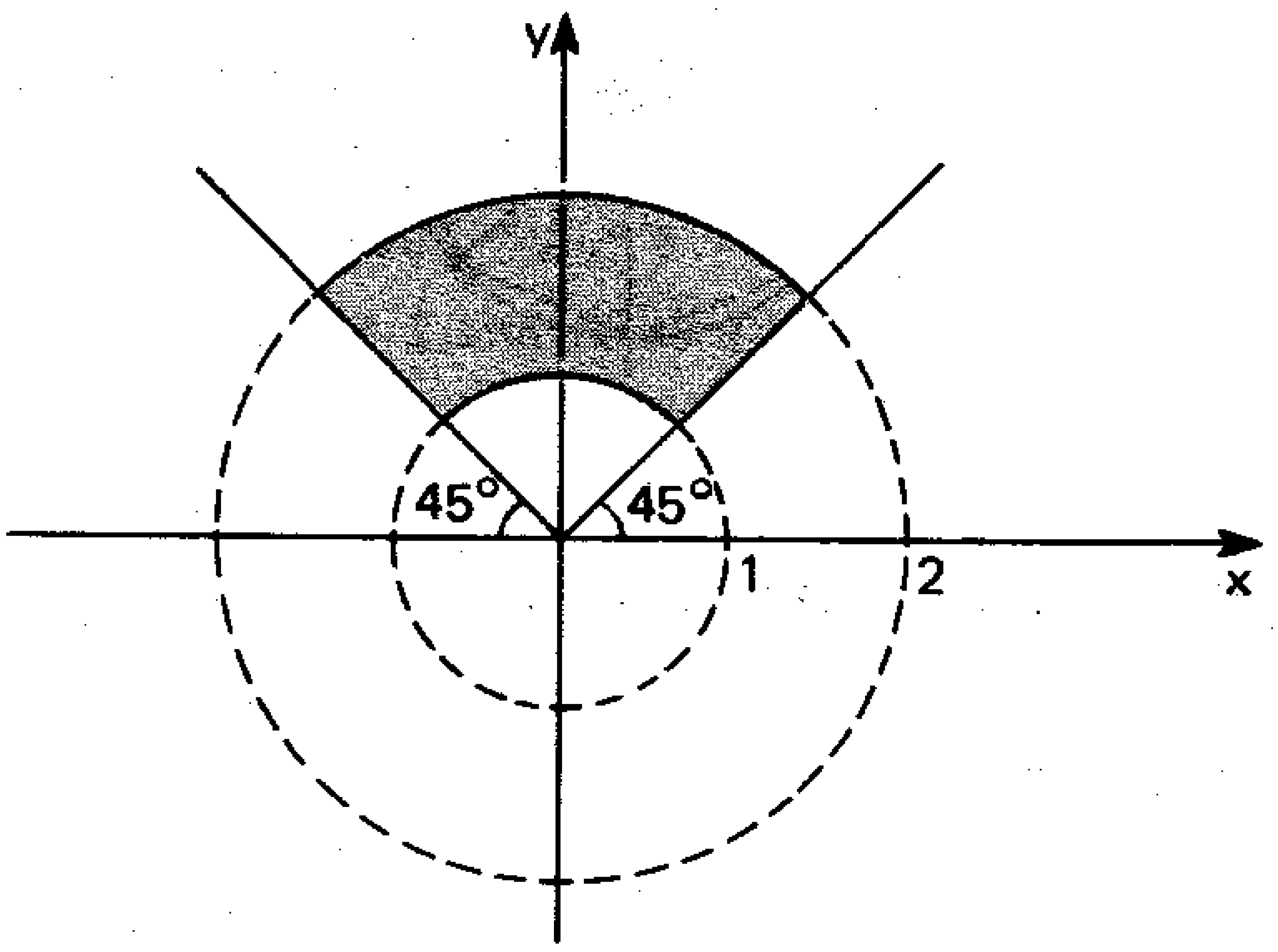
Temos:

$$i^{5^{k+1}} = i^{5^k \cdot 5} = (i^{5^k})^5 = (i)^5 = i$$

I.6) $3 - 3i$

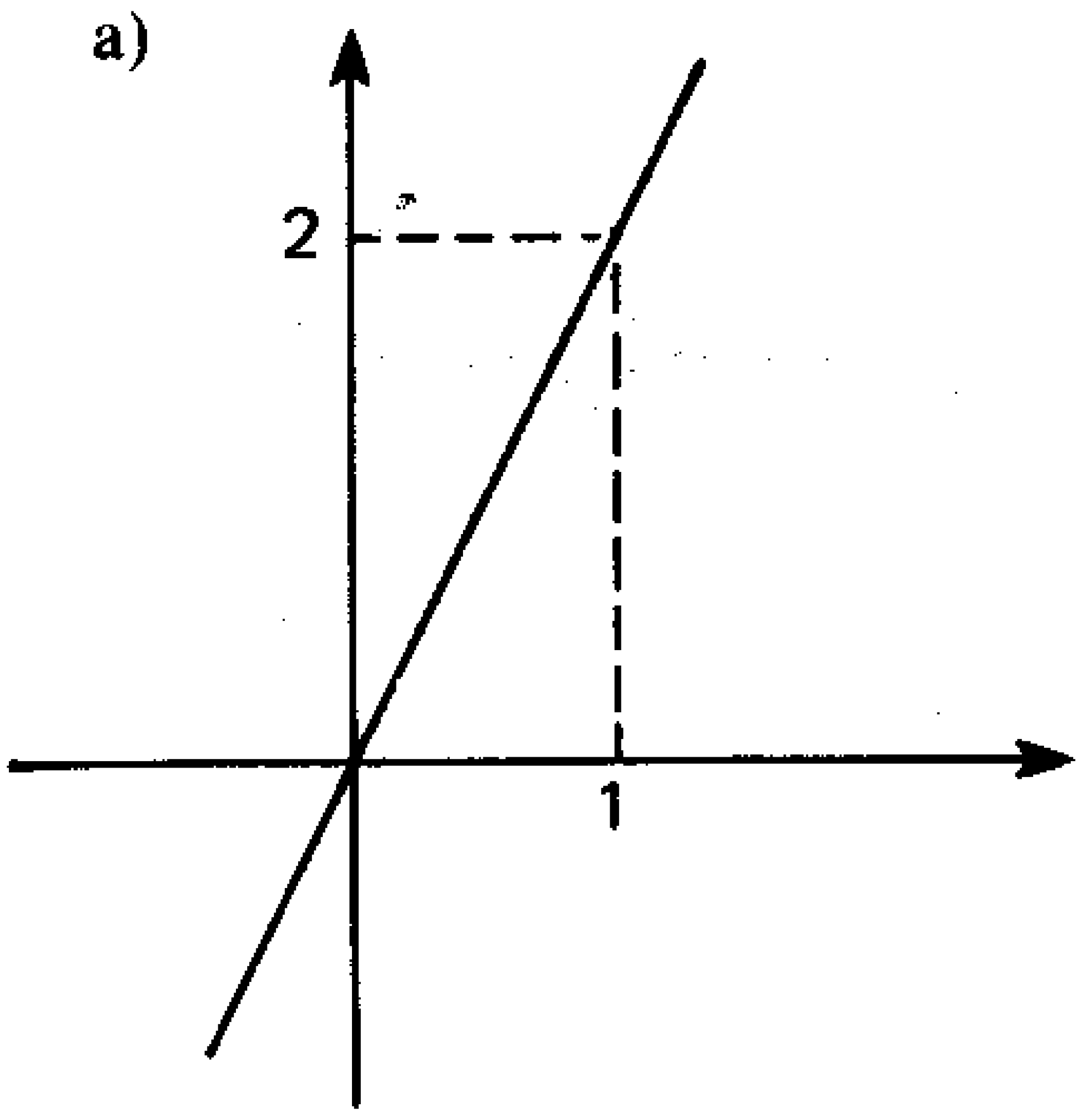
I.7) $2b - a + bi$

I.8)

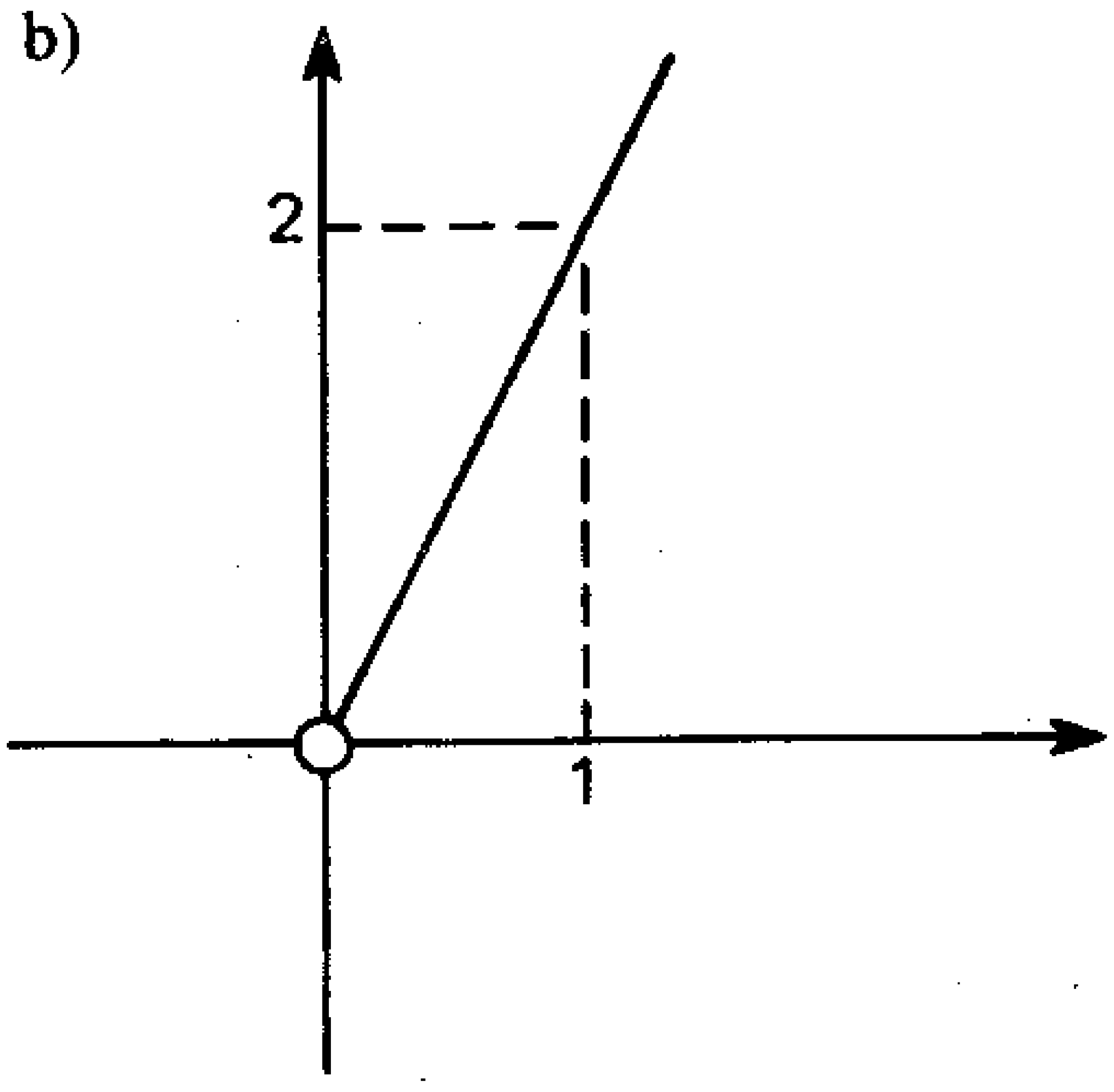


I.9)

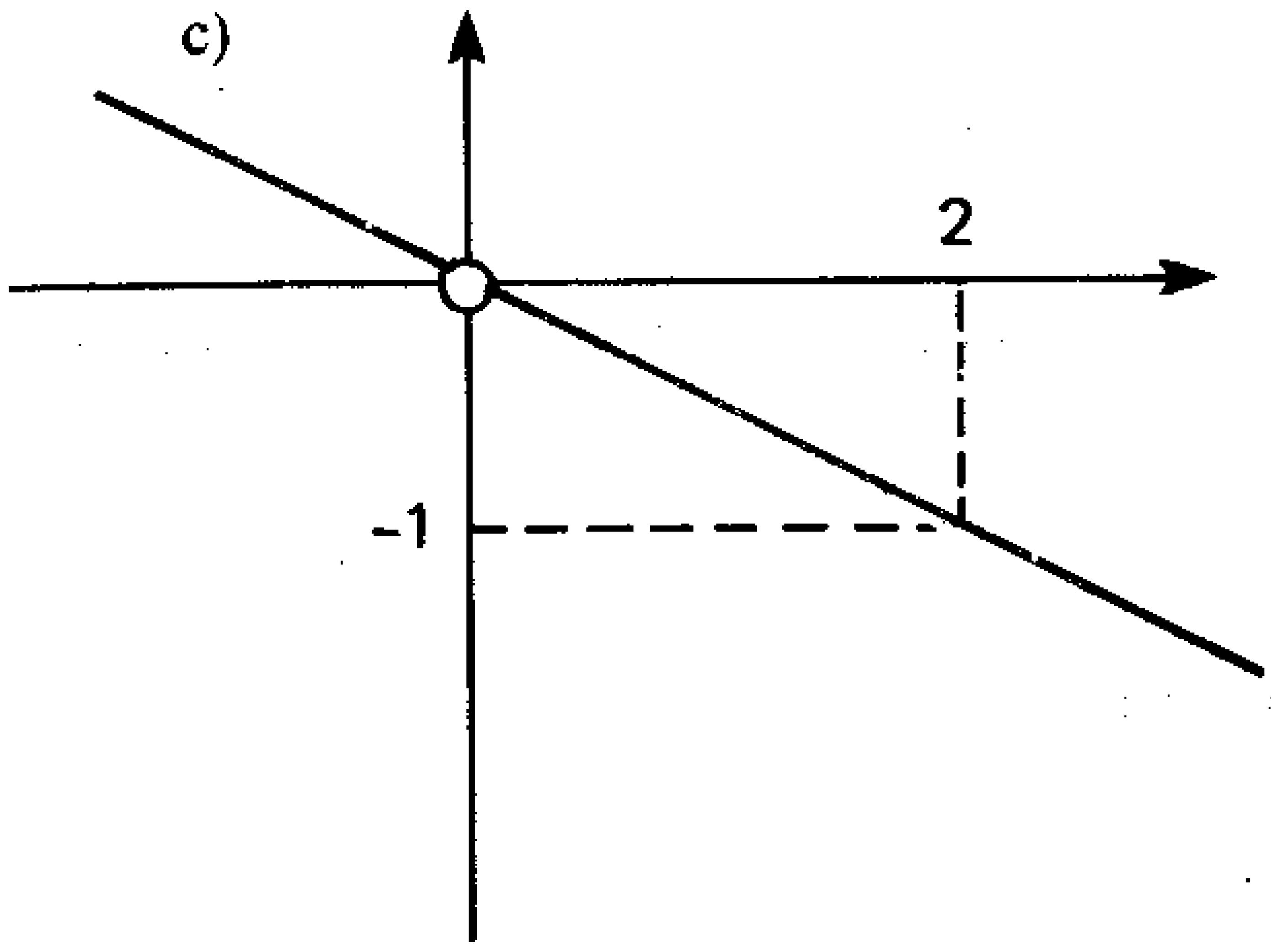
a)



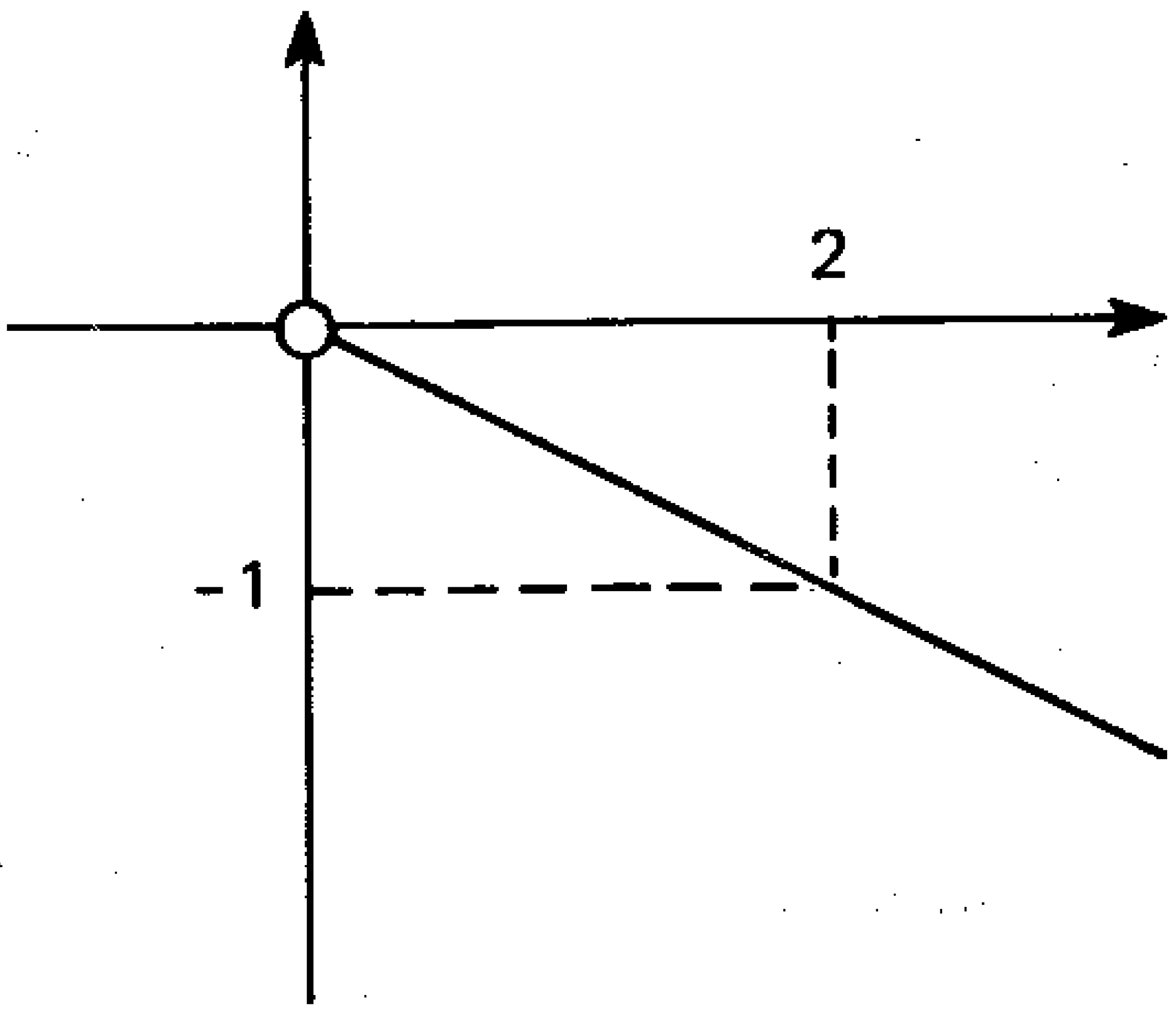
b)



c)



d)

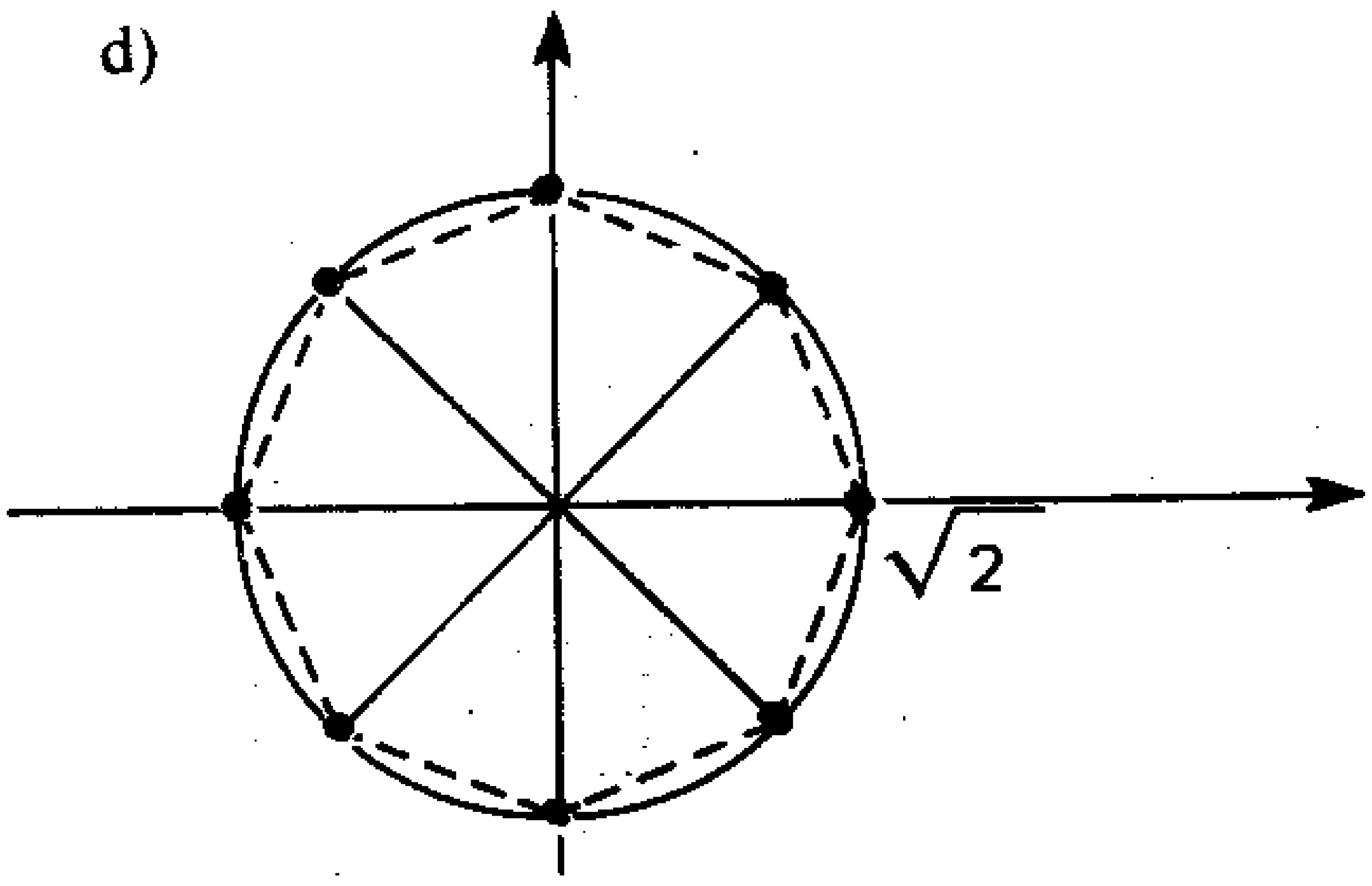


I.10) a) $z = -1 + i$

b) $|z| = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$

c) 2^8

d)



II.1) A é divisor de P; A < P e P é primo; daí A = 1.

II.2) $a = 1$ e $b = -1$; $\frac{n}{n+1}$

II.3) Faça $u = x$ e $v = 0$.

II.4) $a = \frac{5}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$

II.5) $(A + B + C)\,\text{sen}\,x \cos x + B\,\text{sen}^2 x + A \cos^2 x - 1 \equiv 0$
Dividindo por $\cos^2 x$:

$$(B - 1)\,\text{tg}^2 x + (A + B + C)\,\text{tg}\,x + (A - 1) \equiv 0$$

e daí: $A = 1$, $B = 1$ e $C = -2$.

II.6) $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$; substitua **n** por 1, 2 e 3.

II.7) 1

II.8) $4x + 7$

II.9) $(p = 0$ e $q = 0)$ ou $(p = 0$ e $q = -1)$ ou $(p = -1$ e $q = 0)$ ou $(p = 1$ e $q = 1)$ ou $(p = -2$ e $q = 1)$

II.10) $3x^3 + x^2 + 7x + 1$

II.11) Faça $x - 2 = y$ e divida $y^n - 1$ por $y - 1$ pelo Briot-Ruffini.

II.12) a) $m = \frac{P(a) - P(b)}{a - b}$ e $n = \frac{a\,P(b) - b\,P(a)}{a - b}$

b) $m = \frac{2^{200} - 1}{3}$ e $n = \frac{2^{200} + 2}{3}$

c) Demonstre, pelo **Método da Indução Matemática**, que os números da forma $2^{2s} - 1$ são múltiplos de 3; observe que $n = m + 1$.

II.13) a) $a = -2$, $b = 4$ e $c = 1$ b) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

II.14) $2x - 7$

II.15) $a(x) \equiv b(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $a(a) = b(a) = 0$; então, $r(a) = 0$

II.16) a) $x^3 + x^2 - 2 \equiv (x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ e então, $\alpha + \beta = -2$ e $\alpha\beta = 2$

$$g(\alpha) + \alpha = \beta + \alpha = -2$$
$$g(\beta) + \beta = \alpha + \beta = -2$$

Então, o polinômio $g(x) + x + 2$ tem raízes α e β:

$$g(x) + x \equiv \lambda (x - \alpha)(x - \beta)$$
$$g(x) + x \equiv \lambda (x^2 + 2x + 2)$$
$$g(1) = 1 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{5}(4x^2 + 3x - 2)$$

b) $g[g(x)] = \frac{1}{125}[64x^4 + 96x^3 + 32x^2 - 3x - 64]$

c) $g[g(1)] - 1 = 1 - 1 = 0$

d) verifique que $h(1) = h(\alpha) = h(\beta) = 0$

II.17) As raízes **w** do polinômio $x^2 + x + 1$ são tais que $w^3 = 1$

$$[x^3 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{ou} \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

Então, $w^{3m} + w^{2n+1} + w^{3p+2} = 1 + w + w^2 = 0$

II.18) **m** não é divisível por 3

II.19) a) 6 b) 6x

II.20) **Teorema 1**: a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Teorema 2:

Hipótese: todo polinômio de grau $n - 1$ admite no máximo $n - 1$ raízes.
Seja então p(x) um polinômio de grau **n**; se p(x) não admite raízes, o teorema é válido para p(x). Caso contrário, seja **a** uma raiz de p(x):

$$p(x) = (x - a)q(x)$$

onde $\partial[q(x)] = n - 1$; então q(x) admite no máximo $n - 1$ raízes e, daí, p(x) admite no máximo **n** raízes.

II.21) $p = 1$

II.22) $a = -3$ e $b = 2$ b) $p = 2$

II.23) Lembre que:
a) $[P_1(x) + P_2(x)]' = P_1'(x) + P_2'(x)$

e que

b) $[kP(x)]' = k \cdot P'(x)$

II.24) $(t = 3$ e $u = -2)$ ou $(t = 2$ e $u = 0)$

III.1) $S = \left\{-2;\ -\frac{1}{2};\ 1 + i;\ 1 - i\right\}$

III.2) $S = \left\{2i;\ -2i;\ 1;\ -\frac{3}{2}\right\}$

III.3) $S = \{-4;\ -1;\ +2\}$

III.4) a) $S = \{-2 + i;\ -2 - i;\ -3\}$
b) $S = \left\{4 + 2i;\ 4 - 2i;\ \frac{1}{2}\right\}$

III.5) $S = \{-5;\ 2\}$

III.6) É inteiro, e $x = 6$.

III.7) irracional

III.8) a) V b) V c) V d) V

TABELA DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

g°	sen	tg	cotg	cos	
0	0,000 0	0,000 0		1,000 0	90
1	0,017 5	0,017 5	57,29	0,999 8	89
2	0,034 9	0,034 9	28,64	0,999 4	88
3	0,052 3	0,052 4	19,08	0,998 6	87
4	0,069 8	0,069 9	14,30	0,997 6	86
5	0,087 2	0,087 5	11,43	0,996 2	85
6	0,104 5	0,105 1	9,514	0,994 5	84
7	0,121 9	0,122 8	8,144	0,992 5	83
8	0,139 2	0,140 5	7,115	0,990 3	82
9	0,156 4	0,158 4	6,314	0,987 7	81
10	0,173 6	0,176 3	5,671	0,984 8	80
11	0,190 8	0,194 4	5,145	0,981 6	79
12	0,207 9	0,212 6	4,705	0,978 1	78
13	0,225 0	0,230 9	4,331	0,974 4	77
14	0,241 9	0,249 3	4,011	0,970 3	76
15	0,258 8	0,267 9	3,732	0,965 9	75
16	0,275 6	0,286 7	3,487	0,961 3	74
17	0,292 4	0,305 7	3,271	0,956 3	73
18	0,309 0	0,324 9	3,078	0,951 1	72
19	0,325 6	0,344 3	2,904	0,945 5	71
20	0,342 0	0,364 0	2,747	0,939 7	70
21	0,358 4	0,383 9	2,605	0,933 6	69
22	0,374 6	0,404 0	2,475	0,927 2	68
23	0,390 7	0,424 5	2,356	0,920 5	67
24	0,406 7	0,445 2	2,246	0,913 5	66
25	0,422 6	0,466 3	2,145	0,906 3	65
26	0,438 4	0,487 7	2,050	0,898 8	64
27	0,454 0	0,509 5	1,963	0,891 0	63
28	0,469 5	0,531 7	1,881	0,882 9	62
29	0,484 8	0,554 3	1,804	0,874 6	61
30	0,500 0	0,577 4	1,732	0,866 0	60
31	0,515 0	0,600 9	1,664	0,857 2	59
32	0,529 9	0,624 9	1,600	0,848 0	58
33	0,544 6	0,649 4	1,540	0,838 7	57
34	0,559 2	0,674 5	1,483	0,829 0	56
35	0,573 6	0,700 2	1,428	0,819 2	55
36	0,587 8	0,726 5	1,376	0,809 0	54
37	0,601 8	0,753 6	1,327	0,798 6	53
38	0,615 7	0,781 2	1,280	0,788 0	52
39	0,629 3	0,809 8	1,235	0,777 1	51
40	0,642 8	0,839 1	1,192	0,766 0	50
41	0,656 1	0,869 3	1,150	0,754 7	49
42	0,669 1	0,900 4	1,111	0,743 1	48
43	0,682 0	0,932 5	1,072	0,731 4	47
44	0,694 7	0,965 7	1,036	0,719 3	46
45	0,707 1	1,000 0	1,000	0,707 1	45
	cos	cotg	tg	sen	g°

EDITORA
MODERNA

NÚMEROS COMPLEXOS POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

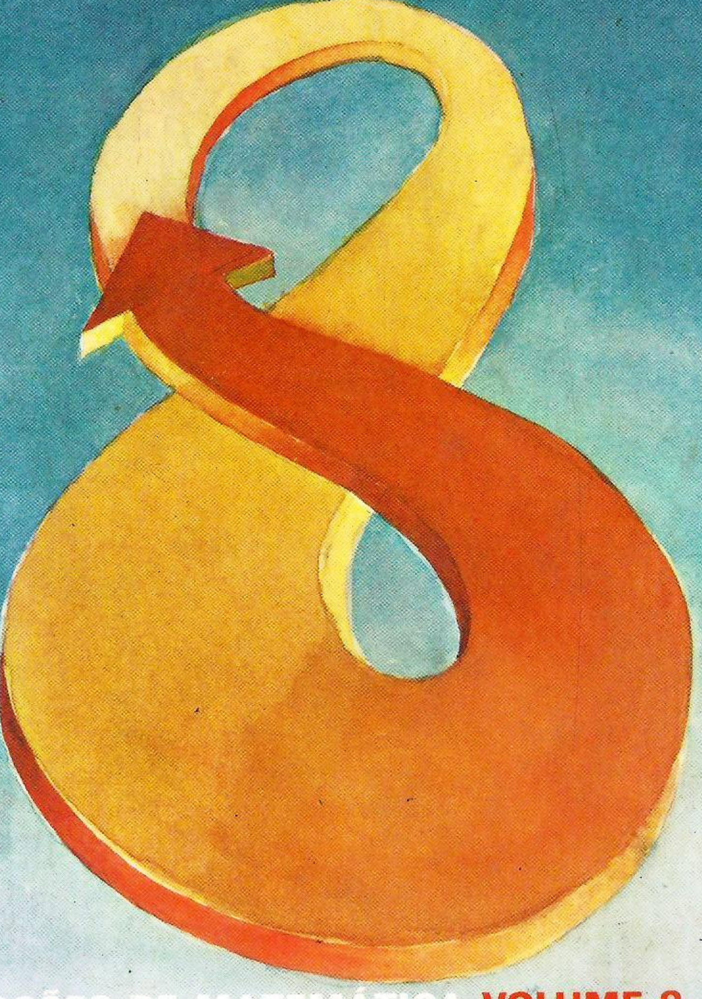
AREF ANTAR NETO
NILTON LAPA
JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO
SIDNEY LUIZ CAVALLANTTE

7

EDITORA MODERNA

INTRODUÇÃO À ANÁLISE MATEMÁTICA

AREF ANTAR NETO
NILTON LAPA
JOSÉ LUIZ PEREIRA SAMPAIO
SIDNEY LUIZ CAVALLANTTE



NOÇÕES DE MATEMÁTICA VOLUME 8

capa:
Ricardo van Steen

CIP-Brasil. Catalogação-na-Publicação
Câmara Brasileira do Livro, SP

I48 Introdução à análise matemática / Aref Antar Neto ... [et al.]. -- São Paulo : Ed. Moderna, 1985.
(Noções de matemática ; v.8)

1. Análise matemática 2. Cálculo integral 3. Funções I. Antar Neto, Aref, 1949 – II. Série.

84-2037

17. CDD-517
18. -515
17. -517.3
18. -515.43

Índices para catálogo sistemático:
1. Análise matemática 517 (17.) 515 (18.)
2. Cálculo integral : Matemática 517.3 (17.) 515.43 (18.)
3. Funções : Teoria : Matemática 517 (17.) 515 (18.)
4. Integração : Cálculo 517.3 (17.) 515.43 (18.)
5. Teoria das funções : Matemática 517 (17.) 515 (18.)

Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Afonso Brás, 431
Tel.: 531-5099
CEP 04511 - São Paulo - SP - Brasil

1985

Impresso no Brasil
2 4 6 8 10 9 7 5 3 1

Apresentação

Este é o 8.º volume da coleção **Noções de Matemática**, com o qual encerramos uma série de livros que desenvolvem os assuntos em geral estudados nos cursos de 2.º Grau e que compõem os programas da maioria dos exames vestibulares. A finalidade de dedicar praticamente um volume para cada parte da Matemática é possibilitar uma abordagem mais minuciosa de cada item, com um desenvolvimento lógico da teoria, mais cuidadoso e extenso do que se encontra nos compêndios usuais. Com isto, além de constituir material utlilizável para as aulas normais, onde o professor desenvolve a matéria de forma contínua, esta coleção também serve àqueles, estudantes ou professores, que desejam aprofundar-se em um dado assunto, caso em que estes livros se apresentam como fontes de consulta.

Após a apresentação de cada item teórico, segue-se uma série de Exercícios Resolvidos, alinhados segundo uma seqüência de dificuldade crescente, onde os detalhes da teoria são completados e esclarecidos. Em seguida, uma série de Exercícios Propostos convida o estudante a avaliar seu aproveitamento e sedimentar o que aprendeu. Ao final de cada parte, fecha-se o assunto com uma série de Exercícios Suplementares. As respostas de todos os Exercícios Propostos e Suplementares encontram-se no final de cada volume.

Os assuntos são assim distribuídos nos vários volumes:

Volume 1: **Conjuntos e funções**
Volume 2: **Progressões e logaritmos**
Volume 3: **Trigonometria**
Volume 4: **Combinatória, matrizes e determinantes**
Volume 5: **Geometria**
Volume 6: **Geometria analítica**
Volume 7: **Números complexos, polinômios e equações algébricas**
Volume 8: **Introdução à análise matemática**

Como sugestão para a aplicação da coleção **Noções de Matemática** aos cursos de 2.º Grau, podemos fazer a seguinte divisão:

1.ª série: volumes 1, 2 e 3
2.ª série: volumes 4 e 5
3.ª série: volumes 6, 7 e 8

Este volume 8, que encerra a coleção, revisa detalhadamente o conceito de função, apresentado no volume 1, acrescentando vários conceitos necessários às idéias de limite e de continuidade. Estes dois itens são desenvolvidos de forma minuciosa, bem como o estudo das derivadas e suas aplicações na variação das funções. Ao final, apresentamos uma introdução ao cálculo integral, com o intuito de iniciar o estudante do 2.º Grau e facilitar-lhe o acesso, futuramente, aos cursos de Cálculo das escolas superiores.

Pretendemos que a coleção **Noções de Matemática** seja também um instrumento útil para os estudantes universitários que tenham necessidade de uma revisão de Matemática Elementar.

A meta que nos propusemos ao escrever esta obra é, como já sabíamos, de difícil acesso. Trata-se de conciliar finalidades que exigem estratégias opostas: a simplicidade na apresentação dos assuntos e o rigor no desenvolvimento lógico da teoria; a adaptação do material para uso em salas de aula e o tratamento aprofundado e até certo ponto completo dos diversos itens. Acreditamos ter encontrado o equilíbrio indispensável para dar à obra este caráter múltiplo.

Os Autores

Índice

Parte I

Conceitos Básicos sobre as Funções

Capítulo 1 — **Módulo de um número real** ... 3

1.1 — Definição de módulo de um número real ... 3
1.2 — Interpretação geométrica ... 4
1.3 — Um resultado importante ... 4
1.4 — Propriedades do módulo ... 5

Capítulo 2 — **Intervalos e vizinhanças** ... 12

2.1 — Partes de ℝ: Intervalos ... 12
2.2 — Vizinhança completa em ℝ ... 14
2.3 — Vizinhança reduzida em ℝ ... 15
2.4 — Vizinhanças do infinito ... 16

Capítulo 3 — **Função** ... 19

3.1 — Relação e Função ... 19
3.2 — Função real ... 22
3.3 — A álgebra das funções ... 27
3.4 — Generalidades sobre funções reais ... 32
3.5 — Algumas funções elementares ... 38
3.6 — Transformações no gráfico de uma função ... 41
3.7 — Outras funções elementares ... 47
3.8 — A função exponencial ... 50
3.9 — Funções trigonométricas ... 51
3.10 — Função inversa ... 56
Exercícios Suplementares ... 62

Parte II

Limites e Continuidade

Capítulo 4 — **Definição de limite de uma função** ... 67

4.1 — Idéia intuitiva de limite de uma função ... 67
4.2 — Definição formal de limite de uma função ... 71

Capítulo 5 — **O conceito de função contínua** ... 85

5.1 — Idéia intuitiva de continuidade ... 85
5.2 — Definição de função contínua ... 86

Capítulo 6. — **Cálculo de limites** ... 95

6.1 — Substituição da função dada por uma função contínua (Teorema da Troca) ... 95
6.2 — Propriedades dos limites ... 97
6.3 — Propriedades das funções contínuas ... 109
6.4 — Função composta ... 109

Capítulo 7 — **Limites e continuidade laterais** ... 116

7.1 — Exemplos iniciais ... 116
7.2 — Limites laterais ... 117
7.3 — Continuidade lateral ... 118
7.4 — Função contínua em um intervalo fechado ... 118

Capítulo 8 — **Infinito** ... 123
8.1 — Limites infinitos ... 123
8.2 — Limites para $x \to \pm\ \infty$ ... 126
8.3 — Propriedades dos limites infinitos ... 128
8.4 — Limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando $f(x) \to L \neq 0$ e $g(x) \to 0$ ... 129
8.5 — Limites de polinômios para $x \to \pm\ \infty$ ... 133
8.6 — Limites da função racional para $x \to \pm\ \infty$ ... 135
8.7 — Limite de $\sqrt[n]{f(x)}$ quando $f(x) \to \pm\ \infty$ ... 137

Capítulo 9 — **Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas** ... 144

9.1 — Uma desigualdade importante ... 144
9.2 — Continuidade da função seno ... 145
9.3 — Continuidade das demais funções trigonométricas ... 146
9.4 — Teorema do confronto ... 146
9.5 — Limite trigonométrico fundamental ... 148
9.6 — Continuidade das funções exponenciais ... 151
9.7 — Limites das funções exponenciais para $x \to \pm\ \infty$ ... 154
9.8 — Continuidade das funções logarítmicas ... 157
9.9 — Limites das funções logarítmicas para $x \to \pm\ \infty$ ou $x \to 0+$ ... 159
9.10 — Função de variável inteira ... 161
9.11 — O número e ... 162
9.12 — Logarítmo natural ... 168
Exercícios Suplementares ... 172

Parte III

Derivadas

Capítulo 10 — **Derivadas** 179

10.1 — Introdução 179
10.2 — Reta tangente a uma curva 179
10.3 — Reta tangente ao gráfico de uma função 181
10.4 — Derivada de uma função em um ponto 183
10.5 — Continuidade e derivada 190
10.6 — Função derivada 192
10.7 — Notações 193

Capítulo 11 — **Algumas regras de derivação** 194

11.1 — Função constante 194
11.2 — Função potência 194
11.3 — Função seno 196
11.4 — Função cosseno 197
11.5 — Derivada de f(x) = k . g(x) 197
11.6 — Derivada da soma 198
11.7 — Derivada do produto 205
11.8 — Derivada do quociente 206
11.9 — Função potência de expoente inteiro 208
11.10 — Funções tangente, cotangente, secante e cossecante . 208
11.11 — Função exponencial 211
11.12 — Função logaritmo 212
11.13 — Tabela de derivadas 214
11.14 — Derivada de um determinante 215
11.15 — Derivadas sucessivas 215

Capítulo 12 — **Derivada de uma função composta** 217

12.1 — Introdução 217
12.2 — Regra da cadeia 217
12.3 — Demonstração da regra da cadeia 229
12.4 — Função potência de expoente real 230
12.5 — Derivada de $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$ 231
12.6 — Derivação logarítmica 232
12.7 — Derivação implícita 234

Capítulo 13 — **Funções inversas e derivadas** 239

13.1 — Derivada de uma função inversa 239
13.2 — Derivadas das funções trigonométricas inversas 241
13.3 — Função potência de expoente racional 244

Capítulo 14 — **Algumas aplicações das derivadas** 246

14.1 — Regra de L'Hospital 246
14.2 — Outras formas da regra de L'Hospital 252
14.3 — Aplicação da regra de L'Hospital a outros casos de indeterminação 255
14.4 — Velocidade e aceleração 258
14.5 — Taxa de variação 261

Capítulo 15 — **Variação das Funções** 263

15.1 — Introdução 263
15.2 — Teorema de Weierstrass 263
15.3 — Teorema de Fermat 265
15.4 — Teorema de Rolle 266
15.5 — Teorema do valor médio 268
15.6 — Derivadas e crescimento das funções 271
15.7 — Pesquisa de máximos e mínimos — Aplicação aos gráficos 274
15.8 — Pesquisa de máximos e mínimos — Uso da derivada segunda 284
15.9 — Máximos e mínimos: algumas aplicações 286
15.10 — Demonstração da regra de L'Hospital 293
Exercícios Suplementares 295

Parte IV

Integração: Noções Básicas

Capítulo 16 — **Noções de cálculo integral** 299

16.1 — Introdução 299
16.2 — O cálculo de áreas — Funções primitivas 299
16.3 — A integral indefinida 308
16.4 — Propriedades da integral indefinida 311

Capítulo 17 — **Técnicas de integração** 315

17.1 — Introdução 315
17.2 — Técnica I: Integração por substituição 315
17.3 — Técnica II: $\int f(ax + b)\,dx \ (a \neq 0)$ 317
17.4 — Técnica III: Integração por partes. Integrais da forma $\int f(x) \cdot g'(x)\,dx$ 327

Capítulo 18 — **A integral definida** 332

18.1 — Definição 332
18.2 — Teorema fundamental do cálculo 333
18.3 — A integral definida e a área 336
18.4 — A integral definida e a somatória 337
18.5 — Aplicação à Geometria: volume 339
18.6 — Aplicação à Física: trabalho 341
Exercícios Suplementares 342

Exercícios de Vestibulares 345
Respostas dos Exercícios Propostos 362
Respostas dos Exercícios Suplementares 391
Respostas dos Exercícios de Vestibulares 397

PARTE I

Conceitos Básicos sobre as Funções

Capítulo 1 — **Módulo de um número real**

Capítulo 2 — **Intervalos e vizinhanças**

Capítulo 3 — **Função**

Capítulo

1

Módulo de um número real

1.1 — DEFINIÇÃO DE MÓDULO DE UM NÚMERO REAL

Para todo número real **x**, o **módulo** ou **valor absoluto** de **x**, que se indica por $|x|$, é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Exemplos

a) O módulo do número real 5 é 5, isto é, $|5| = 5$.
b) O módulo do número real zero é zero, isto é, $|0| = 0$.
c) O módulo do número real -5 é 5, isto é, $|-5| = -(-5) = 5$.

Observe que, se **x** é positivo ou nulo, seu módulo é o próprio **x**; se **x** é negativo, o módulo é obtido trocando-se o sinal de **x**. Também note que, se $x = 0$, é indiferente dizer-se $|x| = x$ ou $|x| = -x$.

Da definição resulta que o número $|x|$ é **não-negativo** e que a igualdade $|x| = 0$ dá-se quando, e somente quando, $x = 0$; então

$$\forall x, x \in \mathbb{R}: \ |x| \geqslant 0$$

Finalmente, para todo número real **x**, tem-se

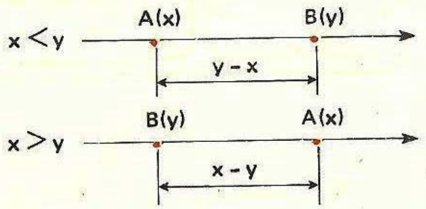
$$|-x| = |x|$$

1.2 — INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

A noção de módulo acarreta naturalmente o conceito de *distância*.

Sobre um eixo consideremos os pontos A e B, de abscissas **x** e **y**, respectivamente. A **distância** entre os pontos A e B, ou entre os números reais **x** e **y**, é, por definição

$$d(x, y) = |x - y|$$



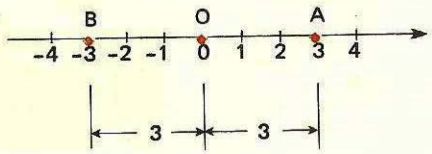
Observe que para todo número real **x** tem-se

$$|x| = |x - 0|$$

Essa igualdade significa que o **módulo de x** é a distância de **x** ao número zero, ou, que é a distância do ponto A, de abscissa **x**, à origem O.

Exemplos

Na figura ao lado, o número real 3 está associado ao ponto A; o módulo de 3 é a distância entre A e O. O número real -3 está associado ao ponto B; o módulo de -3 é a distância entre B e O.



1.3 — UM RESULTADO IMPORTANTE

Um número real **x**, *não-negativo*, admite uma única *raiz quadrada não-negativa*, que se indica por $\sqrt{x}$.

Por exemplo, o número 9 possui duas raízes quadradas: 3 e -3; o número 3 é a raiz quadrada não-negativa de 9 e escrevemos

$$\sqrt{9} = 3$$

O leitor deve estar atento para a incorreção cometida quando se escreve $\sqrt{x^2} = x$; essa igualdade é correta quando **x** é não-negativo e é falsa quando **x** é negativo; por exemplo, se $x = -3$, tem-se

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq x$$

Propriedade

Para todo número **x** tem-se

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Demonstração

Note inicialmente que $x^2 = (-x)^2$ e, então, x e $-x$ são **raízes quadradas** de x^2. Se $x \geqslant 0$, o número **x** é a **raiz quadrada não-negativa** de x^2 e se $x \leqslant 0$, o número $-$**x** é a **raiz quadrada não-negativa** de x^2.

Como $\sqrt{x^2}$ é a raiz quadrada não-negativa de x^2, tem-se

$$\sqrt{x^2} = x, \text{ se } x \geqslant 0$$
$$\sqrt{x^2} = -x, \text{ se } x \leqslant 0$$

e daí podemos escrever que

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases} = |x|$$

1.4 — PROPRIEDADES DO MÓDULO

Propriedade 1

Para todo número real **x**, tem-se

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$

Demonstração

Se $x \geqslant 0$ tem-se

$$-x \leqslant x \leqslant x$$

e, como $|x| = x$, podemos escrever

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$

Se $x \leqslant 0$ tem-se

$$x \leqslant x \leqslant -x$$

e, como $|x| = -x$, podemos escrever

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$

o que completa a demonstração.

Propriedade 2

Se **x** e **y** são números reais, tem-se

$$|xy| = |x| \cdot |y|$$

Demonstração

$$|x \cdot y| = \sqrt{(x \cdot y)^2} = \sqrt{x^2 \cdot y^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2} = |x| \cdot |y|$$

Uma conseqüência imediata da Propriedade 2 é que, sendo **x** e **y** reais e $y \neq 0$, tem-se

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

De fato, fazendo $\frac{x}{y} = a$, temos

$$\left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y| = |a| \cdot |y| = |a \cdot y| = \left|\frac{x}{y} \cdot y\right| = |x|$$

donde resulta a tese.

É claro, também, que $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$.

Propriedade 3

Se **x** e **a** são números reais e $a > 0$, tem-se

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

Demonstração

1.ª parte

Hipótese: $|x| < a$
Tese: $-a < x < a$

Inicialmente, consideremos $x \geqslant 0$; então $|x| = x$ e, da hipótese, podemos concluir que $x < a$. Como $a > 0$, tem-se $-a < x$ e daí $-a < x < a$.

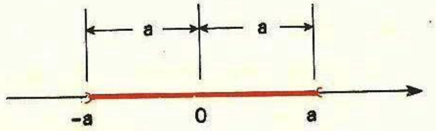
Agora, se $x \leqslant 0$, temos $|x| = -x$ e, da hipótese, $-x < a$; então, $x > -a$. Como $a > 0$, $a > x$, tem-se $-a < x < a$, o que completa a demonstração.

2.ª parte

Hipótese: $-a < x < a$
Tese: $|x| < a$

Inicialmente, se $x \geqslant 0$ tem-se $|x| = x$. E, como por hipótese $x < a$, conclui-se que $|x| < a$.

Se, agora, $x \leqslant 0$, tem-se $|x| = -x$. E, como por hipótese $x > -a$, conclui-se que $-x < a$ e daí $|x| < a$.



Observe que a **Propriedade 3** estabelece que $|x| < a$ *se e somente se* **x** estiver a uma distância menor do que **a**, do número zero.

Como $|x| = a \Leftrightarrow (x = a$ ou $x = -a)$, podemos escrever $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$.

Propriedade 4

Se **x** e **a** são números reais e $a > 0$, tem-se

$$|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \text{ ou } x > a)$$

Demonstração

Veja o exercício 1.15.

Propriedade 5 – DESIGUALDADE TRIANGULAR

Quaisquer que sejam os números reais **x** e **y**, tem-se

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Demonstração

A **Propriedade 1** permite-nos escrever

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$
$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|$$

Somando membro a membro as desigualdades acima, temos

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant (|x| + |y|)$$

e, daí, usando a **Propriedade 3**, temos a tese

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Exercícios Resolvidos

1.1) Resolva a equação na incógnita x: $|x - 3| = 4$.

Solução

Há dois números reais cujo módulo é 4, 4 e -4. Então, $x - 3 = 4$ ou $x - 3 = -4$.
Resolvendo as equações acima temos $x = 7$ ou $x = -1$.
Então

$$S = \{7; -1\}$$

Observe que as soluções da equação são todos os x que estão à distância 4 do número 3

1.2) Resolva a inequação na incógnita **x**: $|x - 3| < 4$.

Solução

A **Propriedade 3** permite-nos escrever

$$-4 < x - 3 < 4$$

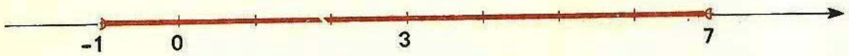
e, daí

$$-1 < x < 7$$

Então

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 7\}$$

Observe que as soluções da inequação são todos os **x** cujas distâncias ao número 3 são menores do que 4



1.3) Se $x < -3$, simplifique a expressão

$$y = \sqrt{9 - 6x + x^2} + \sqrt{9 + 6x + x^2}$$

Solução

Podemos escrever sucessivamente

$$y = \sqrt{(3 - x)^2} + \sqrt{(3 + x)^2}$$

$$y = |3 - x| + |3 + x|$$

Como $x < -3$, temos $3 - x > 0$ e então $|3 - x| = 3 - x$; e $3 + x < 0$ e então

$$|3 + x| = -(3 + x) = -3 - x$$

Segue-se que

$$y = 3 - x + (-3 - x) = -2x$$

Finalmente, $y = -2x$.

1.4) Sejam os números reais **a** e **b**; se $a \leqslant b$, definem-se

$$\text{máx}\ \{a; b\} = b$$
$$\text{mín}\ \{a; b\} = a$$

Assim, máx $\{-1; 3\} = 3$, máx $\{3; 3\} = 3$, mín $\{-4; -1\} = -4$ e mín $\{3; 3\} = 3$.

Verifique que

$$\text{máx}\ \{a; b\} = \frac{a + b + |b - a|}{2}$$

$$\text{mín}\ \{a; b\} = \frac{a + b - |b - a|}{2}$$

Solução

Se $b \geqslant a$, temos máx $\{a; b\} = b$, mín $\{a; b\} = a$ e $|b - a| = b - a$; então

$$\frac{a + b + |b - a|}{2} = \frac{a + b + (b - a)}{2} = \frac{2b}{2} = b = \text{máx}\ \{a; b\}$$

$$\frac{a + b - |b - a|}{2} = \frac{a + b - (b - a)}{2} = \frac{2a}{2} = a = \text{mín}\ \{a; b\}$$

Se $b \leqslant a$, temos máx $\{a; b\} = a$, mín $\{a; b\} = b$ e $|b - a| = -(b - a) = a - b$; então

$$\frac{a + b + |b - a|}{2} = \frac{a + b + (a - b)}{2} = \frac{2a}{2} = a = \text{máx}\ \{a; b\}$$

$$\frac{a + b - |b - a|}{2} = \frac{a + b - (a - b)}{2} = \frac{2b}{2} = b = \text{mín}\ \{a; b\}$$

1.5) Se **x** e **y** são números reais, demonstre que

a) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$
b) $|x| - |y| \leqslant |x - y|$
c) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$

Solução

a) Observe que podemos escrever

$$|x - y| = |x + (-y)|$$

Então, a **desigualdade triangular** dá-nos

$$|x - y| = |x + (-y)| \leqslant |x| + |-y|$$

E, como $|-y| = |y|$, vem a tese

$$|x - y| \leqslant |x| + |y|$$

b) Observe que podemos escrever

$$|x| = |(x - y) + y|$$

Então, a **desigualdade triangular** dá-nos

$$|x| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y|$$

Daí, $|x| \leqslant |x - y| + |y|$, e, finalmente a tese

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|$$

c) A propriedade anterior permite-nos escrever

$$|y| - |x| \leqslant |y - x|$$

e, daí

$$|y| - |x| \leqslant |x - y|$$

$$|x| - |y| \geqslant -|x - y| \quad (1)$$

Então, (1) e (b) dão-nos

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$$

e, da **Propriedade 3**

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$$

1.6) Demonstre que se $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, então

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$$

Solução

Aplicando a **desigualdade triangular**, temos

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| = |(x - x_0) + (y - y_0)| \leqslant |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

1.7) Determine o menor valor de M, M > 0, para que se tenha

$$\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M$$

para todo **x**, tal que $2 \leqslant x \leqslant 7$.

Solução

$$2 \leqslant x \leqslant 7 \Rightarrow |x| \geqslant 2 \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{2} = M$$

Como para $x = 2$ tem-se $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{2}$, dado qualquer outro M', $0 < M' < \frac{1}{2}$, a desigualdade $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant M'$ não seria satisfeita para todo **x**, tal que $2 \leqslant x \leqslant 7$. Logo, $M = \frac{1}{2}$ é o *menor valor*.

1.8) Mostre que se **a**, **b** e **c** são números reais tais que $a < b < c$, então $d(a, b) < d(a, c)$ e que $d(b, c) < d(a, c)$.

Solução

$d(a, b) = |a - b| = -(a - b) = b - a$, pois $b > a$, por hipótese

$d(a, c) = |a - c| = -(a - c) = c - a$, pois $c > a$, por hipótese

Como $a < b < c$, tem-se

1) $c - a > b - a > 0$
$|c - a| > |b - a|$
$d(a, c) > d(a, b)$

2) $c - b > c - a > 0$
$|c - b| > |c - a|$
$d(b, c) > d(a, c)$

Exercícios Propostos

1.9) Determine $|x|$ se:

a) $x = 4$ b) $x = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ c) $x = k^2$ d) $x = -k^2$

1.10) Determine **x** para que se tenha $\sqrt{x^2 - 5x + 6} = x^2 - 5x + 6$.

1.11) Considere a expressão $Y = \sqrt{(x - 1)^2}$
Quais são as diferentes *formas* que ela pode assumir, segundo os valores de **x**?

1.12) Resolva as equações na incógnita **x**:

a) $|x - 3| = 8$
b) $|x - 4| \cdot |x + 2| = 0$
c) $|x - 1| \cdot |x + 2| = 4$
d) $|6x - 7| = |3 + 2x|$
e) $|9x| - 11 = x$

1.13) Resolva as inequações na incógnita **x**:

a) $|2x - 3| < \frac{1}{2}$
b) $|2x - 4| \geqslant 8$
c) $|x + 3| < |x - 8|$

1.14) Verifique que, quaisquer que sejam os números reais **x** e **y**, distintos e não nulos, tem-se

$$\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy} + \frac{\sqrt{(x - y)^2}}{x - y}\left[\frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{y^2}}{y}\right] = 1$$

1.15) Se **x** e **a** são números reais e $a > 0$, demonstre que

$$|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \text{ ou } x > a)$$

1.16) Se **x** e **y** são números reais, demonstre que:

a) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, com $y \neq 0$
b) $|x^n| = |x|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

1.17) Use o **método da indução matemática** (volume 2 desta coleção) para demonstrar que, dados os números reais $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$$

1.18) Demonstre que se $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2}$, então

$$|(x - y) - (x_0 - y_0)| < \varepsilon$$

1.19) Verifique que $|x| = \text{máx}\,\{x; -x\}$.

1.20) Use a **desigualdade triangular** para determinar *um* valor de M tal que

$$|x^3 - 2x + 1| \leqslant M$$

para todo **x** tal que $-2 < x < 3$.

1.21) Seja **f** a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x^3 - x - 1$.
Calcule em função de **a** e **b**, $a \neq b$, o quociente

$$\frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Deduza que, se $|a| < 2$ e $|b| < 2$, tem-se $|f(a) - f(b)| < 49 \cdot |a - b|$.

Capítulo

2 Intervalos e vizinhanças

2.1 — PARTES DE IR: INTERVALOS

Sejam **a** e **b** números reais tais que a < b.

1.º) Em IR, chama-se **intervalo fechado de origem a e de extremidade b** à parte de IR constituída dos elementos **x**, tais que $a \leqslant x \leqslant b$; para representá-lo usamos a notação

[a; b]

Por exemplo: [2; 6] = {x ∈ IR | 2 ⩽ x ⩽ 6}.

Observe que o *intervalo fechado* [2; 6] não é o *conjunto* {2; 6}; por definição, os elementos do intervalo [2; 6] são todos os números reais "entre" 2 e 6, incluídos também 2 e 6, enquanto que {2; 6} possui somente dois elementos: 2 e 6.

Geometricamente, o intervalo fechado de origem **a** e de extremidade **b** é representado pelo diagrama

2.º) Em IR, chama-se **intervalo semi-aberto à direita de origem a e de extremidade b** à parte de IR constituída dos elementos **x**, tais que $a \leqslant x < b$; para representá-lo usamos a notação

[a; b[

Por exemplo.

[2; 4[= {x ∈ IR | 2 ⩽ x < 4}.

Geometricamente, o intervalo [a; b[é representado pelo diagrama

3.º) Em IR, chama-se **intervalo semi-aberto à esquerda de origem a e de extremidade b** à parte de IR constituída dos elementos **x**, tais que $a < x \leqslant b$; para representá-lo usamos a notação

]a; b]

Por exemplo

]−1; 1] = {x ∈ IR | −1 < x ⩽ 1}

Geometricamente, o intervalo]a; b] é representado pelo diagrama

4.º) Em IR, chama-se **intervalo aberto de origem a e de extremidade b** à parte de IR constituída dos elementos **x**, tais que $a < x < b$; para representá-lo usamos a notação

]a; b[

Por exemplo:]0; 4[= {x ∈ IR | 0 < x < 4}.

Observe que o intervalo]0; 4[e o conjunto {0; 4} não possuem qualquer elemento comum e que

]0; 4[∪ {0; 4} = [0; 4]

Geometricamente, o intervalo]a; b[é representado pelo diagrama

5.º) Seja **a** um número real.

Em IR, o conjunto dos elementos **x** tais que $x \leqslant a$ chama-se **intervalo fechado ilimitado à esquerda e de extremidade a**; para representá-lo usamos a notação

]− ∞; a]

O conjunto dos elementos **x**, tais que $x < a$, chama-se **intervalo aberto ilimitado à esquerda e de extremidade a**; para representá-lo usamos a notação

]− ∞; a[

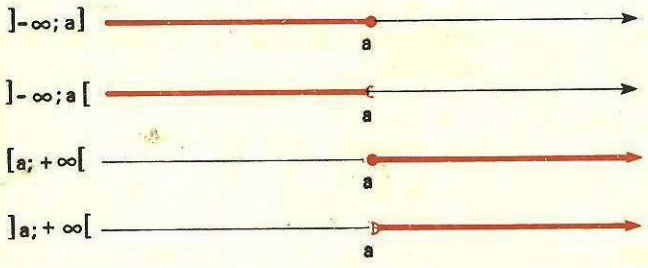
Analogamente, o conjunto dos elementos **x**, tais que $x \geqslant a$, chama-se **intervalo fechado ilimitado à direita e de origem a**; para representá-lo usamos a notação

$$[a;\ +\infty[$$

E, o conjunto dos elementos **x**, tais que $x > a$, chama-se **intervalo aberto ilimitado à direita e de origem a**; para representá-lo usamos a notação

$$]a;\ +\infty[$$

Geometricamente, os intervalos acima são representados respectivamente por



Enfim, consideramos IR como um **intervalo aberto ilimitado nos dois sentidos**, indicado por

$$]-\infty;\ +\infty[$$

2.2 – VIZINHANÇA COMPLETA EM IR

Seja x_0 um número real.

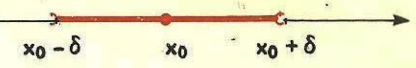
Em IR, chama-se **vizinhança completa de x_0** a um *intervalo aberto* I, tal que $x_0 \in I$.

Uma vizinhança completa de x_0 é indicada por $V(x_0)$.

Por exemplo, o *intervalo aberto* $I = \left]\frac{1}{2};\ 5\right[$ é uma **vizinhança completa** do número 4, pois $4 \in I$

Observe que sendo $a < b$, o intervalo $]a;\ b[$ é uma vizinhança completa do x_0 se e somente se $x_0 \in]a;\ b[$, isto é, $a < x_0 < b$.

Em IR, chama-se **vizinhança completa simétrica de x_0 de raio δ**, $\delta \in IR^*_+$, ao intervalo aberto $]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[$



Indica-se por $V(x_0;\ \delta)$.

Observe que se $x \in V(x_0;\ \delta)$ temos

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

ou

$$-\delta < x - x_0 < \delta$$

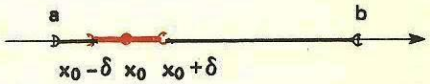
ou ainda

$$|x - x_0| < \delta$$

ou também

$$d(x;\ x_0) < \delta$$

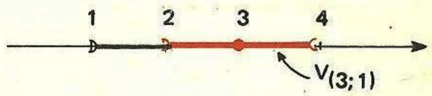
É importante observar que se $V(x_0) =]a;\ b[$ é uma vizinhança completa de x_0, há uma vizinhança completa simétrica de x_0, $V(x_0;\ \delta)$ tal que



$$V(x_0;\ \delta) \subset V(x_0)$$

Note que para construirmos uma tal vizinhança simétrica basta tomarmos $\delta \leqslant \text{mín}\ \{x_0 - a;\ b - x_0\}$.

Por exemplo, seja a vizinhança completa $V(3) =]1;\ 4[$ do número 3. Se tomarmos $\delta \leqslant \text{mín}\ \{3 - 1;\ 4 - 3\} = \text{mín}\ \{2;\ 1\} = 1$, toda vizinhança simétrica $V(3;\ \delta)$ é tal que $V(3;\ \delta) \subset V(3)$; para $\delta = 1$, temos a vizinhança $V(3;\ 1)$.



2.3 – VIZINHANÇA REDUZIDA EM IR

Seja x_0 um número real.

Se $V(x_0)$, em IR, é uma vizinhança completa de x_0, a parte de IR

$$V^*(x_0) = V(x_0) - \{x_0\}$$

denomina-se **vizinhança reduzida de x_0**.

Observe que para obtermos $V^*(x_0)$ "retiramos" o ponto x_0 da vizinhança completa $V(x_0)$.

Analogamente, se $V(x_0;\ h)$ é uma vizinhança completa simétrica de x_0, a parte de IR

$$V^*(x_0;\ \delta) = V(x_0;\ \delta) - \{x_0\}$$

denomina-se **vizinhança reduzida de x_0 de raio δ**.

Observe que se $x \in V^*(x_0; \delta)$ temos

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \quad e \quad x \neq x_0$$

ou

$$-\delta < x - x_0 < \delta \quad e \quad x \neq x_0$$

ou ainda

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

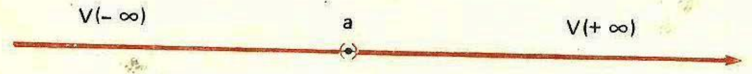
ou também

$$0 < d(x; x_0) < \delta$$

2.4 — VIZINHANÇAS DO INFINITO

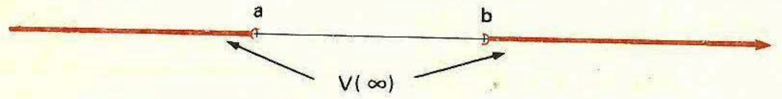
Todo intervalo do tipo $]a; +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$, chama-se **vizinhança à esquerda do infinito**; indica-se-a por $V(+\infty)$.

Analogamente, todo intervalo do tipo $]-\infty; -a[$, $a \in \mathbb{R}$, chama-se **vizinhança à direita do infinito**; indica-se-a por $V(-\infty)$.



Se **a** e **b** são números reais tais que $a < b$, o complementar em $\mathbb{R}$, do intervalo fechado $[a; b]$ denomina-se **vizinhança do infinito**; indica-se com $V(\infty)$

$$V(\infty) = \complement_{\mathbb{R}}[a; b]$$

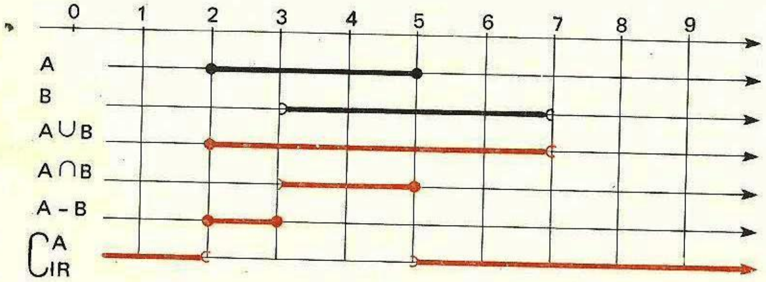


Exercícios Resolvidos

2.1) Sendo $A = [2; 5]$ e $B =]3; 7[$, determine:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$ c) $A - B$ d) $\complement_{\mathbb{R}}A$

Solução



a) $A \cup B = [2; 7[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 7\}$
b) $A \cap B =]3; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$
c) $A - B = [2; 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 3\}$
d) $\complement_{\mathbb{R}}A =]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 5\}$

2.2) Resolva as inequações

a) $|x - 2| \geq 1$ b) $|x - x_0| < \delta$, $\delta > 0$

utilizando na resposta a notação para *intervalos*.

Solução

a) A **Propriedade 4** do capítulo 1 permite-nos escrever

$$x - 2 \leq -1 \quad \text{ou} \quad x - 2 \geq 1$$

e daí

$$x \leq 1 \quad \text{ou} \quad x \geq 3$$

então

$$S =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$$

b) A **Propriedade 3** do capítulo 1 permite-nos escrever

$$-\delta < x - x_0 < \delta$$

e daí

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

então

$$S =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$$

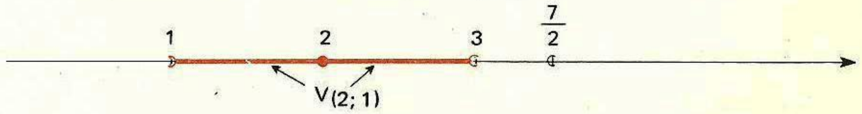
2.3) Seja $V(2) = \left]1; \frac{7}{2}\right[$ uma **vizinhança completa** do número 2. Determine uma **vizinhança completa simétrica** do número 2, $V(2; \delta)$, tal que $V(2; \delta) \subset V(2)$.

Solução

A observação do item 2.2 permite-nos escrever que o raio δ da vizinhança desejada satisfaz a condição

$$\delta \leq \min\left\{2 - 1; \frac{7}{2} - 2\right\} = \min\left\{1; \frac{3}{2}\right\} = 1$$

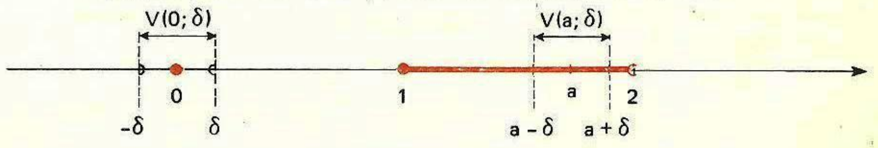
Em particular, para $\delta = 1$ a vizinhança é $V(2; 1)$.



2.4) Seja $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } 1 \leq x < 2\}$; quais pontos de S possuem ao menos uma **vizinhança completa simétrica** contida em S?

Solução

Qualquer ponto **a**, $1 < a < 2$, possui uma vizinhança contida em S



Assim, por exemplo, se $a = 1{,}99$, uma vizinhança de **a** contida em S é $V(1{,}99;\ 0{,}005) = \ ]1{,}985;\ 1{,}995[$. Há outras vizinhanças possíveis; basta escolher um raio $\delta < 0{,}01$.

Como mostra a figura, o número zero não possui vizinhança contida em S; além disso, os números 1 e 2 não possuem vizinhanças contidas em S.

2.5) Seja x_0 um número real. Prove que a intersecção de duas **vizinhanças completas simétricas de x_0**, em IR, é também uma **vizinhança completa simétrica de x_0**.

Solução

Sejam $V(x_0;\ \delta_1)$ e $V(x_0;\ \delta_2)$ duas vizinhanças completas simétricas de x_0, com raios δ_1 e δ_2, respectivamente; então

$$V(x_0;\ \delta_1) = \ ]x_0 - \delta_1;\ x_0 + \delta_1[$$
$$V(x_0;\ \delta_2) = \ ]x_0 - \delta_2;\ x_0 + \delta_2[$$

Se $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1;\ \delta_2\}$, tem-se

$$V(x_0;\ \delta_1) \cap V(x_0;\ \delta_2) = \ ]x_0 - \delta_1;\ x_0 + \delta_1[\ \cap\ ]x_0 - \delta_2;\ x_0 + \delta_2[\ = \ ]x_0 - \delta;\ x_0 + \delta[$$

Daí, podemos concluir que $V(x_0;\ \delta_1) \cap V(x_0;\ \delta_2)$ é uma **vizinhança completa simétrica de x_0 com raio δ**

$$V(x_0;\ \delta_1) \cap V(x_0;\ \delta_2) = V(x_0;\ \delta)$$

Exercícios Propostos

2.6) Se $A = [-3;\ 1[$, $B = [-1;\ 2[$ e $C = \left]-2;\ \frac{5}{4}\right[$, determine:

a) $A \cap B \cap C$ b) $(A - B) \cup C$ c) $(A \cap B) - C$ d) $B \cap C$

2.7) Determine:

a) $]1;\ 3[\ \cap [2;\ 5]$
b) $]1;\ 3[\ \cup [2;\ 5]$
c) $]1;\ 3[\ \cap \{1;\ 3\}$
d) $]1;\ 3[\ \cup \{1;\ 3\}$
e) $]-\infty;\ 10[\ \cup \{10\}$
f) $([1;\ 2] \cap [2;\ 3]) \times \{a;\ b\}$

2.8) Resolva as inequações

a) $|x^2 - 1| < \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{1 + x^2} \leqslant a$

utilizando na resposta a notação para *intervalos*.

2.9) Seja $V(0) = \left]-\frac{1}{2};\ 2\right[$ uma **vizinhança completa** do número zero. Determine a **vizinhança completa simétrica** do número zero, $V(0;\ \delta)$, de maior raio, tal que $V(0;\ \delta) \subset V(0)$.

2.10) Seja $A = \{x \in IR^* \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$. Quais pontos de A possuem ao menos uma **vizinhança completa** contida em A? Há algum ponto que não pertence a A que possui uma **vizinhança reduzida** contida em A?

Capítulo

3

Função

3.1 — RELAÇÃO E FUNÇÃO

Recordemos, de forma resumida, o conceito de **relação entre dois conjuntos**, assunto tratado com detalhes no volume 1 desta coleção.

Par ordenado

Dados os números **a** e **b**, podemos formar com eles um **par ordenado**, indicado por (a; b).

A noção de par ordenado é um *conceito primitivo*. Em um par ordenado, a ordem é essencial. Assim, o par (1; 3) é distinto do par (3; 1). Além disso

$$(a;\ b) = (c;\ d) \Leftrightarrow [a = c \text{ e } b = d]$$

Produto cartesiano

Consideremos dois conjuntos não vazios A e B. O conjunto de todos os pares ordenados (x; y), com $x \in A$ e $y \in B$, chama-se **produto cartesiano** de A por B e se indica $A \times B$

$$A \times B = \{(x;\ y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Nota: Se $A = \varnothing$ ou $B = \varnothing$, completa-se a definição com

$$A \times B = \varnothing$$

Exemplo

Dados os conjuntos $A = \{2,\ 4,\ 6\}$ e $B = \{1,\ 5\}$, temos

$$A \times B = \{(2;\ 1),\ (2;\ 5),\ (4;\ 1),\ (4;\ 5),\ (6;\ 1),\ (6;\ 5)\}$$

Relação

Sejam os conjuntos A e B. Uma **relação $\mathscr{R}$, de A em B**, é qualquer subconjunto de $A \times B$.

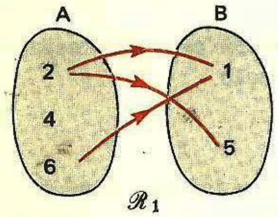
Exemplo

Consideremos os conjuntos do exemplo anterior. Os subconjuntos de A × B

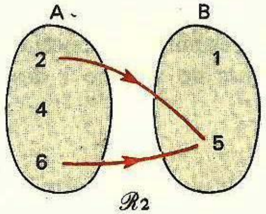
$$\mathcal{R}_1 = \{(2;\ 1),\ (2;\ 5),\ (6;\ 1)\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(2;\ 5),\ (6;\ 5)\}$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(4;\ 1)\}$$
$$\mathcal{R}_4 = \varnothing$$
$$\mathcal{R}_5 = A \times B$$

são *relações de A em B*.

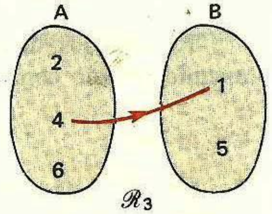
As relações podem ser representadas por *diagramas de flechas*, onde as flechas ligam os elementos que compõem cada par ordenado. As relações $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$ do exemplo anterior apresentam os seguintes diagramas de flechas:



$\mathcal{R}_1$



$\mathcal{R}_2$



$\mathcal{R}_3$

Correspondência entre dois conjuntos

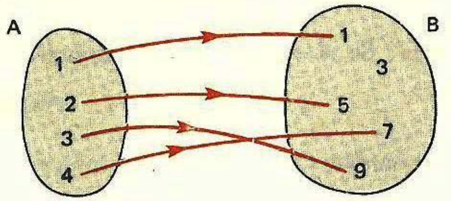
Uma relação de A em B estabelece uma **correspondência** entre os dois conjuntos, significando isto que aos elementos de A ficam associados a elementos de B, por meio da relação.

Exemplos

Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, podemos definir várias correspondências entre eles. Usando diagramas de flechas, temos, por exemplo

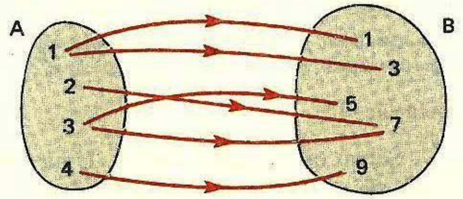
1.ª correspondência

(relação $\mathcal{R}_1$)



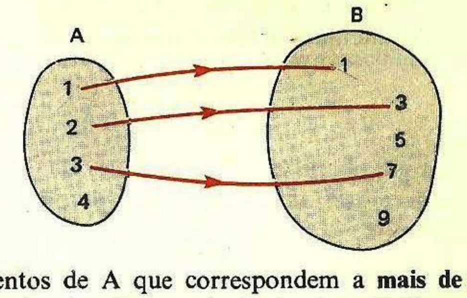
2.ª correspondência

(relação $\mathcal{R}_2$)



3.ª correspondência

(relação $\mathcal{R}_3$)



Na 2.ª correspondência há elementos de A que correspondem a **mais de um** elemento de B. De fato, ao elemento $1 \in A$ estão associados 1 e 3 em B. Também, a partir de $3 \in A$, obtemos 5 e 7 em B.

Na 3.ª correspondência, isto não acontece, mas por outro lado temos um elemento, $4 \in A$, que **não possui correspondente** em B.

Na 1.ª correspondência, *todos os elementos de A possuem correspondente único em B*. Este tipo de correspondência dá origem ao conceito de **função**, que recordaremos a seguir.

Conceito de função

Sejam A e B conjuntos *diferentes do conjunto vazio*, cujos elementos são **números**.

Uma **função f, de A em B**, é uma correspondência que associa a *cada* elemento de A um *único* elemento em B.

De uma forma mais precisa, *função é um tipo especial de relação*, de acordo com a definição seguinte.

Definição

> Sejam os conjuntos A e B, não vazios, e seja **f** uma relação de A em B. Diz-se que **f** é uma função de A em B se, e somente se, para todo **x**, em A, existir em correspondência um e um só **y** em B, tal que
>
> $$(x;\ y) \in f$$

O conjunto A denomina-se **domínio de f** e pode ser indicado com a notação D(f). Quando uma função tem domínio A, diz-se que ela está **definida em A**.

O conjunto B denomina-se **contradomínio de f** e pode ser indicado com a notação CD(f).

Se **x** é um elemento qualquer de A, então o único **y** de B associado a **x** é denominado **imagem de x pela função f** ou **valor da função f em x** e será indicado com a notação f(x), (lê-se "f de x")

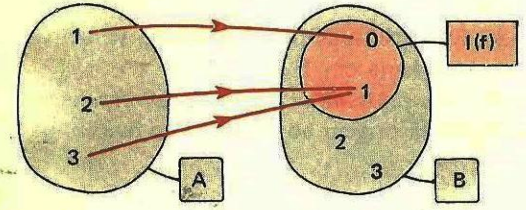
$$y = f(x)$$

O conjunto de todos os elementos de B que são imagem de algum elemento de A denomina-se **conjunto-imagem de f**, e pode ser indicado com a notação I(f)

$$I(f) = \{y \in B \mid \exists x, x \in A \text{ e } y = f(x)\}$$

Exemplo

Sejam os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$ e a função **f**, de A em B, definida pelo "diagrama de flechas" abaixo



$$D(f) = A = \{1, 2, 3\}$$
$$CD(f) = B = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$I(f) = \{0; 1\}$$

No exemplo acima temos: $f(1) = 0$, $f(2) = 1$ e $f(3) = 1$.
Observe também que

$$I(f) \subset CD(f)$$

3.2 – FUNÇÃO REAL

Em nosso trabalho têm interesse as funções nas quais os elementos do domínio e do contradomínio são **números reais**. Uma tal função denomina-se **função real de variável real** ou simplesmente **função real**.

Por exemplo, a função **f**, de IR em IR, para a qual

$$f(x) = x^2$$

é uma *função real*.

Observe que a imagem de qualquer elemento **x** do domínio IR é obtida elevando-se ao quadrado o número **x**; assim, se quisermos a imagem do número 3

$$f(3) = 3^2 = 9$$

De uma outra forma, para obtermos a imagem do número 3, f(3), na *fórmula* $f(x) = x^2$, substituímos a letra **x** pelo número 3 e efetuamos as operações indicadas.

Vimos que, para se definir uma função **f**, dão-se dois conjuntos, o seu **domínio** e o seu **contradomínio** e, ainda, uma **lei** (uma fórmula, uma sentença) que descreve como se "associa" a cada elemento do domínio um único elemento no contradomínio.

Na prática, entretanto, tratando-se de função real, é comum omitir-se o domínio e o contradomínio, dando-se somente a "fórmula" que estabelece a correspondência entre **x** e f(x). Quando isto acontecer, está convencionado o seguinte

1.º) o **contradomínio** da função **f** é $CD(f) = IR$

2.º) o **domínio** da função **f**, D(f), é o subconjunto de IR, constituído por *todos* os valores de **x** para os quais as operações indicadas na "fórmula" são *possíveis, gerando como resultado um número real.*

Exemplos

1.º) A função **f** definida pela fórmula

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

tem para domínio o subconjunto de IR, constituído por todos os valores de **x** para os quais $x - 1 \geqslant 0$, isto é, $x \geqslant 1$; então

$$D(f) = [1; +\infty[$$

E

$$CD(f) = IR$$

2.º) Para a função definida por

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

o domínio é constituído pelos números reais **x** tais que $x - 1 \neq 0$, isto é

$$D(f) = IR - \{1\}$$

E

$$CD(f) = IR$$

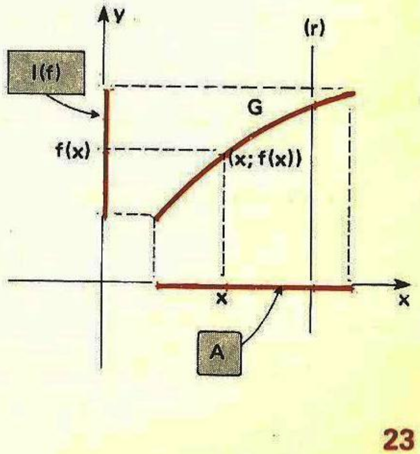
Gráfico de uma função real

Seja **f** uma função real, de A em B.

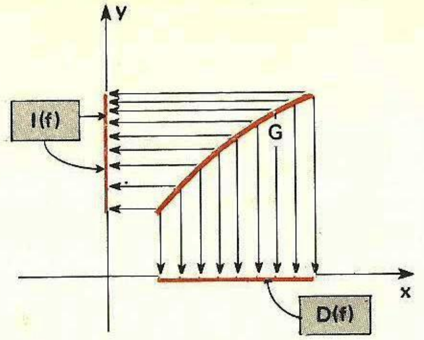
Fixado um sistema de coordenadas ortogonais xOy, o conjunto G da totalidade dos pontos (x; f(x)), com **x** em A, é o **gráfico** de **f**.

Observe o seguinte:

1.º) Toda reta (**r**), vertical, que passa por um ponto de $A = D(f)$, encontra o gráfico G em um único ponto, o que nos dá um critério para decidirmos se uma figura do plano cartesiano pode ser gráfico de função.



2.º) Quando se conhece o gráfico G de uma função **f**, o seu domínio pode ser obtido projetando-se G sobre Ox, na direção Oy; o conjunto-imagem de **f** pode ser obtido projetando-se G sobre Oy, na direção Ox



Exercícios Resolvidos

3.1) Seja a função **f**, de IR em IR, para a qual

$$f(x) = x^2 - 2$$

Calcule f(0), f(2) e $f\left(\frac{1}{a}\right)$, com $a \neq 0$ e f[f(a)]

Solução

Temos, então

$$f(0) = (0)^2 - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$f(2) = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2 = \frac{1}{a^2} - 2 = \frac{1 - 2a^2}{a^2}$$

$$f[f(a)] = [f(a)]^2 - 2 = (a^2 - 2)^2 - 2 = a^4 - 4a^2 + 2$$

3.2) Seja a função **g**, de IR em IR, para a qual

$$g(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \leqslant 2 \\ 2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Determine: g(0), g(2), g(3) e g(2t)

Solução

Observe que todo **x** real, tal que $x \leqslant 2$, tem para imagem $g(x) = x + 2$; então

$$g(0) = (0) + 2 = 2$$

$$g(2) = (2) + 2 = 4$$

E, todo **x** real, tal que $x > 2$, tem para imagem $g(x) = 2$; então

$$g(3) = 2$$

Para o cálculo de g(2t), devemos fazer duas hipóteses.

1.ª) Se $2t \leqslant 2$, tem-se

$$g(2t) = (2t) + 2 = 2t + 2$$

2.ª) Se $2t > 2$, tem-se

$$g(2t) = 2$$

Então, se $t \leqslant 1$, tem-se $g(2t) = 2t + 2$ e, se $t > 1$, tem-se $g(2t) = 2$.

3.3) Dê o **domínio** da função **f** definida pela "fórmula"

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

Solução

Para que as operações indicadas na "fórmula" sejam possíveis devemos ter

(1) $1 - x \neq 0$, isto é, $x \neq 1$

(2) $\frac{1 + x}{1 - x} \geqslant 0$

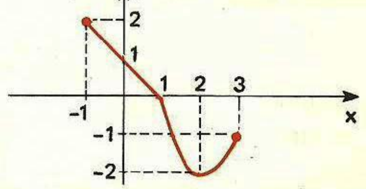
A inequação da condição (2) é satisfeita para $-1 \leqslant x < 1$; então

$$D(f) = [-1; 1[$$

3.4) Seja a função **f** definida pelo gráfico abaixo

Determine:

a) D(f)
b) I(f)
c) **x** tal que $f(x) = 0$
d) **x** tal que $f(x) > 0$



Solução

a) Para determinarmos o **domínio** de **f** projetamos o gráfico de **f** sobre Ox, na direção Oy; então

$$D(f) = [-1; 3]$$

b) Para determinarmos o **conjunto-imagem** de **f** projetamos o gráfico de **f** sobre Oy, na direção Ox; então

$$I(f) = [-2; 2]$$

c) Queremos determinar **x**, $x \in D(f)$, tal que sua imagem seja zero; devemos procurar os pontos onde o gráfico "encontra" o eixo Ox: a abscissa **x** desse ponto é tal que a imagem de **x** é zero, isto é, $f(x) = 0$. No exemplo acima encontramos $x = 1$.

d) Queremos determinar **x**, $x \in D(f)$, tal que sua imagem seja *positiva*; devemos procurar os pontos para os quais o gráfico "está acima" do eixo Ox: as abscissas **x** desses pontos são tais que $f(x) > 0$. No exemplo acima, $-1 \leqslant x < 1$ responde à questão proposta.

Exercícios Propostos

3.5) Seja a função **f**, de IR em IR, para a qual

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

Determine:

a) f(– 2) b) f(4) c) f(0) d) $f(-\sqrt{3})$ e) f(t)

3.6) Seja a função g, de IR em IR, para a qual

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \geqslant 3 \\ 2x, & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Determine:

a) g(2) b) g(–4) c) g(3) d) g(3, 1) e) g(2, 9) f) $g(t^2)$

3.7) Determine os domínios de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-2}}$

b) $f(x) = \sqrt{(x+2)(x-2)}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$

d) $f(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x-2}$

3.8) Determine os domínios de cada uma das funções definidas por:

a) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| + x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+|x|}{1-|x|}}$

3.9) Para a função f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \sqrt{-(x^2-1)^2}$$

determine:

a) D(f)

b) I(f)

3.10) O domínio da função real definida por

$$f(x) = \sqrt{-x+m}$$

é $D(f) =]-\infty; 2]$. Determine **m**.

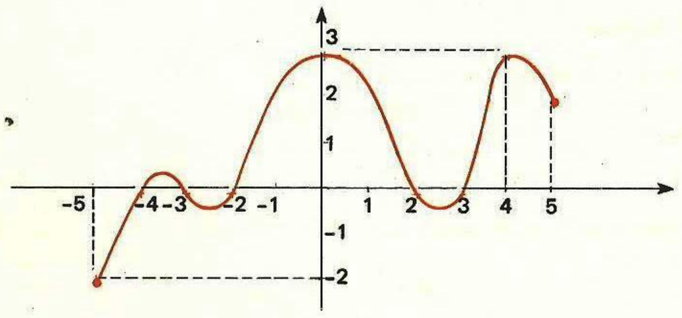
3.11) Sejam as funções **f** e **g** definidas respectivamente por:

$$g(x) = x - 3$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x+3}, & \text{se } x \neq -3 \\ m, & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

Determine **m** para que $f(x) = g(x)$ para todo **x**.

3.12) Considere a função **f** definida pelo gráfico abaixo.



Determine:

a) D(f)

b) I(f)

c) **x** tal que $f(x) = 0$

d) **x** tal que $f(x) = 3$

e) **x** tal que $f(x) \geq 0$

3.3 — A ÁLGEBRA DAS FUNÇÕES

Definição

As funções **f**, de A em B, e **g**, de C em D são iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo **x** em A.

Exemplo

A função **f**, de IR em IR, definida por

$$f(x) = 1$$

e a função **g**, de IR em IR, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

são iguais.

Definições

Sejam **f** e **g** *funções reais*.

A tabela abaixo define quatro novas funções, obtidas a partir de **f** e de **g**

nome da função	notação	domínio	contra-domínio	fórmula que a define
soma	$f + g$	$D(f) \cap D(g)$	IR	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
diferença	$f - g$	$D(f) \cap D(g)$	IR	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
produto	$f \cdot g$	$D(f) \cap D(g)$	IR	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
quociente	$\dfrac{f}{g}$	$D(f) \cap D(g)$ com $g(x) \neq 0$	IR	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Exemplo

Sejam as funções **f** e **g** definidas respectivamente por

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$
$$g(x) = \sqrt{x}$$

Então, $D(f) = [-1; 1]$, $D(g) = [0; +\infty[$ e $D(f) \cap D(g) = [0; 1]$.

Daí, as funções $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ têm domínio $[0; 1]$, e são definidas, respectivamente por:

$$(f+g)(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x}$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x}$$
$$(f \cdot g)(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{x}$$

A função $\frac{f}{g}$ tem domínio

$$D\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \mid x \in D(f) \cap D(g) \text{ e } g(x) \neq 0\}$$

Então

$$D\left(\frac{f}{g}\right) =]0;\ 1]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x}}$$

Definição

Dadas as funções **f** e **g**, $g \circ f$ é uma função que se diz **composta de g com f**, definida por

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

O domínio de $g \circ f$ é

$$D(g \circ f) = \{x \mid x \in D(f) \text{ e } f(x) \in D(g)\}$$

Adotaremos $CD(g \circ f) = CD(g)$.

Exemplo

Sejam as funções **f** e **g** definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = \sqrt{x - 5}$$

O domínio da função **f** é $D(f) = [0;\ +\infty[$ e o domínio da função **g** é $D(g) = [5;\ +\infty[$. Então

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \boxed{x \in D(f)} \text{ e } \boxed{f(x) \in D(g)}\}$$
$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \boxed{x \geqslant 0} \text{ e } \boxed{\sqrt{x} \geqslant 5}\}$$

E, daí

$$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 25\} = [25;\ +\infty[$$

Temos também

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{f(x) - 5} = \sqrt{\sqrt{x} - 5}$$

Observações

Não se deve confundir a notação $g \circ f$ com a notação $g \cdot f$; note também que a grafia $g \circ f$ está "às avessas": a **primeira** função que se aplica é **f** e a **segunda** é **g**.

Dadas as funções **g** e **f**, pode-se pensar em duas funções compostas, $g \circ f$ e $f \circ g$, para as quais se tem, respectivamente

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$
$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

Note que pode ocorrer $g \circ f = f \circ g$, mas, de um modo geral, $g \circ f \neq f \circ g$, isto é, **a composição de funções não é uma operação comutativa**.

Exercícios Resolvidos

3.13) Sejam as funções **f** e **g** definidas, respectivamente, por

$$f(x) = \sqrt{x - 2}$$
$$g(x) = \sqrt{5 - x}$$

a) Determine D(f) e D(g).

b) Determine os domínios das funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$.

c) Dê as "fórmulas" que definem cada uma dessas funções.

Solução

a) $D(f) = [2;\ +\infty[$ e $D(g) =]-\infty;\ 5]$

b) Como $D(f) \cap D(g) = [2;\ 5]$, tem-se

$$D(f + g) = D(f - g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g) = [2;\ 5]$$

Todo elemento **x** que pertence ao domínio de $\frac{f}{g}$ é tal que

$$x \in D(f) \cap D(g) \text{ e } g(x) \neq 0$$

Então, $D\left(\frac{f}{g}\right) = [2;\ 5[$

c) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{5 - x}$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x - 2} - \sqrt{5 - x}$

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x - 2} \cdot \sqrt{5 - x}$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{5 - x}}$

3.14) Sejam as funções **f** e **g** definidas por

$$f(x) = \sqrt{x}$$
$$g(x) = x^3$$

Para as funções $g \circ f$ e $f \circ g$, determine

a) o domínio.

b) a "fórmula" que define cada uma delas.

Solução

Note que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} = [0;\ +\infty[$ e $D(g) = \mathbb{R} =]-\infty;\ +\infty[$.

a) $D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \boxed{x \in D(f)}$ e $\boxed{f(x) \in D(g)}\}$

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid \boxed{x \geqslant 0}$ e $\boxed{x^3 \in \mathbb{R}}\}$ ← satisfeita para todo x

$D(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} = [0;\ +\infty[$

$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid \boxed{x \in D(g)}$ e $\boxed{g(x) \in D(f)}\}$

$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid \boxed{x \in \mathbb{R}}$ e $\boxed{x^3 \geqslant 0}\}$

A inequação $x^3 \geqslant 0$ é satisfeita para $x \geqslant 0$, e daí:

$$D(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\} = [0;\ +\infty[$$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = [f(x)]^3 = (\sqrt{x})^3$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^3}$

Note que para todo $x \geqslant 0$ tem-se $(\sqrt{x})^3 = \sqrt{x^3}$, e como $D(g \circ f) = D(f \circ g)$ e, por convenção, $CD(g \circ f) = CD(f \circ g) = \mathbb{R}$, temos $g \circ f = f \circ g$.

3.15) Seja $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$; determine $f\{f[f(x)]\}$.

Solução

Vamos calcular inicialmente $f[f(x)]$

$$f[f(x)] = \frac{f(x) - 1}{f(x)} = \frac{\dfrac{x-1}{x} - 1}{\dfrac{x-1}{x}} = \frac{x - 1 - x}{x - 1} = \frac{-1}{x-1}$$

Agora

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{f[f(x)] - 1}{f[f(x)]} = \frac{\dfrac{-1}{x-1} - 1}{\dfrac{-1}{x-1}} = \frac{-1 - x + 1}{-1} = x$$

Então $f\{f[f(x)]\} = x$

3.16) Seja **f** uma função real, de domínio A, para o qual: se $x \in A$, então $-x \in A$.
Se para todo **x** de A se tem $f(-x) = f(x)$, **f** diz-se PAR.
Se para todo **x** de A se tem $f(-x) = -f(x)$, **f** diz-se ÍMPAR.

Para as funções, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas pelas "fórmulas" abaixo, diga qual é **par** e qual é **ímpar**.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x^2 + x$

Solução

a) $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$: par

b) $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$: ímpar

c) $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ $\begin{cases} \neq f(x)\text{: não é par} \\ \neq -f(x) = -x^2 - x\text{: não é ímpar} \end{cases}$

A função do **item c** não se classifica segundo o critério acima.

Exercícios Propostos

3.17) Seja a função **f**, definida por

$$f(x) = x^2 + 1$$

Determine:

a) $f(t)$ e) $f(x + h)$

b) $f(t + 2)$ f) $f(-x)$

c) $f(x + 2)$ g) $f(\sqrt{x})$

d) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ h) $f(3x)$

3.18) Dão-se abaixo as funções **f** e **g**. Determine, em cada caso, o **domínio** e a fórmula que definem $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$

a) $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = -4x$

b) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ e $g(x) = \sqrt{2 - x}$

c) $f(x) = \sqrt[5]{x + 2}$ e $g(x) = \sqrt[4]{x - 3}$

3.19) Dão-se abaixo as funções **f** e **g**. Determine, em cada caso, o **domínio** e a fórmula que definem $f \circ g$, e $g \circ f$

a) $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$ e $g(x) = \dfrac{x - 1}{x}$

3.20) Para a função **f** definida por $f(x) = \sqrt{x}$ verifique que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}$$

(Assuma que $x + h \geqslant 0$ e $h \neq 0$.)

3.21) Sejam as funções reais definidas por:

$$g(x) = 2x \text{ e } f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leqslant 1 \\ x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Determine $(g \circ f)(0)$, $(f \circ g)(4)$, $(f \circ f)(-1)$ e $(g \circ g)(3)$

b) Determine $(g \circ f)(x)$ e $(f \circ g)(x)$

3.22) Se $f(x) = 2x - 3$ e $f[g(x)] = x$, determine $g(x)$

3.23) Suponha que as funções **f** e **g** são definidas por

$$f(x) = ax + b$$
$$g(x) = cx + d$$

Qual é a condição para que $f \circ g = g \circ f$?

3.24) Seja $f(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$. Determine $f\{f[f(x)]\}$.

3.25) Considere as funções C, S e T, definidas em IR, tais que

$$C(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$$

$$S(x) = \frac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$$

$$T(x) = \frac{S(x)}{C(x)}$$

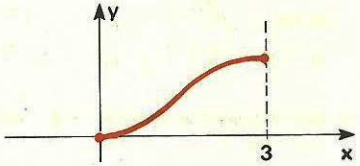
a) Calcule os valores dessas funções para $x = 0$ e $x = 1$.
b) Verifique que $[C(x)]^2 - [S(x)]^2 = 1$.
c) Verifique que $1 - [T(x)]^2 = \frac{1}{[C(x)]^2}$.

3.26) Para as funções, de IR em IR, definidas pelas "fórmulas" abaixo, diga qual é *par* e qual é *ímpar*.

a) $f(x) = 3x - x^3$
b) $f(x) = x + 1$
c) $f(x) = 5$
d) $f(x) = \frac{x^5 - x}{x^2 + 1}$

3.27) Na figura ao lado, está desenhada parte do gráfico da função f, cujo domínio é $[-3; 3]$. Complete o gráfico assumindo que

a) f é função *par*.
b) f é função *ímpar*.



3.4 — GENERALIDADES SOBRE FUNÇÕES REAIS

Definição

Consideremos um intervalo $I \subset D(f)$.

Uma função real **f** diz-se **crescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo par de pontos x_1 e x_2 de I, tem-se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ diz-se que **f** é **não decrescente em I**.

Uma forma equivalente de se colocar a definição acima é:

Uma função real **f** diz-se **crescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo par de pontos x_1 e x_2 de I, $x_1 \neq x_2$, tem-se

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

E, se tivermos

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geqslant 0$$

diremos que **f** é **não decrescente em I**.

Definição

Uma função real **f** diz-se **decrescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo par de pontos x_1 e x_2 de I, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ diz-se que **f** é **não crescente em I**.

Podemos dizer também que uma função real **f** é **decrescente em I**, $I \subset D(f)$, se e somente se, para todo par de pontos x_1 e x_2 de I, $x_1 \neq x_2$, tem-se

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

E, se tivermos

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leqslant 0$$

diremos que **f** é **não crescente em I**.

Exemplo

A função de IR em IR, definida por $f(x) = 2x + 3$, é *crescente* em IR.

De fato, sejam x_1 e x_2 reais tais que $x_1 < x_2$

$$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1 + 3) - (2x_2 + 3) = 2(x_1 - x_2)$$

Daí, sendo $x_1 < x_2$, pode-se concluir que

$$f(x_1) - f(x_2) = 2\underbrace{(x_1 - x_2)}_{\substack{\text{negativo} \\ \text{pois } x_1 < x_2}} < 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Então, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in$ IR, e a função é *crescente* em IR.

Observe que se **f** é *crescente* em IR, é também *não decrescente* em IR.

Definição

Um conjunto A, $A \subset$ IR, diz-se **limitado superiormente** se existe um número L tal que

$$x \leqslant L$$

para todo **x** de A.

Um número L com essa propriedade diz-se **limitante superior de A**.

Observe que A é **limitado superiormente** se e somente se existe um número L que seja **limitante superior de** A. Note também que se existe L, existirão outros limitantes superiores de A.

Por exemplo, o intervalo $I = [-3;\ 7[$ é **limitado superiormente**; o número 7 é um **limitante superior** de I; 8 e 9 também o são.

Um conjunto A, $A \subset \mathbb{R}$, diz-se **limitado inferiormente** se existe um número ℓ tal que

$$x \geqslant \ell$$

para todo **x** de A.

Um número ℓ com essa propriedade diz-se **limitante inferior de** A.

Por exemplo, o intervalo $I = [\![3;\ 7[\![$ é **limitado inferiormente**; o número 3 é um **limitante inferior** de I; 2 e −1 também o são.

Um conjunto A, $A \subset \mathbb{R}$, diz-se **limitado** se ele for **limitado superiormente** e **limitado inferiormente**.

Por exemplo, o intervalo $I = [-3;\ 7[$ é **limitado**.

Definição

Seja **f** uma função real.

Seja o conjunto $A = \{f(x) \mid x \in I,\ I \subset D(f)\}$; a função **f** diz-se **limitada superiormente em I**, se e somente se o conjunto A é **limitado superiormente**.

Observe que se **f** é **limitada superiormente em I**, existe um real L tal que

$$f(x) \leqslant L$$

para todo **x**, $x \in I$.

Por exemplo, a função definida por $f(x) = x + 1$ é **limitada superiormente** em $I =]1;\ 2[$.

Analogamente, a função **f**, acima, diz-se **limitada inferiormente em I**, se e somente se o conjunto A é **limitado inferiormente**.

Observe que se **f** é **limitada inferiormente em I**, existe um real ℓ tal que

$$f(x) \geqslant \ell$$

para todo **x**, $x \in I$.

Por exemplo, a função definida por $f(x) = x + 1$ é **limitada inferiormente** em $I = [1;\ 2]$.

Finalmente, a função **f**, acima, diz-se **limitada em I** se e somente se o conjunto A é **limitado**.

Observe que se **f** é **limitada** em I, existe um real M, $M > 0$, tal que

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M$$

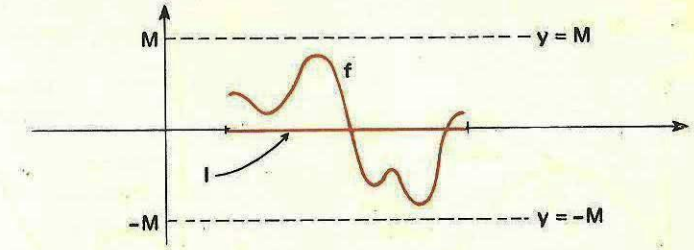
ou ainda

$$|f(x)| \leqslant M$$

para todo **x**, $x \in I$.

Por exemplo, a função definida por $f(x) = x + 1$ é **limitada** em $I = [1;\ 2]$.

Geometricamente, se a função **f** é **limitada** em I, o seu gráfico está situado entre as retas de equações $y = M$ e $y = -M$, quando $x \in I$.



Definição

Sejam a função real **f** e o conjunto I, $I \subset D(f)$.

Diz-se que **f** admite um **máximo absoluto** no conjunto I, se existe ao menos um ponto x_0 em I tal que

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

para todo **x** em I.

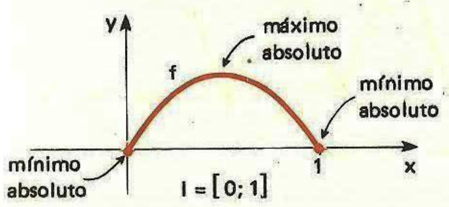
O número $f(x_0)$ chama-se **máximo absoluto de f em I.**

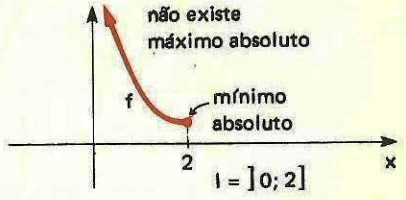
Diz-se que **f** admite um **mínimo absoluto** no conjunto I, se existe ao menos um ponto x_0 em I tal que

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

para todo **x** em I.

O número $f(x_0)$ chama-se **mínimo absoluto de f em I.**





Definição

Sejam a função real **f** e o seu domínio D(f).

Diz-se que **f** admite um **máximo local*** em um ponto x_0, $x_0 \in D(f)$, se existe uma vizinhança completa de x_0, $V(x_0)$, $V(x_0) \subset D(f)$, tal que

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

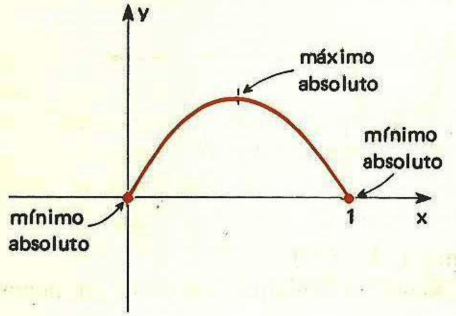
para todo **x** em $V(x_0)$.

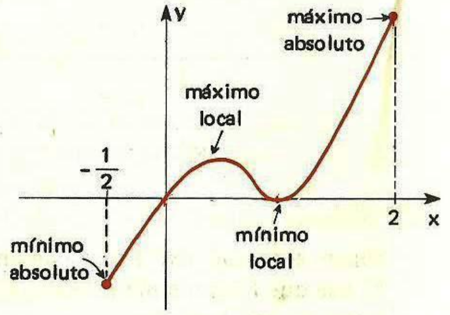
* Também chamado máximo relativo.

Analogamente, diz-se que f admite um **mínimo local*** em um ponto x_0, $x_0 \in D(f)$, se existe uma vizinhança completa de x_0, $V(x_0)$, $V(x_0) \subset D(f)$, tal que

$$f(x) \geqslant f(x_0)$$

para todo **x** em $V(x_0)$.



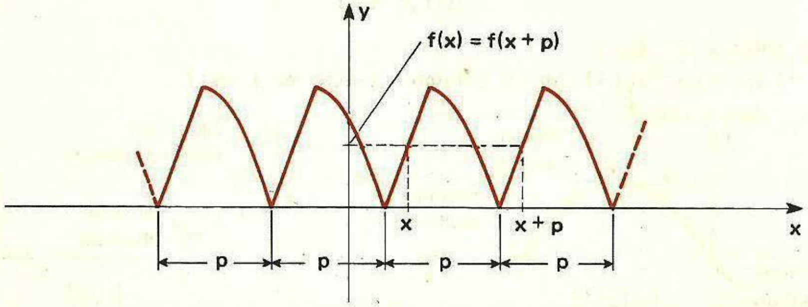


Definição

Seja **f** uma função real.

Diz-se que f é **periódica** se existe um número real p, $p \neq 0$, tal que, para todo **x** em $D(f)$, $x + p$ é elemento de $D(f)$ e $f(x + p) = f(x)$.

O menor **p positivo** que satisfaz a condição denomina-se **período** de f.



Exercícios Resolvidos

3.28) Seja a função **f**, definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

a) Dê o domínio de **f**.
b) Verifique que **f** é decrescente em $\mathbb{R}_+^*$.

* Também chamado mínimo relativo.

Solução

a) O domínio de **f** é constituído por todos os valores reais de x tais que $x \neq 0$, isto é

$$D(f) = \mathbb{R}^*$$

b) Calculemos $f(x_1) - f(x_2)$: $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 \, x_2}$

E, daí para todo par x_1, x_2 em $\mathbb{R}_+^*$ tal que $x_1 < x_2$, podemos concluir que

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\overbrace{x_2 - x_1}^{\text{positivo, pois } x_1 < x_2}}{\underbrace{x_1 \, x_2}_{\text{positivos, pois } x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}_+^*}} > 0$$

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Então, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f)x_2)$, e a função **f** é *decrescente* em $\mathbb{R}_+^*$.

3.29) Seja o conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x < \sqrt{2}\}$. Dê um **limitante superior** e um **limitante inferior** de A.

Solução

Um **limitante superior** de A é $\sqrt{2}$; observe que $\sqrt{2}$ não é elemento de A e que $\sqrt{2}$ é o *menor* dos limitantes superiores de A.

Um **limitante inferior** de A é zero; observe que zero é elemento de A e que 0 é o *maior* dos limitantes inferiores de A.

3.30) Seja a função f definida por $f(x) = x^2$; **f** é **limitada** em $[-1;\ 1]$?

Solução

Note que para todo **x** tal que $-1 \leqslant x \leqslant 1$, tem-se $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$; isto é

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

o que mostra que f(x) é **limitada** em $[-1;\ 1]$.

3.31) A função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é **periódica** de período 5, é **ímpar** e $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$. Determine $f\left(\frac{16}{3}\right)$, $f\left(\frac{29}{3}\right)$ e $f(12) + f(-7)$.

Solução

As informações do enunciado são traduzidas por:

$$f(x + 5) = f(x)$$
$$f(-x) = -f(x)$$
$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

Então

$$f\left(\frac{16}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3} + 5\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$
$$f\left(\frac{29}{3}\right) = f\left(10 - \frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$$
$$f(12) + f(-7) = f(5 + 7) + f(-7) = f(7) - f(7) = 0$$

Exercícios Propostos

3.32) Seja a função **f** definida por $f(x) = x^2 + 1$. Verifique que **f** é **crescente** em $\mathbb{R}_+$.

3.33) Sejam **f** e **g** funções de IR em IR, **não decrescentes** num intervalo I. Verifique que $h = f + g$ é não decrescente em I.

3.34) O conjunto $A = \left\{x \mid x = \frac{1}{n} \text{ e } n \in \mathbb{N}^*\right\}$ é **limitado**?

3.35) A função definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ é **limitada** em $]0; 1]$?

3.36) Uma função f, de domínio IR, é **periódica** de período 2, **par**, e tal que $f(x) = x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

a) Determine $f\left(\frac{5}{2}\right)$, $f(3)$ e $f(-2)$.

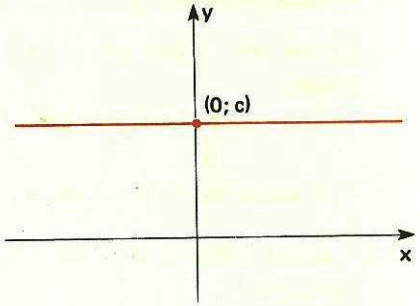
b) Determine **x** tal que $f(x) = 0$.

3.5 – ALGUMAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Função constante

É a função de IR em IR que associa a *todo* **x** real *sempre um mesmo número* **c**, $c \in \mathbb{R}$; então a fórmula que a define é

$$f(x) = c$$



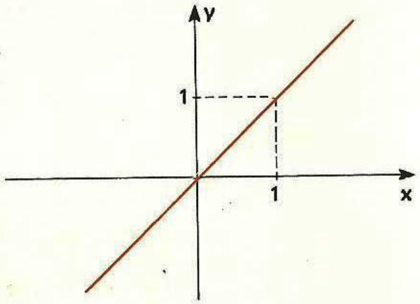
Seu conjunto-imagem é $I(f) = \{c\}$.

O gráfico da função constante é uma reta paralela ao eixo Ox que passa pelo ponto (0; c)

Função identidade

É a função de IR em IR que associa a *cada* **x** real o *próprio* **x**; então a fórmula que a define é

$$f(x) = x$$



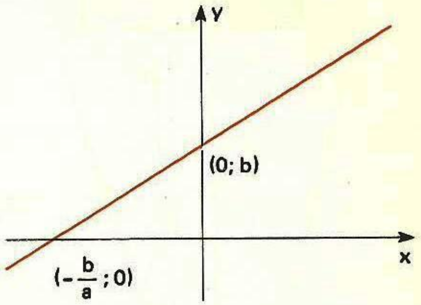
Seu conjunto-imagem é $I(f) = \mathbb{R}$.

O gráfico da função identidade é a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Função polinômio do 1.º grau

É a função de IR em IR que associa a cada **x** real o número real $ax + b$, com $a \neq 0$; então, a fórmula que a define é

$$f(x) = ax + b, \ a \neq 0$$



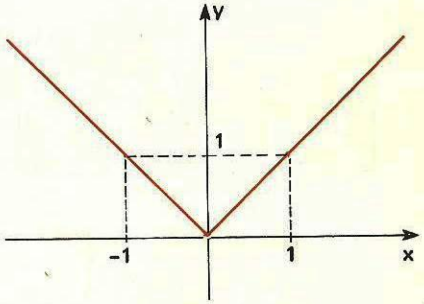
O conjunto-imagem da função do 1.º grau é $I(f) = \mathbb{R}$.

O gráfico é a reta de equação $y = ax + b$.

Função módulo

É a função de IR em IR que associa a cada real **x** o número $|x|$; então, a fórmula que a define é

$$f(x) = |x|$$



Seu conjunto-imagem é $I(f) = \mathbb{R}_+$.

O gráfico da função módulo é constituído pela união de duas semi-retas, como mostra a figura

Função quadrática

É a função de IR em IR que associa a cada número real **x** o número real $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$; então a fórmula que a define é

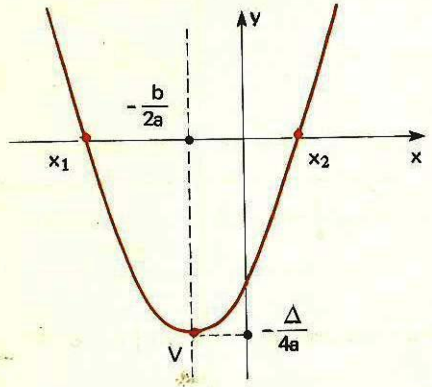
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Num sistema cartesiano ortogonal xOy, o gráfico da função quadrática é uma **parábola**, que tem a reta de equação $x = -\frac{b}{2a}$ como **eixo de simetria**; o ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$, é o **seu vértice**.

Se $\mathbf{a > 0}$, a concavidade da parábola está "voltada para cima"; se $\mathbf{a < 0}$, a concavidade da parábola está "voltada para baixo".

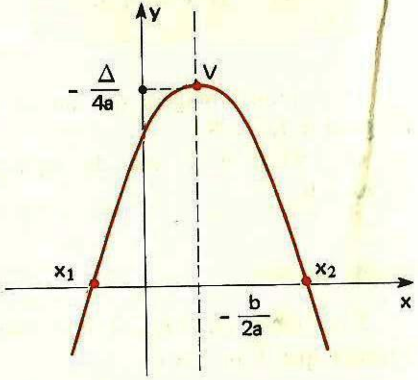
Para o gráfico da função quadrática podemos destacar as situações

$\Delta > 0;\ a > 0$



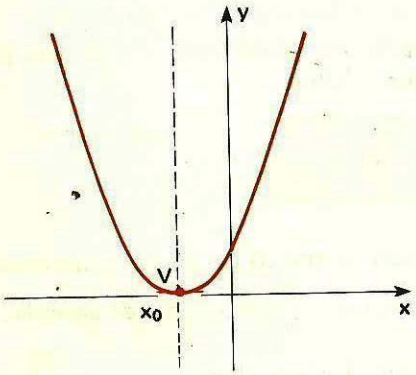
$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

$\Delta > 0;\ a < 0$



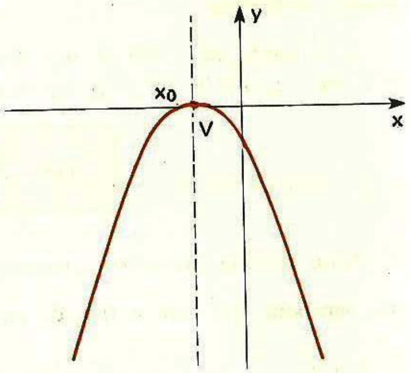
$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

$\Delta = 0;\ a > 0$



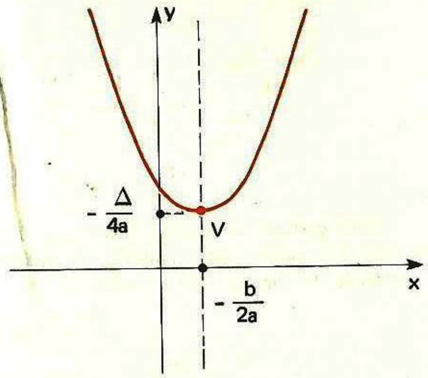
$$I(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0 \}$$

$\Delta = 0;\ a < 0$



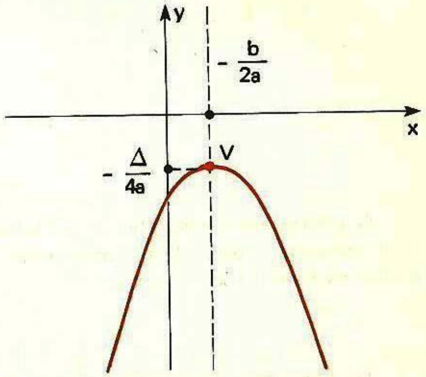
$$I(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 0 \}$$

$\Delta < 0;\ a > 0$



$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

$\Delta < 0;\ a < 0$



$$I(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a} \right\}$$

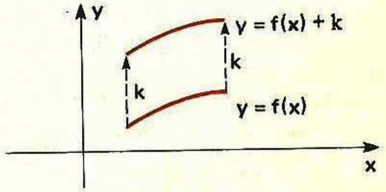
3.6 — TRANSFORMAÇÕES NO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Certas *transformações* (translações, reflexões, ...) podem ser feitas sobre o gráfico de uma função, possibilitando a sua construção com alguma facilidade.

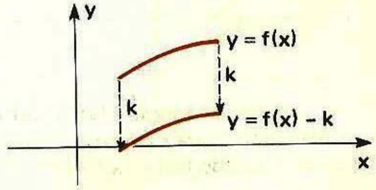
Vamos examinar as transformações mais importantes.

Seja, então, a função definida pela sentença aberta $y = f(x)$ e seja o número real **k**, *positivo*.

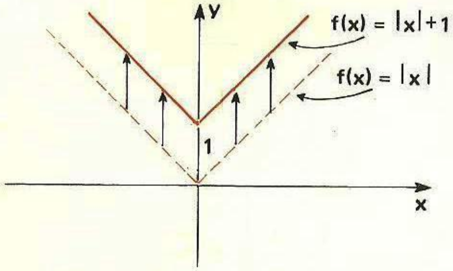
I. O gráfico da função definida por $y = f(x) + k$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma **translação de k unidades**, na direção Oy, "para cima".



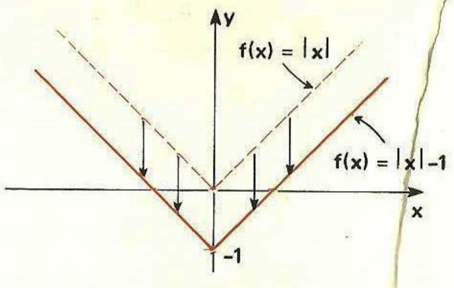
O gráfico da função definida por $y = f(x) - k$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma **translação de k unidades**, na direção Oy, "para baixo".



Exemplos

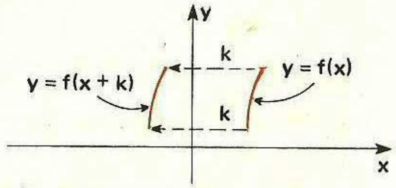


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma translação "para cima", obtendo-se o gráfico da função f(x) = |x| + 1.

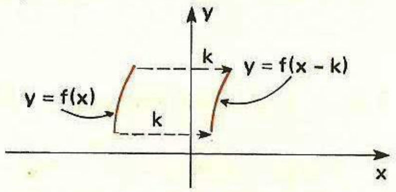


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma translação "para baixo", obtendo-se o gráfico da função f(x) = |x| - 1.

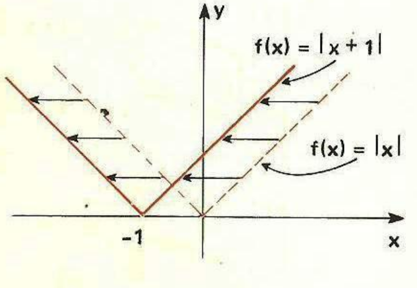
II. O gráfico da função definida por $y = f(x + k)$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma **translação de k unidades** na direção Ox, "para a esquerda".



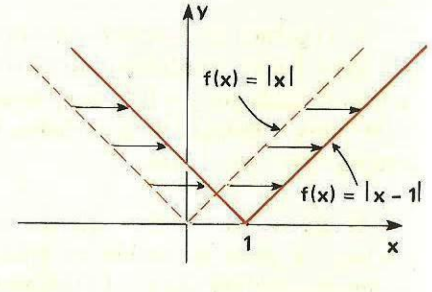
O gráfico da função definida por $y = f(x - k)$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma **translação de k unidades** na direção Ox, "para a direita".



Exemplos

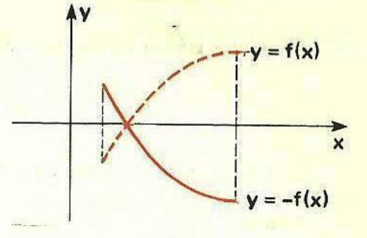


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma translação "para a esquerda", obtendo-se o gráfico da função f(x) = |x + 1|.

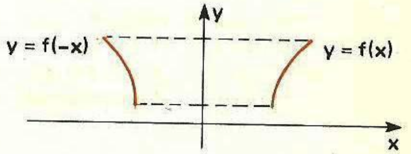


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma translação "para a direita", obtendo-se o gráfico da função f(x) = |x - 1|.

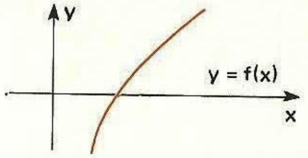
III. O gráfico da função definida por $y = -f(x)$ pode ser obtido do gráfico da função definida por $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma **reflexão** em relação ao eixo Ox.

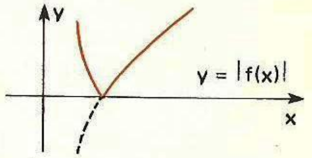


O gráfico da função definida por $y = f(-x)$ pode ser obtido do gráfico da função $y = f(x)$, fazendo este sofrer uma **reflexão** em relação ao eixo Oy.

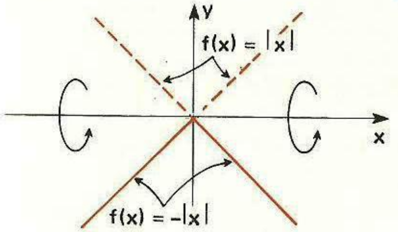


Se conhecermos o gráfico da função definida por $y = f(x)$ e quisermos o gráfico da função definida por $y = | f(x) |$ faz-se a "parte" que está "abaixo" do eixo Ox do gráfico de $y = f(x)$ sofrer uma **reflexão** em torno do eixo Ox.

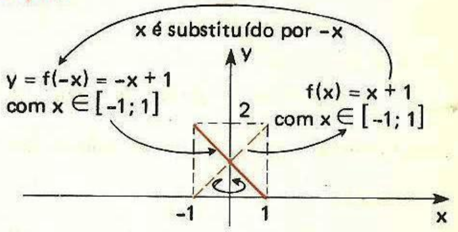




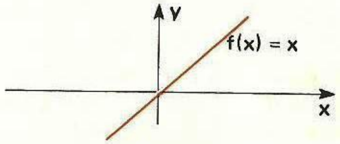
Exemplos

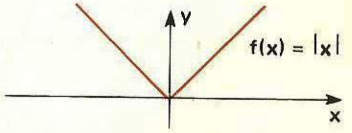


O gráfico da função f(x) = |x| sofreu uma "reflexão" em torno do eixo Ox, obtendo-se o gráfico da função f(x) = - |x|.



Para x ∈ [-1; 1], o gráfico da função f(x) = x + 1 sofreu uma "reflexão" em torno do eixo Oy, obtendo-se o gráfico da função f(x) = -x + 1 (esta se obtém da primeira, substituindo-se x por -x).





y = f(x) (a parte "abaixo" do eixo Ox "reflete" em torno do eixo Ox) → y = |f(x)|

Exercícios Resolvidos

3.37) Desenhe o gráfico da função **f**, de IR em IR, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2, & \text{se } -1 < x < 2 \\ 3, & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Qual é o conjunto-imagem de **f**?

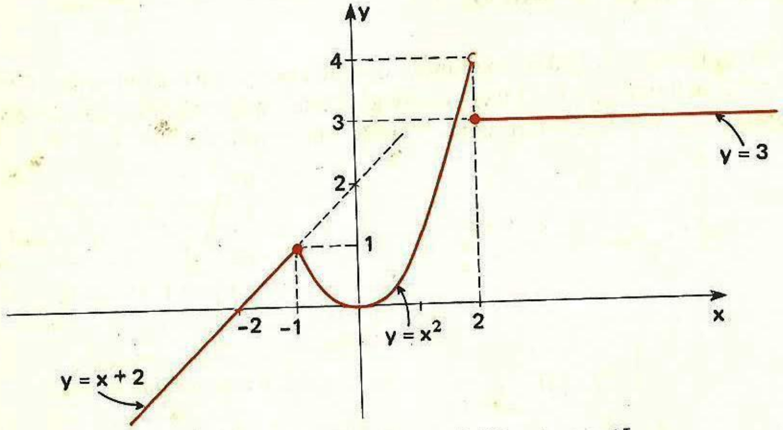
Solução

O gráfico da função **f** é constituído por duas semi-retas e um "arco" de parábola.

1.º) Se $x \leqslant -1$, **f** é representado pela reta de equação $y = x + 2$.

2.º) Se $-1 < x < 2$, **f** é representada pela parábola $y = x^2$.

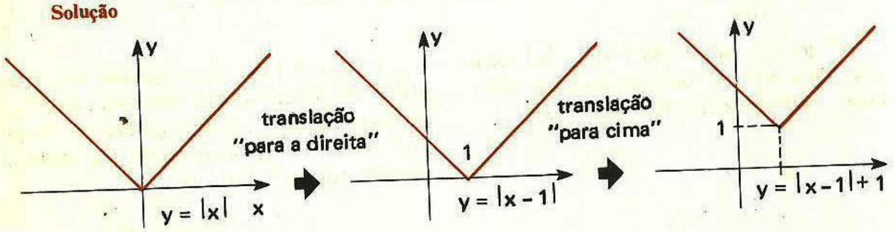
3.º) Se $x \geqslant 2$, **f** é representada pela reta paralela ao eixo que passa pelo ponto (0; 3).



A projeção do gráfico de **f** sobre Oy nos dá $I(f) =]-\infty; 4[$.

3.38) Construa o gráfico da função definida por $f(x) = |x - 1| + 1$.

Solução



3.39) Seja a função **f**, de IR em IR, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

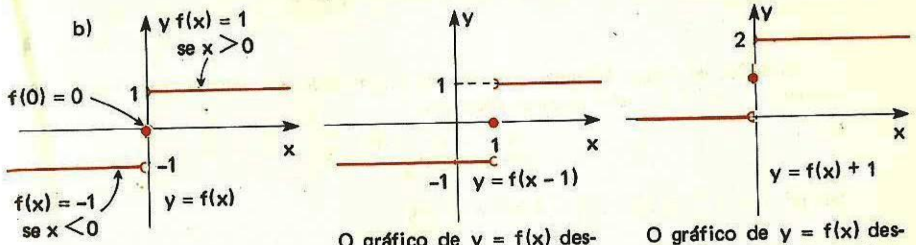
a) Determine o conjunto-imagem de **f**.

b) Desenhe o gráfico de **f** e deduza os gráficos das funções definidas por $y = f(x - 1)$ e $y = f(x) + 1$.

Solução

a) Observe que todo real negativo tem imagem −1, zero tem imagem zero e que todo real positivo tem imagem 1; daí $I(f) = \{-1; 0; 1\}$.

b)



O gráfico de y = f(x) deslocou-se para uma unidade "para a direita".

O gráfico de y = f(x) deslocou-se uma unidade "para cima".

3.40) Desenhe o gráfico da função **f** definida por

$$f(x) = (|x| - 1)(x + 2).$$

Solução

A definição de *módulo* de um número real nos dá

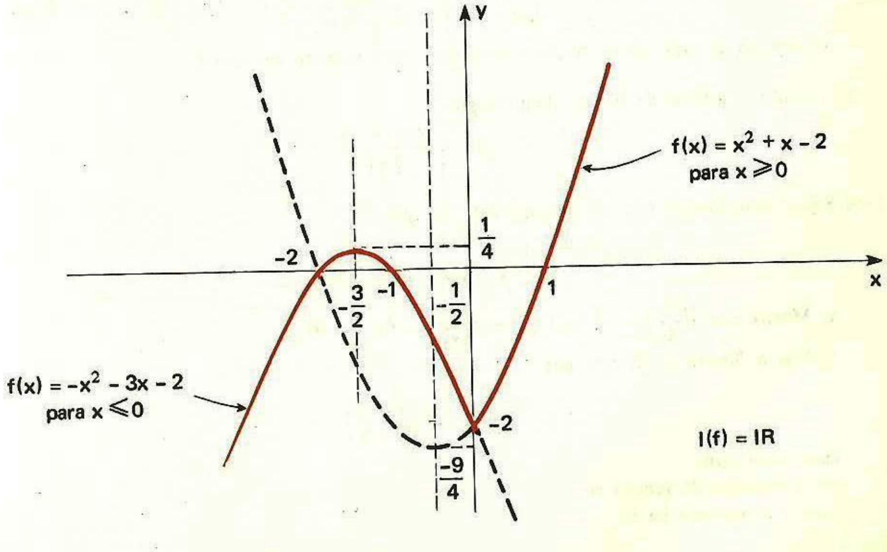
Se $x \geqslant 0$: $|x| = x$ e $f(x) = (x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$

Se $x \leqslant 0$: $|x| = -x$ e $f(x) = (-x - 1)(x + 2) = -x^2 - 3x - 2$

Então

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x^2 - 3x - 2, & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Para obtermos o gráfico de **f**, desenhamos as parábolas de equações $y = x^2 + x - 2$ e $y = -x^2 - 3x - 2$; da primeira tomamos o "arco" constituído pelos pontos para os quais $x \geqslant 0$, e da segunda, o "arco" constituído pelos pontos para os quais $x \leqslant 0$



3.41) Seja a função quadrática f definida por

$$f(x) = -x^2 + mx + 1$$

Determine **m** para que f admita um **máximo absoluto** igual a 5.

Solução

O gráfico da função f é uma parábola cuja concavidade está voltada "para baixo"; efetivamente f admite um **valor máximo** dado por

$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(m^2+4)}{-4} = 5$$

Daí, $m^2 + 4 = 20$ e, então, $m = 4$ ou $m = -4$.

Exercícios Propostos

3.42) Seja a função real definida por $f(x) = \frac{|x|}{x}$

a) Determine $f(-2)$ e $f(2)$.
b) Determine D(f).
c) Construa o gráfico de f.

3.43) Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x+1, & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

a) Desenhe o gráfico de f.
b) Deduza: D(f) e I(f).
c) Desenhe os gráficos das funções definidas por

$$y = f(x) + 1;\ y = f(x-1);\ y = f(-x);\ y = 1 - f(x)$$

3.44) Seja a função quadrática definida por

$$f(x) = mx^2 + 2x + 1,\ m \neq 0$$

Determine **m** para que a função admita um valor máximo em $x = 1$.

3.45) Desenhe o gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{x(x^2+1)}{|x|}$$

3.46) Seja **f** uma função real, de domínio $\mathbb{R}^*_+$, tal que

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2) \end{cases}$$

a) Mostre que $f\left(\frac{1}{x_2}\right) = -f(x_2)$ e que $f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$.

b) Seja a função φ definida por

$$\varphi(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

Determine φ(0).
Dê o domínio da função φ
Qual é a *paridade* de φ?

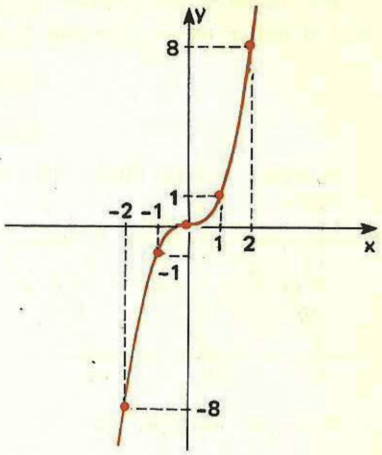
3.7 — OUTRAS FUNÇÕES ELEMENTARES

Função definida pela fórmula $f(x) = x^3$

Consideremos a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = x^3$$

Essa função é *crescente* em $\mathbb{R}$; é *ímpar*; o seu conjunto-imagem é $I(f) = \mathbb{R}$. O gráfico é mostrado na figura.

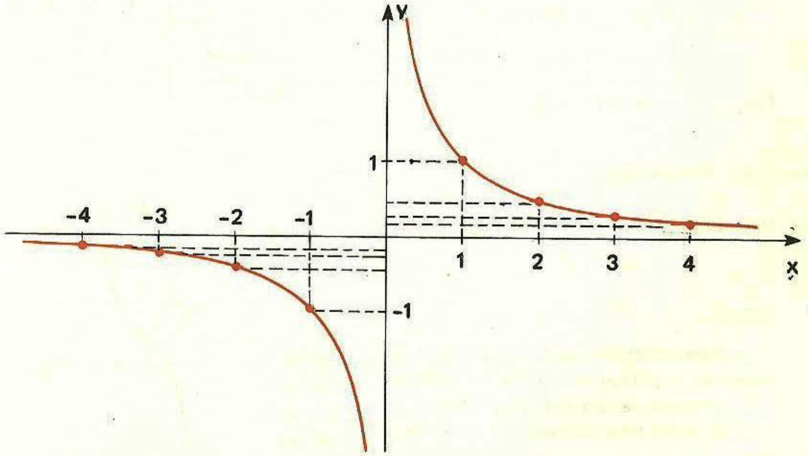


Função definida pela fórmula $f(x) = \frac{1}{x}$

Consideremos a função **f**, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Essa função é *decrescente* em $\mathbb{R}^*_-$ e também em $\mathbb{R}^*_+$. Seu conjunto imagem é $\mathbb{R}^*$; o gráfico é uma *hipérbole*.

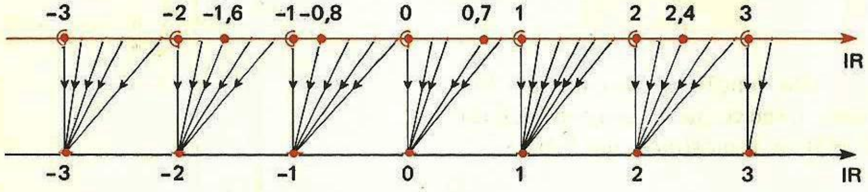


Função maior inteiro

É a função **f**, de IR em IR, que associa a cada número real **x** o número [x], que é o *maior inteiro que não supera* **x**

$$f(x) = [x]$$

A figura abaixo ilustra qual é a correspondência definida pela função **f**.

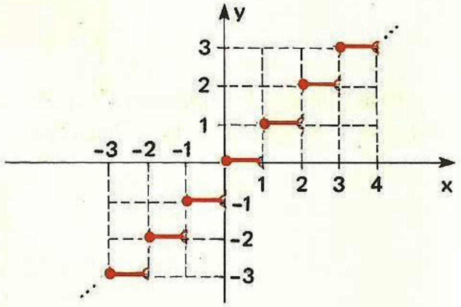


Note por exemplo que:

$f(2{,}4) = [2{,}4] = 2$
$f(0{,}7) = [0{,}7] = 0$
$f(2) = [2] = 2$
$f(-0{,}8) = [-0{,}8] = -1$
$f(-1{,}6) = [-1{,}6] = -2$

O gráfico da função **f** é o conjunto de segmentos como mostra a figura

$-3 \leqslant x < -2 \;:\; f(x) = -3$
$-2 \leqslant x < -1 \;:\; f(x) = -2$
$-1 \leqslant x < 0 \;:\; f(x) = -1$
$0 \leqslant x < 1 \;:\; f(x) = 0$
$1 \leqslant x < 2 \;:\; f(x) = 1$
$2 \leqslant x < 3 \;:\; f(x) = 2$
$3 \leqslant x < 4 \;:\; f(x) = 3$
$\vdots \qquad \vdots$



Observe que $I(f) = \mathbb{Z}$.

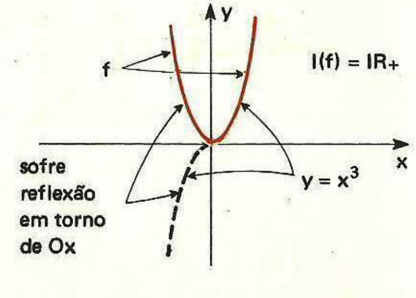
Exercícios Resolvidos

3.48) Desenhe o gráfico da função **f** definida por

$$f(x) = |x^3|$$

Solução

Para obtermos o gráfico da função **f**, desenhamos o gráfico da função definida por $y = x^3$ e aquela parte que se situa "abaixo" do eixo Ox sofre uma reflexão em torno desse eixo



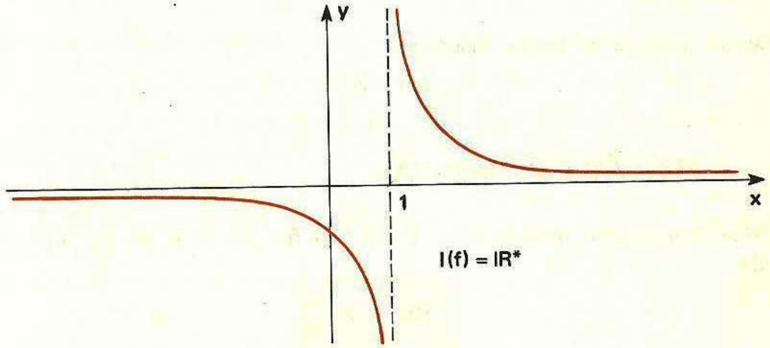
3.49) Seja a função **f** definida pela fórmula

$$f(x) = \frac{1}{x - 1}$$

a) Determine D(f).
b) Desenhe o gráfico de **f** e deduza I(f).

Solução

a) Devemos ter $x - 1 \neq 0$, isto é, $D(f) = IR - \{1\}$.
b) Para se obter o gráfico de **f**, desenhamos o gráfico da função **g** definida por $g(x) = \frac{1}{x}$; e, como $f(x) = g(x - 1)$, "deslocamos" o gráfico de **g** para a direita, de 1 unidade



3.50) Seja a função **f**, de IR em IR, definida por

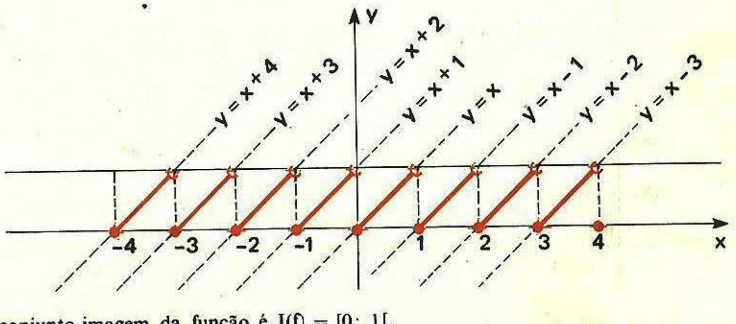
$$f(x) = x - [x]$$

denominada **função mantissa**.
Desenhe o gráfico de **f** e deduza o seu conjunto-imagem.

Solução

$0 \leqslant x < 1 : [x] = 0$ e $f(x) = x$
$1 \leqslant x < 2 : [x] = 1$ e $f(x) = x - 1$
$2 \leqslant x < 3 : [x] = 2$ e $f(x) = x - 2$
$\vdots$

$-1 \leqslant x < 0 : [x] = -1$ e $f(x) = x + 1$
$-2 \leqslant x < -1 : [x] = -2$ e $f(x) = x + 2$
$-3 \leqslant x < -2 : [x] = -3$ e $f(x) = x + 3$
$\vdots$



O conjunto-imagem da função é $I(f) = [0; 1[$.

Exercícios Propostos

3.51) Desenhe o gráfico da função definida por

$$f(x) = -x^2 \cdot |x|$$

3.52) Desenhe o gráfico da função definida por

$$f(x) = \frac{1-x}{x}$$

3.53) Seja a função **f**, definida por $f(x) = (-1)^{[x]}$.

a) Desenhe o gráfico de **f**.
b) Qual é o seu conjunto-imagem?
c) Ela é periódica?

3.54) Desenhe o gráfico da função definida por

$$f(x) = (-1)^{[x]} \cdot x$$

3.8 – A FUNÇÃO EXPONENCIAL

Dado um número real **a**, $a > 0$ e $a \neq 1$, a função de IR em IR, definida pela fórmula

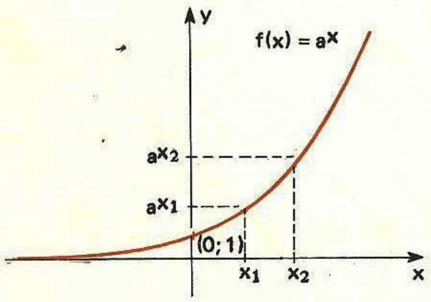
$$f(x) = a^x$$

denomina-se **função exponencial de base a**.

Destacamos as seguintes propriedades da **função exponencial**:

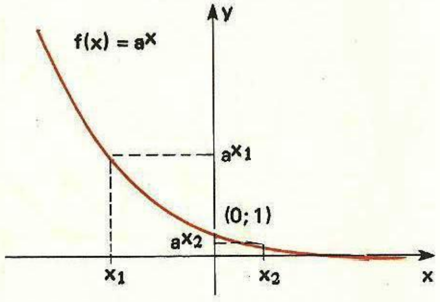
1. se $a > 1$, a função é *crescente* em IR; se $0 < a < 1$, é *decrescente* em IR.
2. o conjunto-imagem é IR_+^*.
3. o gráfico apresenta uma das duas situações

I. a > 1



$x_1 < x_2 \iff a^{x_1} < a^{x_2}$

II. 0 < a < 1



$x_1 < x^2 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$

Exercícios Propostos

3.55) Dê o domínio da função definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3^x - 243}}$$

3.56) Desenhe os gráficos das funções definidas por

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$

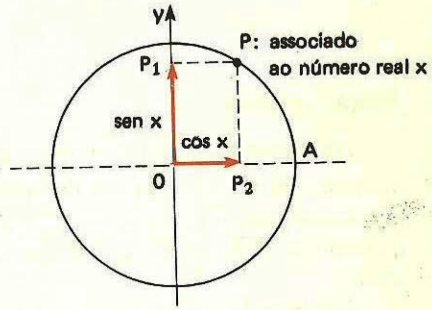
b) $f(x) = 1 - 2^x$

3.9 – FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Função seno e função cosseno

Dado um número real **x**, a ele associamos sobre a circunferência trigonométrica o ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$, cuja medida algébrica é **x**.

A ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P denomina-se **seno do número real x**, e a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P denomina-se **cosseno do número real x**.



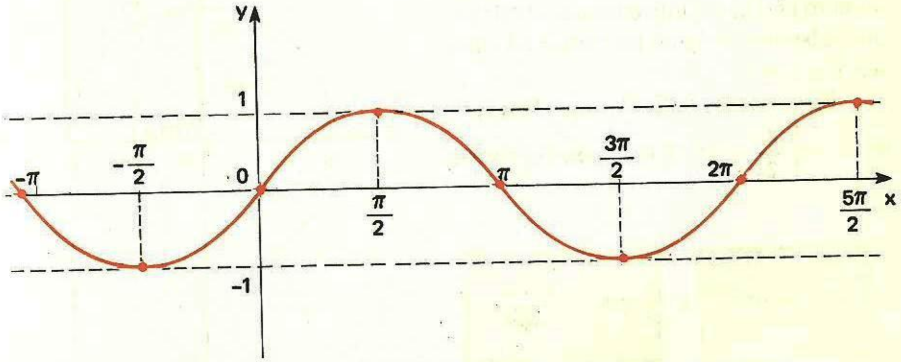
1. Definimos, então, a função **f**, de IR em IR, para a qual

$$f(x) = \text{sen } x$$

que é denominada **função seno**.

A função seno tem conjunto-imagem $I(f) = [-1; 1]$; é *ímpar*; é *periódica* de período 2π.

O seu gráfico é a *senóide*



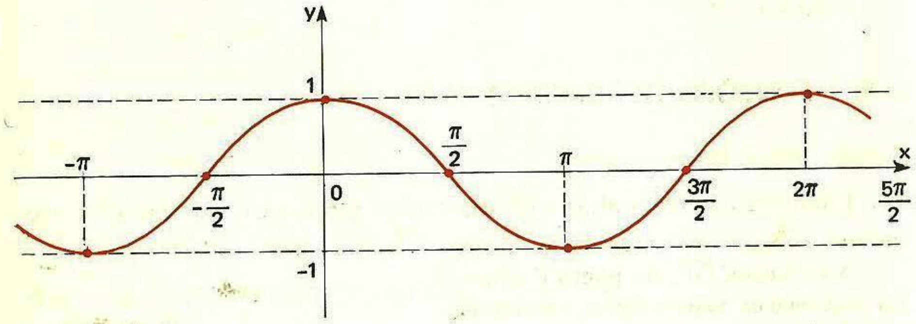
2. A função **f**, de IR em IR, para a qual

$$f(x) = \cos x$$

denomina-se **função cosseno**.

Seu conjunto-imagem é $I(f) = [-1;\ 1]$; é *par*; é *periódica* de período 2π.

Seu gráfico é a *cossenóide*

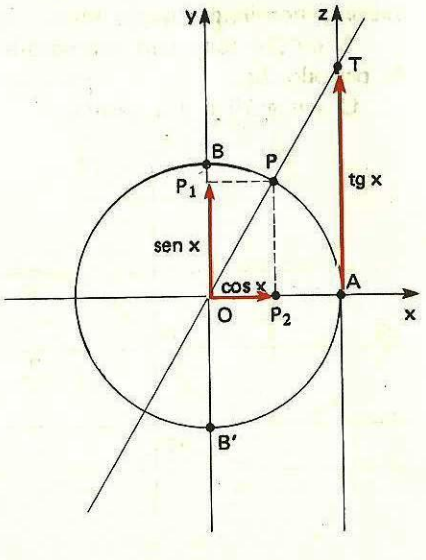


Função tangente

Na circunferência trigonométrica da figura, seja P o ponto associado a um número real **x**; T é o ponto de interseção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo Az. Sabemos que a *ordenada* $\overline{AT}$, do ponto T, é a *tangente do arco de medida algébrica x*, enquanto que $\overline{OP_1}$ e $\overline{OP_2}$ são, respectivamente, o seno e o cosseno desse mesmo arco.

Lembrando que, se o ponto P coincidir com B ou com B', isto é, se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, **não existe a tangente**; *excluindo esses pontos*, temos, associado ao número real **x**, um único número real tg x, que sabemos ser igual ao quociente entre sen x e cos x.

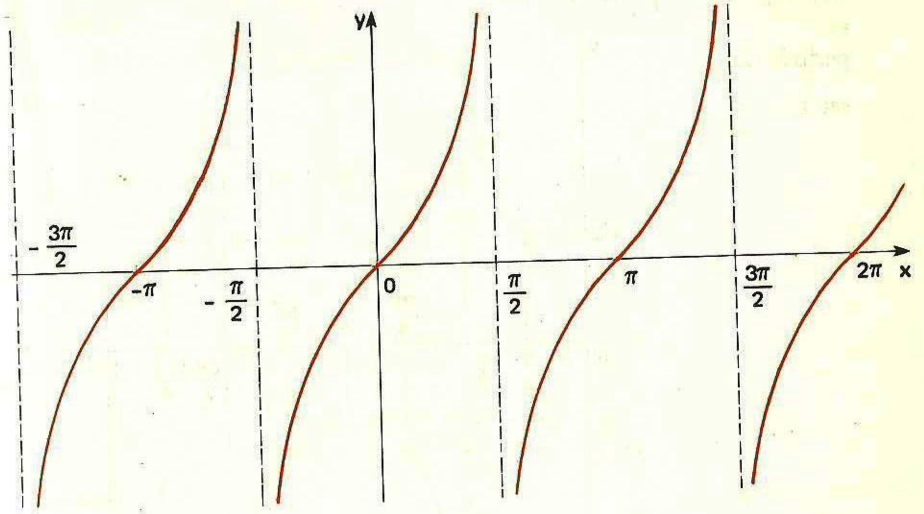
Fica, então, definida uma **função f**, **de** IR $- \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ **em** IR, para a qual



$$f(x) = \text{tg}\, x \quad \text{e} \quad \text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}$$

O domínio da **função tangente** é $D(f) = \left\{x \in \text{IR} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$; seu conjunto-imagem é IR. A função tangente é *ímpar* e *periódica* de período π.

O seu gráfico é a *tangentóide*:



Um resumo para outras funções trigonométricas

1. Função cotangente

$f(x) = \text{cotg}\, x$

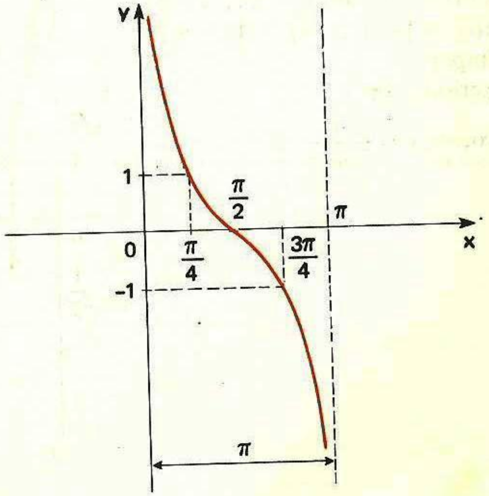
$D(f) = \{x \in \text{IR} \mid x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$I(f) = \text{IR}$

ímpar

período π

$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$



2. Função secante

$f(x) = \sec x$

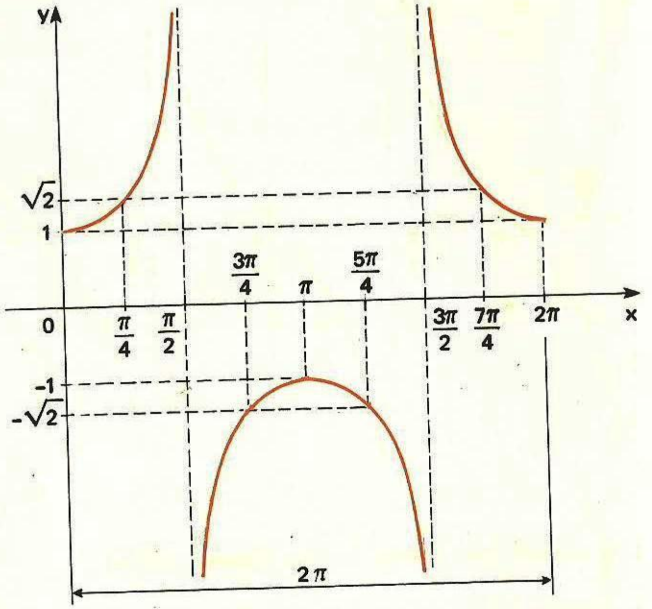
$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$I(f) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

par

período 2π

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$



3. Função cossecante

$f(x) = \text{cossec } x$

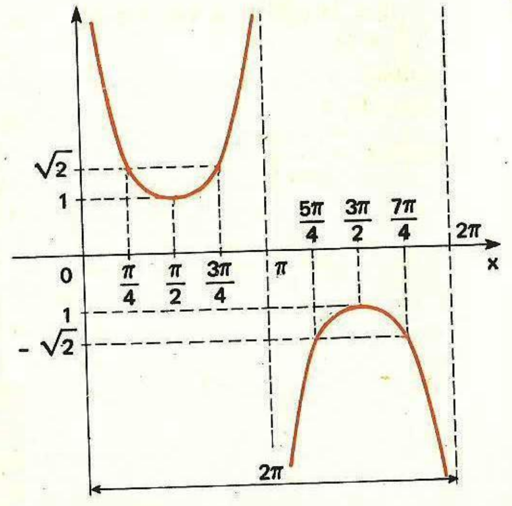
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$I(f) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

ímpar

período 2π

$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$



Exercícios Resolvidos

3.57) Determine o conjunto-imagem da função definida por

$$f(x) = 2 \text{ sen } x + 1$$

Solução

Sabemos que para todo real x tem-se:

$$-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$$

Daí

$$-2 \leqslant 2 \text{ sen } x \leqslant 2$$

e somando-se 1 a cada termo da desigualdade

$$-1 \leqslant 2 \text{ sen } x + 1 \leqslant 3$$

isto é

$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 3$$

Assim

$$I(f) = [-1;\ 3]$$

3.58) Determine o domínio da função f, definida por

$$f(x) = \frac{1}{\text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

Solução

Devemos impor duas condições para obter o domínio da função f: a $\text{cotg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ deve existir e ser diferente de zero.

Então

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} \neq k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

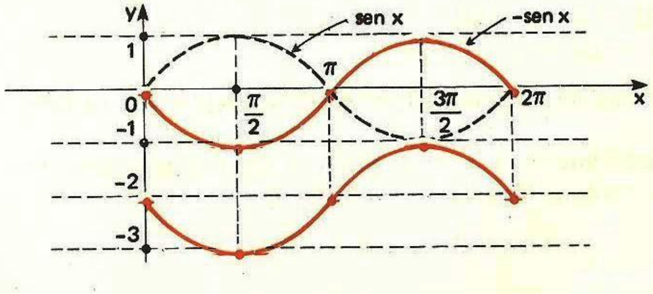
Daí $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ e } x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3.59) Construa, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, o gráfico da função g, definida por

$$g(x) = -2 - \text{sen } x$$

Solução

A partir do gráfico da função f(x) = sen x, após uma *reflexão* em torno do eixo Ox, e uma *translação* "para baixo", de duas unidades, obtemos o gráfico da função g



Exercícios Propostos

3.60) Determine o conjunto-imagem da função

$$f(x) = -2 + 3 \sec x$$

3.61) Dê o domínio da função $f(x) = \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

3.62) Mostre que a função definida por $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ é *par*.

3.63) A função definida por $f(x) = A \cdot \text{sen}(kx)$ é *periódica* de período 6π e tem conjunto-imagem $[-4; 4]$. Determine essa função.

3.64) Construa o gráfico de cada função definida abaixo:

a) $f(x) = 2 + \text{sen } x$

b) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $f(x) = \text{sen } 2x$

3.65) Construa o gráfico de cada função definida abaixo:

a) $f(x) = -|\cos x|$

b) $f(x) = \frac{\text{sen } x}{|\text{sen } x|}$

c) $f(x) = \frac{\cos x + |\cos x|}{2}$

3.10 — FUNÇÃO INVERSA

O conceito

Seja **f** uma *função real* de A em B.

Se para cada **y** em B existe um e um só **x** em A, tal que $y = f(x)$, diz-se que a função **f** é **invertível**. Então, a função de B em A, que associa a cada **y** de B um único **x** em A, chama-se **função inversa de f** e é notada com f^{-1}.

Observe que:

1.º) $D(f^{-1}) = B = I(f)$
2.º) $I(f^{-1}) = A = D(f)$
3.º) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Seja **f** uma função **invertível**, de A em B, e seja $y = f(x)$ a fórmula que a define.

A **função inversa**, f^{-1}, de B em A, é definida pela fórmula $x = f^{-1}(y)$.

Então, dada a fórmula que define a função **f**

$$y = f(x)$$

para obtermos a fórmula que define a função inversa f^{-1} *expressamos x "em função" de y*

$$x = f^{-1}(y)$$

Por exemplo, seja a função invertível, de IR em IR, definida por

$$y = f(x) = x^3$$

Para obtermos a fórmula que define f^{-1}, partimos da fórmula que define **f**

$$y = x^3$$

Expressando **x** "em função" de y

$$x = \sqrt[3]{y}$$

Então, a fórmula que define a função f^{-1} é

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$$

É comum, entretanto, na fórmula $x = \sqrt[3]{y}$, fazermos uma troca de letras: **x** por **y** e **y** por **x**; então

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

é a fórmula que define f^{-1}.

Um resumo

Dada a fórmula

$$y = f(x)$$

que define a função invertível **f**, se quisermos a fórmula que define a função f^{-1}, procedemos da seguinte maneira:

1.º passo: na fórmula $y = f(x)$, "isola-se" **x** no primeiro membro;
2.º passo: troca-se a letra **x** pela letra **y** e a letra **y** pela letra **x**.

Uma propriedade geométrica

Os gráficos da função **f** e sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo

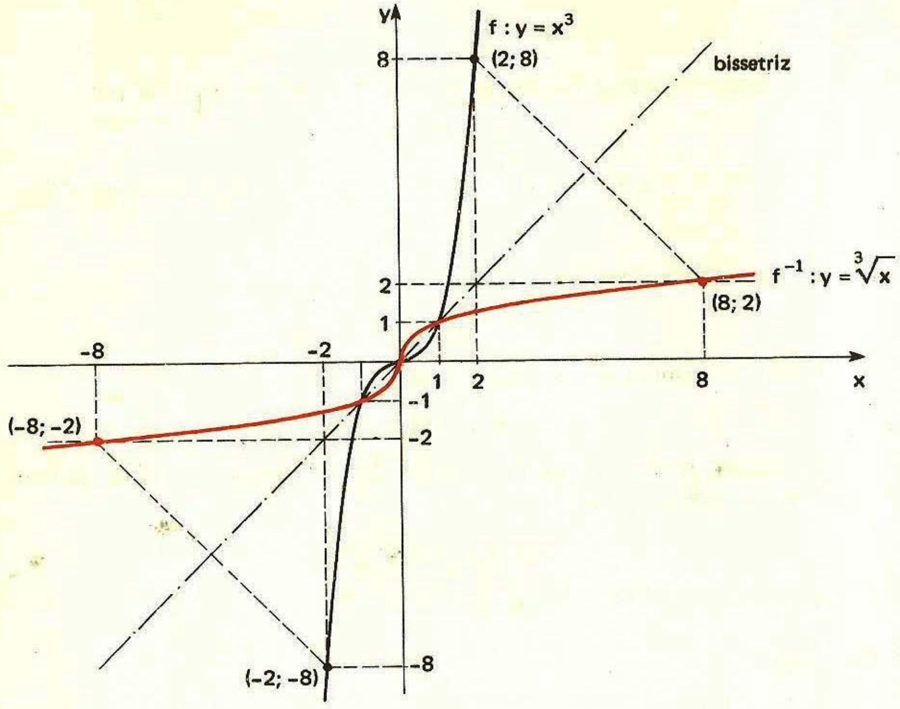
Seja a função **f**, de IR em IR, invertível, tal que

$$f(x) = x^3$$

A função inversa f^{-1} é de IR em IR e

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

Os gráficos de f e f^{-1} estão na figura abaixo:



Exercícios Propostos

3.66) Seja a função f, invertível, de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}^*$, definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Determine f^{-1}.

3.67) Seja a função f, invertível, de $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ em $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, tal que

$$f(x) = \frac{x + 2}{2x - 3}$$

Determine f^{-1}.

3.68) Para a função polinomial do 1.º grau, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, determine a e b sabendo que $f = f^{-1}$.

3.69) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = 2x - 5$$

a) Determine f^{-1}.
b) Calcule $(f \circ f^{-1})(x)$ e $f^{-1}[f(x)]$.

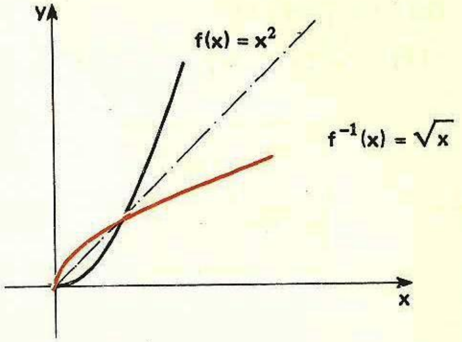
Algumas funções importantes

1. A função raiz quadrada

A função f, de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$, definida por $f(x) = x^2$ é invertível. A sua inversa, f^{-1}, é função de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$, tal que

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

Os gráficos de **f** e f^{-1} estão desenhados ao lado

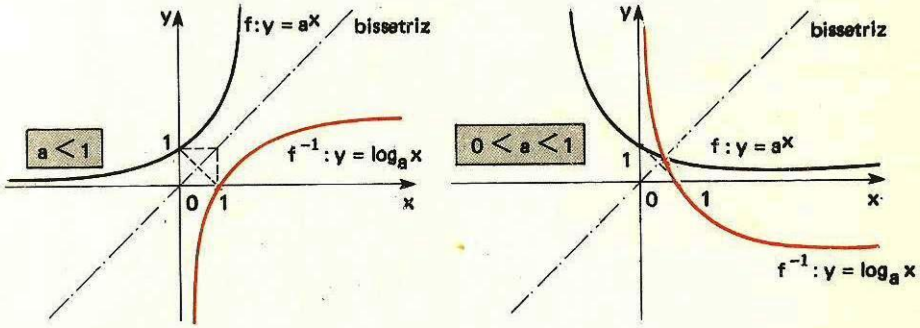


2. A função logaritmo

A **função exponencial** de base **a**, $a > 0$ e $a \neq 1$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^*_+$, tal que $f(x) = a^x$, é invertível. A sua inversa, f^{-1}, é a função de $\mathbb{R}^*_+$ em $\mathbb{R}$, definida por

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

Os gráficos de **f** e f^{-1} estão desenhados abaixo



3. A função arco-seno

A função de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ em $[-1; 1]$, tal que $f(x) = \text{sen } x$ é invertível.

A sua inversa, f^{-1}, é a função de $[-1; 1]$ em $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, definida por

$$f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$$

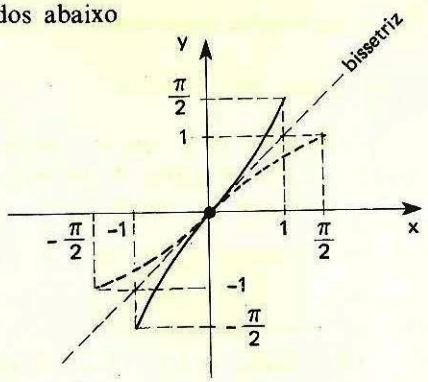
Os gráficos de **f** e f^{-1} estão desenhados abaixo

$f^{-1}(x) = \text{arc sen } x$

$D(f^{-1}) = [-1; 1]$

$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

$$y = \text{arc sen } x \Leftrightarrow \text{sen } y = x$$



4. A função arco-cosseno

A função de $[0; \pi]$ em $[-1; 1]$, tal que $f(x) = \cos x$ é invertível. A sua inversa, f^{-1}, é a função de $[-1; 1]$ em $[0; \pi]$, definida por

$$f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$$

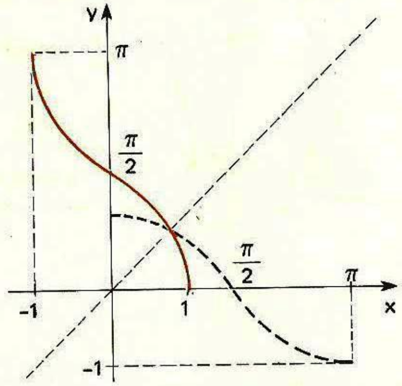
Os gráficos de **f** e f^{-1} estão desenhados abaixo

$f^{-1}(x) = \text{arc cos } x$

$D(f^{-1}) = [-1; 1]$

$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = [0; \pi]$

$$y = \text{arc cos } x \Leftrightarrow \cos y = x$$



5. A função arco-tangente

A função de $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ em IR, tal que $f(x) = \text{tg } x$ é invertível. A sua inversa f^{-1}, é a função de IR em $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$, definida por

$$f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$$

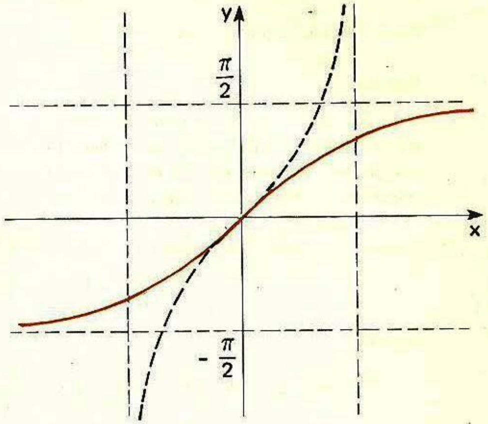
Os gráficos de **f** e f^{-1} estão desenhados abaixo

$f^{-1}(x) = \text{arc tg } x$

$D(f^{-1}) = \text{IR}$

$CD(f^{-1}) = I(f^{-1}) = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$

$$y = \text{arc tg } x \Leftrightarrow \text{tg } y = x$$



Exercícios Resolvidos

3.70) Determine o domínio da função definida por

$$f(x) = \log_2(1 - 2x) + 3 \text{ arc cos } \frac{3x - 1}{2}$$

Solução

As condições que devemos impor são

$$\begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ \text{e} \\ -1 \leqslant \dfrac{3x - 1}{2} \leqslant 1 \end{cases}$$

A solução do sistema acima nos dá $D = \left[-\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right[$

3.71) Dê o conjunto-imagem da função **f**, definida por

$$f(x) = \pi + 2 \text{ arc sen } x$$

Solução

Para todo **x**, $-1 \leqslant x \leqslant 1$, tem-se

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \text{arc sen } x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$-\pi \leqslant 2 \text{ arc sen } x \leqslant \pi$$

e, somando π aos membros da desigualdade

$$0 \leqslant \pi + 2 \text{ arc sen } x \leqslant 2\pi$$

ou

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 2\pi$$

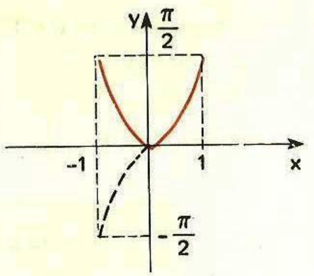
Logo

$$D(f) = [0; 2\pi]$$

3.72) Construa o gráfico da função **g**, definida por

$$g(x) = |\text{arc sen } x|$$

Qual é o seu conjunto-imagem?



Solução

Se $f(x) = \text{arc sen } x$, para obtermos o gráfico de $g(x) = |f(x)|$, fazemos a "parte que está abaixo" do eixo Ox, do gráfico de f(x), sofrer uma reflexão em relação a esse eixo

3.73) Determine o conjunto-imagem da função definida por

$$f(x) = \text{sen}(\text{arc tg } x)$$

Solução

Fazendo $\alpha = \text{arc tg } x$, temos $\text{tg } \alpha = x$, com $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e x real qualquer. Assim

$f(x) = \text{sen } \alpha$ e, como $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tem-se $-1 < \text{sen } \alpha < 1$, isto é

$$I(f) =]-1; 1[$$

Exercícios Propostos

3.74) Determine o domínio da função definida por

$$f(x) = \log(3x - 1) + 2\log(x + 1)$$

3.75) Determine o domínio da função definida por

$$f(x) = 2 \text{ arc cos}\left(\frac{x}{2} + 3\right)$$

3.76) Determine o conjunto-imagem da função definida por

$$f(x) = -\frac{\pi}{3} + 3 \text{ arc cos } x$$

3.77) Construa o gráfico da função definida por

$$f(x) = -\text{arc cos } x$$

Exercícios Suplementares

I.1) **Algumas desigualdades em** $\mathbb{R}$

1.ª) Se **a** e **b** são reais não negativos, prove que $\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

2.ª) Se $a > 0$ e $b > 0$ prove que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

3.ª) Prove que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

4.ª) Se a, b e c são reais positivos, verifique que

$$(a + b + c)(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}) \geq 9$$

5.ª) Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são positivos e $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$, mostre que

$$(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots (1 + a_n) \geq 2^n$$

6.ª) Os números reais **p**, **q** e α são tais que $p > 0$, $q > 0$ e $\alpha > 1$. Demonstre a implicação

$$\frac{p + \alpha^2 q}{p + q} > \alpha \Rightarrow \frac{p}{q} < \alpha$$

I.2) Se **a** e **b** são reais não nulos, compare os números

$$x = |a - b| \quad \text{e} \quad y = \big|\, |a| - |b| \,\big|$$

I.3) Seja $E \subset \mathbb{R}$. Um ponto **a** diz-se **ponto de acumulação** de E se toda **vizinhança completa** de **a** possui um ponto de E distinto de **a**.

a) Quais são os pontos de acumulação do conjunto $E =]0; 2]$?

b) Qual é o ponto de acumulação do conjunto $E = \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$?

c) Se **a** é um ponto de acumulação de E, toda vizinhança V(a) possui infinitos pontos de E. Demonstre.

I.4) Uma função **f**, de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, é tal que para todo **a**, $a \in \mathbb{Z}$ e todo **b**, $b \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$f(a + b) = f(a) + f(b).$$

a) Determine f(0).
b) Verifique que **f** é ímpar.
c) Se $f(1) = k$, determine f(n), $n \in \mathbb{N}^*$.

I.5) Sejam as funções **f** e **g**, definidas respectivamente por

$$f(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g(x) = ax + b,\ a \neq 0$$

Calcule **a** e **b**, sabendo que $f \circ g = g \circ f$.

I.6) Seja a função **g**, real, definida por

$$g(x) = \log_e \frac{x + 1}{x + 2} + \log_e \frac{x + 2}{1 - x}$$

a) Qual é o domínio de **g**?
b) Resolva a equação $g(x) = 0$.

I.7) Seja **f** a função real tal que

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

Verifique que **f** é **crescente** em $]-\infty; 1[$.

I.8) Prove que para $|x| \leq 1$, tem-se

$$\text{arc sen } x + \text{arc cos } x = \frac{\pi}{2}$$

PARTE II

Limites e Continuidade

Capítulo 4 — **Definição de limite de uma função**

Capítulo 5 — **O conceito de função contínua**

Capítulo 6 — **Cálculo de limites**

Capítulo 7 — **Limites e continuidade laterais**

Capítulo 8 — **Infinito**

Capítulo 9 — **Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas**

Capítulo

4

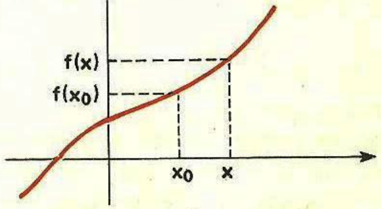
Definição de limite de uma função

4.1 — IDÉIA INTUITIVA DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Neste item, apresentaremos uma discussão informal das principais idéias a respeito do conceito de *limite*, começando com uma pergunta:

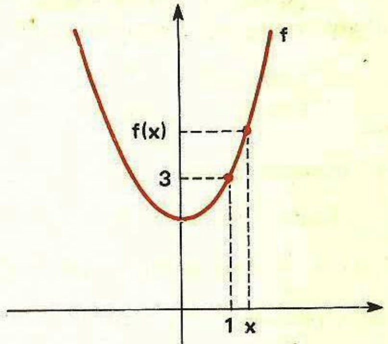
"Dada uma função **f** e um número x_0, se tomamos valores de **x** *próximos* de x_0, que número estará *próximo* dos valores de f(x)?"

Se x_0 pertence ao domínio de **f**, então o valor de **f** para $x = x_0$ é $f(x_0)$. Poderíamos pensar, então, que se tomamos valores de **x** *próximos* de x_0, os valores de f(x) devem resultar próximos de $f(x_0)$. Isto é o que acontece, de fato, com muitas funções, mas há casos, como veremos nos exemplos, em que, embora **x** tome valores próximos de x_0, os valores de f(x) *não se aproximam* de $f(x_0)$.



1.º exemplo

Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2 + 2$, cujo gráfico se representa ao lado.



Diretamente no gráfico, pode-se ver que:

1.º) $f(1) = 3$

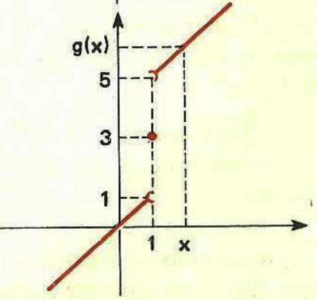
2.º) Se **x** é próximo de 1, então f(x) é próximo de $3 = f(1)$.

2.º exemplo

Considere, agora, o exemplo da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \\ x + 5, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

cujo gráfico se representa ao lado.



Diretamente no gráfico, vê-se que:

1.º) $g(1) = 3$

2.º) Se **x** é próximo de 1 *do lado direito*, então g(x) é próximo de 5.
Se **x** é próximo de 1 *do lado esquerdo*, então g(x) é próximo de 1.

Como se vê, neste último caso não é verdade que g(x) se aproxime de $g(1) = 3$ quando **x** se aproxima de 1. Neste exemplo, só foi possível considerar a aproximação de g(x) separadamente *pela esquerda* e *pela direita* de $x_0 = 1$.

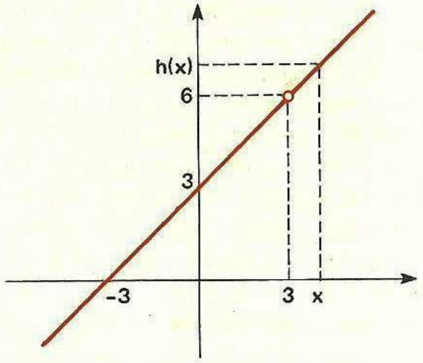
Examinemos mais exemplos do comportamento que uma função apresenta quando **x** está próximo de um dado ponto x_0.

3.º exemplo

Dada a função $h : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$, podemos representá-la pelo gráfico ao lado. Note que, para $x \neq 3$, temos

$$h(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3$$

logo, os pontos do gráfico pertencem a *uma reta*. O gráfico é constituído por todos os pontos dessa reta, exceto aquele de abscissa $x_0 = 3$. Vê-se, facilmente, que:



1.º) não existe h(3) (pois o valor $x_0 = 3$ não está no domínio de **h**).

2.º) se **x** é próximo de 3, h(x) é próximo de 6.

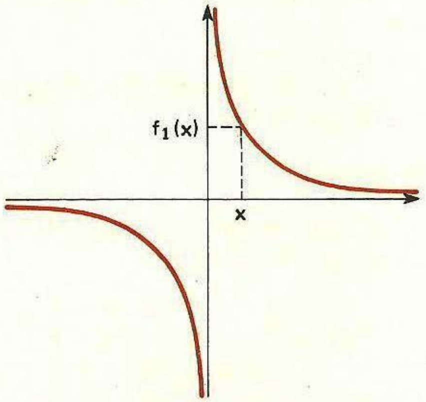
4.º exemplo

Dada a função $f_1 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ por $f_1(x) = \dfrac{1}{x}$, cujo gráfico é mostrado ao lado, pode-se notar que:

1.º) não se define $f_1(0)$ (ou seja, o valor $x_0 = 0$ não pertence ao domínio de f_1).

2.º) se **x** se aproxima de 0 *pela direita*, $f_1(x)$ toma valores positivos cada vez maiores.

Se **x** se aproxima de 0 *pela esquerda*, $f_1(x)$ toma valores negativos, mas de valores absolutos cada vez maiores.



Como podemos observar nos exemplos examinados, o comportamento que uma função **f** apresenta, quando **x** está *próximo* de um dado ponto x_0, pode ser bem variado. Considere de novo o 3.º exemplo, aquele da função

$$h : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$$

dada por $h(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$. Vimos que *h(x) está próximo de 6 quando x está próximo de 3*, ao mesmo tempo em que *não se define o valor numérico h(3)*. Esta função ilustra muito bem o conceito de **limite**.

Se os valores de uma função **f** se aproximam de um número L quando **x** se aproxima de x_0, dizemos que *o limite de f(x) é L, se* **x** *tende a* x_0, e escrevemos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

É bem evidente que $\lim_{x \to 3} h(x) = 6$. Assim também, para as funções dos demais exemplos que vimos, podemos notar que $\lim_{x \to 1} (x^2 + 2) = 3$, que $\lim_{x \to 1} g(x)$ *não é* 3 e que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$ também não existe.

Ao investigar o limite de uma função **f** num ponto x_0, estamos interessados em valores de **x** *próximos* de x_0. Veja que pouco interessa o que ocorre com o *valor numérico* de **f** para $x = x_0$.

No caso de funções como a **g**, a noção de limite pode ser adaptada, se falarmos em *limites laterais*, para **x** tendendo a x_0 *pela esquerda* ou *pela direita*. Escreveremos

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = L_1$$

se f(x) estiver próximo de L_1 quando **x** se aproximar de x_0 *pelo lado esquerdo*, e ainda

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = L_2$$

se f(x) estiver próximo de L_2 quando **x** se aproximar de x_0 *pelo lado direito*.

Assim, no exemplo da função **g**, teremos

$$\lim_{x \to 1 -} g(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1 +} g(x) = 5$$

e também, para as demais funções:

$$\lim_{x \to 1 -} (x^2 + 2) = 3 \qquad \lim_{x \to 1 +} (x^2 + 2) = 3$$

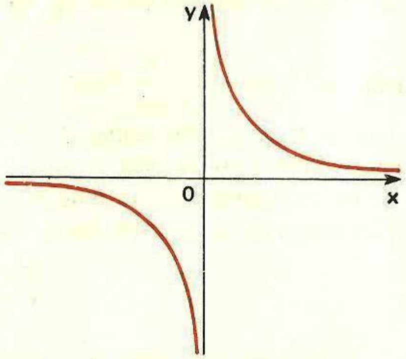
$$\lim_{x \to 3 -} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6 \qquad \lim_{x \to 3 +} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

No caso da função $f_1 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \frac{1}{x}$, vista no 4.º exemplo, usaremos o símbolo ∞. Como sabemos, este símbolo se lê *infinito* e não representa um número real. É usado para indicar a idéia de que os valores de uma dada variável *tornam-se grandes, sem limitação.* Poderemos, então, escrever

$$\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

e

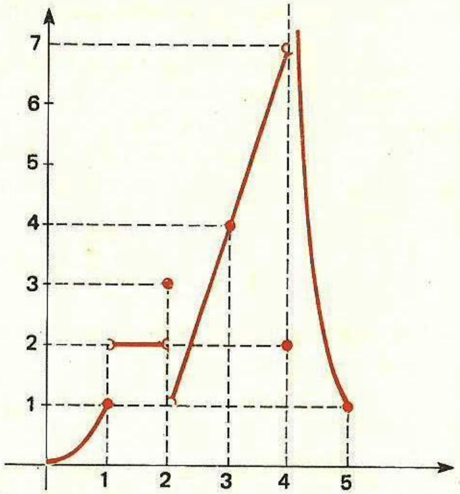
$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$



5.º exemplo

Considere, agora, a função **f** cujo gráfico é representado ao lado. Para as expressões:

a) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$
b) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$
c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
d) $\lim\limits_{x \to 2-} f(x)$
e) $\lim\limits_{x \to 2+} f(x)$
f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
g) $\lim\limits_{x \to 3-} f(x)$
h) $\lim\limits_{x \to 3+} f(x)$
i) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
j) $\lim\limits_{x \to 4-} f(x)$
k) $\lim\limits_{x \to 4+} f(x)$
l) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$
m) $\lim\limits_{x \to 5-} f(x)$
n) $\lim\limits_{x \to 5+} f(x)$
o) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$



encontramos os seguintes significados:

a) 1	e) 1	i) 4	m) 1
b) 2	f) não existe	j) 7	n) não existe
c) não existe	g) 4	k) $+\infty$	o) não existe
d) 2	h) 4	l) não existe	

A noção de limite, na linguagem que utilizamos até aqui, embora intuitivamente tenha ficado clara, só estará estabelecida solidamente, para futuros desenvolvimentos lógicos, se for reescrita numa linguagem mais técnica e formal. Devemos estipular, rigorosamente, o que queremos dizer com as palavras "estar

próximo" ou "tender a". Tais noções ficam suficientemente claras quando utilizamos o conceito de *intervalo*, que em nosso estudo recebe o sugestivo nome de *vizinhança*. Nos próximos itens, trataremos de introduzir essa linguagem, para definirmos rigorosamente a idéia de limite.

4.2 — DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO

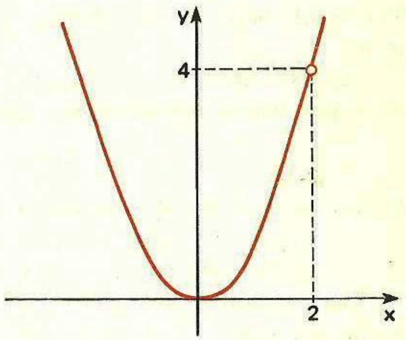
1.º exemplo

Tomemos, primeiramente, o exemplo da função $h : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2}$$

Para $x \neq 2$, temos $h(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-2} = x^2$, logo, os pontos do gráfico pertencem a uma *parábola*. O gráfico é constituído de todos os pontos da parábola, com exceção daquele que tem abscissa $x_0 = 2$. Intuitivamente, é claro que

$$\lim_{x \to 2} h(x) = 4$$



o que significa que é possível fazer h(x) ficar tão próximo de 4 quanto quisermos, bastando fazer **x** ficar suficientemente próximo de 2 (note que não desejamos que **x** fique *igual* a 2, mas unicamente *próximo* de 2). Para exemplificar, suponha que a distância de h(x) até 4 seja menor do que 0,1. Isto significa que

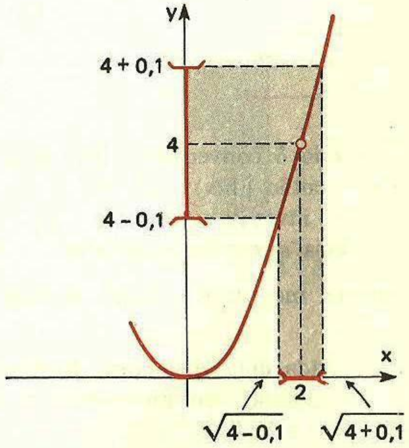
$$4 - 0{,}1 < h(x) < 4 + 0{,}1$$

ou, ainda, que

$$|h(x) - 4| < 0{,}1$$

Graficamente, desejamos que h(x) se situe na faixa do eixo Oy indicada ao lado, a qual é a representação da *vizinhança*

$$V(4;\ 0{,}1)$$



Pode-se ver que, para conseguir este efeito, bastará tomar **x** dentro do intervalo

$$\sqrt{4 - 0{,}1} < x < \sqrt{4 + 0{,}1} \text{ e } x \neq 2$$

De fato, supondo $x \neq 2$, pode-se escrever $h(x) = x^2$. Então, a condição $|h(x) - 4| < 0{,}1$ fica $|x^2 - 4| < 0{,}1$, donde

$$-0{,}1 < x^2 - 4 < 0{,}1$$

ou ainda

$$4 - 0{,}1 < x^2 < 4 + 0{,}1$$

É claro, portanto, que tomando-se

$$\sqrt{4 - 0{,}1} < x < \sqrt{4 + 0{,}1}, \text{ com } x \neq 2$$

resultará

$$|h(x) - 4| < 0{,}1$$

Este intervalo é o mais amplo possível. Na verdade, qualquer intervalo aberto contido nesse, tendo 2 em seu interior, serviria também ao nosso propósito. Vê-se, então, que *é possível* fazer h(x) ficar a uma distância de 4 menor do que 0,1: basta tomar **x** dentro de uma vizinhança de 2, contida no intervalo acima.

Aproximemos h(x) mais ainda de 4. Se desejarmos que a distância de h(x) até 4 seja menor do que 0,001, isto é, que

$$|h(x) - 4| < 0{,}001$$

deveremos escolher uma vizinhança de 2 com raio *bem menor*; mas é claro que, *por menor que seja* a distância que desejarmos de h(x) até 4, *será sempre possível* encontrar uma conveniente vizinhança de 2 que funcione bem.

Generalizando, diremos que se tomarmos qualquer número positivo ε (por menor que seja este valor), poderemos fazer

$$|h(x) - 4| < \varepsilon$$

pois *será sempre possível* escolher uma vizinhança de 2,

$$V^*(2;\ \delta)$$

com **raio** δ conveniente. Para essa vizinhança, teremos que se $|x - 2| < \delta$ e $x \neq 2$, então $|h(x) - 4| < \varepsilon$.

Ao invés de escrever $|x - 2| < \delta$ e $x \neq 2$, podemos escrever $0 < |x - 2| < \delta$.

Veja que a frase $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 4$ começa a ser substituída por outra, equivalente, mas de significado preciso. Para dizer que $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 4$, dizemos:

"dada uma vizinhança do número 4, com raio ε, é possível escolher uma vizinhança do número 2, com raio δ, tal que se $x \in V^*(2;\ \delta)$, então $h(x) \in V(4;\ \varepsilon)$".

Esta mesma frase pode ser dita assim:

"dado qualquer número positivo ε, é sempre possível escolher outro número positivo δ tal que

se $0 < |x - 2| < \delta$,

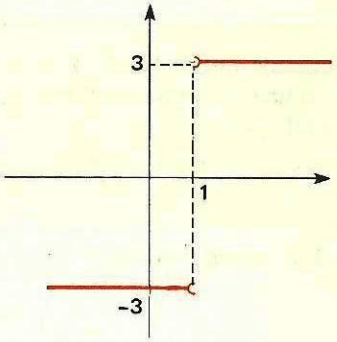
então

$$|h(x) - 4| < \varepsilon\text{"}$$

2.° exemplo

Considere, agora, o exemplo da função $g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{3\,|x - 1|}{x - 1}$$



cujo gráfico está representado ao lado. É fácil ver que

$$g(x) = \begin{cases} 3, & \text{se } x > 1 \\ -3, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

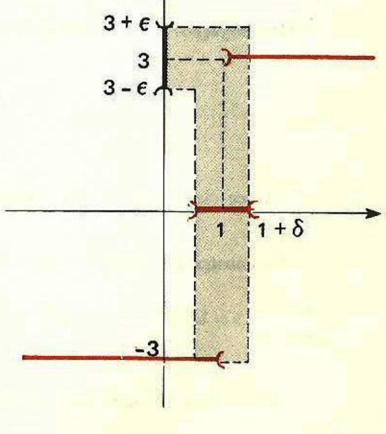
Intuitivamente, é claro que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ *não existe.*

Podemos dizer que existem os limites laterais

$$\lim_{x \to 1-} g(x) = -3 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1+} g(x) = 3$$

mas *não podemos dizer* que $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 3$.

Dizer que $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ *não é* 3 significa que é impossível fazer h(x) ficar tão próximo de 3 quanto quisermos, com **x** aproximando-se de 1 por *ambos os lados*. Para exemplificar, suponha que desejamos fazer a distância de g(x) até 3 ficar menor do que $\epsilon = 0{,}1$, tomando para isso uma vizinhança conveniente de 1. Veremos que isso é impossível, pois qualquer vizinhança de 1 apresenta pontos *à esquerda* de 1, para os quais $g(x) = -3$, logo, para esses valores,



$$|g(x) - 3| = 6 > 0{,}1$$

É claro que os valores à direita de 1 satisfazem a condição, pois para eles $g(x) = 3$ e então

$$| g(x) - 3 | = 0 < 0{,}1$$

Entretanto, a condição $| g(x) - 3 | < 0{,}1$ deveria ser satisfeita *para todos* os pontos da vizinhança $V^*(1;\ \delta)$.

O mesmo argumento serviria para mostrar que $g(x)$ não se aproxima de 4, 5, 6 ou de qualquer outro número real, ou seja, *não existe* $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$.

Vamos, agora, estabelecer formalmente a definição de limite de uma função.

Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função e seja x_0 um número real. O número x_0 pode pertencer ou não ao domínio de f, mas suporemos que existe ao menos uma vizinhança reduzida, de x_0, que está inteiramente contida em A.

Dizemos que **a função f tende ao limite L quando x tende a x_0** se, para qualquer número positivo ε, é possível encontrar um número positivo δ, tal que

$$\text{se } 0 < | x - x_0 | < \delta, \text{ então } | f(x) - L | < \varepsilon$$

Indicamos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, ou ainda

$$f(x) \to L \quad \text{se} \quad x \to x_0$$

Exercícios Resolvidos

4.1) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 5$. Prove que $\lim\limits_{x \to 4} (2x - 5) = 3$.

Solução

Proposição: Devemos provar que para qualquer número positivo ε, é possível encontrar um número positivo δ tal que

$$\text{se } 0 < | x - 4 | < \delta, \quad \text{então} \quad | f(x) - 3 | < \varepsilon.$$

Investigação: A condição $| (2x - 5) - 3 | < \varepsilon$ equivale a $| 2x - 8 | < \varepsilon$, ou ainda

$$| 2(x - 4) | < \varepsilon$$
$$2 | x - 4 | < \varepsilon$$
$$| x - 4 | < \frac{\varepsilon}{2}$$

Parece claro, então, que devemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, vamos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $0 < | x - 4 | < \delta$. Então, temos

$$| f(x) - 3 | = | (2x - 5) - 3 | = | 2x - 8 | = 2 | x - 4 | < 2\delta = \varepsilon.$$

isto é,

$$| f(x) - 3 | < \varepsilon$$

Assim, fica provado que $\lim\limits_{x \to 4} (2x - 5) = 3$.

4.2) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - 3x$.
Prove que $\lim\limits_{x \to 2} (1 - 3x) = -5$.

Solução

Proposição: Devemos provar que para qualquer número positivo ε, é possível encontrar um número positivo δ tal que

$$\text{se } 0 < | x - 2 | < \delta, \text{ então } | f(x) - (-5) | < \varepsilon$$

Investigação: A condição

$$| (1 - 3x) - (-5) | < \varepsilon$$

escreve-se

$$| 1 - 3x + 5 | < \varepsilon$$
$$| 6 - 3x | < \varepsilon$$
$$| 3x - 6 | < \varepsilon$$
$$3 | x - 2 | < \varepsilon$$
$$| x - 2 | < \frac{\varepsilon}{3}$$

Vê-se, então, que devemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Seja $0 < | x - 2 | < \delta$. Assim

$$| f(x) - (-5) | = | (1 - 3x) - (-5) | = | 6 - 3x | = | 3x - 6 | = 3 | x - 2 | < 3\delta = \varepsilon$$

Portanto,

$$\lim_{x \to 2} (1 - 3x) = -5$$

4.3) Seja $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Prove que $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

Solução

Proposição: Devemos provar que para qualquer número positivo ε, é possível encontrar um número positivo δ tal que

$$\text{se } 0 < | x - 3 | < \delta, \text{ então } | f(x) - 6 | < \varepsilon.$$

Investigação: Para $x \neq 3$, temos $f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3$. Assim, a condição

$$\left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| < \varepsilon$$

escreve-se

$$| (x + 3) - 6 | < \varepsilon$$
$$| x - 3 | < \varepsilon$$

Basta, então, tomarmos $\delta = \varepsilon$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < | x - 3 | < \delta$, tem-se

$$| f(x) - 6 | = \left| \frac{x^2 - 9}{x - 3} - 6 \right| = | (x + 3) - 6 | = | x - 3 | < \delta = \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$.

4.4) Seja $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

Prove que $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$.

Solução

Proposição: Devemos provar que para qualquer número positivo ε, é possível encontrar um número positivo δ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta, \text{ então } |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

Investigação: Para $x \neq 1$, temos $f(x) = \frac{(2x + 3)(x - 1)}{x - 1} = 2x + 3$. Assim, a condição

$$\left| \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} - 5 \right| < \varepsilon$$

escreve-se:

$$|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$$
$$|2x - 2| < \varepsilon$$
$$2|x - 1| < \varepsilon$$
$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Basta, então, tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, tem-se

$$|f(x) - 5| = \left| \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} - 5 \right| = |(2x + 3) - 5| = 2|x - 1| < 2\delta = \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$.

4.5) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Prove que $\lim\limits_{x \to 5} x^2 = 25$.

Solução

Proposição: Devemos provar que para qualquer número positivo ε, é possível encontrar um número positivo δ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 5| < \delta, \text{ então } |f(x) - 25| < \varepsilon$$

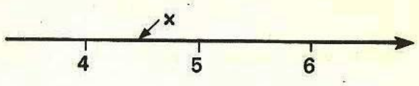
Investigação: A condição $|f(x) - 25| < \varepsilon$ escreve-se

$$|x^2 - 25| < \varepsilon$$
$$|(x - 5)(x + 5)| < \varepsilon$$
$$|x - 5| \cdot |x + 5| < \varepsilon$$

Esta etapa de *investigação* não é ainda uma prova, mas sim uma pesquisa do ponto de partida para a prova. Queremos alguma afirmação da qual se possa concluir que $|x - 5| \cdot |x + 5| < \varepsilon$. Lembre-se de que, ao pesquisar o limite para $x \to 5$, estamos interessados em valores de **x** *pró-*

ximos de 5. Assim, nada nos impede de restringir os valores de **x** à vizinhança de raio 1 em torno do número 5. Se fizermos $|x - 5| < 1$, ou seja, $4 < x < 6$, teremos

$9 < x + 5 < 11$



isto é,

$|x + 5| < 11$

Assim, se tivermos $|x - 5| \cdot 11 < \varepsilon$, teremos também $|x - 5| \cdot |x + 5| < \varepsilon$, porque estaremos substituindo, no 1.º membro, o número 11 por uma expressão $|x + 5|$ *menor* que 11.

Por outro lado, para termos $|x - 5| \cdot 11 < \varepsilon$, basta que seja $|x - 5| < \frac{\varepsilon}{11}$. Conclui-se que, para provarmos a nossa proposição, deveremos escolher δ de tal modo que *as duas condições*

$$|x - 5| < 1 \quad \text{e} \quad |x - 5| < \frac{\varepsilon}{11}$$

fiquem satisfeitos. Para isso, basta tomar como δ *o menor* dentre os números 1 e $\frac{\varepsilon}{11}$

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\}$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{11}\right\}$. Seja $0 < |x - 5| < \delta$. Temos, então:

1.º) $0 < |x - 5| < 1$, donde $|x + 5| < 11$

2.º) $0 < |x - 5| < \frac{\varepsilon}{11}$, donde $|x - 5| \cdot 11 < \varepsilon$

Daí resulta que $|x - 5| \cdot |x + 5| < \varepsilon$, ou seja,

$$|x^2 - 25| < \varepsilon$$

e, portanto, $\lim\limits_{x \to 5} x^2 = 25$.

4.6) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + x + 1$. Prove que $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$.

Solução

Proposição: Devemos provar que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta, \text{ então } |f(x) - 3| < \varepsilon$$

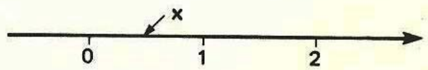
Investigação: A condição $|f(x) - 3| < \varepsilon$ escreve-se:

$$|(x^2 + x + 1) - 3| < \varepsilon$$
$$|x^2 + x - 2| < \varepsilon$$
$$|(x - 1)(x + 2)| < \varepsilon$$
$$|x - 1| \cdot |x + 2| < \varepsilon$$

Supondo que **x** se restringe a uma vizinhança de 1 com raio 1, temos $|x - 1| < 1$, ou seja

$0 < x < 2$

$2 < x + 2 < 4$



e assim,

$$|x + 2| < 4$$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \min\{1, 3\varepsilon\}$. Seja $0 < |x - 5| < \delta$. Então

1.º) $0 < |x - 5| < 1$, donde $|x - 2| > 2$
2.º) $0 < |x - 5| < 3\varepsilon$

Daí resulta que

$$|x - 5| < \frac{3\varepsilon}{2} \cdot |x - 2|$$

donde

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{|x - 5|}{|x - 2|} < \varepsilon$$

que é equivalente a

$$\left|\frac{x}{x - 2} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x}{x - 2} = \frac{5}{3}$.

4.9) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Prove que $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$.

Solução

Proposição: Devemos provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

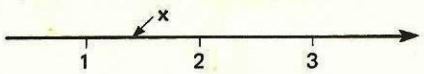
$$\text{se } 0 < |x - 2| < \delta, \text{ então } |f(x) - 8| < \varepsilon$$

Investigação: A condição $|f(x) - 8| < \varepsilon$ equivale a $|x^3 - 8| < \varepsilon$

$$|(x - 2)(x^2 + 2x + 4)| < \varepsilon$$
$$|x - 2| \cdot |x^2 + 2x + 4| < \varepsilon$$

Se restringirmos **x** à vizinhança de 2 com raio 1, teremos $|x - 2| < 1$, isto é, $1 < x < 3$, e também $1 < x^2 < 9$ e $2 < 2x < 6$. Portanto

$3 < x^2 + 2x < 15$
$7 < x^2 + 2x + 4 < 19$



Logo,
$|x^2 + 2x + 4| < 19$

Por isso, da condição $|x - 2| \cdot 19 < \varepsilon$ decorrerá que $|x - 2| \cdot |x^2 + 2x + 4| < \varepsilon$, pois estaremos substituindo, no 1.º membro, a expressão $|x^2 + 2x + 4|$, que é *menor* do que 19.

As *duas condições*, $|x - 2| < 1$ e $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{19}$, ficam satisfeitas para $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{19}\right\}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{19}\right\}$.

Seja $0 < |x - 2| < \delta$. Então:

1.º) $0 < |x - 2| < 1$, donde $|x^2 + 2x + 4| < 19$

2.º) $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{19}$, donde $|x - 2| \cdot 19 < \varepsilon$

Daí resulta que

$$|x - 2| \cdot |x^2 + 2x + 4| < \varepsilon$$

que equivale a

$$|x^3 - 8| < \varepsilon$$

e, portanto, $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$.

4.10) Seja $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Prove que $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x} = 3$.

Solução

Proposição: Devemos provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - 9| < \delta, \text{ então } |\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$$

Investigação: A condição $|\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$ escreve-se

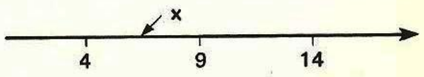
$$|x - 9| < \varepsilon\,|\sqrt{x} + 3|$$

pois

$$\sqrt{x} - 3 = \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} + 3} = \frac{x - 9}{\sqrt{x} + 3}$$

Restringindo **x** à vizinhança de 9 com raio 5, temos que $|x - 9| < 5$, ou $4 < x < 14$, donde

$2 < \sqrt{x} < \sqrt{14}$
$5 < \sqrt{x} + 3 < 3 + \sqrt{14}$



e, então

$|\sqrt{x} + 3| > 5$

Da condição $|x - 9| < \varepsilon \cdot 5$ decorrerá que $|x - 9| < \varepsilon \cdot |\sqrt{x} + 3|$, pois estaremos substituindo o 2.º membro por uma expressão $\varepsilon \cdot |\sqrt{x} + 3|$ *maior* do que $\varepsilon \cdot 5$.

As *duas condições*, $|x - 9| < 5$ e $|x - 9| < \varepsilon \cdot 5$, ficam satisfeitas para $\delta = \min\{5, 5\varepsilon\}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \min\{5, 5\varepsilon\}$. Seja $0 < |x - 9| < \delta$. Então

1.º) $0 < |x - 9| < 5$, donde $|\sqrt{x} + 3| > 5$.
2.º) $0 < |x - 9| < 5\varepsilon$.

Daí resulta que

$$|x - 9| < \varepsilon\,|\sqrt{x} + 3|$$

ou

$$\frac{|x - 9|}{|\sqrt{x} + 3|} < \varepsilon$$

que equivale a

$$|\sqrt{x} - 3| < \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x} = 3$.

4.11) **UNICIDADE DO LIMITE**. Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função para a qual existe o limite quando **x** tende a x_0. Prove que esse limite é **único**, isto é, prove que se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L_2$$

então

$$L_1 = L_2$$

Solução:

Dado $\varepsilon > 0$,

1.º) existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_1, \text{ tem-se } |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

2.º) existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_2, \text{ tem-se } |f(x) - L_2| < \varepsilon$$

Assim, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, as duas condições ficarão satisfeitas, isto é, se $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se simultaneamente

$$\begin{cases} |f(x) - L_1| < \varepsilon \\ |f(x) - L_2| < \varepsilon \end{cases}$$

Como *o módulo da diferença é menor ou igual à soma dos módulos* (veja a desigualdade triangular, no item 1.4), podemos escrever que

$$|[f(x) - L_1] - [f(x) - L_2]| \leqslant |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon$$

donde resulta que $|L_2 - L_1| < 2\varepsilon$.

Mas o valor de ε pode ser escolhido arbitrariamente, desde que seja *positivo*. Admitamos, para racionar, que seja $L_2 \neq L_1$. Então, poderia ser escolhido $\varepsilon = \dfrac{|L_2 - L_1|}{2} > 0$. Se isto ocorresse, teríamos

$$|L_2 - L_1| < 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{|L_2 - L_1|}{2}$$

ou seja,

$$|L_2 - L_1| < |L_2 - L_1|$$

Como isto é absurdo, resulta que é impossível que seja $L_2 \neq L_1$. Em outras palavras, *só pode ser* $L_2 = L_1$.

4.12) **TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DO SINAL.** Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função para a qual existe o limite quando x tende a x_0. Suponha que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$$

Prove que é possível determinar uma vizinhança reduzida, de x_0, tal que todo x pertencente a essa vizinhança apresenta imagem $f(x)$ *com o mesmo sinal* de L.

Solução

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

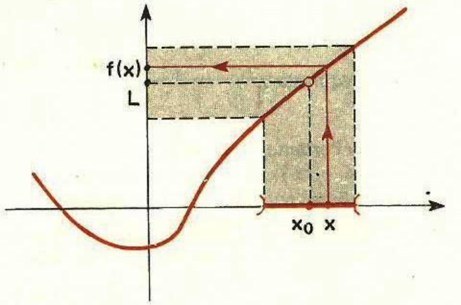
se $0 < |x - x_0| < \delta$

então

$|f(x) - L| < \varepsilon$

isto é,

$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$



Se $L > 0$, desejamos que seja $f(x) > 0$. Para isso, basta tomar, por exemplo, $\varepsilon = \dfrac{L}{2}$ e teremos $0 < \dfrac{L}{2} < f(x) < \dfrac{3L}{2}$.

Se $L < 0$, desejamos que seja $f(x) < 0$. Para isso, basta tomar $\varepsilon = -\dfrac{L}{2}$ (que é positivo) e teremos $\dfrac{3L}{2} < f(x) < \dfrac{L}{2} < 0$.

Vê-se, então, que se tomarmos $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2}$, em qualquer caso existirá $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta$, teremos $f(x)$ e L de mesmo sinal. Assim, $V^*(x_0, \delta)$ é a vizinhança procurada.

Exercícios Propostos

Em cada um dos casos abaixo (exercícios de n.º 4.13 a 4.30) é dada uma função $f: A \to \mathbb{R}$ e pede-se demonstrar, utilizando a definição de limite, que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

4.13) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 7$, $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 5$.

4.14) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$.

4.15) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = -3$.

4.16) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

4.17) $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

4.18) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

4.19) $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$.

4.20) $f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4x - x^2 - 3}{x - 3}$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -2$.

4.21) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

4.22) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

4.23) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

4.24) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

4.25) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{5}{x - 1}$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

4.26) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 2$.

4.27) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1}$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$.

4.28) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

4.29) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^3$, $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 2$.

4.30) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 2$.

4.31) Prove que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se, e somente se,

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - L] = 0$$

4.32) Sejam **f** e **g** funções tais que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} h(x) = 0$$

Prove que $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot h(x) = 0$.

4.33) Sejam **f** e **g** funções tais que

$$f \text{ é limitada} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Prove que $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$.

4.34) Seja **g** uma função com $\lim_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$.

Mostre que existem números positivos δ, M e N para os quais se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$0 < M < |g(x)| < N$$

Capítulo 5

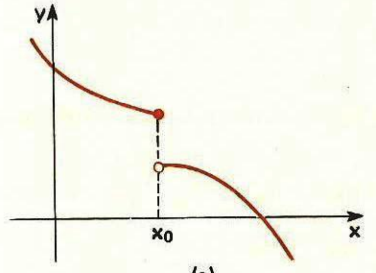
O conceito de função contínua

5.1 — IDÉIA INTUITIVA DE CONTINUIDADE

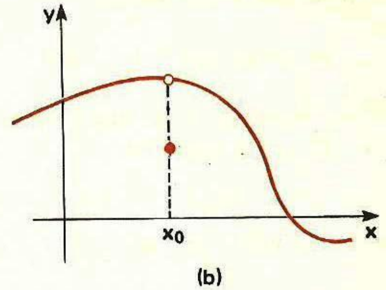
Uma das mais importantes conseqüências do conceito de limite é o de **função contínua**, que veremos agora, começando com uma definição intuitiva.

Uma função é **contínua** se o seu gráfico não é quebrado, ou seja, não tem saltos ou furos.

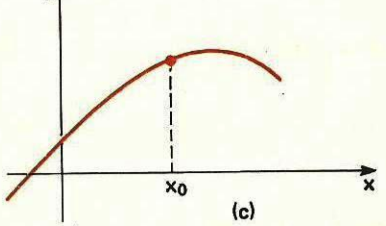
Por exemplo, as funções cujos gráficos são dados nas figuras (a) e (b) *não são contínuas* no ponto x_0. A função cujo gráfico é dado na figura (c) *é contínua*



(a)



(b)



(c)

em x_0. Pode-se perceber facilmente que, se uma função **f** é contínua em um ponto x_0, então os valores de f(x) em pontos próximos de x_0 devem estar próximos *do próprio valor numérico* $f(x_0)$. Ora, isto equivale a dizer que f(x) tende a $f(x_0)$ quando x tende a x_0, isto é

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

5.2 – DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO CONTÍNUA

Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função e seja x_0 **um ponto de seu domínio** ($x_0 \in A$).

> A função **f** é **contínua** em x_0 se
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Note que esta definição abrange *as três condições* seguintes:

1.ª) existe $f(x_0)$ (isto é, $x_0 \in A$);
2.ª) existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
3.ª) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se **f** não é contínua em x_0, dizemos que **f** é **descontínua** em x_0. Note, também, que só se pode falar que uma função **f** é contínua ou descontínua em x_0, se x_0 pertence ao domínio de **f**, isto é, se está definido o valor $f(x_0)$. Assim, para que **f** seja *descontínua* em x_0, deve-se ter que

1.º) existe $f(x_0)$;
2.º) ou não existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$,

ou então $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Note, ainda, que dizer que **f** é **contínua** em x_0 também equivale a dizer que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } |x - x_0| < \delta, \text{ então } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Aqui, já não fazemos objeção a que seja $x = x_0$.

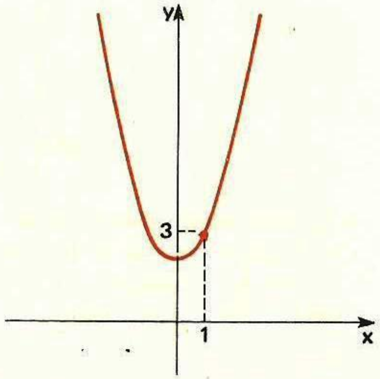
1.º exemplo

Para a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$, temos

$$f(1) = 3$$
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

Logo, **f é contínua** em $x_0 = 1$, pois

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$$



2.º exemplo

Para a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

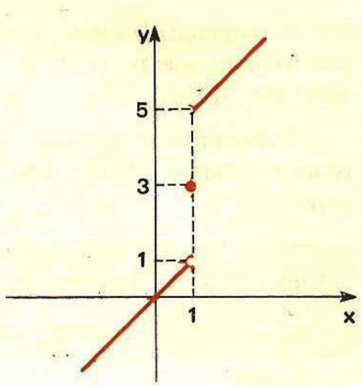
$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \\ x + 5, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

temos

$$g(1) = 3$$

mas *não existe* $\lim_{x \to 1} g(x)$.

Assim, **g é descontínua** em $x_0 = 1$.

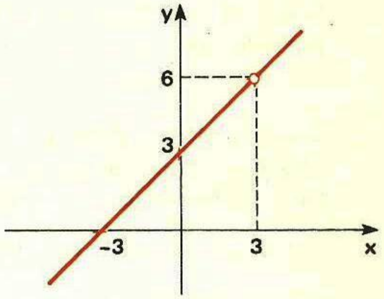


3.º exemplo

Para a função

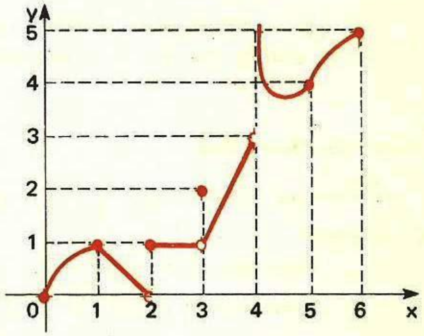
$$h: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

temos que $\lim_{x \to 3} h(x) = 6$, mas *não é definido* o valor $h(3)$. Assim, não tem sentido falar em continuidade ou descontinuidade de **h** em $x_0 = 3$.



4.º exemplo

Seja **f** a função cujo gráfico é representado ao lado. Temos:



a) em $x_0 = 1$, **f** *é contínua*, pois
$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 1$$

b) em $x_0 = 2$, **f** é *descontínua*, pois $f(2) = 1$ e não existe $\lim_{x \to 2} f(x)$.

c) em $x_0 = 3$, **f** é *descontínua*, pois $f(3) = 2$ e $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$; logo, $\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$.

d) em $x_0 = 4$, não tem sentido falar em continuidade ou descontinuidade de **f**, pois não está definido o valor $f(4)$.

e) em $x_0 = 5$, **f** *é contínua*, pois
$$\lim_{x \to 5} f(x) = f(5) = 4$$

f) em $x_0 = 0$, diremos que **f** é *contínua à direita* e em $x_0 = 6$ diremos que **f** é *contínua a esquerda*.

A *continuidade lateral* será discutida mais tarde, mas não custa adiantar, por exemplo, que no ponto $x_0 = 2$, a função **f** é considerada contínua *à direita*, pois $\lim\limits_{x \to 2+} f(x) = f(2) = 1$.

Os exemplos examinados ilustram bem o conceito de **função contínua em um ponto x_0**. Vamos estender esta noção a conjuntos mais amplos do que um único ponto.

> Uma função **f** é **contínua em um conjunto D** se é contínua em todo ponto de D.

5.º exemplo

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x - 5$. No exercício resolvido n.º 4.1, ficou provado que

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 3 = f(4)$$

Assim, podemos dizer que **f** *é contínua* em $x_0 = 4$.

Será **f** contínua nos demais pontos do seu domínio?

Para estabelecer este fato, devemos provar que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ou seja, que $\lim\limits_{x \to x_0} (2x - 5) = 2x_0 - 5$ *qualquer que seja* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Isto pode ser feito facilmente, como veremos no exercício resolvido n.º 5.1. Dizemos, então, que **f** *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Exercícios Resolvidos

5.1) Prove que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 5$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

Proposição: Devemos provar que $\lim\limits_{x \to x_0} (2x - 5) = 2x_0 - 5$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Investigação: A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se

$$|(2x - 5) - (2x_0 - 5)| < \varepsilon$$
$$2|x - x_0| < \varepsilon$$
$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Basta, então, tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(x_0)| = |(2x - 5) - (2x_0 - 5)| = 2|x - x_0| < 2\delta = \varepsilon$$

Assim, $\lim\limits_{x \to x_0} (2x - 5) = 2x_0 - 5$, isto é, **f** é contínua em todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

5.2) Prove que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k$ (função constante) é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

Proposição: Devemos provar que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = k$$

Investigação: A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se $|k - k| < \varepsilon$, isto é, $0 < \varepsilon$. Assim, tal condição se verifica independentemente do $\delta > 0$ escolhido.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja **qualquer** $\delta > 0$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(x_0)| = |k - k| = 0 < \varepsilon.$$

Assim, **f** é contínua em todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

5.3) Prove que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (função identidade) é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

Proposição: Devemos provar que $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

Investigação: A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se $|x - x_0| < \varepsilon$. Basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

Logo, **f** é contínua em todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

5.4) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ (**a** e **b** reais, $a \neq 0$). Prove que **f** é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

Proposição: Devemos provar que

$$\lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$$

Investigação: A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \varepsilon$$
$$|a| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$
$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Basta, então, tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(x_0)| = |(ax + b) - (ax_0 + b)| = |a| \cdot |x - x_0| < |a| \cdot \delta = |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

Assim, **f** é contínua em todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

5.5) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Prove que **f** é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

Proposição: Devemos provar que $\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

Investigação: A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se

$$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$$
$$|x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon.$$

Separemos a nossa investigação nos 3 casos:

1.º) $x_0 > 0$ 2.º) $x_0 < 0$ 3.º) $x_0 = 0$

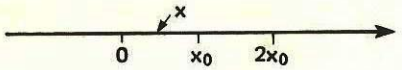
1.º caso: $x_0 > 0$

Restringindo **x** a uma vizinhança de x_0 com raio x_0, temos $|x - x_0| < x_0$, ou seja,

$$-x_0 < x - x_0 < x_0$$

donde

$$0 < x_0 < x + x_0 < 3x_0$$



e assim

$$|x + x_0| < 3x_0$$

Da condição $|x - x_0| \cdot 3x_0 < \varepsilon$ decorre que $|x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon$. Basta, então, tomar

$$\delta = \min\left\{x_0, \frac{\varepsilon}{3x_0}\right\}$$

Demonstração do 1.º caso: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{x_0, \frac{\varepsilon}{3x_0}\right\}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - x_0| < x_0$, donde $|x + x_0| < 3x_0$

2.º) $0 < |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3x_0}$, donde $|x - x_0| \cdot 3x_0 < \varepsilon$

e assim

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon$$

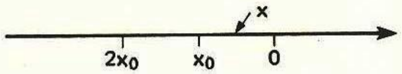
2.º caso: $x_0 < 0$

Restringindo **x** a uma vizinhança de x_0 com raio $|x_0|$, temos $|x - x_0| < |x_0|$, ou seja,

$$x_0 < x - x_0 < -x_0$$

donde

$$3x_0 < x + x_0 < x_0 < 0$$



e assim

$$|x + x_0| < 3|x_0|$$

Da condição $|x - x_0| \cdot 3|x_0| < \varepsilon$ decorrerá que $|x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon$. Basta, então, tomar

$$\delta = \min\left\{|x_0|, \frac{\varepsilon}{3|x_0|}\right\}$$

Demonstração do 2.º caso: Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta = \min\left\{|x_0|, \frac{\varepsilon}{3|x_0|}\right\}.$$ Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - x_0| < |x_0|$, donde $|x + x_0| < 3 \cdot |x_0|$

2.º) $0 < |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3|x_0|}$, donde $|x - x_0| \cdot 3|x_0| < \varepsilon$

Assim

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon$$

3.º caso: $x_0 = 0$

A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se

$$|x^2 - 0^2| < \varepsilon, \text{ donde } |x^2| < \varepsilon \text{ e } |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

Basta, então, tomar $\delta = \sqrt{\varepsilon}$.

Demonstração do 3.º caso: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Se $0 < |x - 0| < \delta$, então:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - 0^2| = |x^2| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

5.6) Seja $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Prove que **f** é contínua em $\mathbb{R}_+^*$, isto é, **f** é contínua para todo ponto $x_0 > 0$.

Solução

Proposição: Devemos provar que $\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$, para todo $x_0 > 0$.

Investigação: A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$$

ou ainda

$$\frac{|x - x_0|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} < \varepsilon$$
$$|x - x_0| < \varepsilon \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|$$

Como $x \geqslant 0$, tem-se $\sqrt{x} + \sqrt{x_0} \geqslant \sqrt{x_0}$. A condição $|x - x_0| < \varepsilon \cdot \sqrt{x_0}$ implicará que $|x - x_0| < \varepsilon \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|$. Devemos, então, tomar $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{x_0}$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon \cdot \sqrt{x_0}$. Então, se $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se

$$|x - x_0| < \varepsilon \cdot |\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|$$

Assim

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x_0}|} < \varepsilon$$

5.7) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Prove que **f** é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

Pelo exercício 5.4, as funções $g(x) = x$ e $h(x) = -x$ são contínuas em $\mathbb{R}$.
Para $x > 0$, tem-se $f = g$, logo **f** é contínua em $\mathbb{R}^+$.
Para $x < 0$, tem-se $f = h$, logo **f** é contínua em $\mathbb{R}^-$.
Resta provar que **f** é contínua em $x_0 = 0$.

Proposição: Devemos provar que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

Investigação: A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se $\big| |x| - |0| \big| < \varepsilon$, isto é, $|x| < \varepsilon$. Basta, então, tomar $\delta = \varepsilon$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x - 0| < \delta$, vem

$$|f(x) - f(x_0)| = \Big| |x| - |0| \Big| = |x| < \delta = \varepsilon$$

5.8) Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Prove que **f** é contínua em $\mathbb{R}^*$.

Solução

Proposição: Devemos provar que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$ para todo $x_0 \neq 0$.

Investigação: A condição $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ escreve-se

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$$

$$\frac{|x - x_0|}{|x| \cdot |x_0|} < \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \varepsilon \cdot |x| \cdot |x_0|$$

Separemos a nossa investigação nos 2 casos:

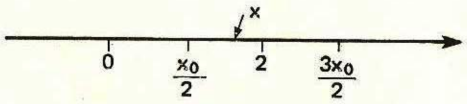
1.º) $x_0 > 0$ 2.º) $x_0 < 0$

1.º caso: $x_0 > 0$

Restringindo **x** a uma vizinhança de x_0 com raio $\frac{x_0}{2}$, temos $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, ou seja:

$$-\frac{x_0}{2} < x - x_0 < \frac{x_0}{2}$$

$$0 < \frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2}$$



donde,

$$|x| > \frac{x_0}{2}$$

Da condição $|x - x_0| < \varepsilon \cdot \frac{x_0}{2} \cdot |x_0|$ decorrerá que $|x - x_0| < \varepsilon \cdot |x| \cdot |x_0|$. Basta então, adotar

$$\delta = \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}\right\}$$

Demonstração do 1.º caso: Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta = \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}\right\}$$

Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então:

1.º) $0 < |x - x_0| < \frac{x_0}{2}$, donde $|x| > \frac{x_0}{2}$;

2.º) $0 < |x - x_0| < \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}$, donde $|x - x_0| < \varepsilon \cdot |x| \cdot |x_0|$.

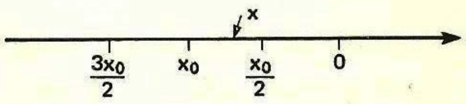
Assim, $|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x| \cdot |x_0|} < \varepsilon$.

2.º caso: $x_0 < 0$

Restringindo **x** a uma vizinhança de x_0 com raio $\frac{|x_0|}{2}$, temos $|x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$, ou seja:

$$\frac{x_0}{2} < x - x_0 < -\frac{x_0}{2}$$

$$\frac{3x_0}{2} < x < \frac{x_0}{2} < 0$$



donde

$$|x| > \frac{|x_0|}{2}$$

A condição $|x - x_0| < \varepsilon \cdot \frac{|x_0|}{2} \cdot |x_0|$ implicará que $|x - x_0| < \varepsilon \cdot |x| \cdot |x_0|$. Basta, então, tomar

$$\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}\right\}$$

Demonstração do 2.º caso: Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta = \min\left\{\frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}\right\}$$

Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - x_0| < \frac{|x_0|}{2}$, donde $|x| > \frac{|x_0|}{2}$

2.º) $0 < |x - x_0| < \frac{\varepsilon \cdot x_0^2}{2}$, donde $|x - x_0| < \varepsilon \cdot |x| \cdot |x_0|$

Assim, $|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x|\,|x_0|} < \varepsilon$.

Exercícios Propostos

Em cada um dos exercícios seguintes (de n.º 5.9 a 5.16), são dados uma função $f: A \to \mathbb{R}$ e um ponto $x_0 \in A$ (ou então um conjunto $D \subset A$). Pede-se provar que **f** é contínua em x_0 (ou em D) ou, caso contrário, justificar por que **f** é descontínua em x_0.

5.9) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$, $x_0 = 2$

5.10) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x$, $x_0 = 0$

5.11) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$, $x_0 = -1$

5.12) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x$, $D = \mathbb{R}$

5.13) $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $D = \mathbb{R} - \{2\}$

5.14) $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $D = \mathbb{R} - \{1\}$

5.15) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x_0 = 2$

5.16) $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $D =]1, +\infty[$

5.17) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = 5x^2 - 2x - 15$$

a) Calcule $f(x) - f(2)$ e fatore essa diferença.

b) Demonstre que, se $|x - 2| < \dfrac{7}{5}$, tem-se

$$|x| < \frac{17}{5} \text{ e } |f(x) - f(2)| \leqslant 25|x - 2|$$

c) Deduza que f é contínua no ponto $x_0 = 2$.

Capítulo

6

Cálculo de limites

6.1 — SUBSTITUIÇÃO DA FUNÇÃO DADA POR UMA FUNÇÃO CONTÍNUA (TEOREMA DA TROCA)

Como vimos, se uma função **g** é *contínua* em x_0, tem-se

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Assim, o cálculo do limite de uma função que é *contínua* no ponto considerado reduz-se a calcular o seu *valor numérico*. Por exemplo, sabendo que a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 1$ é contínua em $x_0 = 3$, escrevemos

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 5 \cdot 3 - 1 = 14$$

O cálculo do valor de um limite torna-se menos imediato se a função dada *não é contínua* no ponto considerado. O teorema que veremos a seguir cria um recurso potente para resolver um grande número de casos. A prova é imediata e fica para o leitor.

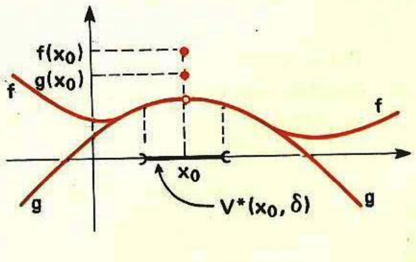
TEOREMA DA TROCA

Seja $V^*(x_0, \delta)$ uma vizinhança reduzida de x_0. Admitamos que f e g sejam funções tais que para todo $x \in V^*(x_0, \delta)$ se tenha $f(x) = g(x)$. Sendo assim,

$$\text{se } \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

então também $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Em outras palavras, se as funções **f** e **g** coincidem numa vizinhança reduzida de x_0, ao calcularmos o limite de $f(x)$ para $x \rightarrow x_0$, podemos **trocar f por g**, sem que isto altere o valor do limite. Note que em nada nos interessam os *valores numéricos* $f(x_0)$ e $g(x_0)$, que podem até nem ser definidos.



Evidentemente, o caso de maior interesse é aquele em que a função **g** é **contínua** em x_0. Neste caso, teremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

1.° exemplo

Seja calcular $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. Note que, para $x \neq 3$, temos

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3$$

Assim, estamos diante de *duas funções*:

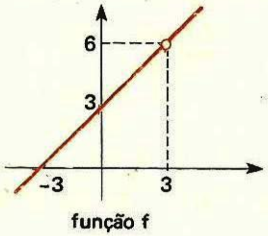
$f: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

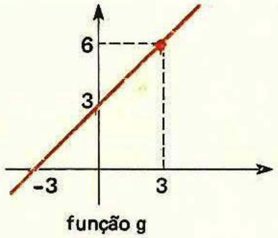
e

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = x + 3$



função f



função g

que coincidem em qualquer vizinhança reduzida de $x_0 = 3$, sendo que, além disso, **g** é *contínua* em $x_0 = 3$.

Então

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} (x + 3) = g(3) = 6$$

2.° exemplo

Calculemos $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1}$. Para $x \neq -1$, temos

$$\frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{x + 1} = 2x - 1$$

Então, $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} (2x - 1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -3.$

Pelos exemplos, vê-se que é de grande importância prática conhecermos **que funções são contínuas em seus domínios**. Nos próximos itens estudaremos este problema, bem como outras propriedades dos limites, que possibilitarão o cálculo com relativa facilidade. Através dos exercícios vistos no capítulo 5, já sabemos que as seguintes funções são **contínuas em todos os pontos de seus domínios**.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k$ (função constante)
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ (função identidade)
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ (a e b reais, $a \neq 0$)
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$
f) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$

Além disso, a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em todo ponto $x_0 > 0$. No ponto $x_0 = 0$, esta função é *contínua à direita*, como veremos depois.

6.2 – PROPRIEDADES DOS LIMITES

Consideremos as funções **f** e **g**, tais que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \quad e \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$$

Valem as propriedades seguintes:

PL1 – $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$

PL2 – $\lim_{x \to x_0} k \cdot f(x) = kL_1 \quad (k \in \mathbb{R})$

PL3 – $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$

PL4 – $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$

PL5 – $\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = L_1^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

PL6 – $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (\text{se } L_2 \neq 0)$

A propriedade PL1 pode ser estendida para o caso da soma de um número finito de funções, ou seja, se $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções tais que

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = L_1, \ \lim_{x \to x_0} f_2(x) = L_2, \ \ldots, \ \lim_{x \to x_0} f_n(x) = L_n$$

então

PL1' – $\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)] = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$

isto é, $\lim_{x \to x_0} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i$

A propriedade PL4 pode também ser estendida para o caso do produto de um número finito de funções.

$$PL4' - \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n$$

$$\text{isto é, } \lim_{x \to x_0} \prod_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} \lim_{x \to x_0} f_i(x) = \prod_{i=1}^{n} L_i$$

As duas extensões PL1' e PL4' podem ser demonstradas facilmente, por indução.

Demonstremos, como exemplo, a PL1, a PL2 e a PL4. A PL5 é uma situação particular da PL4', no caso em que as *n* funções são todas iguais à função f:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot f(x) \cdot \ldots \cdot f(x) = L_1 \cdot L_1 \cdot \ldots \cdot L_1 = L_1^n$$

As demais demonstrações serão vistas na forma dos exercícios.

Demonstração da PL1

Proposição: Devemos provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$$

sabendo que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$

Demonstração: Seja dado $\varepsilon > 0$. Podemos escrever, usando a desigualdade triangular

$$|[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| = |[f(x) - L_1] + [g(x) - L_2]| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|$$

Em correspondência ao número $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_1, \text{ então } |f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e existe também $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_2, \text{ então } |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, façamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e teremos que

se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| \leqslant |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Demonstração da PL2

Proposição: Devemos provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|kf(x) - kL_1| < \varepsilon$$

sabendo que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$.

Demonstração: Seja dado $\varepsilon > 0$. A condição $|kf(x) - kL_1| < \varepsilon$ escreve-se

$$|k| \cdot |f(x) - L_1| < \varepsilon$$

Se $k = 0$, para qualquer $\delta > 0$ teremos que

$$0 < |x - x_0| < \delta \text{ implica } |kf(x) - kL_1| < \varepsilon$$

pois teremos simplesmente $0 < \varepsilon$.

Se $k \neq 0$, a condição fica $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|k|}$

Em correspondência a $\frac{\varepsilon}{|k|} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ e assim, $|kf(x) - kL_1| < \varepsilon$.

Demonstração da PL4

Podemos escrever

$$f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - L_1 g(x) + L_1 g(x) - L_1 L_2 + L_1 L_2 =$$
$$= g(x) \cdot [f(x) - L_1] + L_1 \cdot [g(x) - L_2] + L_1 L_2$$

1.º) Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1$, temos $\lim_{x \to x_0} [f(x) - L_1] = 0$.
(veja o exercício 4.31.)

2.º) Como $\lim_{x \to x_0} g(x) = L_2$, resulta que

$$\lim_{x \to x_0} g(x) \cdot [f(x) - L_1] = 0 \text{ (pelo exercício 4.32)}$$

e também $\lim_{x \to x_0} [g(x) - L_2] = 0$ (pelo exercício 4.31).

3.º) Pela PL2, $\lim_{x \to x_0} L_1[g(x) - L_2] = L_1 \cdot 0 = 0$.

4.º) Temos ainda $\lim_{x \to x_0} L_1 L_2 = L_1 L_2$ (função constante).

Assim, aplicando também a PL1, vem:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) \cdot [f(x) - L_1] + \lim_{x \to x_0} L_1[g(x) - L_2] +$$
$$+ \lim_{x \to x_0} L_1 L_2 = 0 + 0 + L_1 L_2 = L_1 L_2$$

Exercícios Resolvidos

6.1) Calcule:

a) $\lim_{x\to 3} (7x - 5)$ b) $\lim_{x\to -2} x^2$ c) $\lim_{x\to -4} |x|$ d) $\lim_{x\to 5} \frac{1}{x}$ e) $\lim_{x\to 9} \sqrt{x}$

Solução

Todas as funções aqui colocadas são *contínuas* nos pontos considerados, bastando então calcular os respectivos *valores numéricos*. Obtemos:

a) 16 b) 4 c) 4 d) $\frac{1}{5}$ e) 3

6.2) a) Calcule $\lim_{x\to 2} x^3$.

b) Prove que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

a) Como $\lim_{x\to 2} x = 2$, aplicando a PL5, temos

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$$

b) Devemos provar que $\lim_{x\to x_0} x^3 = x_0^3$.

Mas $\lim_{x\to x_0} x = x_0$. Aplicando a PL5, temos

$$\lim_{x\to x_0} x^3 = x_0^3, \text{ para todo } x_0 \in \mathbb{R}$$

6.3) Prove que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

Trata-se de mais uma aplicação da PL5: como $\lim_{x\to x_0} x = x_0$, segue que, para $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n, \text{ qualquer que seja } x_0 \in \mathbb{R}$$

6.4) Prove a PL3, isto é, prove que se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$$

então, $\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2$.

Solução

Seja $h(x) = -g(x) = (-1)g(x)$. Pela PL2, tem-se (fazendo $k = -1$)

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} (-1)g(x) = (-1) \cdot L_2 = -L_2$$

Resta aplicar a PL1

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to x_0} [f(x) + h(x)] = L_1 + (-L_2) = L_1 - L_2$$

6.5) **FUNÇÃO POLINÔMIO**.

a) Calcule $\lim_{x\to 3} (5x^2 - 4x + 7)$.

b) Mostre que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

com **a**, **b** e **c** reais e $a \neq 0$, é contínua em $\mathbb{R}$.

c) Mostre que toda **função polinômio** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

de coeficientes reais e $a_0 \neq 0$, é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

a) $\lim_{x\to 3} (5x^2 - 4x + 7) = \lim_{x\to 3} 5x^2 - 4 \lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 7 = 5 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 7 = 40$

b) $\lim_{x\to x_0} (ax^2 + bx + c) = \lim_{x\to x_0} ax^2 + \lim_{x\to x_0} bx + \lim_{x\to x_0} c = ax_0^2 + bx_0 + c$

c) Trata-se de uma aplicação da PL1' e do exercício 6.3. Temos

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$$

Assim, $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \lim_{x\to x_0} a_i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \lim_{x\to x_0} x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i x_0^{n-i} = f(x_0)$

6.6) Calcule $\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$.

Solução

Para $x \neq -1$, temos

$$\frac{x^3+1}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = x^2 - x + 1$$

Então, $\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x^2 - x + 1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3.$

Foi usado aqui o fato de que toda função polinômio é contínua em $\mathbb{R}$. Foi usado também o Teorema da Troca.

6.7) Calcule $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}$.

Solução

Temos, para $x \neq 1$

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \frac{(x^2 + 1)(x - 1)}{x - 1} = x^2 + 1$$

Então, $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} (x^2 + 1) = 2.$

6.8) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}, & \text{para } x \neq 4 \\ a, & \text{para } x = 4 \end{cases}$$

Determine **a**, para que **f** seja contínua em $x_0 = 4$.

Solução

Para que f seja contínua em $x_0 = 4$, devemos ter $\lim_{x \to 4} f(x) = f(4) = a$.

Assim

$$a = \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 4) = 8$$

6.9) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & \text{para } x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \\ a & , \text{para } x = -1 \\ b & , \text{para } x = 1 \end{cases}$$

Determine **a** e **b**, para que f seja contínua em $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$.

Solução

Temos, para $x \neq -1$ e $x \neq 1$

$$\frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$$

Devemos ter

$$a = \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 + 1) = 2$$

e

$$b = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 1) = 2$$

6.10) Prove que se $\lim_{x \to x_0} g(x) = L \neq 0$, então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L}$$

Solução

Investigação: A condição $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon$ escreve-se $\frac{|g(x) - L|}{|g(x)| \cdot |L|} < \varepsilon$

ou ainda

$$|g(x) - L| < \varepsilon \cdot |g(x)| \cdot |L|$$

No exercício 4.34, ficou provado que existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, então

$$|g(x)| > \frac{|L|}{2}$$

A condição $|g(x) - L| < \varepsilon \cdot \frac{|L|}{2} \cdot |L|$ implicará que

$$|g(x) - L| < \varepsilon \cdot |g(x)| \cdot |L|$$

Demonstração

Seja dado $\varepsilon > 0$. Em correspondência ao número $\varepsilon' = \varepsilon \cdot \frac{|L|}{2} \cdot |L| > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_2, \text{ então } |g(x) - L| < \varepsilon \cdot \frac{|L|}{2} \cdot |L|$$

Por outro lado, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_1, \text{ então } |g(x)| > \frac{|L|}{2}$$

Tomemos, então, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e teremos que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então } |g(x) - L| < \varepsilon \cdot |g(x)| \cdot |L|$$

Assim

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L} \right| = \frac{|g(x) - L|}{|g(x)| \cdot |L|} < \varepsilon$$

6.11) Prove a PL6, isto é, prove que

$$\text{se } \lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = L_2 \neq 0$$

então $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.

Solução

Basta aplicar o exercício anterior e a PL4, observando que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$. Assim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = L_1 \cdot \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

6.12) **FUNÇÃO RACIONAL.**

a) Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^2 + 1}$.

b) Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$.

c) Mostre que a função $f: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}$$

é contínua em todo ponto $x_0 \neq 2$.

d) **Definição**: Chama-se **função racional** toda função $f: A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são *polinômios*. O domínio A é o conjunto de todos os números reais tais que $Q(x) \neq 0$.

Problema: Mostre que toda função racional é contínua em seu domínio.

Solução

a) $\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \to 2} (3x^2 + 4x - 1)}{\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)} = \frac{3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1}{2^2 + 1} = \frac{19}{5}$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} =$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{\lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1)}{\lim_{x \to 1} (x + 1)} = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

c) Sendo $x_0 \neq 2$, temos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + x + 1}{x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} (x^2 + x + 1)}{\lim\limits_{x \to x_0} (x - 2)} = \frac{x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 - 2} = f(x_0)$$

d) Se x_0 é um número para o qual $Q(x_0) \neq 0$, temos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

6.13) Calcule $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

Solução

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1) - 1} = -\frac{3}{2}$$

6.14) Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$.

Solução

Temos, para $x \neq 1$

$$\frac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x + 1)(x^2 + 1)}{x^2 + x + 1}$$

Então, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x + 1)(x^2 + 1)}{x^2 + x + 1} = \dfrac{(1 + 1)(1^2 + 1)}{1^2 + 1 + 1} = \dfrac{4}{3}$

6.15) Seja a função $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}, & \text{para } x \neq 1 \\ a & \text{, para } x = 1 \end{cases}$$

Determine **a**, para que **f** seja contínua em $x_0 = 1$.

Solução

Temos, para $x \neq 1$ e $x \neq -1$

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

Devemos ter

$$a = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{3}{2}$$

6.16) Sendo $a > 0$, calcule $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a}$.

Solução

Temos, para $x \neq a$

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{x - a}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

Assim, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$ $\quad (a > 0)$

6.17) Calcule $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 - x^2}{1 - |x|}$.

Solução

Como só interessam valores de **x** próximos de -1, podemos supor $x < 0$, logo $|x| = -x$. Assim, para $x \neq -1$ temos

$$\frac{1 - x^2}{1 - |x|} = \frac{1 - x^2}{1 - (-x)} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 + x} = 1 - x$$

Assim $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 - x^2}{1 - |x|} = \lim\limits_{x \to -1} (1 - x) = 1 - (-1) = 2.$

6.18) Prove que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Solução

Proposição: Devemos provar que $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x_0}$, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon$.

Investigação: A condição $|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon$ escreve-se

$$\frac{|x - x_0|}{|\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}|} < \varepsilon$$

ou ainda

$$|x - x_0| < \varepsilon \cdot |\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}|$$

Aqui, foi aplicada a identidade

$$y^3 - y_0^3 = (y - y_0)(y^2 + yy_0 + y_0^2)$$

onde, fazendo $y = \sqrt[3]{x}$ e $y_0 = \sqrt[3]{x_0}$, obtemos

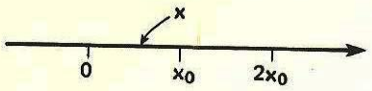
$$x - x_0 = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2})$$

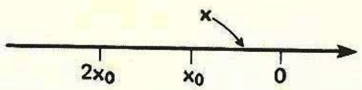
Vamos separar nossa investigação nos 2 casos:

1.º) $x_0 \neq 0$ $\qquad$ 2.º) $x_0 = 0$

1.° caso: $x_0 \neq 0$

Restringindo **x** a uma vizinhança de x_0 com raio $|x_0|$, temos $|x - x_0| < |x_0|$ donde se obtém





$$0 < x < 2x_0 \quad (\text{se } x_0 > 0)$$

ou

$$2x_0 < x < 0 \quad (\text{se } x_0 < 0)$$

Mas, em ambas as situações temos

$$x^2 > 0 \quad \text{e} \quad xx_0 > 0$$

donde

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2} > \sqrt[3]{x_0^2}$$

Da condição $|x - x_0| < \varepsilon \cdot \sqrt[3]{x_0^2}$ decorrerá que

$$|x - x_0| < \varepsilon \cdot |\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}|$$

Basta, então, tomar $\delta = \min\{|x_0|, \varepsilon \cdot \sqrt[3]{x_0^2}\}$.

Demonstração do 1.° caso: Dado $\varepsilon > 0$, tomemos

$$\delta = \min\{|x_0|, \varepsilon \cdot \sqrt[3]{x_0^2}\}$$

Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então:

1.°) $0 < |x - x_0| < |x_0|$, donde $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2} > \sqrt[3]{x_0^2}$,
2.°) $0 < |x - x_0| < \varepsilon \cdot \sqrt[3]{x_0^2}$, donde

$$|x - x_0| < \varepsilon \cdot |\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}|$$

Assim

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xx_0} + \sqrt[3]{x_0^2}|} < \varepsilon$$

2.° caso: $x_0 = 0$

Neste caso, a condição

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon \text{ escreve-se } |\sqrt[3]{x}| < \varepsilon, \text{ ou } |x| < \varepsilon^3.$$

Basta, portanto, tomar $\delta = \varepsilon^3$.

Demonstração do 2.° caso: Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon^3$.

Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|x| < \varepsilon^3$, donde

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}| = |\sqrt[3]{x}| < \sqrt[3]{\varepsilon^3} = \varepsilon$$

6.19) Prove que $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, onde **n** é um número natural positivo, é contínua em todo ponto $x_0 > 0$ (temos $A = \mathbb{R}$ se **n** é ímpar e $A = \mathbb{R}_+$ se n é par).

Solução

Proposição: Devemos provar que $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$, para $n \in \mathbb{N}^*$ e $x_0 > 0$, ou seja, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}| < \varepsilon$$

Investigação: Lembremos a identidade

$$y^n - y_0^n = (y - y_0)(y^{n-1} + y^{n-2} \cdot y_0 + y^{n-3} \cdot y_0^2 + \ldots + y \cdot y_0^{n-2} + y_0^{n-1})$$

isto é,

$$y^n - y_0^n = (y - y_0) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y^{n-i-1} \cdot y_0^i$$

Fazendo $y = \sqrt[n]{x}$ e $y_0 = \sqrt[n]{x_0}$, obtemos

$$x - x_0 = (\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-i-1} \cdot (\sqrt[n]{x_0})^i$$

Restringindo **x** a uma vizinhança de x_0 com raio x_0, temos $x > 0$, e então

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-i-1} \cdot (\sqrt[n]{x_0})^i > (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}$$

Da condição $|x - x_0| < \varepsilon \cdot (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}$ decorrerá que

$$|x - x_0| < \varepsilon \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-i-1} \cdot (\sqrt[n]{x_0})^i$$

Devemos, então, tomar $\delta = \min\{x_0, \varepsilon \cdot (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}\}$

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, seja

$$\delta = \min\{x_0, \varepsilon \cdot (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}\}$$

Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

1.°) $0 < |x - x_0| < x_0$, donde

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-i-1} \cdot (\sqrt[n]{x_0})^i > (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}$$

2.°) $0 < |x - x_0| < \varepsilon \cdot (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}$, donde

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\left|\sum_{i=1}^{n-1} (\sqrt[n]{x})^{n-i-1} \cdot (\sqrt[n]{x_0})^i\right|} < \frac{\varepsilon \cdot (\sqrt[n]{x_0})^{n-1}}{(\sqrt[n]{x_0})^{n-1}} = \varepsilon$$

Nota: De modo análogo podemos provar que a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, *com n ímpar*, é contínua em todo ponto $x_0 \leqslant 0$. Fica, assim, estabelecido que:

1.°) toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, com **n** *ímpar*, é contínua em $\mathbb{R}$;

2.°) toda função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, com **n** *par*, é contínua em $\mathbb{R}_+^*$, isto é, para todo $x_0 > 0$. Neste último caso, a continuidade no ponto $x_0 = 0$ é *lateral* e será estudada posteriormente.

Exercícios Propostos

6.20) Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to -2} (3x - 7)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} (5x^2 - 2x + 1)$

c) $\lim\limits_{x \to 4} (3x + \sqrt{x})$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{|x| - x}{2}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

f) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{|x| + 1}{\sqrt{x} + 1}$

g) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

h) $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

6.21) Calcule:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$

b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

c) $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^3 + x^2 + 4x + 2}{2x + 1}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{(x + 2)^3 - 8}{x}$

f) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}\right)$

6.22) Calcule:

a) $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 25}$

b) $\lim_{x \to -3} \frac{x^4 - 81}{x^2 - 9}$

c) $\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$

d) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - 1}$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - x - 1}$

f) $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 3x + 1}{|2x^3 + x^2 + 2x + 1|}$

g) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 1}$

h) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$

i) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 8}$

j) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 1}$

k) $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 8x + 7}$

6.23) Calcule $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4}$.

6.24) Calcule:

a) $\lim_{x \to 1} \frac{|x| - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \to -1} \frac{|x| - 1}{x + 1}$

c) $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{|x| - 1}$

6.25) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x}}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ k, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Determine **k**, para que **f** seja contínua no ponto $x_0 = 1$.

6.26) Calcule **a** e **b**, sendo $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - ax + 8}{x^2 - (2 + b)x + 2b} = \frac{1}{5}$.

6.27) Determine um polinômio f(x), de grau 3, sabendo que

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x)}{x + 1} = 21 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 6.$$

6.3 — PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

Sejam **f** e **g** duas funções e **k** um número real.
Se **f** e **g** são contínuas em um ponto x_0, são também contínuas em x_0 as funções

$$kf, \; f + g, \; f - g \text{ e } f \cdot g$$

e, ainda, desde que seja $g(x_0) \neq 0$, é também contínua em x_0 a função $\frac{f}{g}$.

Provemos, como exemplo, o caso da função f · g. Os demais casos são provados de modo análogo e ficam para o leitor.

Demonstração do caso f · g

Proposição: Devemos provar que

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = (fg)(x_0)$$

Demonstração: Se **f** e **g** são contínuas em x_0, temos $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Assim, aplicando a PL4, tem-se

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) =$$
$$= f(x_0) \cdot g(x_0) = (fg)(x_0)$$

6.4 — FUNÇÃO COMPOSTA

A propriedade seguinte refere-se ao *limite da função composta.*

PL7 — Sejam **f** e **g** funções tais que

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = z_0 \quad \text{e} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = L$$

(isto é, **f é contínua em z_0**). Sendo assim,

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \to x_0} g(x)] = f(z_0) = L$$

1.º exemplo

Sabemos que $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em $\mathbb{R}_+^*$ e que, sendo

$$g: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

tem-se $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 6$.

Considere a **função composta**, dada por

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}}$$

Se desejamos calcular

$$\lim_{x \to 3} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}}$$

podemos aplicar a PL7, escrevendo

$$\lim_{x \to 3} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 3} f[g(x)] = f[\lim_{x \to 3} g(x)] = f(6) = \sqrt{6}$$

Note que **f** é **contínua no ponto 6**, como exige a hipótese da PL7.

Na prática, escrevemos simplesmente

$$\lim_{x \to 3} \sqrt{\frac{x^2 - 9}{x - 3}} = \sqrt{\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}} = \sqrt{\lim_{x \to 3} (x + 3)} = \sqrt{6}$$

2.º exemplo

Seja calcular $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}\right)^3$. Como, para $x \neq 1$,

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

temos $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$.

Assim, $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}\right)^3 = \left(\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Ao resolver o problema desta maneira, estamos considerando, embora sem escrever, as funções **g** e **f** dadas por

$$g(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \quad \text{e} \quad f(x) = x^3$$

e calculando $\lim\limits_{x \to 1} (f \circ g)(x)$.

Note que **f** é contínua no ponto $\frac{1}{2}$, como exige a hipótese da PL7.

3.º exemplo

É exatamente a PL7 que nos permite escrever

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{5 + x} = \sqrt{\lim_{x \to 4} (5 + x)} = \sqrt{9} = 3$$

e $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{5 - x} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 4} (5 - x)} = \sqrt{1} = 1$.

Assim, ao calcular $\lim\limits_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$, podemos proceder do seguinte modo:

escrevemos:

$$\frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}} = \frac{(3 - \sqrt{5 + x})(3 + \sqrt{5 + x})(1 + \sqrt{5 - x})}{(1 - \sqrt{5 - x})(1 + \sqrt{5 - x})(3 + \sqrt{5 + x})} =$$

$$= \frac{[9 - (5 + x)](1 + \sqrt{5 - x})}{[1 - (5 - x)](3 + \sqrt{5 + x})} = \frac{(4 - x)(1 + \sqrt{5 - x})}{(x - 4)(3 + \sqrt{5 + x})} = -\frac{1 + \sqrt{5 - x}}{3 + \sqrt{5 + x}}$$

e, então,

$$\lim_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}} = \lim_{x \to 4} \left[-\frac{1 + \sqrt{5 - x}}{3 + \sqrt{5 + x}}\right] =$$

$$= -\frac{1 + \sqrt{5 - 4}}{3 + \sqrt{5 + 4}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Demonstremos, agora, a PL7.

Proposição: Devemos provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|(f \circ g)(x) - L| < \varepsilon$, sabendo que:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = z_0 \quad \text{e} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = L$$

Demonstração

1.º) Sendo $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta_1$, tem-se

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

2.º) Além disso, sendo $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = z_0$, em correspondência ao número $\varepsilon' = \delta_1 > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se $|g(x) - z_0| < \delta_1$.

3.º) Assim, dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se

$$|g(x) - z_0| < \delta_1, \text{ donde } |f[g(x)] - f(z_0)| < \varepsilon, \text{ ou}$$

seja, $|(f \circ g)(x) - L| < \varepsilon$.

A propriedade seguinte refere-se à *continuidade da função composta*. Se, na hipótese da PL7, acrescentarmos a condição de que a função **g** também seja contínua em x_0, teremos

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = z_0$$

e então,

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = f[\lim_{x \to x_0} g(x)] = f[g(x_0)] = (f \circ g)(x_0)$$

que significa que a função composta $f \circ g$ também é contínua em x_0.

Se **g** é uma função contínua em x_0, com

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = z_0$$

e **f** é uma função contínua em z_0, com

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) = f[g(x_0)]$$

então $f \circ g$ é também contínua em x_0 e se tem

$$\lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = f[g(x_0)]$$

Exercícios Resolvidos

6.28) Seja **g** uma função tal que

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

e consideremos a função $h: A \to \mathbb{R}$, dada por

$$h(x) = \sqrt[n]{g(x)} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

(Vamos supor que, *no caso de ser n par*, o domínio A se restringe aos valores de **x** para os quais se tem $g(x) \geq 0$ e ainda $L > 0$). Mostre que

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Solução

Trata-se de uma aplicação da PL7, no caso em que **f** é dada por $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Já vimos, no exercício 6.19, que a função **f**, com **n** ímpar, é contínua em $\mathbb{R}$ e, com **n** par, é contínua em $\mathbb{R}_+^*$. Como $h = f \circ g$, temos

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \sqrt[n]{L}$$

6.29) Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.

Solução

Temos

$$\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{(x^2+5)-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6.30) Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+h}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Solução

Temos

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+h})(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}{h\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} =$$

$$= \frac{x-(x+h)}{h\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} = \frac{-1}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})}$$

Assim

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{\sqrt{x+h}\cdot\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x+h})} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{x+0}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x+0})} = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

6.31) Sendo $\lim_{x \to 1} \dfrac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1} = \sqrt{2}$, calcule **a** e **b**.

Solução

Temos

$$\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1} = \frac{(a\sqrt{x+1}-b)(a\sqrt{x+1}+b)}{(x-1)(a\sqrt{x+1}+b)} = \frac{a^2(x+1)-b^2}{(x-1)(a\sqrt{x+1}+b)}$$

Vê-se, então, que o polinômio $a^2(x+1) - b^2$ deve ser *divisível* por $x - 1$, donde se obtém que

$$a^2(1+1) - b^2 = 0, \quad \text{ou} \quad b^2 = 2a^2 \quad (1)$$

Assim,

$$\frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1} = \frac{a^2(x+1)-2a^2}{(x-1)(a\sqrt{x+1}+b)} = \frac{a^2}{a\sqrt{x+1}+b}$$

Como $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{a^2}{a\sqrt{x+1}+b} = \sqrt{2}$, tem-se

$$\frac{a^2}{a\sqrt{1+1}+b} = \sqrt{2}$$

ou seja, $\dfrac{a^2}{a\sqrt{2}+b} = \sqrt{2}$.

Note que $b \neq -a\sqrt{2}$, logo, de (1), tiramos $b = a\sqrt{2}$ e então

$$\frac{a^2}{a\sqrt{2}+a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

donde $a = 4$ e $b = 4\sqrt{2}$.

Exercícios Propostos

6.32) Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$

g) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ $(x > 0)$

h) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2+2x-4}}{x^2-3x+2}$

j) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3+1}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$

l) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{x}-2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{x+19}-3}$

6.33) Calcule $\lim\limits_{x\to t} \dfrac{x(t-1)-t(x-1)}{x-t}$.

6.34) Sendo $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{5}}{x} = b$, determine **a** e **b**.

6.35) Se $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(a+1)x+b}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+3}} = 4$, calcule **a** e **b**.

6.36) Se $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, calcule

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

6.37) Se $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x^2+a}-x+b}{(x-1)^2} = c$, calcule **a**, **b** e **c**.

6.38) Dadas as retas de equações

$$\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ (2+c)x + 5c^2y = 1 \end{cases}$$

determine a "posição limite" do ponto de intersecção dessas retas, quando $c \to 1$.

6.39) Para cada função dada abaixo, calcule

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}:$$

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

c) $f(x) = \sqrt{x}$, $(x_0 > 0)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(x_0 \neq 0)$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $(x_0 \neq 0)$

f) $f(x) = |x|$ $(x_0 \neq 0)$

6.40) Seja $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Calcule $A = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

b) Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} - A\right]$

onde A é o valor calculado no item anterior.

Capítulo

7

Limites e continuidade laterais

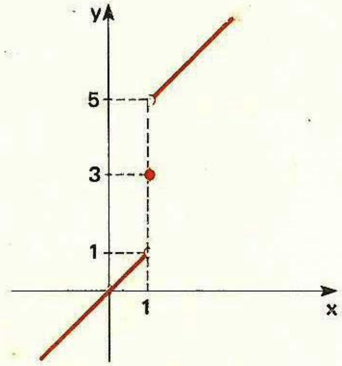
7.1 — EXEMPLOS INICIAIS

Neste capítulo, estenderemos a definição básica de limite aos casos especiais de *limites laterais* (*à esquerda e à direita*). Estas idéias já tinham sido abordadas nos exemplos iniciais do capítulo 4, que retomamos agora.

1.º exemplo

Seja a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \\ x + 5, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



cujo gráfico se representa ao lado. Já havíamos observado que:

a) $g(1) = 3$

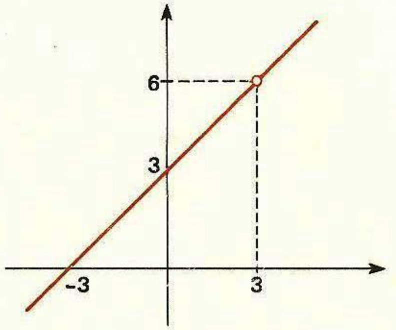
b) *não existe* $\lim_{x \to 1} g(x)$

c) $\lim_{x \to 1-} g(x) = 1$ e $\lim_{x \to 1+} g(x) = 5$

2.º exemplo

Dada a função $h: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$



cujo gráfico se representa ao lado, temos:

a) não se define $h(3)$

b) $\lim_{x \to 3} h(x) = 6$

c) $\lim_{x \to 3-} h(x) = 6$ e $\lim_{x \to 3+} h(x) = 6$

Veja que, neste caso, *ambos os limites laterais existem e têm o mesmo valor*, que é o próprio valor do limite para $x \to 3$.

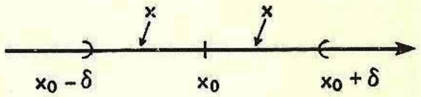
Desejamos tornar mais precisas estas idéias, utilizando definições formais, como fizemos anteriormente com a noção de limite.

7.2 — LIMITES LATERAIS

Quando escrevemos $x \to x_0 -$ (*x tende a* x_0 *pela esquerda*), pretendemos que a variável **x** somente assuma valores **menores do que** $\mathbf{x_0}$, à medida em que eles se aproximam de x_0. Na definição de limite, quando escrevemos

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

ou seja, $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, com $x \neq x_0$, este intervalo inclui valores de **x** situados de ambos os lados de x_0. Para garantir que **x** permaneça *à esquerda* de x_0, devemos, em vez disso, considerar o intervalo



$$x_0 - \delta < x < x_0$$

Assim também, o intervalo

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$

é o que se deve considerar, para garantir que **x** permaneça *à direita* de x_0.

Vamos, agora, estabelecer formalmente as definições de limites laterais.

Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função e seja x_0 um número real. O número x_0 pode pertencer ou não ao domínio de f, mas suporemos que existe um intervalo aberto $]a, x_0[$, à esquerda de x_0, que está inteiramente contido em A, para podermos definir o limite quando $x \to x_0 -$. Para o caso do limite quando $x \to x_0 +$, suporemos que existe um intervalo aberto $]x_0, b[$, à direita de x_0, também inteiramente contido em A.

1.º) Dizemos que **a função f tende ao limite L quando x tende a $\mathbf{x_0}$ pela esquerda** se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

se $x_0 - \delta < x < x_0$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$

Indicamos $\lim_{x \to x_0-} f(x) = L$.

2.º) Dizemos que **a função f tende ao limite L quando x tende a $\mathbf{x_0}$ pela direita** se, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

se $x_0 < x < x_0 + \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Indicamos $\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$.

7.3 – CONTINUIDADE LATERAL

Utilizando os limites laterais, podemos estender a noção de continuidade de uma função, falando em *função contínua à esquerda* e *função contínua à direita.*

Dizemos que **f** é **contínua à esquerda** em x_0, se

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = f(x_0)$$

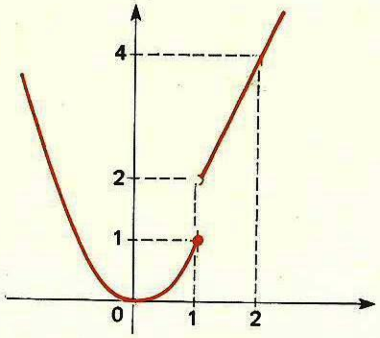
e que **f** é **contínua à direita** em x_0, se

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = f(x_0)$$

Seja, por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \leqslant 1 \\ 2x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

cujo gráfico se representa ao lado. Temos:



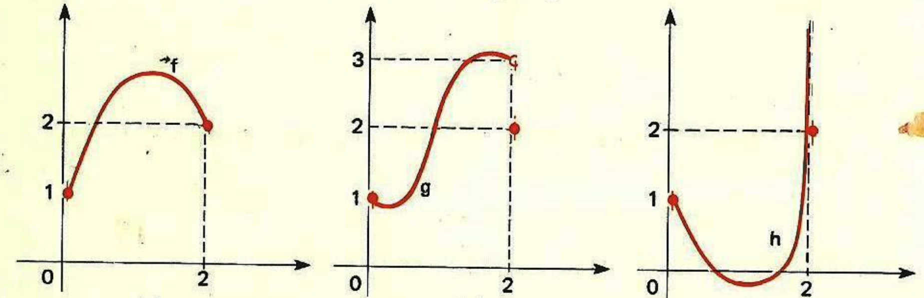
a) $f(1) = 1$ c) $\lim_{x \to 1+} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \to 1-} f(x) = 1$ d) *não existe* $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Como $\lim_{x \to 1-} f(x) = 1 = f(1)$, dizemos que **f** é **contínua à esquerda no ponto** $x_0 = 1$.

7.4 – FUNÇÃO CONTÍNUA EM UM INTERVALO FECHADO

A noção de continuidade lateral aparece principalmente com relação a extremidades de intervalos. As figuras abaixo representam os gráficos de funções definidas no **intervalo fechado** $A = [0; 2]$.



(a) (b) (c)

Para a função **f**, temos

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1 = f(0) \text{ e } \lim_{x \to 2-} f(x) = 2 = f(2)$$

Assim, **f** é *contínua à direita* em $x_0 = 0$ e *contínua à esquerda* em $x_0 = 2$.
Para a função **g**, temos

$$\lim_{x \to 0+} g(x) = 1 = g(0) \text{ e } \lim_{x \to 2-} g(x) = 3 \neq g(2) = 2$$

Assim, **g** é *contínua à direita* em $x_0 = 0$, mas *descontínua* em $x_0 = 2$.
Para a função **h**, temos

$$\lim_{x \to 0+} h(x) = 1 = h(0) \text{ e } \lim_{x \to 2-} h(x) = +\infty \neq g(2) = 2$$

Assim, **h** é *contínua à direita* em $x_0 = 0$, mas *descontínua* em $x_0 = 2$.

Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função e seja $[a, b]$ um intervalo fechado contido em A. Dizemos que **f** é **contínua no intervalo fechado** $[a, b]$ se as três condições abaixo se verificam:

1.ª) **f** é contínua no intervalo aberto $]a, b[$
2.ª) **f** é contínua à direita em $x_0 = a$
3.ª) **f** é contínua à esquerda em $x_0 = b$

No exemplo anterior, a função **f**, representada pelo gráfico (a), é contínua no intervalo fechado $[0, 2]$.

Observação: As propriedades de PL1 até PL7, vistas no capítulo 6, são também válidas para os limites laterais. Assim também, podemos enunciar, para funções contínuas à direita ou à esquerda, propriedades análogas às que vimos naquele capítulo, para funções contínuas. As demonstrações correspondentes, que seriam fastidiosas repetições das que já fizemos, serão omitidas aqui.

Exercícios Resolvidos

7.1) Prove que a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, é contínua à direita no ponto $x_0 = 0$.

Solução

Proposição: Devemos provar que $\lim_{x \to 0+} \sqrt{x} = 0$, isto é, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < x < \delta, \text{ então } |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

Demonstração: A condição $|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$ escreve-se $0 < x < \varepsilon^2$. Basta, portanto, tomar $\delta = \varepsilon^2$ e teremos que

$$\text{se } 0 < x < \delta, \text{ então } |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

7.2) Prove o seguinte teorema:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ se, e somente se, existem ambos os limites laterais e, além disso,

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = L$$

Solução

Devemos provar **duas afirmações**:

1.ª) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = L$.

2.ª) Se $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Demonstração da 1.ª: Sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0,$$

então $| f(x) - L | < \varepsilon$.

Esta afirmação acarreta duas outras:

a) se $x_0 - \delta < x < x_0$, então $| f(x) - L | < \varepsilon$, ou seja,

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = L$$

b) se $x_0 < x < x_0 + \delta$, então $| f(x) - L | < \varepsilon$, ou seja,

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = L$$

Assim

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = L$$

Demonstração da 2.ª: Seja dado $\varepsilon > 0$.

Sendo $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{se } x_0 - \delta_1 < x < x_0, \text{ então } | f(x) - L | < \varepsilon$$

Sendo $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = L$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se } x_0 < x < x_0 + \delta_2, \text{ então } | f(x) - L | < \varepsilon$$

Tomando-se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, as duas condições acima se verificam para

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \text{ com } x \neq x_0$$

Assim

$$\text{se } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \text{ e } x \neq x_0, \text{ então } | f(x) - L | < \varepsilon,$$

donde

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

7.3) Dada a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, calcule os limites laterais para $x_0 = 0$.

Solução

Se $x \to 0-$, então $x < 0$, logo $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{-x}{x} = -1$.

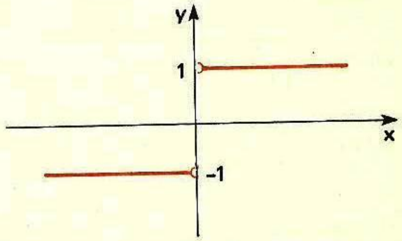
Assim

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0-} (-1) = -1$$

Se $x \to 0+$, então $x > 0$, logo $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{x} = 1$.

Assim

$$\lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0+} (1) = 1$$



Note que, sendo

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} \neq \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x}$$

não existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

7.4) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, calcule os limites laterais para $x_0 = 2$.

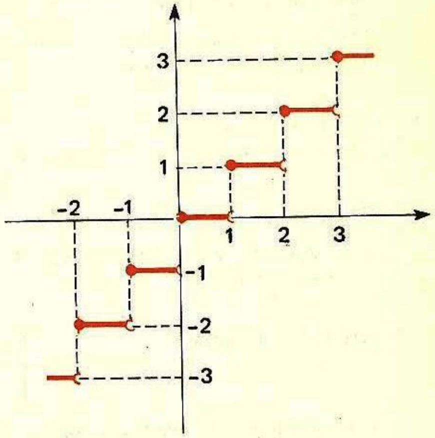
Solução

Se $x \to 2-$, então, nas proximidades de 2, temos $1 \leqslant x < 2$, donde $[x] = 1$ e assim

$$\lim_{x \to 2-} [x] = \lim_{x \to 2-} (1) = 1$$

Se $x \to 2+$, então, nas proximidades de 2, temos $2 < x < 3$, donde $[x] = 2$ e assim

$$\lim_{x \to 2+} [x] = \lim_{x \to 2+} (2) = 2$$



Note que, sendo

$$\lim_{x \to 2-} [x] \neq \lim_{x \to 2+} [x]$$

não existe $\lim\limits_{x \to 2} [x]$.

Esta função é *contínua à direita* no ponto $x_0 = 2$.

Exercícios Propostos

Para cada função dada abaixo (exercícios de n.º 7.5 a 7.20), calcule:

1.º) $\lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ 2.º) $\lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ 3.º) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

no ponto x_0 indicado.

7.5) $f(x) = [x]$, $x_0 = -2$

7.6) $f(x) = [x]$, $x_0 = n$ $(n \in \mathbb{Z})$

7.7) $f(x) = x - [x]$, $x_0 = 3$

7.8) $f(x) = x + [x]$, $x_0 = 3$

7.9) $f(x) = x - [x],\ x_0 = n \quad (n \in \mathbb{Z})$

7.10) $f(x) = x + [x],\ x_0 = n \quad (n \in \mathbb{Z})$

7.11) $f(x) = \dfrac{x - 2}{|x - 2|},\ x_0 = 2$

7.12) $f(x) = \dfrac{x + 1}{|x + 1|},\ x_0 = -1$

7.13) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{|x - 2|},\ x_0 = 2$

7.14) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{|x - 1|},\ x_0 = 1$

7.15) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{|x - 2|},\ x_0 = 2$

7.16) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{|x - 3|},\ x_0 = 3$

7.17) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|}{x - 2},\ x_0 = 2$

7.18) $f(x) = \dfrac{|2x^2 - 3x - 2|}{x - 2},\ x_0 = 2$

7.19) $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{|x^2 - 4|},\ x_0 = 2$

7.20) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{|x^2 - 1|},\ x_0 = -1$

7.21) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{para } x < 2 \\ 2, & \text{para } x = 2 \\ 2x + a, & \text{para } x > 2 \end{cases}$$

Determine o valor de **a**:

1.°) para que **f** seja contínua à direita em $x_0 = 2$;
2.°) para que exista $\lim_{x \to 2} f(x)$.

7.22) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x < 1 \\ 0, & \text{para } x = 1 \\ 1 - mx, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

Determine o valor de **m** para que:

1.°) **f** seja contínua à direita em $x_0 = 1$;
2.°) exista $\lim_{x \to 1} f(x)$.

7.23) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + a, & \text{para } x < 0 \\ 3, & \text{para } x = 0 \\ 1 - bx, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

a) determine **a** para que **f** seja contínua à esquerda em $x_0 = 0$;
b) determine **a** para que exista $\lim_{x \to 0} f(x)$;
c) determine **b** para que **f** seja contínua à direita em $x_0 = 0$;
d) pode **f** ser contínua no ponto $x_0 = 0$?

7.24) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot [x]$. Estude a continuidade de **f** no ponto:

a) $x_0 = 0$.
b) $x_0 = 1$.

7.25) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} \cdot \sqrt{|x|}, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Estude a continuidade de **f** no ponto $x_0 = 0$.

Capítulo **8**

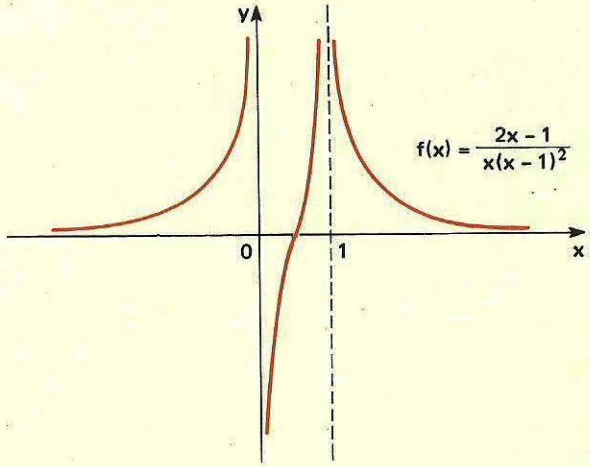
Infinito

8.1 — LIMITES INFINITOS

Podemos estender a noção de limite aos casos em que a variável **x** ou a função f(x) (ou ambos) tomam valores absolutos arbitrariamente grandes. Já havíamos feito referência a estes limites nos exemplos iniciais do capítulo 4. O gráfico abaixo ilustra alguns desses casos. Para a função ali representada, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 1-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$



Vamos estabelecer, primeiramente, uma definição formal para o caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Esta igualdade pode ser lida assim: "f(x) *torna-se cada vez maior* quando **x** tende a x_0". Entretanto, necessitamos substituir as palavras *torna-se cada vez maior* por uma linguagem mais precisa.

Suponha que N é um número positivo. Se f(x) torna-se cada vez maior, quando $x \to x_0$, é claro que f(x) será **maior do que** N para valores de **x** próximos de x_0. Em outras palavras, é possível encontrar uma vizinhança de x_0, $V^*(x_0, \delta)$, tal que se $x \in V^*(x_0, \delta)$, então, $f(x) > N$.

Seja a função $f : A \to \mathbb{R}$, cujo domínio contém ao menos uma vizinhança reduzida de x_0.

Nossa definição formal fica assim:

> Dizemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se, dado qualquer número $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
>
> se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $f(x) > N$.

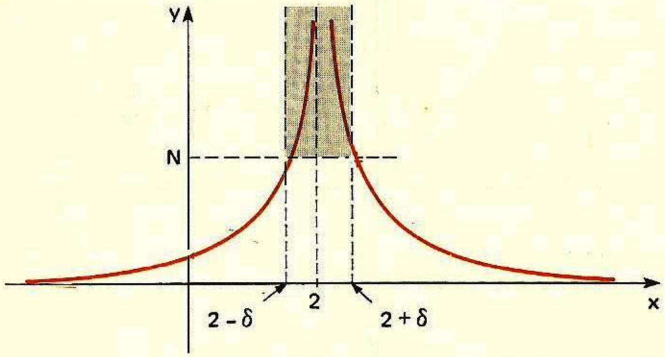
Por exemplo, para a função

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

representada pelo gráfico abaixo, temos

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$



Isto significa que, dado o número $N > 0$, é possível encontrar $\delta > 0$ tal que

se $0 < |x - 2| < \delta$, então $f(x) > N$.

A condição $f(x) > N$ escreve-se $\frac{1}{(x-2)^2} > N$, donde $0 < (x-2)^2 < \frac{1}{N}$, isto é, $0 < |x - 2| < \frac{1}{\sqrt{N}}$. Basta, portanto, tomar $\delta = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Veja que o mecanismo destas investigações é semelhante àquele já utilizado para os limites finitos.

Podemos, além disso, considerar os **limites laterais**, com as definições seguintes:

> 1.º) Dizemos que $\lim_{x \to x_0 -} f(x) = +\infty$ se, dado $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
>
> se $x_0 - \delta < x < x_0$, então $f(x) > N$.
>
> 2.º) Dizemos que $\lim_{x \to x_0 +} f(x) = +\infty$ se, dado $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
>
> se $x_0 < x < x_0 + \delta$, então $f(x) > N$

Vamos estabelecer também uma definição para o caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

no qual f(x) *toma valores negativos, de módulos cada vez maiores*, quando **x** tende a x_0.

Para isso, supondo que N é um número positivo, deve ser possível encontrar uma vizinhança de x_0, $V^*(x_0, \delta)$, tal que

se $x \in V^*(x_0, \delta)$, então $f(x) < -N$

Escrevemos a definição:

> Dizemos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se, dado qualquer número $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:
>
> se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $f(x) < -N$.

Analogamente, são definidos os **limites laterais**

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0 +} f(x) = -\infty$$

É fácil perceber que $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) se, e somente se, tem-se

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty)$$

É também imediato que

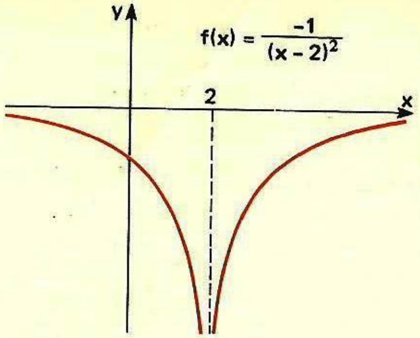
> $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se, e somente se,
>
> $\lim_{x \to x_0} [-f(x)] = +\infty$

Assim, por exemplo, como

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

temos também:

$$\lim_{x \to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$



8.2 — LIMITES PARA $x \to \pm\infty$

Desejamos, agora, estabelecer as definições formais para os casos seguintes:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

O símbolo $x \to +\infty$ representa o fato de que a variável **x** assume valores em uma *vizinhança do infinito*. Isto é colocado em termos rigorosos quando dizemos que, para um dado $M > 0$, tem-se $x \in]M, +\infty[$, o que é o mesmo que $x > M$. Para o símbolo $x \to -\infty$, escreveremos que $x \in]-\infty, -M[$, o que é o mesmo que $x < -M$.

Assim, por exemplo, para definirmos o limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

supondo que o domínio de **f** contém uma vizinhança do $+\infty$, escrevemos:

> Dizemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que:
>
> se $x > M$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Para o limite

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

tem-se a definição seguinte:

> Dizemos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se, dado $N > 0$, existe $M > 0$ tal que
>
> se $x > M$, então $f(x) > N$.

Como se vê, para cada um dos diversos casos relacionados, podemos dar uma definição formal. O quadro seguinte é um resumo das definições dos diversos tipos de limites que já examinamos até aqui.

Dizemos que	se, dado	existe	tal que se	então
$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$	$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$	$N > 0$	$\delta > 0$	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$f(x) > N$
$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$	$N > 0$	$\delta > 0$	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$f(x) < -N$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$	$\varepsilon > 0$	$M > 0$	$x > M$	$\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$	$\varepsilon > 0$	$M > 0$	$x < -M$	$\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$N > 0$	$M > 0$	$x > M$	$f(x) > N$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$	$N > 0$	$M > 0$	$x < -M$	$f(x) > N$
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$N > 0$	$M > 0$	$x > M$	$f(x) < -N$
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$N > 0$	$M > 0$	$x < -M$	$f(x) < -N$
$\lim_{x \to x_0+} f(x) = L$	$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$	$\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$	$N > 0$	$\delta > 0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$	$f(x) > N$
$\lim_{x \to x_0+} f(x) = -\infty$	$N > 0$	$\delta > 0$	$x_0 < x < x_0 + \delta$	$f(x) < -N$
$\lim_{x \to x_0-} f(x) = L$	$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$x_0 - \delta < x < x_0$	$\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$
$\lim_{x \to x_0-} f(x) = +\infty$	$N > 0$	$\delta > 0$	$x_0 - \delta < x < x_0$	$f(x) > N$
$\lim_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$	$N > 0$	$\delta > 0$	$x_0 - \delta < x < x_0$	$f(x) < -N$

8.3 – PROPRIEDADES DOS LIMITES INFINITOS

Sejam duas funções **f** e **g** que podem ter, para $x \to x_0$, limites finitos ou não, e vejamos o que se pode dizer sobre os limites das funções:

$$f + g, \quad f \cdot g \quad e \quad \frac{f}{g}$$

Os vários casos encontram-se resumidos nas tabelas a seguir. As conclusões ali apresentadas valem igualmente para os casos dos limites laterais, com $x \to x_0-$ ou $x \to x_0+$ e também, com alguma adaptação, para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$. Teremos oportunidade de demonstrar algumas destas propriedades, mas não o faremos em todos os casos, por uma questão de brevidade.

TABELA 1 – Limite da soma

	Se f(x) tende a	e g(x) tende a	então f(x) + g(x) tende a
1	L	$+\infty$	$+\infty$
2	L	$-\infty$	$-\infty$
3	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
5	$+\infty$	$-\infty$	?
6	$-\infty$	$+\infty$	?

Os dois últimos casos são *formas indeterminadas* do tipo $\infty - \infty$. Para estas situações não há lei geral.

TABELA 2 – Limite do produto

	Se f(x) tende a	e g(x) tende a	então f(x) · g(x) tende a
1	$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
2	$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
3	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
4	$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$
5	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
6	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
7	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
8	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
9	$L = 0$	$+\infty$	?
10	$L = 0$	$-\infty$	?

Os dois últimos casos são *formas indeterminadas* do tipo $0 \cdot \infty$, para as quais não há lei geral.

TABELA 3 – Limite do quociente

	Se f(x) tende a	e g(x) tende a	então $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende a
1	$+\infty$	$L > 0$	$+\infty$
2	$+\infty$	$L < 0$	$-\infty$
3	$+\infty$	$L = 0$	$+\infty$ se $g(x) > 0$ em uma vizinhança de x_0 $-\infty$ se $g(x) < 0$ em uma vizinhança de x_0
4	$-\infty$	$L > 0$	$-\infty$
5	$-\infty$	$L < 0$	$+\infty$
6	$-\infty$	$L = 0$	$-\infty$ se $g(x) > 0$ em uma vizinhança de x_0 $+\infty$ se $g(x) < 0$ em uma vizinhança de x_0
7	$L_1 > 0$	$L_2 = 0$	$+\infty$ se $g(x) > 0$ em uma vizinhança de x_0 $-\infty$ se $g(x) < 0$ em uma vizinhança de x_0
8	$L_1 < 0$	$L_2 = 0$	$-\infty$ se $g(x) > 0$ em uma vizinhança de x_0 $+\infty$ se $g(x) < 0$ em uma vizinhança de x_0
9	L	$+\infty$	0
10	L	$-\infty$	0
11	$+\infty$	$+\infty$	?
12	$+\infty$	$-\infty$	?
13	$-\infty$	$+\infty$	?
14	$-\infty$	$-\infty$	?
15	$L_1 = 0$	$L_2 = 0$	?

Os cinco últimos casos são *formas indeterminadas* dos tipos $\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$, para as quais não há lei geral.

8.4 – LIMITE DE $\frac{f(x)}{g(x)}$ QUANDO $f(x) \to L \neq 0$ E $g(x) \to 0$

Vamos examinar os casos 7 e 8 da **Tabela 3**, onde temos f(x) tendendo a um limite $L_1 \neq 0$ e g(x) tendendo a 0.

Na primeira destas situações, supomos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 > 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e ainda que existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < | x - x_0 | < \delta_1$, tem-se $g(x) > 0$ (isto é, $g(x) > 0$ em uma vizinhança de x_0). Podemos mostrar que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

Demonstração

Vamos rever o teorema da Conservação do Sinal (veja o exercício 4.12), onde ficou estabelecido que, sendo $\lim_{x \to x_0} f(x) = L_1 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < | x - x_0 | < \delta_2, \quad \text{tem-se} \quad 0 < \frac{L_1}{2} < f(x) < \frac{3L_1}{2}$$

Por outro lado, para qualquer $N > 0$, em correspondência ao número $\varepsilon = \frac{L_1}{2N}$ existe $\delta_3 > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < | x - x_0 | < \delta_3, \quad \text{tem-se} \quad | g(x) - 0 | < \frac{L_1}{2N}$$

Então, dado $N > 0$, se tomarmos

$$\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$$

para $0 < | x - x_0 | < \delta$, teremos satisfeitas as três condições:

1.ª) $g(x) > 0$ 2.ª) $f(x) > \frac{L_1}{2} > 0$ 3.ª) $| g(x) | < \frac{L_1}{2N}$

Daí resulta que $0 < g(x) < \frac{L_1}{2N}$ ou ainda $\frac{\left(\frac{L_1}{2}\right)}{g(x)} > N$ e finalmente $\frac{f(x)}{g(x)} > N$

Assim, $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

As demais situações da tabela podem ser examinadas analogamente.

Exercícios Resolvidos

8.1) Calcule $\lim_{x \to -2} \frac{3 - 2x}{(x + 2)^2}$.

Solução

Para $x \to -2$, tem-se que

$$3 - 2x \to +7 \quad \text{e} \quad (x + 2)^2 \to 0$$

Além disso, quando x está próximo de -2, temos $(x + 2)^2 > 0$. Logo (veja Tabela 3, caso 7):

$$\lim_{x \to -2} \frac{3 - 2x}{(x + 2)^2} = +\infty$$

8.2) Calcule $\lim_{x \to 3} \frac{2 - x}{(x - 3)^2}$.

Solução

Para $x \to 3$, tem-se que $2 - x \to -1$ e $(x - 3)^2 \to 0$. Quando x está próximo de 3, temos $(x - 3)^2 > 0$. Logo (Tabela 3, caso 8):

$$\lim_{x \to 3} \frac{2 - x}{(x - 3)^2} = -\infty$$

8.3) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 - x - 3}{x^2}$.

Solução

Para $x \to 0$, tem-se $5x^2 - x - 3 \to -3$, $x^2 \to 0$ e $x^2 > 0$. Assim (caso 8 da Tabela 3):

$$\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 - x - 3}{x^2} = -\infty$$

8.4) Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{2x + 3}{| x - 2 |}$.

Solução

Para $x \to 2$, tem-se $2x + 3 \to 7$, $| x - 2 | \to 0$ e $| x - 2 | > 0$. Assim (caso 7 da Tabela 3):

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x + 3}{| x - 2 |} = +\infty$$

8.5) Calcule $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 7x - 2}{| x + 1 |}$.

Solução

Se $x \to -1$, então $x^2 + 7x - 2 \to -8$, $| x + 1 | \to 0$ e $| x + 1 | > 0$. Assim,

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 7x - 2}{| x + 1 |} = -\infty$$

8.6) Calcule $\lim_{x \to 2-} \frac{3x + 2}{x - 2}$.

Solução

Se $x \to 2-$, então $3x + 2 \to 8$, $x - 2 \to 0$ e $x - 2 < 0$. Assim,

$$\lim_{x \to 2-} \frac{3x + 2}{x - 2} = -\infty$$

8.7) Calcule $\lim_{x \to 2+} \frac{7 - 5x}{(x - 2)^3}$.

Solução

Se $x \to 2+$, então $7 - 5x \to -3$, $(x - 2)^3 \to 0$ e $(x - 2)^3 > 0$. Assim

$$\lim_{x \to 2+} \frac{7 - 5x}{(x - 2)^3} = -\infty$$

8.8) Calcule $\lim\limits_{x \to 3-} \dfrac{3x^2 - 2x - 7}{(3 - x)^3}$.

Solução

Se $x \to 3-$, então $3x^2 - 2x - 7 \to 14$, $(3 - x)^3 \to 0$ e $(3 - x)^3 > 0$. Assim

$$\lim_{x \to 3-} \frac{3x^2 - 2x - 7}{(3 - x)^3} = +\infty$$

Exercícios Propostos

Calcule os limites indicados (exercícios de n.º 8.9 a 8.36).

8.9) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4}{(x + 1)^2}$

8.10) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

8.11) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{7}{x^2}$

8.12) $\lim\limits_{x \to 0} \left(4 + \dfrac{1}{x^4}\right)$

8.13) $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{3}{2 - x}$

8.14) $\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{3}{2 - x}$

8.15) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{4 - 3x}{(x + 3)^2}$

8.16) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{5 - 4x}{(x + 4)^2}$

8.17) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - 2x}{(x - 4)^2}$

8.18) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{4 - 3x}{(x - 5)^2}$

8.19) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x - 7}{x^2}$

8.20) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6 - 4x - x^2}{x^2}$

8.21) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x + 4}{|x - 3|}$

8.22) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4x - 5}{|x - 4|}$

8.23) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 5x + 3}{|x + 2|}$

8.24) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{3 + 2x - x^2}{|x + 3|}$

8.25) $\lim\limits_{x \to 3-} \dfrac{4x + 3}{x - 3}$

8.26) $\lim\limits_{x \to 4-} \dfrac{5x + 4}{x - 4}$

8.27) $\lim\limits_{x \to 4+} \dfrac{9 - 7x}{(x - 4)^3}$

8.28) $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{5 - 2x}{(x - 1)^3}$

8.29) $\lim\limits_{x \to 4-} \dfrac{4x^2 - 3x - 8}{(4 - x)^3}$

8.30) $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{2x^2 - x - 6}{(1 - x)^3}$

8.31) $\lim\limits_{x \to 5-} \dfrac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$

8.32) $\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

8.33) $\lim\limits_{x \to 3-} \dfrac{x^4 - 81}{x^2 - 6x + 9}$

8.34) $\lim\limits_{x \to 3+} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 16x + 3}{(x - 3)^2}$

8.35) $\lim\limits_{x \to (-2)+} \dfrac{x^2 + 5x - 3}{2x^3 + 5x^2 - 4}$

8.36) $\lim\limits_{x \to a+} \dfrac{x^4 - a^4}{(x - a)^2}$ $(a > 0)$.

8.5 — LIMITES DE POLINÔMIOS PARA $x \to \pm\infty$

1.º) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} ax^n = \pm\infty$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^n$ $(a > 0, n \in \mathbb{N}^*)$ e vamos examinar os limites:

$$\lim_{x \to +\infty} ax^n \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} ax^n$$

Veremos que ocorrem os resultados da tabela abaixo (lembre-se de que supomos $a > 0$).

Se $x \to +\infty$, então $ax^n \to +\infty$

Se $x \to -\infty$, então $\begin{cases} \text{se } n \text{ é par, } ax^n \to +\infty \\ \text{se } n \text{ é ímpar, } ax^n \to -\infty \end{cases}$

Além disso, é claro que

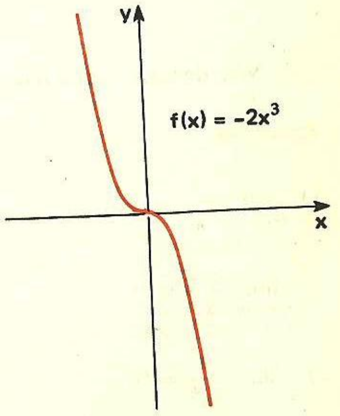
Se $ax^n \to +\infty$, então $-ax^n \to -\infty$

Se $ax^n \to -\infty$, então $-ax^n \to +\infty$

Como se vê, o limite da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^n$ $(a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*)$, para $x \to \pm\infty$, pode ser $+\infty$ ou $-\infty$, dependendo do **sinal de a** e da **paridade de n**.

Vamos ilustrar uma destas situações com um exemplo. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^3$ e provemos que

$$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty$$



Devemos provar que, dado $N > 0$, existe $M > 0$ tal que se $x < -M$, tem-se $-2x^3 > N$. A condição $-2x^3 > N$ escreve-se

$$x^3 < -\frac{N}{2}$$

ou

$$x < -\sqrt[3]{\frac{N}{2}}.$$

Assim, basta tomar $M = \sqrt[3]{\dfrac{N}{2}}$ e teremos que

se $x < -M$, então $x < -\sqrt[3]{\frac{N}{2}}$, donde vem $x^3 < -\frac{N}{2}$ e $-2x^3 > N$.

Logo, $\lim_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty$.

2.º) $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{ax^n} = 0$

Para a função $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{ax^n} \quad (a \neq 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}^*)$$

temos

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{ax^n} = 0$$

Tomemos o caso em que $a > 0$ e $x \to +\infty$. Sabemos que $ax^n \to +\infty$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, em correspondência a $N = \frac{1}{\varepsilon}$, existe $M > 0$ tal que

$$\text{se } x > M, \text{ tem-se } ax^n > N = \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

Assim, $0 < \frac{1}{ax^n} < \varepsilon$, donde

$$\left| \frac{1}{ax^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

e portanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{ax^n} = 0$$

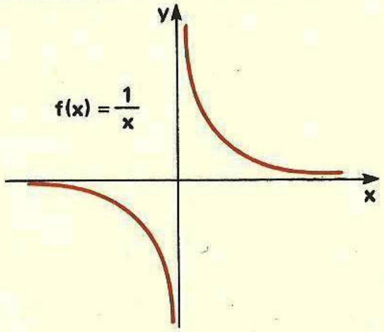
Nos demais casos tem-se o mesmo resultado.

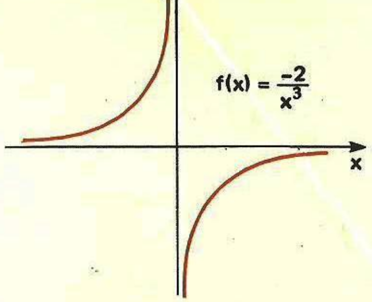
Exemplos

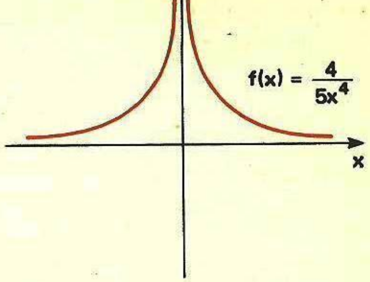
1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2) $\lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{x^3} = 0$

3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{5x^4} = 0$







3.º) **Função polinômio**

Consideremos agora o caso da função polinômio de grau **n**, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

com $a_0 \neq 0$. Para $x \neq 0$, podemos escrever

$$f(x) = a_0x^n \cdot \left[1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \frac{a_2}{a_0} \cdot \frac{1}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}\right]$$

Cada parcela da expressão entre colchetes **tende a zero** quando $x \to \pm\infty$, exceto a função constante 1, cujo limite é 1. Assim

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_0x^n$$

Portanto, **o limite da função polinômio, para $x \to \pm\infty$, é determinado pelo seu termo de maior grau e será $+\infty$ ou $-\infty$, dependendo do sinal de a_0 e da paridade de n.**

Por exemplo, temos:

1) $\lim_{x \to +\infty} (2x^3 + 4x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} (3x^5 + 2x^3 - 5x + 3) = \lim_{x \to -\infty} 3x^5 = -\infty$

3) $\lim_{x \to -\infty} (-2x^4 + 3x^2 + 1) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^4) = -\infty$

8.6 — LIMITES DA FUNÇÃO RACIONAL PARA $x \to \pm\infty$

Como sabemos (veja o exercício 6.12), chama-se **função racional** toda função $f: A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde P e Q são *polinômios* e o domínio A é o conjunto de todos os números reais tais que $Q(x) \neq 0$.

Suponha-se que

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m} \quad (a_0 \neq 0 \quad e \quad b_0 \neq 0)$$

Podemos escrever, para $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{a_0x^n}{b_0x^m} \cdot \left[\frac{1 + \frac{a_1}{a_0} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_0} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{a_0} \cdot \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{1}{x} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{b_0} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{b_0} \cdot \frac{1}{x^m}} \right]$$

Para $x \to \pm\infty$, a fração entre colchetes tende a 1. Assim, tem-se

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0x^n}{b_0x^m}$$

Portanto, **o limite da função racional, para $x \to \pm\infty$, é determinado pelo quociente de seus termos de maior grau.**

Temos, então, três casos possíveis:

1.°) se **$n > m$**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} \cdot x^{n-m} = \pm\infty$$

(dependendo do sinal de $\frac{a_0}{b_0}$ e da paridade de $n - m$).

2.°) se **$n = m$**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0}{b_0}$$

3.°) se **$n < m$**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a_0}{b_0x^{m-n}} = 0$$

Exemplos

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^5 + 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 3x - 4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^5}{2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^3}{2} = -\infty$

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 7} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{3x^2 + 2x - 4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{3x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{3x} = 0$

8.7 — LIMITE DE $\sqrt[n]{f(x)}$ quando $f(x) \to \pm\infty$

Seja f uma função tal que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Então, para $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se também

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

De fato, dado $N > 0$, em correspondência a $N^n > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - x_0| < \delta, \quad \text{tem-se} \quad f(x) > N^n,$$

donde resulta que

$$\sqrt[n]{f(x)} > N$$

isto é

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$$

É claro que o mesmo ocorrerá se $x \to \pm\infty$ ou em limites laterais. De modo análogo, podemos estabelecer que, sendo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, e **n ímpar**, tem-se

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = -\infty$$

Exemplos

1) Como $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^3 - 3} = +\infty$.

2) Como $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{1 - x} = -\infty$.

Exercícios Resolvidos

Para cada função dada nos exercícios de números 8.37 a 8.53, calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

8.37) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5$

Solução

Temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^3. \text{ Assim}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

8.38) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

Solução

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (2x^2 - 3x + 1) = +\infty$, então

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$$

8.39) $f(x) = \sqrt[3]{x-3}$

Solução

Temos

$$\lim_{x\to+\infty} (x-3) = +\infty, \text{ logo } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x-3) = -\infty, \text{ logo } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

8.40) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2+1}$

Solução

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} x$$

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

8.41) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x-3}$

Solução

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

8.42) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

Solução

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

8.43) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x^3}$

Solução

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{-x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

8.44) $f(x) = \dfrac{(2x+3)^3\,(3x-1)^2}{(5x+1)^2\,(x-3)^3}$

Solução

Podemos escrever

$$f(x) = \frac{x^3\left(2+\frac{3}{x}\right)^3 \cdot x^2\left(3-\frac{1}{x}\right)^2}{x^2\left(5+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot x^3\left(1-\frac{3}{x}\right)^3} = \frac{\left(2+\frac{3}{x}\right)^3 \cdot \left(3-\frac{1}{x}\right)^2}{\left(5+\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{3}{x}\right)^3}$$

Para $x \to \pm\infty$, temos que $\dfrac{1}{x} \to 0$ e $\dfrac{3}{x} \to 0$.

Assim, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{(2)^3\,(3)^2}{(5)^2\,(1)^3} = \dfrac{72}{25}$.

8.45) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-1}}{x+1}$

Solução

Escrevemos, para $x \to +\infty$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(x-\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}}$$

Como $\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}} \to +\infty$ e $1+\dfrac{1}{x} \to 1$, temos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Não existe $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

8.46) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+4}}{x^2+2}$

Solução

Temos $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4\left(1+\frac{4}{x^4}\right)}}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \dfrac{x^2\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \dfrac{\sqrt{1+\frac{4}{x^4}}}{1+\frac{2}{x^2}}$

Se $x \to \pm\infty$, então $\dfrac{4}{x^4} \to 0$ e $\dfrac{2}{x^2} \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{\sqrt{1}}{1} = 1$$

8.47) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3}$

Solução

Temos $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)} = \dfrac{|x| \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x^2 \cdot \left(1+\frac{3}{x^2}\right)}$

Então, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{|x|}{x^2} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0.$

8.48) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^4-3}}$

Solução

Temos $f(x) = \dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^4\left(1-\frac{3}{x^4}\right)}} = \dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{1-\frac{3}{x^4}}} = \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{3}{x^4}}}$

Então, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1.$

8.49) $f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}$

Solução

Temos $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} =$

$= \dfrac{(x^2+2)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}$

Se $x \to \pm\infty$, então $\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1} \to +\infty$. Assim

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

8.50) $f(x) = \sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}$

Solução

Temos $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1})(\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1})}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} =$

$= \dfrac{(x^3+1)-(x^3-1)}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1}}$

Se $x \to +\infty$, tem-se $\sqrt{x^3+1}+\sqrt{x^3-1} \to +\infty$.
Assim

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Não existe $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

8.51) $f(x) = \sqrt[3]{x+3} + \sqrt[3]{x}$

Solução

Se $x \to +\infty$, tem-se $\sqrt[3]{x+3} \to +\infty$ e $\sqrt[3]{x} \to +\infty$ donde

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Da mesma forma, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

8.52) $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

Solução

Temos $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}.$

Se $x \to +\infty$, então $|x| = x$ e podemos escrever

$$f(x) = \frac{x\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$

donde se tira $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1}}{1} = 2.$

Se $x \to -\infty$, então $|x| = -x$ e podemos escrever

$$f(x) = \frac{x\left[1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$

donde se tira $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1}}{1} = 0.$

8.53) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}}$

Solução

Temos

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) \cdot (\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}) \cdot (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}) \cdot (\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}) \cdot (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})} =$$

$$= \frac{[(x^2+1)-(x^2-1)] \cdot (\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2})}{[(x^2+2)-(x^2-2)] \cdot (\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})} =$$

$$= \frac{2 \cdot (\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2})}{4(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + |x|\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

Portanto, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{\sqrt{1}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

Exercícios Propostos

Para cada função dada nos exercícios de números 8.54 a 8.84, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

8.54) $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 4$

8.55) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$

8.56) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

8.57) $f(x) = \sqrt{x^3 - x + 2}$

8.58) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

8.59) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

8.60) $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x + 1}{x^6 + 2}$

8.61) $f(x) = \dfrac{x^8 + 2x - 5}{x^8 - 7}$

8.62) $f(x) = \dfrac{x^3 - 7x + 1}{3x^2 - 4}$

8.63) $f(x) = \dfrac{1\,000\,x}{x^2 - 1}$

8.64) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^2\,(4x+7)^2}{(3x+4)^2\,(5x^2+1)}$

8.65) $f(x) = \dfrac{(3x^2+1)\,(5x+3)}{(2x^3-1)\,(x+4)}$

8.66) $f(x) = \dfrac{(2x+3)\,(3x+5)\,(4x-6)}{3x^3 + x - 1}$

8.67) $f(x) = \dfrac{(2x+3)^3\,(3x-2)^2}{x^5 + 5}$

8.68) $f(x) = \left(\dfrac{5x^2 - x}{x^2 - x} - \dfrac{3x^3 - 4}{x^3 - x}\right)^4$

8.69) $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 - 4} - \dfrac{x^2}{3x + 2}$

8.70) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 + 10}}$

8.71) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x^4 + 1}}$

8.72) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

8.73) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$

8.74) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$

8.75) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 4}$

8.76) $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x} - x^2$

8.77) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x + 1}$

8.78) $f(x) = x\,(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

8.79) $f(x) = x + \sqrt[3]{1 - x^3}$

8.80) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1} - x$

8.81) $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}$

8.82) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}}$

8.83) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$

8.84) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

8.85) Determine **a** e **b**, sabendo que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + x^2 - x + 2}{x^2 + x + 1} - ax - b\right) = 0$$

8.86) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - x\right)$.

8.87) Determine **a**, sabendo que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{6x^2 - x - 5}{ax^2 - 1} = \frac{2}{3}$$

8.88) Sendo $f(x) = \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + x - 2}$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, calcule **a**, **b**, **c** e **d**.

Capítulo

9

Funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas

9.1 — UMA DESIGUALDADE IMPORTANTE

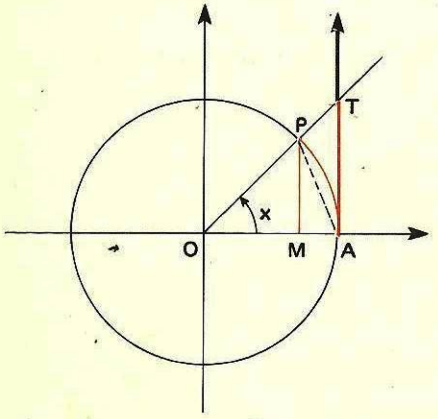
Seja **x** um número real tal que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e provemos que

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$$

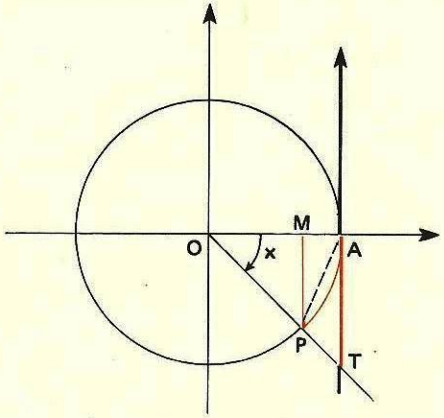
Nas figuras abaixo, que representam a circunferência trigonométrica, temos que:

$$MP = |\operatorname{sen} x|,\ \widehat{AP} = |x|,\ \text{e}\ AT = |\operatorname{tg} x|$$

tanto no caso em que $0 < x < \frac{\pi}{2}$, como no caso em que $-\frac{\pi}{2} < x < 0$.



$0 < x < \frac{\pi}{2}$



$-\frac{\pi}{2} < x < 0$

Além disso, vê-se que área do $\triangle$ OAP < área do setor OAP < área do $\triangle$OAT.

Então

$$\frac{(OA)\cdot(MP)}{2} < \frac{(OA)\cdot(\widehat{AP})}{2} < \frac{(OA)\cdot(AT)}{2}$$

donde

$$MP < \widehat{AP} < AT$$

e assim

$$|\operatorname{sen} x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$$

para todo $x \neq 0$, tal que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Se $x = 0$, temos $|\operatorname{sen} x| = |x| = |\operatorname{tg} x| = 0$.

Portanto, para todo **x** tal que $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ tem-se

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant |x| \leqslant |\operatorname{tg} x|$$

9.2 — CONTINUIDADE DA FUNÇÃO SENO

Teorema

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$ é **contínua** em $\mathbb{R}$, isto é, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0$$

Demonstração

Faremos a prova deste teorema com o auxílio da desigualdade anterior. Lembremos, da Trigonometria (veja o volume 3 desta coleção), que

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}$$

e

$$\left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leqslant 1$$

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min \left\{ \varepsilon, \frac{\pi}{2} \right\}$. Portanto se $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se

a) $0 < |x - x_0| < \frac{\pi}{2}$, donde $\left| \operatorname{sen} \frac{x - x_0}{2} \right| \leqslant \left| \frac{x - x_0}{2} \right|$

(Utilizamos aqui a desigualdade do item anterior.)

b) $0 < |x - x_0| < \varepsilon$

Então

$$|\text{sen } x - \text{sen } x_0| = 2\left|\text{sen}\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0| < \varepsilon$$

Fica provado, assim, que

$$\lim_{x \to x_0} \text{sen } x = \text{sen } x_0$$

isto é, que **a função seno é contínua em** $\mathbb{R}$.

9.3 — CONTINUIDADE DAS DEMAIS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A partir do fato já provado, de que a função seno é contínua em $\mathbb{R}$, pode-se provar facilmente que as outras funções trigonométricas (cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) são também contínuas em seus respectivos domínios.

1.°) Temos $\cos x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, logo **a função cosseno é contínua em** $\mathbb{R}$, por ser a composta de duas funções contínuas em $\mathbb{R}$.

2.°) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

3.°) $\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$

4.°) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

5.°) $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$

Logo, as funções tg x, cotg x, sec x e cossec x são **contínuas em seus domínios**, por serem quocientes de funções contínuas.

9.4 — TEOREMA DO CONFRONTO

Demonstraremos agora um teorema que permite determinar o limite de uma função **f** por comparação desta com duas outras funções, **g** e **h**.

Teorema

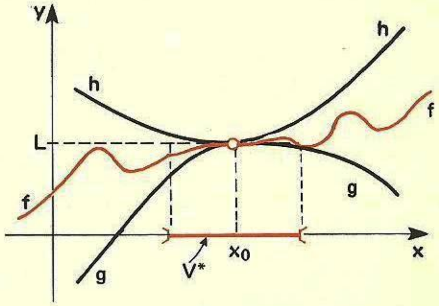
Sejam **g**, **f** e **h** funções cujos domínios contêm ao menos uma vizinhança reduzida V^* de x_0. Suponha-se que:

1.°) para todo $x \in V^*$, se tenha

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

2.°) $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$

Nestas condições, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.



Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

a) se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, tem-se $|g(x) - L| < \varepsilon$, ou seja

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

b) se $0 < |x - x_0| < \delta_2$, tem-se $|h(x) - L| < \varepsilon$, ou seja

$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Assim, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos que

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ então}$$

$$L - \varepsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < L + \varepsilon$$

donde

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

e portanto

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Isto significa que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Observação: O teorema do confronto é também válido se $x \to +\infty$, ou $x \to -\infty$, e também para limites laterais.

9.5 — LIMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL

Vale a seguinte propriedade

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Demonstração

Para fazer a prova, utilizaremos o **teorema do confronto**. Já havíamos provado (veja o item 9.1) que, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, tem-se

$$|\text{sen } x| \leqslant |x| \leqslant |\text{tg } x|$$

Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, podemos escrever ainda

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x$$

donde

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\text{tg } x}{\text{sen } x} \quad (\text{pois sen } x > 0)$$

ou seja

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$$

Para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, escrevemos também

$$\text{tg } x < x < \text{sen } x$$

donde

$$\frac{\text{tg } x}{\text{sen } x} > \frac{x}{\text{sen } x} > 1 \quad (\text{pois sen } x < 0)$$

ou seja

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$$

Assim, se $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, temos

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$$

Apliquemos agora o **teorema do confronto**, considerando as funções $g(x) = \cos x$, $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ e $h(x) = 1$. Como

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

resulta que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Exercícios Resolvidos

9.1) Prove que o **limite trigonométrico fundamental** admite a seguinte forma ampliada: para $\alpha \neq 0$, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \alpha x}{\alpha x} = 1$$

Solução

Como $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$, sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < |x| < \delta_1$, tem-se

$$\left| \frac{\text{sen } x}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

Como $\lim_{x \to 0} \alpha x = 0$ e $\alpha \neq 0$, existe também $\delta > 0$ tal que se $0 < |x| < \delta$, tem-se $0 < |\alpha x| < \delta_1$.

Portanto, se $0 < |x| < \delta$, teremos $0 < |\alpha x| < \delta_1$, donde

$$\left| \frac{\text{sen } \alpha x}{\alpha x} - 1 \right| < \varepsilon$$

e assim

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \alpha x}{\alpha x} = 1$$

9.2) Mostre que, sendo α e β reais não nulos, tem-se

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \alpha x}{\text{sen } \beta x} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Solução

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \alpha x}{\text{sen } \beta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\frac{\text{sen } \alpha x}{\alpha x}}{\frac{\text{sen } \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \alpha x}{\alpha x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } \beta x}{\beta x}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\beta}$$

9.3) Calcule $\lim_{x \to a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$.

Solução

Como $\text{sen } x - \text{sen } a = 2 \text{ sen} \frac{x - a}{2} \cdot \cos \frac{x + a}{2}$, temos

$$\frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a} = \frac{\text{sen} \frac{x - a}{2}}{\frac{x - a}{2}} \cdot \cos \frac{x + a}{2}$$

Assim

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\text{sen} \frac{x - a}{2}}{\frac{x - a}{2}} \cdot \lim_{x \to a} \cos \frac{x + a}{2} = 1 \cdot \cos \frac{a + a}{2} = \cos a$$

9.4) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$.

Solução

Como

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\text{sen}^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x}$$

temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{\text{sen } 0}{1 + \cos 0} = 0$$

Exercícios Propostos

Calcule os limites indicados nos exercícios seguintes (de n.º 9.5 a 9.34).

9.5) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$

9.6) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} \frac{x}{3}}{x}$

9.7) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } 3x}$

9.8) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{7x}$

9.9) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5x}{\text{sen } x}$

9.10) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 8x}{\text{sen } 3x}$

9.11) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x}$

9.12) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } 2x}{x}$

9.13) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } 3x}{\text{tg } 5x}$

9.14) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

9.15) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sec x}{x^2}$

9.16) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$

9.17) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$

9.18) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \text{ sen } x}$

9.19) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}$

9.20) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x - \text{sen } x}{x^3}$

9.21) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{\sqrt{x + 1} - 1}$

9.22) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$

9.23) $\lim_{x \to 0} \frac{2x \text{ sen } x}{\sec x - 1}$

9.24) $\lim_{x \to a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$

9.25) $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x \text{ cossec } x}$

9.26) $\lim_{x \to 0} \frac{2 \text{ sen}^2 x - 6x^3}{x^2}$

9.27) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{tg } 3x}$

9.28) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x}$

9.29) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen } 2x}$

9.30) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\text{tg } 2x}$

9.31) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{\text{tg}^2 2x}$

9.32) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$

9.33) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x + 1 - \cos x}{x}$

9.34) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\text{sen } 3x}{1 - 2 \cos x}$

9.6 — CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Consideremos as **funções exponenciais** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dadas por expressões do tipo

$$f(x) = a^x$$

com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Recordemos algumas das características destas funções:

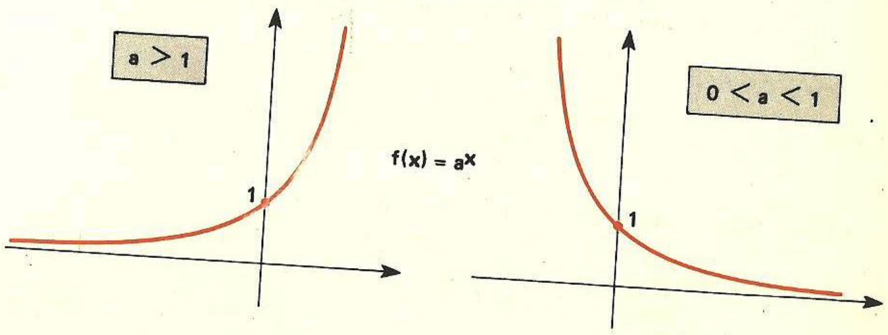
1.ª) $f(x) = a^x$ assume somente valores positivos.

2.ª) se $a > 1$, $f(x) = a^x$ é **crescente** e, conseqüentemente,

$$\begin{cases} \text{se } a > 1 \text{ e } x > 0, \text{ tem-se } a^x > 1 \\ \text{se } a > 1 \text{ e } x < 0, \text{ tem-se } 0 < a^x < 1 \end{cases}$$

3.ª) se $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ é **decrescente** e, conseqüentemente,

$$\begin{cases} \text{se } 0 < a < 1 \text{ e } x > 0, \text{ tem-se } 0 < a^x < 1 \\ \text{se } 0 < a < 1 \text{ e } x < 0, \text{ tem-se } a^x > 1 \end{cases}$$



Teorema

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é **contínua em** $\mathbb{R}$, isto é, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se

$$\lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

Provemos este teorema para o caso $a > 1$. O caso $0 < a < 1$ será deixado para o leitor.

Como

$$a^x = a^{x_0}[a^{x-x_0} - 1] + a^{x_0}$$

bastará provar que

$$\lim_{x \to x_0} a^{x-x_0} = 1$$

o que equivale a provar que

$$\lim_{h \to 0} a^h = 1$$

Vamos demonstrar, primeiramente, o *limite lateral*

$$\lim_{h \to 0+} a^h = 1$$

Investigação

Dado $\varepsilon > 0$, desejamos provar que existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < h < \delta$, tem-se

$$|a^h - 1| < \varepsilon$$

Sendo $a > 1$ e $h > 0$, temos $a^h > 1$. Assim, a condição acima escreve-se

$$a^h < 1 + \varepsilon$$

Tentemos determinar um *número natural* **p**, para o qual se tenha

$$a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon$$

ou seja

$$a < (1 + \varepsilon)^p$$

Como, pela fórmula do binômio de Newton,

$$(1 + \varepsilon)^p = 1 + p\varepsilon + \binom{p}{2}\varepsilon^2 + \binom{p}{3}\varepsilon^3 + \dots + \binom{p}{p}\varepsilon^p$$

resulta que

$$(1 + \varepsilon)^p > 1 + p\varepsilon$$

Assim, se tomarmos **p** de modo que

$$a < 1 + p\varepsilon < (1 + \varepsilon)^p$$

ficará satisfeita a condição $a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon$.

Daí resulta que devemos tomar $p > \dfrac{a-1}{\varepsilon}$.

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, seja **p** um número natural tal que $p > \dfrac{a-1}{\varepsilon}$ e consideremos $\delta = \dfrac{1}{p}$. Segue daí que $a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon$. Então, se $0 < h < \delta$, teremos

$$1 < a^h < a^\delta = a^{\frac{1}{p}} < 1 + \varepsilon$$

donde

$$|a^h - 1| < \varepsilon$$

e assim

$$\lim_{h \to 0+} a^h = 1$$

Para provarmos que $\lim_{h \to 0-} a^h = 1$, basta fazer $h = -h'$, onde $h' > 0$. Teremos $a^h = \dfrac{1}{a^{h'}}$.

Se $h \to 0-$, é claro que $h' \to 0+$, donde

$$\lim_{h \to 0-} a^h = \lim_{h' \to 0+} \frac{1}{a^{h'}} = \frac{1}{\lim\limits_{h' \to 0+} a^{h'}} = \frac{1}{1} = 1$$

Portanto

$$\lim_{h \to 0-} a^h = \lim_{h \to 0+} a^h = \lim_{h \to 0} a^h = 1$$

Conseqüência

Uma conseqüência importante da continuidade das funções exponenciais é expressa pela seguinte propriedade

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^L$

Em particular, temos

Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to x_0} a^{f(x)} = 1$

9.7 — LIMITES DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS PARA $x \to \pm\infty$

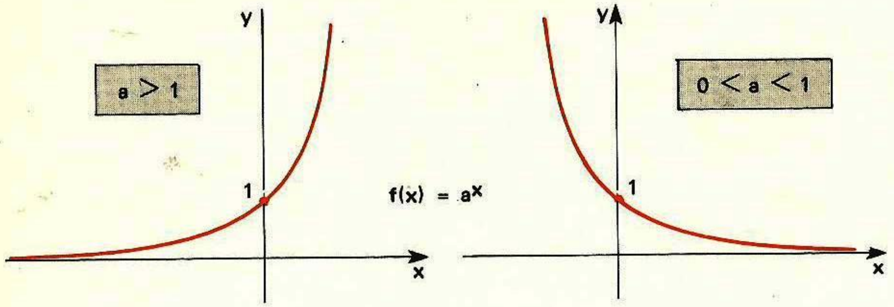
Teorema

Se $a > 1$, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

Se $0 < a < 1$, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$



Provemos o teorema no *caso* $a > 1$, deixando para o leitor o *caso* $0 < a < 1$.

1.º) Demonstremos que, sendo $a > 1$, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$$

Devemos provar que, dado $N > 0$, existe $M > 0$ tal que se $x > M$, tem-se $a^x > N$.

Basta tomar o número positivo M tal que $M > \log_a N$ e teremos $a^M > N$. Assim

$$\text{se } x > M, \text{ tem-se } a^x > a^M, \text{ donde } a^x > N$$

2.º) Demonstremos que, sendo $a > 1$, tem-se

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$$

Devemos provar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que se $x < -M$, tem-se $|a^x - 0| < \varepsilon$, o que é o mesmo que $a^x < \varepsilon$.

Basta tomar o número positivo M tal que $M > \log_a \frac{1}{\varepsilon}$ e teremos $a^M > \frac{1}{\varepsilon}$, donde $a^{-M} < \varepsilon$. Assim, se $x < -M$, tem-se $a^x < a^{-M} < \varepsilon$.

Conseqüência

Uma conseqüência do teorema acima é expressa pela seguinte propriedade

Se $f(x) \to +\infty$, então,
para $a > 1$ tem-se $a^{f(x)} \to +\infty$,
e para $0 < a < 1$ tem-se $a^{f(x)} \to 0$.

Se $f(x) \to -\infty$, então,
para $a > 1$ tem-se $a^{f(x)} \to 0$,
e para $0 < a < 1$ tem-se $a^{f(x)} \to +\infty$.

Exercícios Resolvidos

9.35) Calcule $\lim_{x \to 1} 2^{\frac{x^3-1}{x-1}}$

Solução

Temos $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3.$

Assim

$$\lim_{x \to 1} 2^{\frac{x^3-1}{x-1}} = 2^3 = 8$$

9.36) Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} 3^{1 - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x}$.

Solução

Temos $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} (1 - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x) = 1 - \sqrt{3}\,\text{sen}\frac{\pi}{3} = 1 - \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}.$

Assim

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} 3^{1 - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x} = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

9.37) Calcule $\lim_{x \to 0} 5^{\frac{x - \text{sen}\,3x}{x}}$

Solução

Temos $\lim_{x \to 0} \frac{x - \text{sen}\,3x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{\text{sen}\,3x}{x}\right) = 1 - 3 = -2.$

Assim

$$\lim_{x \to 0} 5^{\frac{x - \text{sen}\,3x}{x}} = 5^{-2} = \frac{1}{25}$$

9.38) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} 8^{\frac{5x^2+2x-1}{3x^2+x-5}}$

Solução

Temos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2+2x-1}{3x^2+x-5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2}{3x^2} = \dfrac{5}{3}$.

Assim

$$\lim_{x \to +\infty} 8^{\frac{5x^2+2x-1}{3x^2+x-5}} = 8^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$$

9.39) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{\frac{x^3+1}{x^2+1}}$

Solução

Temos $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = -\infty$.

Assim

$$\lim_{x \to -\infty} 2^{\frac{x^3+1}{x^2+1}} = 0$$

9.40) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{\frac{1-x^3}{1-x^2}}$

Solução

Temos $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^3}{1-x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{-x^2} = -\infty$.

Assim

$$\lim_{x \to +\infty} 3^{\frac{1-x^3}{1-x^2}} = 0$$

Exercícios Propostos

Nos exercícios seguintes, de n.º 9.41 a 9.71, calcule os limites indicados.

9.41) $\lim\limits_{x \to 2} 5^x$

9.42) $\lim\limits_{x \to -1} 7^x$

9.43) $\lim\limits_{x \to 0} 3^x$

9.44) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} 4^x$

9.45) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} 9^x$

9.46) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

9.47) $\lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

9.48) $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^x$

9.49) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^x$

9.50) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

9.51) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$

9.52) $\lim\limits_{x \to -2} 2^{3x+1}$

9.53) $\lim\limits_{x \to 1} 3^{x^2+x+1}$

9.54) $\lim\limits_{x \to 3} 4^{\frac{2x+1}{x-1}}$

9.55) $\lim\limits_{x \to 2} 5^{\frac{x^2-3x+2}{x-2}}$

9.56) $\lim\limits_{x \to -1} 9^{\frac{x+1}{x^2+2x-3}}$

9.57) $\lim\limits_{x \to 3} 2^{\frac{x^2-9}{x-3}}$

9.58) $\lim\limits_{x \to 1} 3^{\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}}$

9.59) $\lim\limits_{x \to -1} 4^{\frac{x^3+1}{x+1}}$

9.60) $\lim\limits_{x \to 9} 5^{\frac{x^2-81}{(\sqrt{x}-3)54}}$

9.61) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} 2^{\text{sen } x}$

9.62) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} 3^{\text{sen } x - \cos x}$

9.63) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{8}} 4^{\text{tg } 2x}$

9.64) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{\frac{\text{sen } 4x}{x}}$

9.65) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}$

9.66) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{\frac{2x^3+1}{x^3-1}}$

9.67) $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{\frac{1-x^2}{1-x}}$

9.68) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3^{\frac{1-x^2}{1-x}}$

9.69) $\lim\limits_{x \to -\infty} 5^{\frac{1-x}{1-x^2}}$

9.70) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} (0,7)^{\text{tg } x}$

9.71) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} (0,7)^{\text{tg } x}$

9.8 — CONTINUIDADE DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Consideremos as **funções logarítmicas** $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dadas por expressões do tipo

$$f(x) = \log_a x$$

com $a > 0$ e $a \neq 1$.

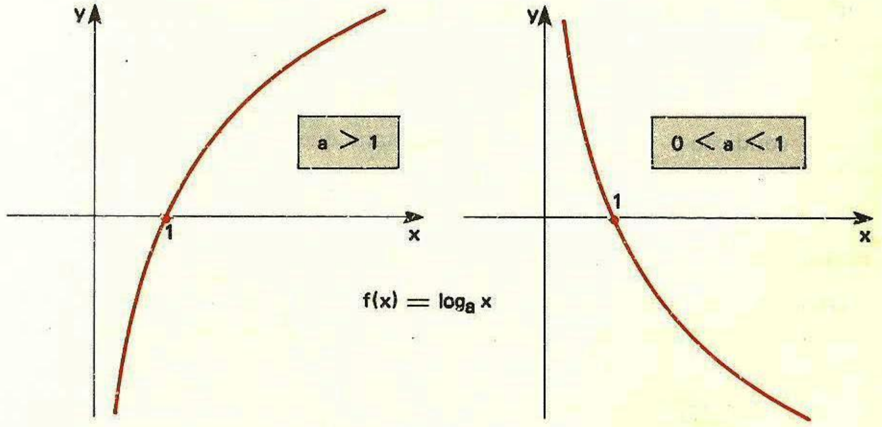
Recordemos algumas das características destas funções

1.ª) Se $a > 1$, $f(x) = \log_a x$ é **crescente** e, conseqüentemente,

$$\begin{cases} \text{se } a > 1 \text{ e } x > 1, \text{ tem-se } \log_a x > 0 \\ \text{se } a > 1 \text{ e } 0 < x < 1, \text{ tem-se } \log_a x < 0 \end{cases}$$

2.ª) Se $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x$ é **decrescente** e, conseqüentemente,

$$\begin{cases} \text{se } 0 < a < 1 \text{ e } x > 1, \text{ tem-se } \log_a x < 0 \\ \text{se } 0 < a < 1 \text{ e } 0 < x < 1, \text{ tem-se } \log_a x > 0 \end{cases}$$



Teorema

A função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é **contínua em** $\mathbb{R}_+^*$, isto é, para todo $x_0 > 0$ tem-se

$$\lim_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

Provemos este teorema para o caso $a > 1$. O caso $0 < a < 1$ será deixado para o leitor.

Como

$$\log_a x = \log_a \frac{x}{x_0} + \log_a x_0$$

bastará provar que $\lim_{x \to x_0} \log_a \frac{x}{x_0} = 0$, o que equivale a provar que

$$\lim_{h \to 1} \log_a h = 0$$

Investigação

Dado $\varepsilon > 0$, desejamos provar que existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |h - 1| < \delta$, tem-se $|\log_a h| < \varepsilon$.

Esta condição escreve-se: $-\varepsilon < \log_a h < \varepsilon$ e, como $a > 1$, equivale a

$$a^{-\varepsilon} < h < a^{\varepsilon}$$

ou

$$a^{-\varepsilon} - 1 < h - 1 < a^{\varepsilon} - 1$$

Temos $a^{\varepsilon} > 1$ e $a^{-\varepsilon} - 1 < 0$. Então, se tomarmos $\delta = \min\{a^{\varepsilon} - 1, |a^{-\varepsilon} - 1|\}$, resultará que

$$a^{-\varepsilon} - 1 \leqslant -\delta \quad \text{e} \quad \delta \leqslant a^{\varepsilon} - 1$$

Assim, a condição $-\delta < h - 1 < \delta$ acarretará que

$$a^{-\varepsilon} - 1 < h - 1 < a^{\varepsilon} - 1$$

Demonstração

Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{a^{\varepsilon} - 1, |a^{-\varepsilon} - 1|\}$. Se $0 < |h - 1| < \delta$, tem-se $a^{-\varepsilon} - 1 < h - 1 < a^{\varepsilon} - 1$, donde $a^{-\varepsilon} < h < a^{\varepsilon}$ e assim $-\varepsilon < \log_a h < \varepsilon$, ou seja

$$|\log_a h| < \varepsilon$$

Conseqüência

Uma conseqüência importante da continuidade das funções logarítmicas é expressa pela seguinte propriedade

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, então $\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = \log_a L$.

Em particular

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$, então $\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = 0$.

9.9 — LIMITES DAS FUNÇÕES LOGARÍTMICAS PARA $x \to \pm\infty$ ou $x \to 0+$

Teorema

Se $a > 1$, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0+} \log_a x = -\infty.$$

Se $0 < a < 1$, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0+} \log_a x = +\infty.$$

Provemos o teorema no caso $a > 1$, deixando para o leitor o caso $0 < a < 1$.

1.°) Demonstremos que, sendo $a > 1$, tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

Devemos provar que, dado $N > 0$, existe $M > 0$ tal que se $x > M$, tem-se $\log_a x > N$.

Basta tomar $M = a^N > 0$ e teremos que se $x > M = a^N$, então (sendo $a > 1$) $\log_a x > N$.

2.°) Demonstremos que, sendo $a > 1$, tem-se

$$\lim_{x \to 0+} \log_x = -\infty$$

Devemos provar que, dado $N > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < x < \delta$, tem-se $\log_a x < -N$.

Basta tomar $\delta = a^{-N} > 0$ e teremos que se $0 < x < \delta = a^{-N}$, então (sendo $a > 1$) $\log_a x < -N$.

Conseqüência

Uma conseqüência do teorema acima é expressa pela seguinte propriedade

> Se $f(x) \to +\infty$, então
> para $a > 1$, tem-se $\log_a f(x) \to +\infty$;
> para $0 < a < 1$, tem-se $\log_a f(x) \to -\infty$.
>
> Se $f(x) \to 0+$, então
> para $a > 1$, tem-se $\log_a f(x) \to -\infty$;
> para $0 < a < 1$, tem-se $\log_a f(x) \to +\infty$.

Exercícios Resolvidos

9.72) Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$.

Solução

Temos

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \text{ e } x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = (x - 2)(x^2 + 4)$$

donde

$$\frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + 4}$$

Esta expressão tende ao limite $\dfrac{3}{2}$ se $x \to 2$. Assim

$$\lim_{x \to 2} \log_{\frac{2}{3}} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} = \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} = -1$$

9.73) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \log_2 \cos x$.

Solução

Se $x \to 0$, tem-se $\cos x \to 1$. Assim

$$\lim_{x \to 0} \log_2 \cos x = \log_2 1 = 0$$

9.74) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_5 \dfrac{1}{|x|}$.

Solução

Se $x \to -\infty$, tem-se $\dfrac{1}{|x|} \to 0+$. Assim, $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_5 \dfrac{1}{|x|} = -\infty$

9.75) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_3 \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Solução

Se $x \to -\infty$, tem-se $\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \to 1$. Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} \log_3 \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \log_3 1 = 0$$

Exercícios Propostos

Nos exercícios seguintes, de n.º 9.76 a 9.93, calcule os limites indicados.

9.76) $\lim\limits_{x \to 25} \log_5 x$

9.77) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{8}} \log_2 x$

9.78) $\lim\limits_{x \to 1} \log_3 x$

9.79) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x$

9.80) $\lim\limits_{x \to 0+} \log_3 x$

9.81) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x$

9.82) $\lim\limits_{x \to 0+} \log_{\frac{1}{2}} x$

9.83) $\lim\limits_{x \to 1} \log_3 (x^2 + x + 1)$

9.84) $\lim\limits_{x \to 1} \log_5 \dfrac{3x + 1}{5x - 1}$

9.85) $\lim\limits_{x \to 4} \log_{\frac{3}{2}} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$

9.86) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \log_2 \operatorname{sen} x$

9.87) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \log_3 \operatorname{tg} x$

9.88) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \log_3 \operatorname{tg} x$

9.89) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$

9.90) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 \dfrac{1}{x}$

9.91) $\lim\limits_{x \to -\infty} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^2}$

9.92) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \log_3 \operatorname{tg} x$

9.93) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \log_{\frac{1}{3}} \operatorname{tg} x$

9.10 — FUNÇÃO DE VARIÁVEL INTEIRA

Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função tal que $A \subset \mathbb{Z}$. Como o domínio desta função é um conjunto de *números inteiros*, as definições de limite vistas até agora não se aplicam, pois o domínio de **f** não pode conter uma *vizinhança* de um ponto x_0, ou de $+\infty$, ou de $-\infty$.

Admitamos que exista um número inteiro n_0 tal que todo número inteiro $n > n_0$ pertence ao domínio A da função **f**, Neste caso, é possível definir o

$$\lim_{n \to +\infty} f(n)$$

Analogamente, se existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que o domínio A contém o conjunto $\{n \in \mathbb{Z} \mid n < n_0\}$, é possível definir o

$$\lim_{n \to -\infty} f(n)$$

As definições ficam assim:

1.ª) Dizemos que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = L$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que se $n > M$, tem-se

$$|f(n) - L| < \varepsilon$$

2.ª) Dizemos que $\lim\limits_{n \to -\infty} f(n) = L$ se, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que se $n < -M$, tem-se

$$|f(n) - L| < \varepsilon$$

Definições análogas podem ser dadas para os casos

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to -\infty} f(n) = \pm\infty$$

9.11 — O NÚMERO e

Consideremos a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada pela expressão:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Podemos provar que *existe* o

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Este limite é um número que desempenha um importante papel na Análise Matemática. É, habitualmente, representado pela letra **e**, e tem-se

$$e \cong 2{,}718281828459045235$$

O número **e** é irracional.

Para demonstrar a *existência* deste limite, utiliza-se o teorema seguinte, que apresentamos sem demonstração.

Teorema

> Se $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ é uma função **crescente** e **limitada superiormente** em $\mathbb{N}^*$, então existe o
>
> $$\lim_{n \to +\infty} f(n) = L$$
>
> Além disso, se $f(n) \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se $L \leqslant M$.

Aplicando-se este teorema, a *existência* do limite

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ficará estabelecida quando provarmos que:

1.º) a função $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é crescente;

2.º) **f** é limitada superiormente em $\mathbb{N}^*$.

Demonstração do 1.º

Pela fórmula do binômio de Newton, temos

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1^n + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + $$
$$+ \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{p} \cdot \frac{1}{n^p} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

Nesta soma, uma parcela qualquer se escreve:

$$\binom{n}{p} \cdot \frac{1}{n^p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \cdot \frac{1}{n^p} = \frac{1}{p!} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n} =$$
$$= \frac{1}{p!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

Vê-se, então, que aumentando-se **n**, cada fração de denominador **n** decresce. Assim, os fatores deste produto **aumentam**. Este fato garante que a função dada por

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é **crescente**.

Demonstração do 2.º

Retomando a expressão

$$\binom{n}{p} \cdot \frac{1}{n^p} = \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

podemos notar que

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) < 1$$

pois cada fator, isoladamente, é menor do que 1. Além disso, como

$$p! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (p-1) \cdot p >$$
$$> 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2 = 2^{p-1}$$

temos
$$\frac{1}{p!} < \frac{1}{2^{p-1}}$$

Então
$$\binom{n}{p} \cdot \frac{1}{n^p} < \frac{1}{2^{p-1}}$$

Assim
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

isto é, a função dada por

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

é **limitada superiormente**.

As duas demonstrações acima garantem, portanto, que **existe** o

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

e ainda que esse limite não é maior do que 3. Trata-se do número

$$e \cong 2{,}718281828459$$

já mencionado anteriormente:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Vejamos agora outros exemplos de **limites que são iguais a e**

1.º) $$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+k} = e \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Demonstração

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+k} = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = e \cdot 1 = e$$

2.º) $$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n = e \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Demonstração

Façamos $n + k = m$, donde $n = m - k$. Se $n \to +\infty$, é claro que $m \to +\infty$. Assim

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m-k} = e$$

3.º) $$\lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Demonstração

Façamos $n = -m$. Se $\to -\infty$, é claro que $m \to +\infty$. Assim,

$$\lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}$$

Mas

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m$$

donde

$$\lim_{n \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m = e$$

4.°) Seja $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, cujo domínio é $A = \mathbb{R} - [-1, 0]$.

Tem-se

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+k} = e \qquad (k \in \mathbb{R})$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x + k}\right)^x = e \qquad (k \in \mathbb{R})$

Demonstração

Seja $n = [x]$, isto é, seja **n** o número inteiro tal que

$$n \leqslant x < n + 1 \qquad (x \in A)$$

Então

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leqslant 1 + \frac{1}{n}$$

Se $x > 1$, temos $n \geqslant 1$, donde

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x$$

e ainda, com maior razão,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Como $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, resulta (pelo **teorema do confronto**) que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

As demais partes podem ser provadas com os mesmos artifícios utilizados nos casos anteriores.

5.°) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

Demonstração

Façamos $x = \frac{1}{y}$, donde $\frac{1}{x} = y$. Se $x \to 0+$, é claro que $y \to +\infty$ e, se $x \to 0-$, é claro que $y \to -\infty$. Assim

$$\lim_{x \to 0+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e$$

e $\lim\limits_{x \to 0-} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$

Portanto

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

6.°) Se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, então

$$\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

O mesmo é verdade se $x \to \pm\infty$, ou para limites laterais $x \to x_0 +$ ou $x \to x_0 -$.

7.°) Se $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to x_0} v(x) = \pm\infty$, então

$$\lim_{x \to x_0} \left(1 + \frac{u(x)}{v(x)}\right)^{v(x)} = e^L$$

Demonstração

Façamos $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{1}{f(x)}$. É claro que $f(x) \to \pm\infty$ donde

$$\lim_{x\to x_0}\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

e que $v(x) = f(x) \cdot u(x)$.

Assim

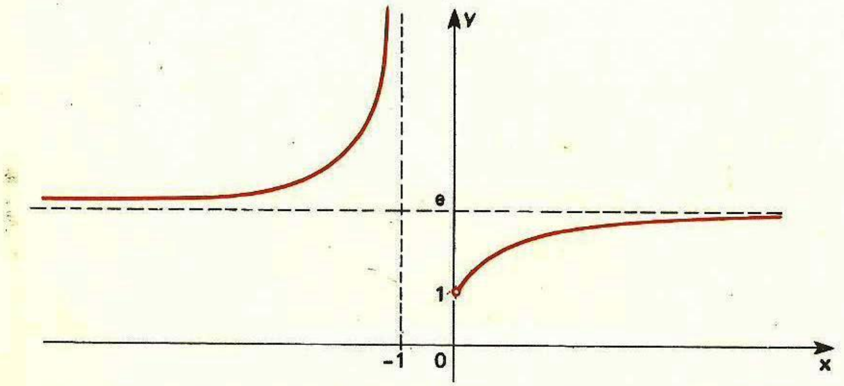
$$\lim_{x\to x_0}\left(1 + \frac{u(x)}{v(x)}\right)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0}\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)\cdot u(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}\right]^{u(x)} = e^L$$

Para finalizar, eis aqui o aspecto que apresenta o gráfico da função

$$f: \mathbb{R} - [-1,0] \to \mathbb{R},\ f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

onde se pode ver que:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$



9.12 — LOGARITMO NATURAL

Consideremos o número e. A expressão

$$\log_e x$$

é chamada **logaritmo natural de x** (ou **logaritmo neperiano de x**) e é comumente indicada por

$$\ln x$$

Teorema

Sendo $a > 0$, tem-se

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Demonstração

Suponhamos, primeiramente, que $a \neq 1$. Façamos $y = a^x - 1$. Daí, vem

$$a^x = 1 + y \quad e \quad x = \log_a(1 + y)$$

Se $x \to 0$, é claro que $y \to 0$. Assim

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a(1+y)} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{y\to 0}\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log_a \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$$

No caso $a = 1$, temos também

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = \ln 1 = \ln a$$

Exercícios Resolvidos

9.94) Calcule $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5}{x}\right)^x$.

Solução

Fazendo $-\frac{5}{x} = \frac{1}{y}$, temos $x = -5y$, logo, se $x \to +\infty$, tem-se $y \to -\infty$.

Assim

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5}{x}\right)^x = \lim_{y\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-5y} = \left[\lim_{y\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^{-5} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}$$

9.95) Calcule $\lim_{x\to 0}(1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

Solução

Fazendo $2x = y$, temos $\frac{1}{x} = \frac{2}{y}$. Se $x \to 0$, tem-se $y \to 0$. Assim,

$$\lim_{x\to 0}(1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{2}{y}} = \left[\lim_{y\to 0}(1 + y)^{\frac{1}{y}}\right]^2 = e^2$$

9.96) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

Solução

Façamos $\dfrac{2x-1}{2x+1} = 1 + \dfrac{1}{y}$, donde obtemos $2x = -2y-1$. Se $x\to-\infty$, tem-se $y\to+\infty$.

Assim

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2y-1} =$$

$$= \left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-2}\cdot\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-1} = e^{-2}\cdot 1^{-1} = \frac{1}{e^2}$$

9.97) Calcule $\lim\limits_{x\to0}(1+3\,\mathrm{tg}^2\,x)^{\mathrm{cotg}^2\,x}$.

Solução

Façamos $3\,\mathrm{tg}^2\,x = \dfrac{1}{y}$, donde $\mathrm{cotg}^2\,x = 3y$. Se $x\to0$, temos $y\to+\infty$. Assim

$$\lim_{x\to0}(1+3\,\mathrm{tg}^2\,x)^{\mathrm{cotg}^2\,x} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3y} = \left[\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{3} = e^3$$

9.98) Calcule $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$.

Solução

Sendo $a = e^{-3}$, temos

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-3x}-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a = \ln e^{-3} = -3$$

9.99) Calcule $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Solução

Temos $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

donde

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

9.100) Calcule $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Solução

Como $\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \dfrac{e^{ax}-1}{x} - \dfrac{e^{bx}-1}{x}$, temos

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{x} - \lim_{x\to0}\frac{e^{bx}-1}{x} = \ln e^a - \ln e^b = a-b$$

9.101) Calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$. $(a>0)$

Solução

Como $n(\sqrt[n]{a}-1) = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$, se fizermos $x = \dfrac{1}{n}$, para $n\to+\infty$ teremos $x\to0+$, logo

$$\lim_{n\to+\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \lim_{x\to0+}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$$

9.102) Calcule $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{\mathrm{sen}\,x}$.

Solução

Temos $\dfrac{1-e^{-x}}{\mathrm{sen}\,x} = -\dfrac{\frac{e^{-x}-1}{x}}{\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}}$, donde

$$\lim_{x\to0}\frac{1-e^{-x}}{\mathrm{sen}\,x} = -\frac{\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{sen}\,x}{x}} = -\frac{\ln e^{-1}}{1} = 1$$

Exercícios Propostos

Nos exercícios seguintes, de n.º 9.103 a 9.132, calcule os limites indicados:

9.103) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^x$

9.104) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

9.105) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

9.106) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$

9.107) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}$

9.108) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^x$

9.109) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$

9.110) $\lim\limits_{x\to0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

9.111) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^x$

9.112) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

9.113) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^x$

9.114) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

9.115) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{2x+3}$

9.116) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$

9.117) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-4}\right)^{\frac{x}{4}}$

9.118) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+7}{x+5}\right)^{2x+4}$

9.119) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

9.120) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$

9.121) $\lim\limits_{x\to0}(1+\mathrm{sen}\,x)^{\frac{1}{x}}$

9.122) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$ $(a>0)$

9.123) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$

9.124) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,[\ln(x+1)-\ln x]$

9.125) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log(1+10x)}{x}$

9.126) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

9.127) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{\operatorname{sen} x}$

9.130) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2x}$

9.133) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

9.128) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{e^x}$

9.131) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2x^2} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

9.134) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\operatorname{sen}\alpha x - \operatorname{sen}\beta x}$

9.129) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$

9.132) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Exercícios Suplementares

II.1) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^2 + x + 3$. Prove que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 6$, utilizando diretamente a definição de limite.

II.2) Seja $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Prove que $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 2$, utilizando diretamente a definição de limite.

II.3) Seja $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x^2 - x - 2}{x - 1}$. Prove que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$, utilizando diretamente a definição de limite.

II.4) Seja $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Prove que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, utilizando diretamente a definição de limite.

II.5) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Prove que $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 2$, utilizando diretamente a definição de limite.

II.6) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Prove que **f** é contínua em $\mathbb{R}$, utilizando diretamente a definição de continuidade.

II.7) Seja $f: \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1}$. Prove que **f** é contínua em $\mathbb{R}$, utilizando diretamente a definição de continuidade.

II.8) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x$.

a) Calcule $f(x) - f(1)$ e fatore essa diferença.

b) Demonstre que, se $|x - 1| < \dfrac{7}{2}$, tem-se

$$|x| < \frac{9}{2} \text{ e } |f(x) - f(1)| \leqslant 12 \cdot |x - 1|$$

c) Deduza que **f** é contínua no ponto $x_0 = 1$.

Nos exercícios seguintes, de n.º II.9 a II.18, calcule cada limite indicado.

II.9) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

II.11) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{(x^2 - 4)(x + 2)}$

II.10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x - 1)^3 + 1}{x}$

II.12) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

II.13) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4 - 16}{|x| - 2}$

II.14) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$

II.15) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

II.16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[4]{1 + x} - 1}{\sqrt{1 + x} - 1}$

II.17) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + x} - \sqrt{x^3 + x^2 + 2}}{x^2 - 1}$

II.18) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x + 20} - 5}{\sqrt[3]{x + 3} - 2}$

II.19) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ k, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Determine **k**, para que **f** seja contínua no ponto $x_0 = 1$.

II.20) Calcule **a** e **b**, sendo

$$\lim_{x\to 1} \frac{ax^2 + (3a + 1)x + 3}{bx^2 + (2 - b)x - 2} = \frac{3}{2}$$

II.21) Determine um polinômio $f(x)$, de grau 3, sabendo que

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x\to -3} \frac{f(x)}{x + 3} = 8$$

II.22) Determine um polinômio $f(x)$, de grau 3, sabendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ e } \lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{x + 1} = -1$$

II.23) Seja $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

a) Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} = A$

b) Calcule $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left[\dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} - A\right]$, onde A é o valor calculado no item anterior.

Nos exercícios seguintes, de n.º II.24 a II.27, calcule:

a) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

no ponto x_0 indicado.

II.24) $f(x) = \dfrac{x - [x]}{x + [x]}$, $x_0 = 3$

II.25) $f(x) = \dfrac{x - [x]}{x + [x]}$, $x_0 = 0$

II.26) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{|x + 2|}$, $x_0 = -2$

II.27) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{|x^2 - 1|}$, $x_0 = 1$

II.28) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a + 1, & \text{para } x < 1 \\ 3, & \text{para } x = 1 \\ x^2 - (b + 1)x + b, & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

a) Determine **a**, para que **f** seja contínua à esquerda em $x_0 = 1$.
b) Determine **a** para que exista $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.
c) Pode **f** ser contínua no ponto $x_0 = 1$?

Nos exercícios seguintes, de n.° II.29 a II.34, calcule os limites indicados.

II.29) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 4x - 5}{(x - 1)^2}$

II.30) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{5 - 2x}{x^3 - 1}$

II.31) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3 - 2x}{(x + 2)^2}$

II.32) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x - 4}{|x - 3|}$

II.33) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3x^2 - 2x - 7}{(3 - x)^3}$

II.34) $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{x^4 - a^4}{(x^2 - a^2)^2}$ $(a > 0)$

Nos exercícios seguintes, de n.° II.35 a II.41, calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

II.35) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 + 2}$

II.36) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2} - \sqrt{x^3 - 2}$

II.37) $f(x) = \sqrt[3]{x + 5}$

II.38) $f(x) = \dfrac{(x + 2)(2x + 7)(3x - 5)}{2x^3 - x + 1}$

II.39) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x$

II.40) $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x^4 + 1}}{x^3 - \sqrt{x^6 + 1}}$

II.41) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}} - \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 1}}$

II.42) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x + 1)\sqrt{\dfrac{x}{x + 2}} - x - 1\right]$

II.43) Determine **a**, sabendo que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 + x - 4}{ax^2 - 3} = \frac{3}{5}$$

Nos exercícios seguintes, de n.° II.44 a II.48, calcule os limites indicados.

II.44) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\text{sen } 5x}$

II.45) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 4x}{\text{tg } 6x}$

II.46) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 5x}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}$

II.47) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 x}{1 - \text{sen } x}$

II.48) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{sen } 4x}{1 - \sqrt{2} \cos x}$

Nos exercícios seguintes, de n.° II.49 a II.53, calcule os limites indicados.

II.49) $\lim\limits_{x \to +\infty} 8^x$

II.50) $\lim\limits_{x \to 2} 3^{\frac{x - 1}{2x - 1}}$

II.51) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{\frac{2 - x^4}{2 - x^3}}$

II.52) $\lim\limits_{x \to 8} 4^{\frac{x^2 - 64}{(\sqrt[3]{x} - 2) \cdot 192}}$

II.53) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (0{,}2)^{\sec x}$

Nos exercícios seguintes, de n.° II.54 a II.56, calcule os limites indicados.

II.54) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{3}} x$

II.55) $\lim\limits_{x \to 3} \log_{36} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$

II.56) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sec x$

Nos exercícios seguintes, de n.° II.57 a II.63, calcule os limites indicados.

II.57) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{3}{4x}\right)^x$

II.58) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - 3x)^{\frac{1}{2x}}$

II.59) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x - 2}{3x + 2}\right)^x$

II.60) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x + 8}{x + 6}\right)^{3x + 5}$

II.61) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2^x - 8}{x - 3}$

II.62) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - e^x}{x \cdot e^x}$

II.63) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - x)[\ln (x + 3) - \ln x]$

PARTE III

Derivadas

Capítulo 10 — **Derivadas**

Capítulo 11 — **Algumas regras de derivação**

Capítulo 12 — **Derivada de uma função composta**

Capítulo 13 — **Funções inversas e derivadas**

Capítulo 14 — **Algumas aplicações das derivadas**

Capítulo 15 — **Variação das funções**

Capítulo

10

Derivadas

10.1 — INTRODUÇÃO

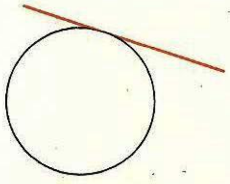
O conceito de *limite*, estudado nos capítulos anteriores, é a base do chamado *cálculo infinitesimal* que, ao surgir, era constituído de duas partes aparentemente distintas: o *cálculo diferencial* e o *cálculo integral*. No entanto logo foi mostrado (através do Teorema Fundamental do Cálculo, que será visto no capítulo 18) que estes dois cálculos estão intimamente relacionados. Neste capítulo, com a definição de **derivada**, damos início ao estudo do cálculo diferencial e nos capítulos 16, 17 e 18 apresentaremos noções do cálculo integral.

10.2 — RETA TANGENTE A UMA CURVA

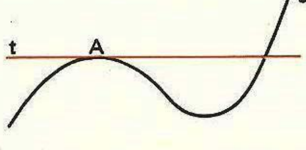
Um dos problemas que levaram à definição de *derivada* foi o da determinação da equação da reta tangente a uma curva plana em um ponto. Este problema é de resolução simples no caso de uma circunferência (veja capítulo 11 do volume 6 desta coleção) mas já não é tão simples no caso de outras curvas.

Vamos inicialmente esclarecer, *de modo informal*, o que entendemos por **reta tangente a uma curva**. Em Geometria Plana costuma-se definir a reta tangente à circunferência como sendo a reta do plano da circunferência que encontra a circunferência em **apenas um ponto** (figura 1). Essa é uma boa definição para a circunferência mas já não é boa para outras curvas. Consideremos por exemplo os casos das figuras 2 e 3.

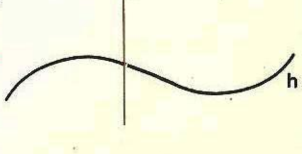
Na figura 2 a reta **t** *é tangente à curva* **g** no ponto A, mas encontra a curva em *mais de um ponto*. No caso da figura 3, a reta **s** encontra a curva **h** em apenas *um ponto* mas *não é tangente à curva* nesse ponto. Precisamos então de uma outra definição que sirva para qualquer caso.



(Fig. 1)



(Fig. 2)



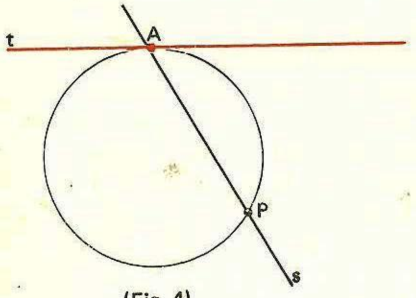
(Fig. 3)

Consideremos uma circunferência C e uma reta **t** tangente a ela no ponto A. Em seguida tomemos sobre C um ponto P distinto de A; os pontos A e P determinam a reta **s** (figura 4). Suponhamos agora que o ponto P "aproxima-se" de A como mostra a figura 5.

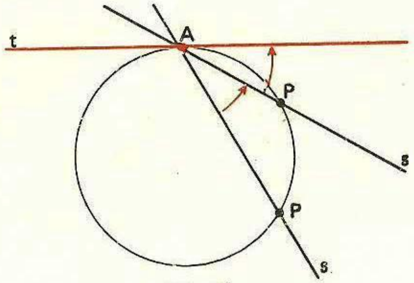
A figura 5 mostra que **s** "aproxima-se" de **t**. Temos então a nova "definição":

a tangente **t** no ponto A é o "limite"
da reta **s** à medida que P "aproxima-se"
de A (se esse "limite" existir)

A palavra "limite" foi aqui usada de um modo informal; porém mais adiante tornaremos nossa linguagem mais precisa.



(Fig. 4)

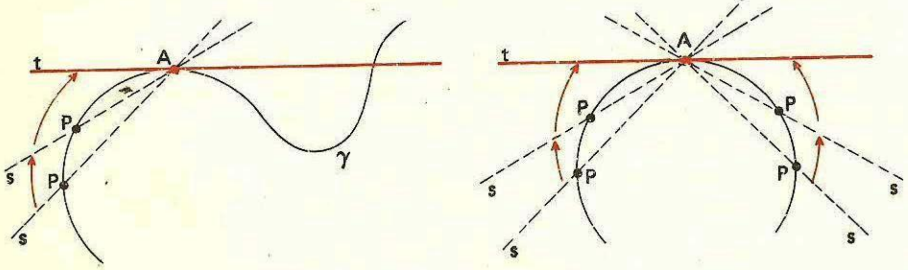


(Fig. 5)

Exemplo

Consideremos o ponto A sobre a curva γ. Em seguida consideremos sobre γ o ponto P distinto de A. Os pontos A e P determinam a reta **s**. Fazendo P aproximar-se de A, a reta **s** aproxima-se de **t** que é a reta tangente à curva no ponto A.

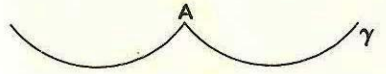
Devemos deixar claro que só diremos que existe a tangente à curva no ponto A, quando a reta **s** aproxima-se de uma **única** reta **t**, à medida que o ponto P aproxima-se de A, *por qualquer um dos dois lados*. É o caso, por exemplo, da figura 6.



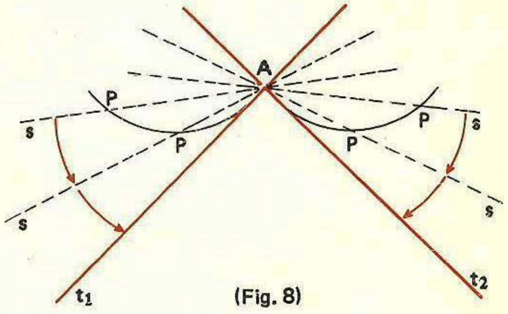
(Fig. 6)

No entanto, há casos em que, dependendo do "lado" pelo qual fazemos o ponto P aproximar-se do ponto A, obtemos uma "reta limite" diferente. É

o caso, por exemplo, do ponto A pertencente à curva γ da figura 7. Ao fazermos o ponto P aproximar-se do ponto A, obtemos duas retas limites: t_1 e t_2 (figura 8). Neste caso dizemos que *não existe* a tangente no ponto A. Podemos no entanto dizer que *existem duas* tangentes laterais: t_1 e t_2. (Temos aqui uma analogia com os limites laterais.)

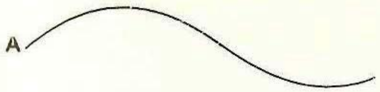


(Fig. 7)

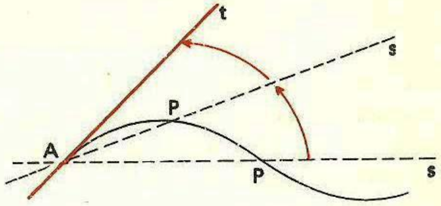


(Fig. 8)

Vejamos agora o caso em que o ponto A é extremidade da curva (figura 9). Neste caso, obviamente, só podemos fazer o ponto P aproximar-se de A por um dos lados, obtendo a *tangente lateral* **t** (figura 10). Diremos que essa tangente lateral é a tangente no ponto A.



(Fig. 9)



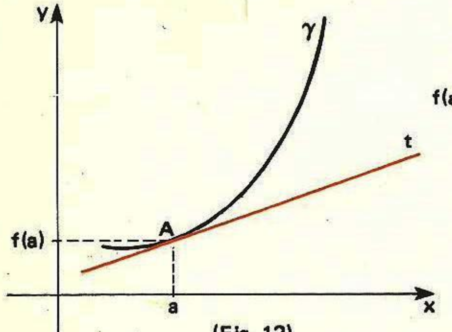
(Fig. 10)

Para finalizar este item, citemos o caso em que o ponto A está no interior de um segmento de reta. Neste caso a reta tangente **t** é a reta suporte do segmento.

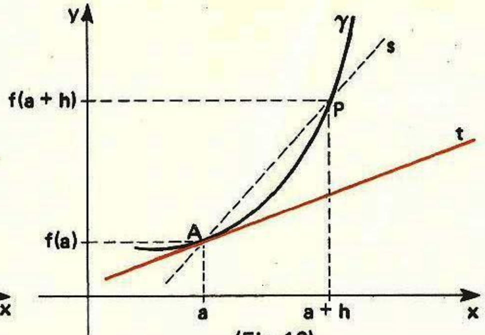
10.3 – RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Vamos agora resolver o problema da determinação da equação da reta tangente a uma curva em um ponto A, no caso em que essa curva é o gráfico de uma função. Caso a curva não seja gráfico de função (como por exemplo no caso de uma circunferência ou uma elipse) podemos dividi-la em "pedaços" tais que cada pedaço seja gráfico de uma função.

Consideremos então no plano cartesiano, um ponto A pertencente a uma curva γ que seja o gráfico de uma função **f** e a reta **t** tangente a γ em A. Vamos supor inicialmente que A não seja extremo da curva e que **t** não seja vertical.



(Fig. 12)



(Fig. 13)

As coordenadas de A são **a** e f(a). Assim, conforme sabemos da Geometria Analítica (ver capítulo 4 do volume 6 desta coleção), a equação de **t** é

$$y - f(a) = m_t (x - a) \qquad (10.1)$$

onde m_t é o coeficiente angular de **t**. Portanto, para solucionarmos o problema, só nos falta obter m_t. Sendo $h \neq 0$, consideremos sobre γ o ponto P de coordenadas $a + h$ e $f(a + h)$, de modo que os pontos A e P determinam a reta **s**. O coeficiente angular de **s** é

$$m_s = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ao fazermos P aproximar-se de A teremos:

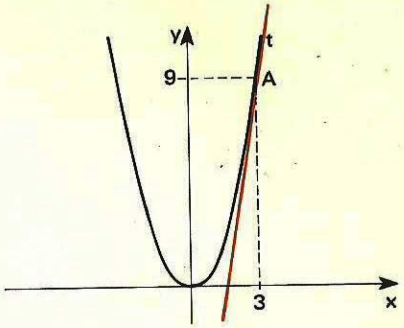
h tendendo a zero
s tendendo a **t**
m_s tendendo a m_t

Assim podemos definir m_t por

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad (10.2)$$

se esse limite existir.

Exemplo



Vamos determinar a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto A de abscissa 3. Como $f(3) = 9$, o ponto A tem ordenada 9 e a equação da reta **t**, tangente ao gráfico em A é:

$$y - 9 = m_t(x - 3) \qquad (I)$$

Mas, de acordo com a fórmula 10.2, temos:

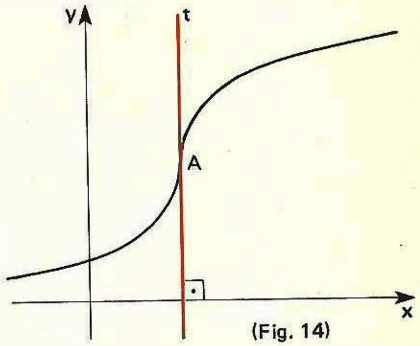
$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$

Substituindo em I obtemos

$$y - 9 = 6(x - 3) \quad \text{ou} \quad y = 6x - 9$$

Ao tentarmos calcular o limite da fórmula 10.2 pode acontecer que obtenhamos resultados diferentes $h \to 0+$ e $h \to 0-$; neste caso teremos duas *tangentes laterais* distintas (veremos um exemplo no exercício 10.7). Pode acontecer também que o limite da fórmula 10.2 seja infinito (veremos um exemplo no exercício 10.8); quando isso ocorrer, em geral a tangente será vertical (como, por exemplo, no caso da figura ao lado.



(Fig. 14)

10.4 — DERIVADA DE UMA FUNÇÃO EM UM PONTO

Consideremos uma função **f** definida em uma vizinhança do ponto **a**. "Inspirados" na fórmula 10.2 definimos:

A **derivada de f** no ponto **a** é o número f'(a) dado por

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se esse limite existir e for finito.

Observemos que a definição é dada de modo que $f'(a)$ é o coeficiente angular m_t da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(a; f(a))$.

Sendo $y = f(x)$, façamos $h = \Delta x = x - a$ (ou $x = a + h$) e $\Delta y = \Delta f = f(x) - f(a)$. Com isso, a definição da derivada $f'(a)$ pode ser escrita de outros modos equivalentes:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Podemos definir também as derivadas laterais. A derivada à direita e a derivada à esquerda no ponto **a** são definidas respectivamente por:

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \text{e} \quad f'_-(a) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem e forem finitos. Portanto, para existir *a derivada* no ponto **a**, devem existir $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ e devemos ter $f'_+(a) = f'_-(a) = f'(a)$.

Dizer que **f** é derivável no ponto **a** significa que existe *a derivada* no ponto **a**.

Suponhamos que a função **f** esteja definida em um intervalo fechado $[a; b]$. Dizer que **f** é derivável nesse intervalo significa que são verificadas as três condições a seguir:

1.º) **f** é derivável em cada ponto do interior do intervalo;
2.º) **f** é derivável à direita no ponto **a**, isto é, existe $f'_+(a)$;
3.º) **f** é derivável à esquerda no ponto **b**, isto é, existe $f'_-(b)$.

Exercícios Resolvidos

10.1) Dada a função $f(x) = x^2 + 2x$, determine:

a) $f'(1)$
b) a equação da reta tangente ao gráfico de **f** no ponto de abscissa 1.

Solução

a) Temos

$$\begin{cases} f(1) = 1^2 + 2(1) = 3 \\ f(1 + h) = (1 + h)^2 + 2(1 + h) = h^2 + 4h + 3 \end{cases}$$

Portanto

$$f(1 + h) - f(1) = (h^2 + 4h + 3) - (3) = h^2 + 4h$$

Assim

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = 4$$

b) O gráfico da função é uma parábola e o ponto de abscissa 1 é o ponto $A(1; 3)$. A equação da reta **t**, tangente ao gráfico em A é

$$y - 3 = m(x - 1)$$

onde

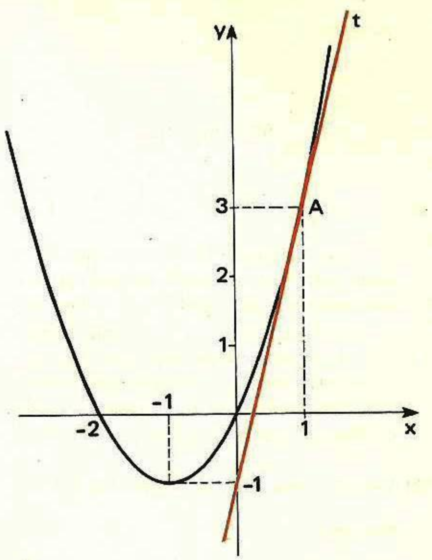
$$m = f'(1) = 4.$$

Portanto obtemos

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

ou

$$y = 4x - 1$$



10.2) Sendo $f(x) = x^3$, calcule $f'(a)$ onde **a** é um número real qualquer.

Solução

$$\begin{cases} f(a) = a^3 \\ f(a + h) = (a + h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 \end{cases}$$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \frac{(a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3) - (a^3)}{h} = \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h}$$

Assim

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (3a^2 + 3ah + h^2) = 3a^2$$

Compare este exercício com o exercício 6.39b.

10.3) Sendo $f(x) = \frac{x + 2}{x - 2}$ (com $x \neq 2$), calcule $f'(4)$.

Solução

$$\begin{cases} f(4) = \frac{4 + 2}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3 \\ f(4 + h) = \frac{4 + h + 2}{4 + h - 2} = \frac{6 + h}{2 + h} \end{cases}$$

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{6 + h}{2 + h} - 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2}{2 + h} = -1$$

10.4) Dada a função $f(x) = x$, calcule $f'(2)$.

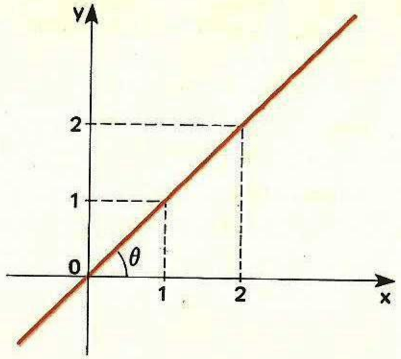
Solução

$$\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(2 + h) = 2 + h \end{cases}$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h) - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Na realidade, é fácil concluir que, neste caso, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ teremos $f'(a) = 1$. Graficamente isto significa que a tangente em qualquer ponto tem coeficiente angular $m = 1$, o que já era esperado, pois o gráfico de **f** é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares, que forma com o eixo Ox um ângulo $\theta = 45°$, e sabemos que $m = \operatorname{tg} \theta = 1$.



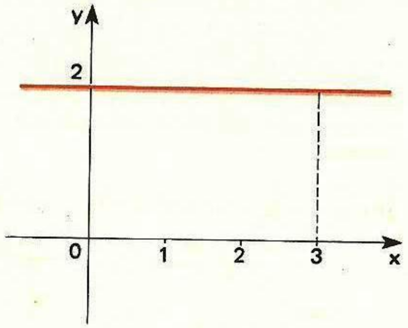
10.5) Consideremos a função constante $f(x) = 2$. Calcule $f'(3)$.

Solução

$$\begin{cases} f(3) = 2 \\ f(3 + h) = 2 \end{cases}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - 2}{h} = 0$$

Neste caso é fácil concluir que, para qualquer $a \in \mathbb{R}$, teremos $f'(a) = 0$. Isto significa que em qualquer ponto a reta tangente ao gráfico terá coeficiente angular $m = 0$ e portanto será paralela ao eixo Ox. Já devíamos esperar isto pois o gráfico de **f** é uma reta paralela ao eixo Ox.



10.6) Dada a função $f(x) = -x$, calcule $f'(a)$, onde **a** é um número real qualquer.

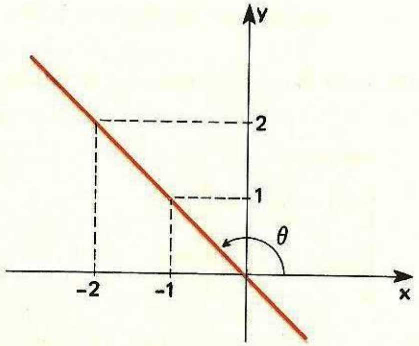
Solução

$$\begin{cases} f(a) = -a \\ f(a + h) = -(a + h) = -a - h \end{cases}$$

$$f(a + h) - f(a) = (-a - h) - (-a) = -h$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Neste caso, para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos $f'(a) = -1$. Isto significa que em qualquer ponto do gráfico, a reta tangente tem coeficiente angular $m = -1$. Este fato já era esperado, pois o gráfico de **f** é a reta bissetriz dos quadrantes pares e forma com o eixo Ox um ângulo $\theta = 135°$; portanto, seu coeficiente angular é $m = \operatorname{tg} \theta = -1$.



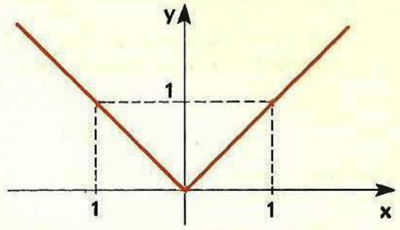
10.7) Dada a função $f(x) = |x|$, determine $f'(0)$.

Solução

$$\begin{cases} f(0) = |0| = 0 \\ f(0 + h) = |0 + h| = |h| \end{cases}$$

Supondo que $f'(0)$ exista, devemos ter

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$



No entanto esse limite não existe pois os limites laterais são diferentes e, assim, não existe $f'(0)$; mas podemos calcular as derivadas laterais.

a) Para $h \to 0+$ temos $h > 0$ e $|h| = h$; assim

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{h}{h} = 1$$

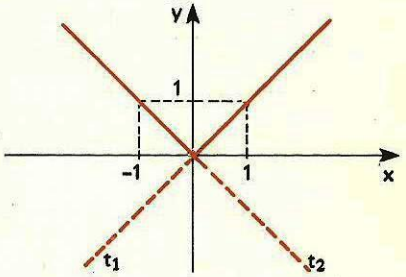
b) Para $h \to 0-$ temos $h < 0$ e $|h| = -h$; assim

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1$$

Portanto, no ponto *zero* não existem *a derivada* e *a reta tangente* mas existem *as derivadas laterais* e *as tangentes laterais* t_1 e t_2 cujos coeficientes angulares são respectivamente

$m_1 = f'_+(0) = 1$ e $m_2 = f'_-(0) = -1$

(ver figura).



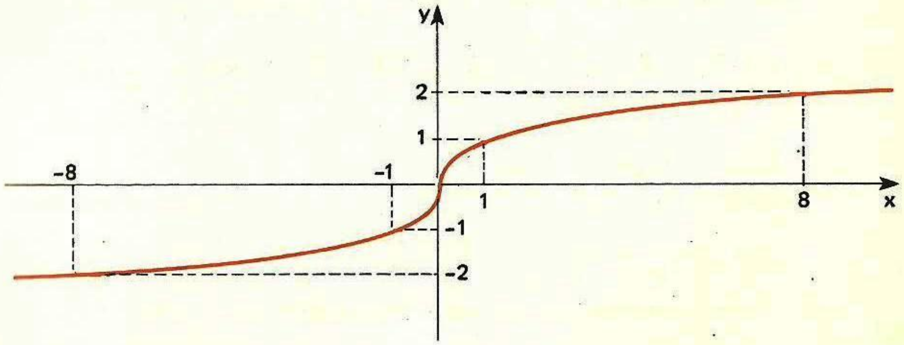
10.8) Dada a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$, determine $f'(0)$.

Solução

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt[3]{0} = 0 \\ f(0 + h) = \sqrt[3]{0 + h} = \sqrt[3]{h} \end{cases}$$

Se $f'(0)$ existisse, deveríamos ter

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}$$



Mas acontece que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = \infty$ e portanto *não existe* f'(0). O fato de o limite ser infinito, significa que, **no ponto zero**, a reta tangente ao gráfico da função é vertical, isto é, a reta tangente é o próprio eixo dos y e sua equação é $x = 0$.

10.9) Dada a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$, determine $f'(a)$ onde **a** é um número real qualquer não nulo.

Solução

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}}{h} \qquad \text{(I)}$$

Vamos racionalizar o numerador da fração, usando a identidade

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3.$$

$$\frac{\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}}{h} = \frac{\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}}{h}\cdot\frac{\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{a+h}\cdot\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{a+h}\cdot\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}} =$$

$$= \frac{(a+h) - (a)}{h\left(\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{(a+h)a} + \sqrt[3]{a^2}\right)} = \frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{(a+h)a} + \sqrt[3]{a^2}\right)}$$

Substituindo em I, temos

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{(a+h)a} + \sqrt[3]{a^2}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(a+h)^2} + \sqrt[3]{(a+h)a} + \sqrt[3]{a^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

Compare este exercício com o exercício 6.32h.

10.10) Consideremos a função $f(x) = \sqrt{x}$, com $x \in \mathbb{R}_+$. Calcule $f'(a)$, onde **a** é um número real qualquer tal que $a > 0$.

Solução

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \qquad \text{(I)}$$

Vamos racionalizar o numerador da fração, usando a identidade $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h}\cdot\frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{(a+h) - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} =$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}$$

Substituindo em I, temos

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

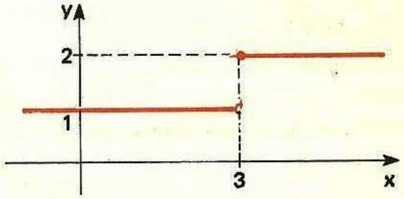
Compare este exercício com os exercícios 6.16 e 6.39c.

10.11) Consideremos a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{para } x \geq 3 \\ 1, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Verifique se existem as derivadas laterais no ponto $x = 3$.

Solução



Para $h > 0$ temos

$$\begin{cases} f(3) = 2 \\ f(3+h) = 2 \end{cases}$$

Assim

$$f'_+(3) = \lim_{h\to 0+}\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0+}\frac{2-2}{h} = 0$$

Portanto, existe a derivada à direita no ponto 3 e essa derivada é nula.

Para $h < 0$ temos $\begin{cases} f(3) = 2 \\ f(3+h) = 1 \end{cases}$

Assim

$$f'_-(3) = \lim_{h\to 0-}\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0-}\frac{1-2}{h} = +\infty$$

Portanto não existe a derivada à esquerda no ponto 3.

10.12) Considere as funções **f** e **g** dadas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cdot \text{sen}\,\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} x\cdot \text{sen}\,\dfrac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calcule

a) f'(0)

b) g'(0)

Solução

a) $$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cdot\text{sen}\,\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\text{sen}\,\frac{1}{h}\right)$$

Mas a função seno é limitada, isto é, temos $-1 \leq \text{sen}\,\frac{1}{h} \leq 1$ e portanto o limite acima é nulo. Assim, $f'(0) = 0$. (Veja o exercício 4.33)

b) $$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\text{sen}\,\dfrac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\text{sen}\,\frac{1}{h}$$

Porém este último limite não existe e assim não existe g'(0).

Exercícios Propostos

10.13) Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$, determine:

a) $f'(-2)$

b) a equação da reta tangente ao gráfico de **f** no ponto de abscissa -2.

10.14) Sendo $f(x) = x^3 + x^2$, calcule $f'(a)$ onde **a** é um número real qualquer.

10.15) Para cada função a seguir, calcule a derivada no ponto **a** dado.

a) $f(x) = 2x^3$; $a = -1$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$; $a = 3$

c) $f(x) = |x|$; $a = 4$

d) $f(x) = |x|$; $a = -4$

e) $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 5$

f) $f(x) = \sqrt{x-1}$; $a = 2$

10.16) Consideremos a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x \geq 1 \\ -x + 2, & \text{para } x < 1 \end{cases}$$

Esboce seu gráfico e em seguida determine:

a) $f'_+(1)$

b) $f'_-(1)$

c) equação da reta tangente ao gráfico, à direita, no ponto de abscissa 1.

d) equação da reta tangente ao gráfico, à esquerda, no ponto de abscissa 1

10.17) Seja a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{para } x \geq 1 \\ -x + 4, & \text{para } x < 1 \end{cases}$$

Esboce seu gráfico e em seguida determine:

a) $f'_+(1)$

b) $f'_-(1)$

10.18) Dada a função $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ determine:

a) $f'(2)$

b) equação da reta tangente ao gráfico no ponto de abscissa 2.

10.5 — CONTINUIDADE E DERIVADA

Teorema

> Se existe $f'(a)$, então **f** é contínua no ponto **a**.

Demonstração

Suponhamos que exista $f'(a)$. Temos então

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

De acordo com o que vimos no capítulo 5, para mostrar que **f** é contínua no ponto **a**, devemos mostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Assim

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a)\right] =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) + f(a) = [f'(a)] \cdot [0] + f(a) = f(a)$$

De acordo com este teorema, se a função é derivável num ponto, então ela deve ser contínua nesse ponto, isto é, não pode existir a derivada num ponto em que a função é descontínua. No entanto, devemos observar que *não vale* o recíproco do teorema: pode acontecer que uma função seja contínua em um ponto mas não seja derivável nesse ponto.

Exemplos

a) A função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua e derivável para todo $x \neq 0$ (veja exercício 10.9). No entanto, no ponto $x = 0$ a função é contínua mas não é derivável (veja exercício 10.8).

b) A função $f(x) = |x|$ é contínua no ponto $x = 0$; no entanto não é derivável nesse ponto (veja exercício 10.7).

c) Consideremos a função **f** dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Conforme vimos no exercício 10.12, esta função é derivável no ponto $x = 0$ e portanto ela é contínua nesse ponto.

d) Seja **g** a função dada por

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Esta função é contínua no ponto $x = 0$, pois

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \left[x \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right] = 0 = g(0)$$

No entanto essa função não é derivável no ponto $x = 0$ (veja exercício 10.12).

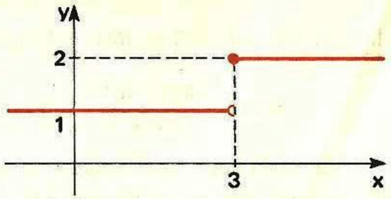
O teorema apresentado pode ser estendido para o caso em que tratamos de **derivada lateral** e **continuidade lateral**

> I) Se existe $f'_+(a)$, então **f** é contínua à direita no ponto **a**.
>
> II) Se existe $f'_-(a)$, então **f** é contínua à esquerda no ponto **a**.

Exemplo

Consideremos a função **f** dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{para } x \geqslant 3 \\ 1, & \text{para } x < 3 \end{cases}$$



Esta função já foi analisada no exercício 10.11 e lá vimos que $f'_+(3) = 0$ e que não existe $f'_-(3)$. Assim

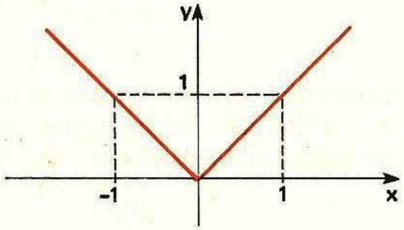
$$\begin{cases} \text{existe } f'_+(3) \Rightarrow \mathbf{f} \text{ é contínua à direita no ponto } 3 \\ \text{não existe } f'_-(3) \Rightarrow \mathbf{f} \text{ não é contínua à esquerda no ponto } 3 \end{cases}$$

Também é fácil concluir que

Se existem as derivadas laterais $f'_+(a)$ e $f'_-(a)$ então **f** é contínua no ponto **a**, mesmo que as derivadas laterais sejam distintas.

Exemplo

Seja a função $f(x) = |x|$. Já analisamos essa função no exercício 10.7 e lá vimos que $f'_+(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$. Assim, existem as derivadas laterais no ponto 0 (embora sejam distintas); portanto podemos concluir que **f** é contínua no ponto 0.



10.6 — FUNÇÃO DERIVADA

Consideremos a função **f** de domínio D e seja D′ o conjunto de todos os valores de **x** para os quais existe $f'(x)$. Podemos então definir uma nova função f', cujo domínio é D′ e que a cada $x \in D'$ associa $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A função f' é chamada **função derivada de f** ou, apenas, **derivada de f.**

Exemplo

Consideremos a função **f** de domínio $D = \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Nos exercícios 10.8 e 10.9 fizemos a análise dessa função e vimos que ela é derivável para todo $x \neq 0$; assim temos $D' = \mathbb{R}^*$. Vimos também que para todo $a \neq 0$ temos $f'(a) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$. Portanto, a *derivada de f* é a função f', de domínio $D' = \mathbb{R}^*$, dada por $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

10.7 — NOTAÇÕES

Até agora, estamos representando a derivada da função **f** pelo símbolo f'. No entanto, há outros. Sendo $y = f(x)$, os símbolos mais freqüentemente usados para representar a derivada de **f** são:

$$f', \quad Df, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad y'_x$$

A derivada de **f** no ponto **a** pode ser representada por:

$$f'(a), \; Df(a), \; \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}, \; y'_a$$

Capítulo

11

Algumas regras de derivação

11.1 — FUNÇÃO CONSTANTE

Consideremos a função constante definida por $f(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$. Temos.

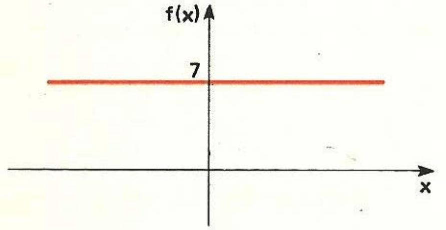
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = 0$$

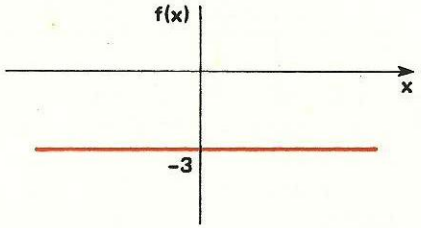
$$\boxed{f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0}$$

Exemplos

a) $f(x) = 7 \Rightarrow f'(x) = 0$

b) $f(x) = -3 \Rightarrow f'(x) = 0$





11.2 — FUNÇÃO POTÊNCIA

Seja a função $f(x) = x^n$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \qquad \text{(I)}$$

Mas, de acordo com a fórmula do Binômio de Newton (ver capítulo 18 do volume 4 desta coleção), temos

$$(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} \cdot h^3 + \ldots + \binom{n}{n} h^n$$

Substituindo em I, obtemos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} h^3 + \ldots + \binom{n}{n} h^n}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \binom{n}{3} x^{n-3} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^{n-1}\right] =$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

Portanto $\boxed{f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$

Ou então, escrevendo de modo mais reduzido

$$\boxed{(x^n)' = n \cdot x^{n-1}}$$

Exemplos

a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} = 4x^3$

b) $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

c) $(x^5)' = 5x^4$

d) $(x^6)' = 6x^5$

e) $f(x) = x \Rightarrow f(x) = 1 \cdot x^0 = 1$

A regra acima foi deduzida para o caso em que $n \in \mathbb{N}^*$. No entanto ela vale também para $n \in \mathbb{R}^*$, desde que estejam satisfeitas as condições de existência. Este fato será demonstrado por etapas no item 9 deste capítulo, no capítulo 12 e no capítulo 13.

Exemplos

a) $f(x) = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3 \cdot x^{-3-1} = -3 \cdot x^{-4}$ (para $x \neq 0$)

b) $f(x) = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5 \cdot x^{-6}$ (para $x \neq 0$)

c) $f(x) = x^{\frac{7}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{7}{2}-1} = \frac{7}{2} \cdot x^{\frac{5}{2}}$ (para $x \geqslant 0$)

d) Seja a função $f(x) = \frac{1}{x^4}$, onde $x \neq 0$. Sabemos que $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$; portanto

$$f'(x) = -4 \cdot x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$$

e) Nos exercícios 10.8 e 10.9 fizemos um estudo da derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Agora temos um modo mais rápido. Observando que $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, temos

$$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (\text{para } x \neq 0)$$

f) Seja $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$. Observando que $\sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}}$ temos

$$f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{5}{3}-1} = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

g) Consideremos a função $f(x) = x^{\sqrt{2}}$, com $x > 0$. Temos

$$f'(x) = \sqrt{2} \cdot x^{\sqrt{2}-1}$$

11.3 — FUNÇÃO SENO

Sendo $f(x) = \text{sen } x$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } (x+h) - \text{sen } x}{h} \qquad (I)$$

Vamos transformar o numerador em produto (veja capítulo 11 do volume 3 desta coleção):

$$\text{sen } (x+h) - \text{sen } x = 2 \text{ sen} \frac{x+h-x}{2} \cdot \cos \frac{x+h+x}{2} = 2 \text{ sen} \frac{h}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)$$

Substituindo em I:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2 \text{ sen} \frac{h}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\text{sen} \frac{h}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{h}{2} \right)}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} \cdot \lim_{h \to 0} \cos \left(x + \frac{h}{2} \right) = \cos x$$

Assim $\boxed{f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x}$

Podemos também dar esta regra de modo mais simples

$$\boxed{(\text{sen } x)' = \cos x}$$

11.4 — FUNÇÃO COSSENO

Sendo $f(x) = \cos x$, temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cos (x+h) - \cos x}{h} \qquad (I)$$

Transformemos o numerador em produto

$$\cos (x+h) - \cos x = -2 \text{ sen } \frac{x+h+x}{2} \cdot \text{sen } \frac{x+h-x}{2} =$$

$$= -2 \text{ sen} \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \text{sen } \frac{h}{2}$$

Substituindo em I

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-2 \text{ sen} \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \text{sen } \frac{h}{2}}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen} \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \text{sen } \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= -\lim_{h \to 0} \text{sen} \left(x + \frac{h}{2} \right) \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\text{sen } \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} = -\text{sen } x$$

Assim $\boxed{f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\text{sen } x}$

11.5 — DERIVADA DE f(x) = k · g(x)

Sendo **g** uma função derivável, consideremos a função **f** dada por

$$f(x) = k \cdot g(x)$$

onde **k** é um número real. Temos então:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{k \cdot g(x+h) - k \cdot g(x)}{h} =$$

$$= k \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = k \cdot g'(x)$$

Assim

$$f(x) = k \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = k \cdot g'(x)$$

ou, de modo mais simples,

$$[k \cdot g(x)]' = k \cdot g'(x)$$

Exemplos

a) $f(x) = 5 \cdot \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = 5\,(\text{sen } x)' = 5 \cdot \cos x$

b) $f(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 4(x^3)' = 4(3x^2) = 12x^2$

c) $f(x) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2(x)' = 2(1) = 2$

d) $f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$

e) $f(x) = 7\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 7(\sqrt{x})' = 7 \cdot (x^{1/2})' = 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$

f) $(7 \cdot \cos x)' = 7 \cdot (\cos x)' = 7(-\text{sen } x) = -7 \text{ sen } x$

11.6 — DERIVADA DA SOMA

Sendo **u** e **v** funções deriváveis num ponto **x**, vale a seguinte regra

$$f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Podemos também enunciar esta regra de modo mais condensado

$$(u + v)' = u' + v'$$

Demonstração

Sendo $f(x) = u(x) + v(x)$, temos

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] + [v(x+h) - v(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x)$$

Esta regra pode ser ampliada para o caso em que temos mais de duas funções. Assim, por exemplo, se **u**, **v** e **w** são funções deriváveis, temos

$$(u + v + w)' = u' + v' + w'$$

Por um caminho semelhante ao seguido acima, podemos demonstrar que

$$(u - v)' = u' - v'$$

Exemplos

a) $f(x) = \underbrace{x^3}_{u(x)} + \underbrace{\text{sen } x}_{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{3x^2}_{u'(x)} + \underbrace{\cos x}_{v'(x)}$

b) $f(x) = x^3 + x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 4$

c) $f(x) = x^2 + 5x + 7 \Rightarrow f'(x) = 2x + 5$

d) $f(x) = 5x^3 - \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = 5(3x^2) - \cos x = 15x^2 - \cos x$

e) $(\cos x + x^5)' = (\cos x)' + (x^5)' = -\text{sen } x + 5x^4$

Exercícios Resolvidos

11.1) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 8$

b) $f(x) = x^9$

c) $f(x) = x$

d) $f(x) = \frac{1}{x^5}$

e) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

g) $f(x) = \text{sen } x$

h) $f(x) = \cos x$

Solução

a) a função é constante e assim $f'(x) = 0$

b) $(x^9)' = 9 \cdot x^8$

c) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5 \cdot x^{-5-1} = -5 \cdot x^{-6} = \frac{-5}{x^6}$

e) Temos $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$; assim

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x^{1/4}} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[4]{x}} \text{ (para } x \neq 0)$$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{x^{2/5}} = x^{-\frac{2}{5}}$. Portanto:

$$f'(x) = -\frac{2}{5} \cdot x^{-\frac{2}{5}-1} = -\frac{2}{5} \cdot x^{-\frac{7}{5}} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{x^{7/5}} = \frac{-2}{5\sqrt[5]{x^7}}$$

g) $(\text{sen } x)' = \cos x$

h) $(\cos x)' = -\text{sen } x$

11.2) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 9 \cdot \text{sen } x$

b) $f(x) = 8x^5$

c) $f(x) = \frac{5}{x^2}$

d) $f(x) = 7\sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = x^7 + \text{sen } x$

f) $f(x) = \cos x - 6x^3$

g) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 8x + 10$

h) $f(x) = 3 \text{ sen } x - 7 \cos x + 4x^3$

Solução

a) $(9 \text{ sen } x)' = 9 (\text{sen } x)' = 9 \cos x$

b) $(8x^5)' = 8(x^5)' = 8(5x^4) = 40x^4$

c) $f(x) = \frac{5}{x^2} = 5x^{-2}$. Portanto

$$f'(x) = (5x^{-2})' = 5(x^{-2})' = 5(-2x^{-2-1}) = -10x^{-3} = \frac{-10}{x^3}$$

d) $f(x) = 7 \cdot \sqrt[3]{x} = 7 \cdot x^{\frac{1}{3}}$. Portanto

$$f'(x) = (7 \cdot x^{\frac{1}{3}})' = 7 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1}\right) = \frac{7}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{7}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

e) $(x^7 + \text{sen } x)' = (x^7)' + (\text{sen } x)' = 7x^6 + \cos x$

f) $(\cos x - 6x^3)' = (\cos x)' - (6x^3)' = (-\text{sen } x) - (6 \cdot 3 \cdot x^2) = -\text{sen } x - 18x^2$

g) $(5x^3 - 4x^2 + 8x + 10)' = (5x^3)' - (4x^2)' + (8x)' + (10)' =$

$= 5 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 8 + 0 = 15x^2 - 8x + 8$

h) $(3 \text{ sen } x - 7 \cos x + 4x^3)' = (3 \text{ sen } x)' - (7 \cos x)' + (4x^3)' =$

$= (3 \cos x) - [7(-\text{sen } x)] + (4 \cdot 3x^2) =$

$= 3 \cos x + 7 \text{ sen } x + 12x^2$

11.3) Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$, dê a equação da reta tangente ao gráfico de **f** no ponto de abscissa 2.

Solução

Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$, temos $f(2) = \frac{1}{2}$ e, portanto, o ponto de tangência é o ponto $\left(2; \frac{1}{2}\right)$. Assim, a reta tangente tem equação

$$y - \frac{1}{2} = m(x-2) \qquad \text{(I)}$$

onde $m = f'(2)$. Derivando a função **f** obtemos $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$, donde tiramos que

$$m = f'(2) = \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}$$

Substituindo em (I) obtemos $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2)$ ou, simplificando, $y = -\frac{x}{4} + 1$.

11.4) Consideremos a reta **s** de equação $y = 6x - 24$. Determine a equação da reta **t** que é paralela à reta **s** e é tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$.

Solução

A reta **s** cuja equação é $y = 6x - 24$ tem coeficiente angular $m_s = 6$, sendo m_t o coeficiente angular da reta **t**, devemos ter

$$m_t = m_s = 6$$

pois as retas **s** e **t** são paralelas. Por outro lado devemos ter

$$m_t = f'(x) = 2x$$

Portanto temos $2x = 6$, donde tiramos $x = 3$, isto é, o ponto de tangência tem abscissa $x = 3$. Como $f(3) = 9$, o ponto de tangência é $(3; 9)$. Assim, a equação de **t** é

$$y - 9 = m_t(x-3)$$

ou

$$y - 9 = 6(x-3)$$

ou ainda

$$y = 6x - 9$$

11.5) Sendo $f(x) = \text{sen } x$, dê a equação da reta tangente ao gráfico de **f** no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{6}$.

Solução

Se $f(x) = \text{sen } x$, então $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Assim, o ponto de tangência é $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$ e, supondo que a reta tangente não seja vertical, sua equação é

$$y - \frac{1}{2} = m\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \qquad \text{(I)}$$

onde $m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Mas $f'(x) = \cos x$ e, portanto, $m = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Substituindo em (I) temos

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

11.6) Dada a função $f(x) = -2x^2 + 4x$, determine a equação da reta **t** que **é tangente ao gráfico no** ponto de abscissa $x = 1$.

Solução

Sendo $f(x) = -2x^2 + 4x$, temos $f(1) = -2(1)^2 + 4(1) = 2$. Assim, **o ponto de tangência** é $A(1; 2)$. Supondo que a reta **t** não seja vertical, sua equação é

$$y - 2 = m(x - 1) \qquad \text{(I)}$$

onde $m = f'(1)$. Temos, então,

$$f'(x) = (-2x^2 + 4x)' = -4x + 4$$

e assim: $m = f'(1) = -4(1) + 4 = 0$.

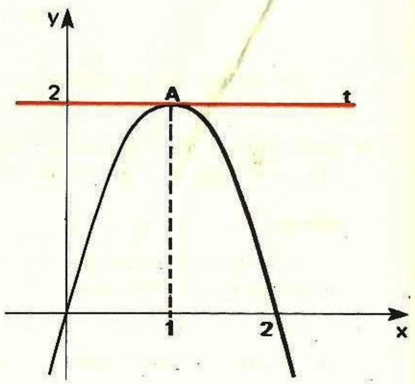
Isto quer dizer a reta **t** é horizontal e sua equação é (fazendo $m = 0$ na equação I)

$$y - 2 = 0$$

ou

$$y = 2$$

Na figura vemos representado o gráfico de **f** (que é uma parábola) e a reta t. O ponto de tangência é o vértice da parábola.



11.7) Sendo $f(x) = |x|$, determine $f'(x)$.

Solução

Para $x \geqslant 0$ temos $|x| = x$ e, portanto, $f'(x) = (x)' = 1$. Daí tiramos que $f'_+(0) = 1$ (já havíamos concluído isto no exercício 10.7).

Para $x \leqslant 0$ temos $|x| = -x$ e, portanto, $f'(x) = (-x)' = -1$. Daí tiramos que **$f'_-(0) = -1$.**

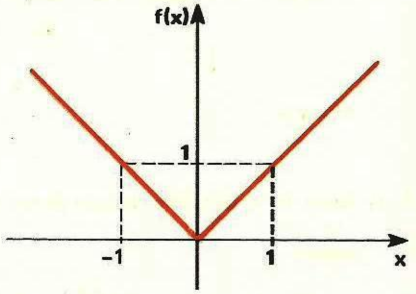
Como $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ não existe $f'(0)$, isto é, a função f não é derivável no ponto $x = 0$.

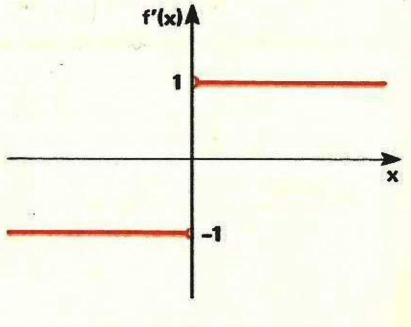
Temos então

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0 \\ -1, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

ou, de modo mais conciso,

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$





11.8) Dê a **derivada da função** $f(x) = x \cdot |x|$.

Solução

Para $x \geqslant 0$ temos $|x| = x$ e portanto

$$f(x) = x \cdot x = x^2$$

donde

$$f'(x) = 2x.$$

Daí **tiramos que** $f'_+(0) = 2(0) = 0$.

Para $x \leqslant 0$ temos $|x| = -x$ e assim

$$f(x) = x(-x) = -x^2$$

donde

$$f'(x) = -2x$$

Daí **tiramos que** $f'_-(0) = -2(0) = 0$.

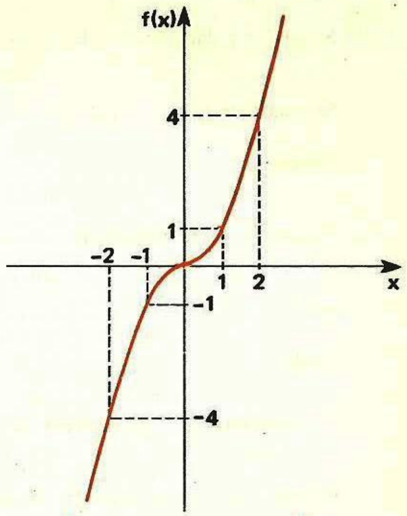
Portanto, temos $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$. Isto **significa que f é derivável** no ponto $x = 0$ e **que** $f'(0) = 0$. **Podemos** então dizer, que no ponto $x = 0$ **a reta tangente** é o eixo x.

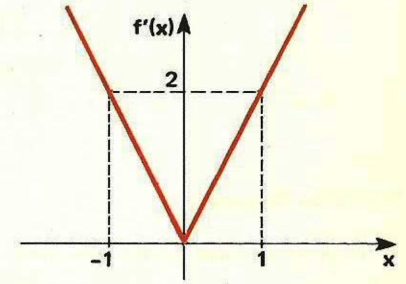
Em resumo:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{para } x \geqslant 0 \\ -2x, & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

ou, **de modo mais** conciso,

$$f'(x) = |2x|$$





11.9) **Determine a função polinomial** $y = f(x)$ que satisfaz a condição

$$y + y' = 2x^2 + 5x + 4$$

Solução

Como a soma $y + y'$ é de grau 2 concluímos que o polinômio **y** é de grau 2. Assim

$$y = ax^2 + bx + c$$

onde **a, b e c são constantes**, com $a \neq 0$. Portanto temos

$$y' = 2ax + b$$

e, **de acordo com a condição** do enunciado:

$$y + y' = 2x^2 + 5x + 4$$

$$(ax^2 + bx + c) + (2ax + b) = 2x^2 + 5x + 4$$

$$ax^2 + (2a + b)x + (b + c) = 2x^2 + 5x + 4$$

Por **identidade de polinômios** temos $\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 5 \\ b + c = 4 \end{cases}$

Resolvendo o sistema obtemos: $a = 2$, $b = 1$ e $c = 3$. Assim o polinômio procurado é $y = 2x^2 + x + 3$.

11.10) Sejam **f** e **g** duas funções deriváveis, tais que, para todo **x**,

$$2f(x) + 3g(x) = 14x + 4$$

Sabendo que $f(1) = 6$ e $f'(2) = 13$, calcule $g(1)$ e $g'(2)$.

Solução

$$2f(x) + 3g(x) = 14x + 4 \qquad (I)$$

Fazendo $x = 1$ na equação (I), obtemos

$$2f(1) + 3\,g(1) = 14 \cdot (1) + 4$$

isto é

$$2(6) + 3 \cdot g(1) = 18$$

donde

$$g(1) = 2.$$

Derivando os dois membros da equação (I) obtemos

$$2\,f'(x) + 3\,g'(x) = 14 \qquad (II)$$

Fazendo $x = 2$ na equação (II) obtemos

$$2\,f'(2) + 3\,g'(2) = 14$$

isto é

$$2(13) + 3\,g'(2) = 14$$

donde

$$g'(2) = -4$$

Exercícios Propostos

11.11) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 43$
b) $f(x) = x^5$
c) $f(x) = x$
d) $f(x) = \frac{1}{x^3}$
e) $f(x) = \sqrt{x}$
f) $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$
g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[2]{x^5}}$
h) $f(x) = 7x^5$
i) $f(x) = 4 \cdot \text{sen}\,x$
j) $f(x) = \frac{8}{x^3}$
k) $f(x) = 5\sqrt{x}$
l) $f(x) = x^{\pi}$
m) $f(x) = x^{\sqrt{3}}$

11.12) Derive as seguintes funções:

a) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 7x + 9$
b) $f(x) = x^6 + 2\,\text{sen}\,x - 3\cos x$
c) $f(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{6} + \frac{3\,\text{sen}\,x}{4}$

11.13) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^4$ no ponto de abscissa $x = 2$.

11.14) Seja **s** a reta de equação $y = 6x + 7$. Determine a equação da reta que é perpendicular a **s** e tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$.

11.15) Para qual ponto da curva $y = x^3$ o coeficiente angular da reta tangente é igual a 12?

11.16) Sendo $f(x) = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x + 5\cos x$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de **f** no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{3}$.

11.17) Seja $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 3$. Determine a equação da reta que é tangente ao gráfico de **f** no ponto de abscissa $x = 2$.

11.18) Dê as derivadas das funções:

a) $f(x) = x^3 \cdot |x|$
b) $f(x) = x^2 \cdot |x|$
c) $f(x) = |x - 3|$
d) $f(x) = (x - 3) \cdot |x - 3|$

11.19) Seja **t** a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \text{sen}\,x$ no ponto de abscissa **a**. Mostre que, se **t** passa pela origem, então $a = \text{tg}\,a$.

11.20) Sendo $f(x) = x^n$, com $n \in \mathbb{N}^*$, resolva a equação $f(x) = f'(x)$.

11.21) Determine a função polinomial $y = f(x)$ que satisfaz a condição

$$y \cdot y' = 2x^3 + 6x^2 + 10x + 6$$

11.22) Suponha que o gráfico da função $f(x) = x^2 + bx + c$ tem uma reta tangente no ponto (0; 1) cujo coeficiente angular é igual a 2. Determine os valores de **b** e **c**.

11.23) Determine as constantes **a**, **b** e **c** sabendo que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(0) = 4$, $f'(1) = 2$ e $f'(2) = 1$.

11.24) Sejam **f** e **g** duas funções deriváveis tais que, para todo **x**,

$$3f(x) - g(x) = x^2 - 10x + 8$$

Sabendo que $f(2) = -1$ e $f'(3) = 3$, calcule $g(2)$ e $g'(3)$.

11.7 – DERIVADA DO PRODUTO

Sendo **u** e **v** funções deriváveis num ponto **x**, vale a regra:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Podemos enunciar a regra de modo mais condensado:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Demonstração

Em primeiro lugar observemos que

$$f(x + h) - f(x) = u(x + h) \cdot v(x + h) - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= \{u(x + h) - u(x)\} \cdot v(x + h) + u(x) \cdot \{v(x + h) - v(x)\}$$

Assim

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{u(x+h) - u(x)\} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \{v(x+h) - v(x)\}}{h} =$$

$$= \left\{\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} v(x+h)\right\} + \left\{\lim_{h\to 0} u(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right\} =$$

$$= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Exemplos

a) $f(x) = \underbrace{(x^3)}_{u(x)} \cdot \underbrace{(\text{sen } x)}_{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \underbrace{(3x^2)}_{u'(x)} \cdot \underbrace{(\text{sen } x)}_{v(x)} + \underbrace{(x^3)}_{u(x)} \cdot \underbrace{(\cos x)}_{v'(x)}$

b) $(x^5 \cdot \cos x)' = (x^5)' \cdot (\cos x) + (x^5) \cdot (\cos x)' = (5x^4) \cdot \cos x + x^5(-\text{sen } x) =$

$= 5x^4 \cos x - x^5 \text{ sen } x$

A regra que acabamos de deduzir pode ser ampliada para os casos em que temos o produto de mais de duas funções. Assim, por exemplo, sendo **u**, **v**, **w** e **z** funções deriváveis, temos

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot z)' = u' \cdot v \cdot w \cdot z + u \cdot v' \cdot w \cdot z + u \cdot v \cdot w' \cdot z + u \cdot v \cdot w \cdot z'$$

Exemplo

Sendo $f(x) = x^2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$, temos

$$f'(x) = (x^2)' \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + x^2 \cdot (\text{sen } x)' \cdot \cos x + x^2 \cdot \text{sen } x \cdot (\cos x)' =$$

$$= 2x \cdot \text{sen } x \cos x + x^2 \cdot \cos x \cdot \cos x + x^2 \cdot \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x) =$$

$$= 2x \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + x^2 \cdot \cos^2 x - x^2 \text{ sen}^2 x$$

11.8 — DERIVADA DO QUOCIENTE

Sejam **u** e **v** funções deriváveis no ponto **x**, com $v(x) \neq 0$. Vale então a regra:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

que pode ser enunciada de modo mais condensado:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Demonstração

Em primeiro lugar observemos que

$$f(x+h) - f(x) = \frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x+h) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)} =$$

$$= \frac{\{u(x+h) - u(x)\} \cdot v(x) - u(x) \cdot \{v(x+h) - v(x)\}}{v(x+h) \cdot v(x)}$$

Assim

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\{u(x+h) - u(x)\} \cdot v(x) - u(x) \cdot \{v(x+h) - v(x)\}}{h \cdot v(x+h) \cdot v(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left\{\frac{u(x+h) - u(x)}{h}\right\} \cdot v(x) - u(x) \cdot \left\{\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right\}}{v(x+h) \cdot v(x)} =$$

$$= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemplos

a) Seja $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x^3}$, com $x \neq 0$. Temos, então

$$f'(x) = \frac{(\text{sen } x)' \cdot x^3 - \text{sen } x \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{(\cos x) \cdot x^3 - \text{sen } x \cdot (3x^2)}{x^6} =$$

$$= \frac{x \cdot \cos x - 3 \text{ sen } x}{x^4}$$

b) Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{x^3}$, com $x \neq 0$. Temos

$$f'(x) = \frac{(1)' \cdot x^3 - (1) \cdot (x^3)'}{(x^3)^2} = \frac{0 \cdot x^3 - 3x^2}{x^6} = \frac{-3x^2}{x^6} = \frac{-3}{x^4}$$

11.9 — FUNÇÃO POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO

Já sabemos que, sendo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Consideremos agora a função $f(x) = x^p$, onde **p** é um número inteiro negativo, isto é, $p = -n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Assim:

$$f(x) = x^p = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Aplicando a regra da derivada do quociente, temos

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - (1) \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{-n \cdot x^{n-1}}{x^{2n}} =$$
$$= -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1} = p \cdot x^{p-1}$$

Portanto $\boxed{(x^p)' = p \cdot x^{p-1}}$ $p \in \mathbb{Z}^*$

11.10 — FUNÇÕES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE E COSSECANTE

Já sabemos como derivar as funções **seno** e **cosseno**. Com o auxílio da regra da derivada do quociente podemos obter as derivadas das funções tangente, cotangente, secante e cossecante. Para isso, basta lembrar que

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \quad \text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \text{e} \quad \text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$$

a) Função tangente

Sendo $f(x) = \text{tg } x$, temos

$$f'(x) = \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x}\right)' = \frac{(\text{sen } x)' \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$
$$= \frac{(\cos x) \cdot \cos x - \text{sen } x(-\text{sen } x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Assim $\boxed{f(x) = \text{tg } x \Rightarrow f'(x) = \sec^2 x}$

b) Função cotangente

$$\boxed{f(x) = \text{cotg } x \Rightarrow f'(x) = -\text{cossec}^2 x}$$

Deixamos a demonstração deste caso como exercício.

c) Função secante

Se $f(x) = \sec x$, temos

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)' \cdot \cos x - (1) \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(0) \cdot \cos x - 1 \cdot (-\text{sen } x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\text{sen } x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \sec x \cdot \text{tg } x$$

Assim $\boxed{f(x) = \sec x \Rightarrow f'(x) = \sec x \cdot \text{tg } x}$

d) Função cossecante

$$\boxed{f(x) = \text{cossec } x \Rightarrow f'(x) = -\text{cossec } x \cdot \text{cotg } x}$$

Deixamos a demonstração deste caso como exercício.

Exercícios Resolvidos

11.25) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = (x^3 + x^2) \cdot \text{sen } x$

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^4}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

d) $f(x) = x^3 \cdot \text{sen } x \cdot \text{tg } x$

e) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x \cdot \cos x}{x^3}$

f) $f(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x \cdot \cos x}$

Solução

a) $f'(x) = (x^3 + x^2)' \cdot \text{sen } x + (x^3 + x^2) \cdot (\text{sen } x)' = (3x^2 + 2x) \cdot \text{sen } x + (x^3 + x^2) \cdot \cos x$

b) $f'(x) = \dfrac{(\cos x)' \cdot x^4 - \cos x \cdot (x^4)'}{(x^4)^2} = \dfrac{(-\text{sen } x) \cdot x^4 - \cos x \cdot (4x^3)}{x^8} =$

$= \dfrac{-x^4 \cdot \text{sen } x - 4x^3 \cdot \cos x}{x^8} = \dfrac{-x \cdot \text{sen } x - 4 \cos x}{x^5}$

c) $f'(x) = \frac{(1)' \cdot (x^2+1) - (1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{0 \cdot (x^2+1) - (2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

d) $f'(x) = (x^3)' \cdot \text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x + x^3 \cdot (\text{sen}\, x)' \cdot \text{tg}\, x + x^3 \cdot \text{sen}\, x \cdot (\text{tg}\, x)' =$

$= 3x^2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x + x^3 \cdot \underbrace{\cos x \cdot \text{tg}\, x}_{\text{sen}\, x} + x^3 \cdot \text{sen}\, x \cdot \sec^2 x =$

$= 3x^2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \text{tg}\, x + x^3 \cdot \text{sen}\, x + x^3 \cdot \text{sen}\, x \cdot \sec^2 x$

e) $f'(x) = \frac{(\text{sen}\, x \cdot \cos x)' \cdot x^3 - (\text{sen}\, x \cdot \cos x) \cdot (x^3)'}{(x^3)^2}$ (I)

Porém, $(\text{sen}\, x \cdot \cos x)' = (\text{sen}\, x)' \cdot \cos x + \text{sen}\, x \cdot (\cos x)' =$

$= \cos x \cdot \cos x + \text{sen}\, x\,(-\text{sen}\, x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Substituindo em (I):

$$f'(x) = \frac{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \cdot x^3 - (\text{sen}\, x \cdot \cos x) \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \cdot x - (\text{sen}\, x \cdot \cos x) \cdot 3}{x^4}$$

f) $f'(x) = \frac{(1)' \cdot (\text{sen}\, x \cos x) - (1) \cdot (\text{sen}\, x \cos x)'}{(\text{sen}\, x \cdot \cos x)^2}$ (I)

Mas, conforme vimos acima,

$(\text{sen}\, x \cdot \cos x)' = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Assim, substituindo em (I):

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (\text{sen}\, x \cdot \cos x) - (\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}$$

11.26) Calcule a soma $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.

Solução

As parcelas dessa soma formam uma progressão *aritmético – geométrica*, a qual foi estudada por nós no capítulo 6 do volume 2 desta coleção. Assim, poderíamos calcular S_n pelo processo lá estudado; no entanto há um outro processo usando derivadas.

Considerando a função

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n$$

é fácil perceber que $S_n = f'(x)$. Observemos também que a seqüência

$$(x;\ x^2;\ x^3;\ x^4;\ \ldots;\ x^n)$$

é uma *progressão geométrica* (PG) de razão x. Assim, usando a fórmula da soma dos termos de uma PG, temos

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1} \quad (\text{para } x \neq 1)$$

Portanto

$$S_n = f'(x) = \left(\frac{x^{n+1} - x}{x - 1}\right)' = \frac{(x^{n+1} - x)' \cdot (x-1) - (x^{n+1} - x) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{[(n+1)x^n - 1] \cdot (x-1) - (x^{n+1} - x)(1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

O cálculo que fizemos foi para $x \neq 1$. Se $x = 1$ temos

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$$

isto é, temos a soma dos termos de uma *progressão aritmética*:

$$S_n = \frac{(1+n)n}{2}$$

Exercícios Propostos

11.27) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 \cdot \text{sen}\, x$

b) $f(x) = x^5 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x$

c) $f(x) = \frac{3x^2}{\cos x}$

d) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 3}$

e) $f(x) = \frac{1}{3x^2 + 5x}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^3 + x} + \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

g) $f(x) = \text{tg}\, x + \text{cotg}\, x$

h) $f(x) = \sec x + \text{cossec}\, x$

i) $f(x) = x^3 \cdot \text{tg}\, x$

j) $f(x) = x^2 + 7 \sec x$

11.28) Sendo $f(x) = x^2 \cdot \text{sen}\, x$, dê a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{2}$.

11.29) Sendo $y = f(x) = \frac{\text{sen}\, x}{\sqrt{x}}$, determine y'.

11.11 – FUNÇÃO EXPONENCIAL

Consideremos a função exponencial $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$. Temos

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \quad \text{(I)}$$

Mas, conforme vimos no capítulo 9, temos $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$. Substituindo em (I):

$$f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Assim

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$$

Um caso particular importante é aquele em que a base é o número **e**.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \cdot \ln e = e^x$$

$$\boxed{f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x}$$

11.12 — FUNÇÃO LOGARITMO

Consideremos inicialmente a função logaritmo de base **e**

$$f(x) = \log_e x = \ln x \quad (\text{onde } x > 0)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{\frac{1}{h} \cdot \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right\} = \lim_{h\to 0} \left\{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right\} =$$

$$= \ln\left\{\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right\} \qquad (I)$$

Fazendo $\frac{h}{x} = y$, note que, para $h \to 0$ temos $y \to 0$. Assim

$$\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{xy}} = \lim_{y\to 0} \left[(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^{\frac{1}{x}} = \{\underbrace{\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}}_{e}\}^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$$

Substituindo em (I) obtemos:

$$f'(x) = \ln\{e^{\frac{1}{x}}\} = \frac{1}{x}$$

Portanto

$$\boxed{f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$$

Consideremos agora o caso da função logaritmo de base **a** qualquer, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \neq 1$:

$$f(x) = \log_a x \qquad (\text{onde } x > 0)$$

Pela fórmula de mudança de base, temos

$$f(x) = \log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$$

Assim $$f'(x) = \left(\frac{1}{\ln a} \cdot \ln x\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Portanto $$\boxed{f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$$

No capítulo 12 (exercício 12.11) demonstraremos que

$$\boxed{f(x) = \log_a |x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}}$$

Exercícios Resolvidos

11.30) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 5^x$
b) $f(x) = e^x$
c) $f(x) = 7^{2x}$
d) $f(x) = 3^{2x+4}$
e) $f(x) = \ln x$
f) $f(x) = \log_2 x$
g) $f(x) = \log_2 x^3$
h) $f(x) = \log_2 x^4$

Solução

a) $(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$

b) $(e^x)' = e^x$

c) $f(x) = 7^{2x} = (7^2)^x = 49^x$. Portanto: $f'(x) = 49^x \cdot \ln 49$

d) $f(x) = 3^{2x+4} = 3^{2x} \cdot 3^4 = (3^2)^x \cdot 3^4 = 9^x \cdot 81$. Portanto: $f'(x) = 81 \cdot (9^x)' = 81 \cdot 9^x \cdot \ln 9$.

e) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

f) $(\log_2 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

g) $f(x) = \log_2 x^3 = 3 \cdot \log_2 x$. Portanto:

$$f'(x) = (3 \cdot \log_2 x)' = 3 \cdot (\log_2 x)' = 3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} = \frac{3}{x \cdot \ln 2}$$

h) $f(x) = \log_2 x^4 = 4 \cdot \log_2 |x|$. Portanto:

$$f'(x) = (4 \log_2 |x|)' = 4 \cdot (\log_2 |x|)' = 4 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2} = \frac{4}{x \cdot \ln 2}$$

Exercícios Propostos

11.31) Derive as funções:

a) $f(x) = 4^x$
b) $f(x) = e^x$
c) $f(x) = 3^{2x}$
d) $f(x) = 2^{5x+3}$
e) $f(x) = \ln x$
f) $f(x) = \ln |x|$
g) $f(x) = \log_3 x$
h) $f(x) = \log_2 x^5$
i) $f(x) = \log_2 x^6$

11.32) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = 4^x \cdot \operatorname{sen} x$
b) $f(x) = \dfrac{2^x}{\cos x}$
c) $f(x) = (5x^3)(\operatorname{sen} x)(\ln x)$

11.13 — TABELA DE DERIVADAS

Neste ponto é conveniente fazermos um resumo das regras de derivação vistas até agora. Na tabela a seguir, supomos que:

k e **a** são constantes;

u, **v** e **w** são funções deriváveis num mesmo ponto **x**.

f(x)	f′(x)	f(x)	f′(x)
k	0	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$
$k \cdot u$	$k \cdot u'$	$\log_a \|x\|$	$\dfrac{1}{x \cdot \ln a}$
$u \pm v$	$u' \pm v'$	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$u \cdot v$	$u'v + uv'$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$u \cdot v \cdot w$	$u'vw + uv'w + uvw'$	$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\operatorname{cotg} x$	$-\operatorname{cossec}^2 x$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$\sec x$	$\sec x \cdot \operatorname{tg} x$
e^x	e^x	$\operatorname{cossec} x$	$-\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x$

11.14 — DERIVADA DE UM DETERMINANTE

Seja F(x) o determinante de uma matriz de ordem **n** cujos elementos são **funções deriváveis num** mesmo ponto **x**. Pode-se demonstrar que F′(x) é igual **à soma de n determinantes**, obtidos trocando-se sucessivamente cada linha (ou **cada coluna) da matriz** por sua derivada.

Exemplos

a) **Seja** $F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix}$. Derivando as linhas temos:

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) \\ u(x) & v(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix}$$

Podemos também obter F′(x) derivando as colunas de F:

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & g(x) \\ u'(x) & v(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & g'(x) \\ u(x) & v'(x) \end{vmatrix}$$

b) **Seja** $F(x) = \begin{vmatrix} f(x) & u(x) & r(x) \\ g(x) & v(x) & s(x) \\ h(x) & w(x) & t(x) \end{vmatrix}$. Derivando as colunas temos:

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f'(x) & u(x) & r(x) \\ g'(x) & v(x) & s(x) \\ h'(x) & w(x) & t(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & u'(x) & r(x) \\ g(x) & v'(x) & s(x) \\ h(x) & w'(x) & t(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f(x) & u(x) & r'(x) \\ g(x) & v(x) & s'(x) \\ h(x) & w(x) & t'(x) \end{vmatrix}$$

11.15 — DERIVADAS SUCESSIVAS

Sendo f(x) uma função derivável, podemos indicar sua derivada por f′(x).

Suponhamos que f′(x) seja derivável. Nesse caso, a derivada de f′(x) é indicada **por f″(x) e é chamada derivada segunda** ou **derivada de ordem** 2 da função f. Aí, **podemos dizer que** f′(x) é a **derivada primeira** ou **derivada de ordem 1** da função **f**.

Se f″(x) for derivável, sua derivada será indicada por f‴(x) e será chamada **derivada terceira ou derivada de ordem** 3 da função **f**; e assim por diante.

Sendo y = f(x), há vários modos de representar as derivadas sucessivas:

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = y' = y^{(1)} = \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = y'' = y^{(2)} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = y''' = y^{(3)} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

etc.

Exemplo

Sendo $f(x) = 5x^3$ temos:

$$f'(x) = 15x^2$$
$$f''(x) = 30x$$
$$f'''(x) = 30$$
$$f''''(x) = 0$$

Exercícios Resolvidos

11.32) Sendo $F(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ 4x & 5 \end{vmatrix}$, calcule $F'(x)$

Solução

1.º modo De acordo com o que vimos no item 11.14, temos

$$F'(x) = \begin{vmatrix} (x^3)' & x^2 \\ (4x)' & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^3 & (x^2)' \\ 4x & (5)' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & x^2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^3 & 2x \\ 4x & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= [(3x^2)\cdot(5) - (4)\cdot(x^2)] + [(x^3)\cdot(0) - (4x)(2x)] =$$
$$= [15x^2 - 4x^2] + [-8x^2] = 3x^2$$

2.º modo Podemos primeiramente desenvolver o determinante $F(x)$ para depois obtermos sua derivada. Assim

$$F(x) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 \\ 4x & 5 \end{vmatrix} = (x^3)(5) - (4x)(x^2) = 5x^3 - 4x^3 = x^3$$

Portanto $$F'(x) = (x^3)' = 3x^2$$

11.33) Sendo $f(x) = 5 \text{ sen } x$, determine $f''(x)$.

Solução

$$f(x) = 5 \text{ sen } x \Rightarrow f'(x) = (5 \text{ sen } x)' = 5(\text{sen } x)' = 5 \cdot \cos x$$
$$f''(x) = (5 \cos x)' = 5(\cos x)' = 5(-\text{sen } x) = -5 \text{ sen } x$$

Exercícios Propostos

11.34) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $F(x) = \begin{vmatrix} x^2+3 & 2x^3 \\ 1-x & x^4 \end{vmatrix}$ b) $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 3 & 4x-1 & 1-3x \\ 2 & x^3 & 1+x^2 \end{vmatrix}$

11.35) Sendo $F(x) = \begin{vmatrix} \text{sen } x & 5x^2 \\ \cos x & 3x^7 \end{vmatrix}$, determine $F'(x)$.

11.36) Dadas as funções $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 7$ e $g(x) = 3 \text{ sen } x + \cos x$, determine:

a) $f'(x)$ c) $f'''(x)$ e) $g'(x)$

b) $f''(x)$ d) $f^{(4)}(x)$ f) $g^{(2)}(x)$

11.37) Consideremos a função $f(x) = a \text{ sen } x + b \cos x$, onde **a** e **b** são constantes. Determine $f(x) + f''(x)$.

Capítulo 12

Derivada de uma função composta

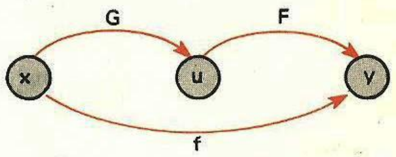
12.1 — INTRODUÇÃO

Embora já saibamos derivar vários tipos de funções, há ainda muitas funções usuais para as quais não temos regras de derivação (a não ser a própria definição). Por exemplo, temos regra para derivar a função $f(x) = \text{sen } x$, mas já não temos regra para derivar a função $g(x) = \text{sen } x^3$; com as ferramentas de que dispomos até agora, se quiséssemos obter $g'(x)$, teríamos que usar a definição de derivada, o que seria muito trabalhoso.

Veremos a seguir uma regra, chamada **regra da cadeia**, que nos ajudará a obter a derivada de uma função qualquer, desde que essa função possa ser interpretada como a **composta** de outras funções que saibamos derivar.

12.2 — REGRA DA CADEIA

Consideremos uma função G dada por $u = G(x)$ e uma função F dada por $y = F(u)$. Suponhamos que exista a **composta** de F e G, indicada por **f**, isto é, $f(x) = (F \circ G)(x)$.



$$y = f(x) = (F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(u)$$

Conforme demonstraremos no item seguinte, a regra da cadeia estabelece que

$$f'(x) = F'(u) \cdot G'(x)$$

desde que as derivadas existam. Usando uma outra notação (vista no capítulo 10) temos

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad F'(u) = \frac{dy}{du}, \quad G'(x) = \frac{du}{dx}$$

Assim, a regra da cadeia pode também ser enunciada do seguinte modo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Exemplos

a) Seja a função **f** dada por $y = f(x) = \text{sen } x^3$. Fazendo $u = x^3$ temos

$$y = \text{sen } u \quad \text{e} \quad u = x^3$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

Assim, de acordo com a regra da cadeia:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u) \cdot (3x^2) = (\cos x^3) \cdot (3x^2)$$

Resumindo: $\begin{cases} f(x) = \text{sen } x^3 \\ f'(x) = (\cos x^3) \cdot (3x^2) \end{cases}$

b) Seja $y = f(x) = (\text{sen } x)^3$. Fazendo $\text{sen } x = u$ temos

$$y = u^3 \quad \text{e} \quad u = \text{sen } x$$

donde,

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

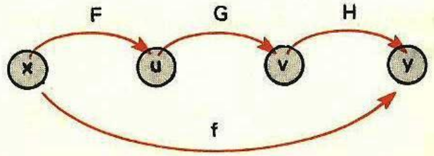
Assim

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3u^2) \cdot (\cos x) = 3 \cdot (\text{sen } x)^2 \cdot \cos x =$$

$$= 3 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$$

Resumindo: $\begin{cases} f(x) = (\text{sen } x)^3 \\ f'(x) = 3 \cdot (\text{sen } x)^2 \cdot \cos x \end{cases}$

A regra da cadeia pode ser estendida para os casos em que temos a composição de mais de duas funções. Consideremos, por exemplo, o caso em que a função **f** é a composta de três funções:



$$\begin{cases} y = H(v), \quad v = G(u), \quad u = F(x) \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Exemplo

Sendo $y = f(x) = (\text{sen } x^3)^5$, determinemos $f'(x)$. Fazendo

$$y = v^5, \quad v = \text{sen } u \quad \text{e} \quad u = x^3$$

temos

$$\frac{dy}{dv} = 5v^4, \quad \frac{dv}{du} = \cos u \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

Assim

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (5v^4) \cdot (\cos u) \cdot (3x^2) =$$

$$= [5 \cdot (\text{sen } u)^4] \cdot [\cos x^3] \cdot [3x^2] =$$

$$= [5 \cdot (\text{sen } x^3)^4] \cdot [\cos x^3] \cdot [3x^2] =$$

$$= (5 \cdot \text{sen}^4 x^3) \cdot (\cos x^3) \cdot (3x^2) = 15x^2 \cdot (\text{sen}^4 x^3) \cdot (\cos x^3)$$

Resumindo: $\begin{cases} f(x) = (\text{sen } x^3)^5 \\ f'(x) = 5 \cdot (\text{sen } x^3)^4 \cdot (\cos x^3) \cdot (3x^2) \end{cases}$

Exercícios Resolvidos

12.1) Obtenha as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = (\text{sen } x)^7$
b) $f(x) = (\text{sen } x)^9$
c) $f(x) = (\cos x)^6$
d) $f(x) = (x^3 + x^2)^8$
e) $f(x) = (\log_3 x)^5$
f) $f(x) = (\text{tg } x)^3$
g) $f(x) = \sqrt[3]{\text{sen } x}$
h) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x}$
i) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 5x^2}$

Solução

a) Fazendo $y = f(x) = (\text{sen } x)^7$ e $\text{sen } x = u$, temos

$$y = u^7 \quad \text{e} \quad u = \text{sen } x$$

donde,

$$\frac{dy}{du} = 7u^6 \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

Assim

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (7u^6) \cdot (\cos x) = 7 \cdot (\text{sen } x)^6 \cdot \cos x$$

Resumindo: $\begin{cases} f(x) = (\text{sen } x)^7 \\ f'(x) = 7 \cdot (\text{sen } x)^6 \cdot \cos x \end{cases}$

Quando já dominamos a regra, podemos deixar de usar a variável **u** e derivar diretamente:

$$\begin{cases} f(x) = (\text{sen } x)^7 \\ f'(x) = 7 \cdot (\text{sen } x)^6 \cdot (\text{sen } x)' = 7 \cdot (\text{sen } x)^6 \cdot (\cos x) \end{cases}$$

b) $f(x) = (\text{sen } x)^9$
$f'(x) = 9 \cdot (\text{sen } x)^8 \cdot (\text{sen } x)' = 9 \cdot (\text{sen } x)^8 \cdot \cos x = 9 \cdot \text{sen}^8 x \cdot \cos x$

c) $f(x) = (\cos x)^6$
$f'(x) = 6 \cdot (\cos x)^5 \cdot (\cos x)' = 6 \cdot (\cos x)^5 (-\text{ sen } x) = -6 \cdot \cos^5 x \cdot \text{sen } x$

d) $f(x) = (x^3 + x^2)^8$
$f'(x) = 8(x^3 + x^2)^7 \cdot (x^3 + x^2)' = 8 \cdot (x^3 + x^2)^7 \cdot (3x^2 + 2x)$

e) $f(x) = (\log_3 x)^5$
$f'(x) = 5 \cdot (\log_3 x)^4 \cdot (\log_3 x)' = 5 \cdot (\log_3 x)^4 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3}$

f) $f(x) = (\text{tg } x)^3$
$f(x) = 3 \cdot (\text{tg } x)^2 \cdot (\text{tg } x)' = 3 \cdot (\text{tg } x)^2 \cdot (\sec^2 x) = 3 \cdot \text{tg}^2 x \cdot \sec^2 x$

g) $f(x) = \sqrt[3]{\text{sen } x} = (\text{sen } x)^{1/3}$
$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot (\text{sen } x)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot (\text{sen } x)' = \frac{1}{3} \cdot (\text{sen } x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\text{sen}^2 x}}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{\cos^2 x} = (\cos x)^{2/3}$
$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (\cos x)^{\frac{2}{3} - 1} \cdot (\cos x)' = \frac{2}{3} (\cos x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-\text{ sen } x) = \frac{-2 \text{ sen } x}{3 \cdot \sqrt[3]{\cos x}}$

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 + 5x^2} = (x^4 + 5x^2)^{1/3}$
$f'(x) = \frac{1}{3}(x^4 + 5x^2)^{\frac{1}{3} - 1} \cdot (x^4 + 5x^2)' = \frac{1}{3}(x^4 + 5x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (4x^3 + 10x) =$
$= \frac{4x^3 + 10x}{3\sqrt[3]{(x^4 + 5x^2)^2}}$

12.2) Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{sen } x^4$
b) $f(x) = \text{sen } x^5$
c) $f(x) = \cos (x^3 + 5x^2)$
d) $f(x) = \text{sen } (\cos x)$
e) $f(x) = \ln (x^3 + 4x^2)$
f) $f(x) = 5^{x^2 + 7x}$

Solução

a) Fazendo $y = f(x) = \text{sen } x^4$ e $x^4 = u$, temos

$$y = \text{sen } u \quad e \quad u = x^4$$

donde,

$$\frac{dy}{du} = \cos u \quad e \quad \frac{du}{dx} = 4x^3$$

Assim

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (\cos u)(4x^3) = (\cos x^4)(4x^3)$$

Poderíamos não ter usado a variável **u** e derivado diretamente

$$\begin{cases} f(x/ = \text{sen } x^4 \\ f'(x) = (\cos x^4) \cdot (x^4)' = (\cos x^4) \cdot (4x^3) \end{cases}$$

b) $f(x) = \text{sen } x^5$
$f'(x) = (\cos x^5) \cdot (x^5)' = (\cos x^5) \cdot (5x^4)$

c) $f(x) = \cos (x^3 + 5x^2)$
$f'(x) = [-\text{ sen } (x^3 + 5x^2)] \cdot (x^3 + 5x^2)' = [-\text{ sen } (x^3 + 5x^2)] \cdot (3x^2 + 10x) =$
$= (-3x^2 - 10x) \cdot \text{sen } (x^3 + 5x^2)$

d) $f(x) = \text{sen } (\cos x)$
$f'(x) = [\cos (\cos x)] \cdot (\cos x)' = \cos (\cos x) \cdot (-\text{ sen } x) = -\text{ sen } x \cdot \cos (\cos x)$

e) $f(x) = \ln (x^3 + 4x^2)$
$f'(x) = \frac{1}{x^3 + 4x^2} \cdot (x^3 + 4x^2)' = \frac{3x^2 + 8x}{x^3 + 4x^2} = \frac{3x + 8}{x^2 + 4x}$

f) $f(x) = 5^{x^2 + 7x}$
$f'(x) = [5^{x^2 + 7x} \cdot \ln 5] \cdot [x^2 + 7x]' = 5^{x^2 + 7x} \cdot \ln 5 \cdot (2x + 7)$

12.3) Obtenha as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{sen } 2x$
b) $f(x) = \log_5 x^3$
c) $f(x) = 5^{2x}$

Solução

a) **1.º modo** Usemos a regra da cadeia

$$f(x) = \text{sen } 2x \Rightarrow f'(x) = (\cos 2x) \cdot (2x)' = 2 \cdot \cos 2x$$

2.º modo Poderíamos lembrar que

$$f(x) = \text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$$

e usar a regra da derivada do produto

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,[(\text{sen } x)' \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (\cos x)'] = \\ &= 2\,[\cos x \cdot \cos x + \text{sen } x\,(-\text{ sen } x)] = \\ &= 2\,[\underbrace{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}_{\cos 2x}] = 2 \cdot \cos 2x \end{aligned}$$

b) **1.º modo** Usando a regra da cadeia temos

$$f(x) = \log_5 x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^3 \cdot \ln 5} \cdot (x^3)' = \frac{3x^2}{x^3 \cdot \ln 5} = \frac{3}{x \cdot \ln 5}$$

2.º modo Podemos observar que

$$f(x) = \log_5 x^3 = 3 \cdot \log_5 x$$

e assim, sem usar a regra da cadeia

$$f'(x) = 3\,(\log_5 x)' = 3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 5} = \frac{3}{x \cdot \ln 5}$$

c) **1.º modo** Usando a regra da cadeia

$$f(x) = 5^{2x} \Rightarrow f'(x) = 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot (2x)' = 5^{2x} \cdot \ln 5 \cdot (2) = 2\,(\ln 5) \cdot 5^{2x}$$

2.º modo Observando que

$$f(x) = 5^{2x} = (5^2)^x$$

podemos obter f'(x) sem usar a regra da cadeia

$$f'(x) = (5^2)^x \cdot \ln 5^2 = 5^{2x} \cdot (2) \cdot \ln 5$$

12.4) Dê as derivadas das seguintes funções

a) $f(x) = \text{sen}^6\, x^4$ b) $e^{\text{sen}\,(x^2+5x)}$

Solução

a) Sendo $y = f(x) = \text{sen}^6\, x^4 = (\text{sen}\, x^4)^6$, façamos

$$y = v^6, \quad v = \text{sen}\, u, \quad u = x^4$$

Assim

$$\frac{dy}{dv} = 6\, v^5, \quad \frac{dv}{du} = \cos u, \quad \frac{du}{dx} = 4x^3$$

Portanto

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (6\, v^5) \cdot (\cos u) \cdot (4x^3) =$$

$$= (6 \cdot \text{sen}^5\, u) \cdot (\cos x^4) \cdot (4x^3) = (6 \cdot \text{sen}^5\, x^4)(\cos x^4)(4x^3) =$$

$$= 24\, x^3 \cdot (\text{sen}^5\, x^4) \cdot (\cos x^4)$$

Poderíamos ter derivado diretamente, sem usar as variáveis **u** e **v**:

$$f(x) = (\text{sen}\, x^4)^6 \Rightarrow f'(x) = 6 \cdot (\text{sen}\, x^4)^5 \cdot (\text{sen}\, x^4)' \qquad (I)$$

Mas:

$$(\text{sen}\, x^4)' = (\cos x^4) \cdot (x^4)' = (\cos x^4)(4x^3)$$

Substituindo em (I):

$$f'(x) = 6\, (\text{sen}\, x^4)^5 \cdot (\cos x^4) \cdot (4x^3) = 24x^3\, (\text{sen}^5\, x^4)(\cos x^4)$$

b) Sendo $y = f(x) = e^{\text{sen}\,(x^2+5x)}$, façamos:

$$y = e^v, \quad v = \text{sen}\, u, \quad u = x^2 + 5x$$

Assim

$$\frac{dy}{dv} = e^v, \quad \frac{dv}{du} = \cos u, \quad \frac{du}{dx} = 2x + 5$$

Portanto

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (e^v) \cdot (\cos u) \cdot (2x + 5) =$$

$$= (e^{\text{sen}\, u}) \cdot [\cos (x^2 + 5x)] \cdot (2x + 5) =$$

$$= (2x + 5) \cdot \cos (x^2 + 5x) \cdot e^{\text{sen}\,(x^2+5x)}$$

Poderíamos ter derivado diretamente, sem o uso das variáveis **u** e **v**:

$$f(x) = e^{\text{sen}\,(x^2+5x)} \Rightarrow f'(x) = e^{\text{sen}\,(x^2+5x)} \cdot [\text{sen}\,(x^2 + 5x)]' \qquad (I)$$

Mas

$$[\text{sen}\,(x^2 + 5x)]' = [\cos (x^2 + 5x)] \cdot [x^2 + 5x]' = [\cos (x^2 + 5x)]\,[2x + 5]$$

Substituindo em (I):

$$f'(x) = e^{\text{sen}\,(x^2+5x)} \cdot [\cos (x^2 + 5x)] \cdot [2x + 5]$$

12.5) Dê a derivada da função $f(x) = \text{sen}\left(\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right)$.

Solução

Pela regra da cadeia, temos

$$f'(x) = \left[\cos\left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right)\right] \cdot \left[\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right]' \qquad (I)$$

Mas, usando a regra da derivada do quociente,

$$\left[\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right]' = \frac{(x^2 - 1)' \cdot (x^3 + 2) - (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 2)'}{(x^3 + 2)^2} =$$

$$= \frac{(2x)(x^3 + 2) - (x^2 - 1)(3x^2)}{(x^3 + 2)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}$$

Substituindo em (I)

$$f'(x) = \left[\cos\left(\frac{x^2 - 1}{x^3 + 2}\right)\right] \cdot \left[\frac{-x^4 + 3x^2 + 4x}{(x^3 + 2)^2}\right]$$

12.6) Obtenha a derivada da função **f** dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x}, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

Solução

No exercício 10.12 fizemos o cálculo da derivada dessa função no ponto x = 0 e obtivemos f'(0) = 0. Calculemos agora f'(x) para $x \neq 0$.

De acordo com a regra da derivada do produto temos

$$f'(x) = (x^2)'\left(\text{sen}\frac{1}{x}\right) + (x^2) \cdot \left(\text{sen}\frac{1}{x}\right)' = 2x \cdot \text{sen}\frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(\text{sen}\frac{1}{x}\right)' \qquad (I)$$

Usando a regra da cadeia

$$\left(\text{sen}\frac{1}{x}\right)' = \left(\cos\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(\cos\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

Substituindo em (I)

$$f'(x) = 2x \cdot \text{sen}\frac{1}{x} + x^2 \cdot \left(\cos\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 2x \cdot \text{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

Assim

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \text{sen}\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & \text{para } x \neq 0 \\ 0, & \text{para } x = 0 \end{cases}$$

12.7) Sejam **f** e **g** duas funções deriváveis, tais que, para todo **x**,

$$[f(x)]^3 = g(x) + 12x^2 + 8$$

Sabendo que f(1) = 3 e f'(1) = 2, calcule

$$g(1) \text{ e } g'(1)$$

Solução

Temos

$$[(f(x)]^3 = g(x) + 12x^2 + 8 \qquad (I)$$

Fazendo $x = 1$, obtemos

$$[(f(1)]^3 = g(1) + 12(1)^2 + 8$$
$$3^3 = g(1) + 12 + 8$$
$$g(1) = 7$$

Vamos agora derivar os dois membros da equação (I), em relação a **x**:

$$\{[f(x)]^3\}' = g'(x) + 24x \qquad (II)$$

Mas, de acordo com a regra da cadeia, temos

$$\{[f(x)]^3\}' = 3 \cdot [f(x)]^2 \cdot f'(x)$$

Substituindo em (II)

$$3\,[f(x)]^2 \cdot f'(x) = g'(x) + 24x$$

Fazendo $x = 1$:

$$3 \cdot [f(1)]^2 \cdot f'(1) = g'(1) + 24(1)$$
$$3 \cdot [3]^2 \cdot [2] = g'(1) + 24$$
$$g'(1) = 30$$

12.8) Sejam **f** e **g** funções deriváveis tais que, para todo **x**, temos

$$f(x) = \ln\,[g(x)]$$

com $g(x) > 0$. Sabendo que $g(2) = 3$ e $g'(2) = 4$, calcule $f'(2)$.

Solução

Como $f(x) = \ln\,[g(x)]$ temos, usando a regra da cadeia:

$$f'(x) = \{\ln\,[g(x)]\}' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

Fazendo $x = 2$, obtemos

$$f'(2) = \frac{g'(2)}{g(2)} = \frac{4}{3}$$

12.9) Seja **f** uma função derivável. Mostre que:

a) **f** é par $\Rightarrow$ f' é ímpar. b) f é ímpar $\Rightarrow$ f' é par.

Solução

Suponhamos que a função **f** seja dada por $y = f(x)$. Derivando em relação a **x** temos, de acordo com a regra da cadeia:

$$[f(-x)]' = [f'(-x)] \cdot [-x]' = [f'(-x)] \cdot [-1] = -f'(-x)$$

Vejamos agora os dois casos:

a) **f** é par $\Rightarrow f(x) = f(-x) \Rightarrow [f(x)]' = [f(-x)]' \Rightarrow f'(x) = -f'(-x) \Rightarrow$ f' é ímpar

b) **f** é ímpar $\Rightarrow f(x) = -f(-x) \Rightarrow [f(x)]' = [-f(-x)]' \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = -[f(-x)]' \Rightarrow f'(x) = -[-f'(-x)] \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) = f'(-x) \Rightarrow$ f' é par

12.10) Consideremos uma função **f**, periódica e derivável num certo domínio D. Mostre que f' também é periódica.

Solução

Seja T o período de **f**. Assim, para todo $x \in D$, temos

$$f(x + T) = f(x)$$

Portanto, $[f(x + T)]' = [f(x)]'$

Usando a regra da cadeia temos

$$[f'(x + T)] \cdot (x + T)' = f'(x)$$

ou,

$$[f'(x + T)] \cdot (1) = f'(x)$$

isto é,

$$f'(x + T) = f'(x)$$

Portanto f' é periódica.

12.11) Consideremos $f(x) = \log_a |x|$, onde $x \in \mathbb{R}^*$. Demonstre que $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$.

Solução

No capítulo 11 já havíamos demonstrado que, para $x > 0$, temos

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Consideremos então dois casos:

1.º) $x > 0$

Neste caso temos $|x| = x$ e assim, $f(x) = \log_a x$.

Portanto:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

2.º) $x < 0$

Neste caso temos $|x| = -x$ e assim, $f(x) = \log_a(-x)$.

Usando a regra da cadeia temos

$$f'(x) = [\log_a(-x)]' = \frac{1}{(-x) \cdot \ln a} \cdot (-x)' = \frac{1}{(-x) \cdot \ln a} \cdot (-1) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

12.12) Consideremos a função **f** dada por

$$f(x) = \begin{vmatrix} \text{sen}\,(x + 1) & \cos\,(x + 1) & 7 \\ \text{sen}\,(x + 3) & \cos\,(x + 3) & 7 \\ \text{sen}\,(x + 4) & \cos\,(x + 4) & 7 \end{vmatrix}$$

Calcule a derivada da função **f**.

Solução

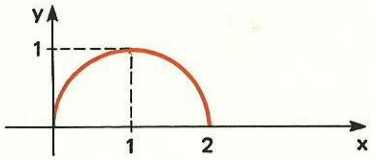
Conforme vimos no capítulo 11, temos

$$f'(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} \cos(x+1) & \cos(x+1) & 7 \\ \cos(x+3) & \cos(x+3) & 7 \\ \cos(x+4) & \cos(x+4) & 7 \end{vmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x+1) & -\operatorname{sen}(x+1) & 7 \\ \operatorname{sen}(x+3) & -\operatorname{sen}(x+3) & 7 \\ \operatorname{sen}(x+4) & -\operatorname{sen}(x+4) & 7 \end{vmatrix}}_{B} +$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} \operatorname{sen}(x+1) & \cos(x+1) & 0 \\ \operatorname{sen}(x+3) & \cos(x+3) & 0 \\ \operatorname{sen}(x+4) & \cos(x+4) & 0 \end{vmatrix}}_{C}$$

Mas acontece que os determinantes A, B e C são nulos, pois A tem duas colunas iguais, B tem duas colunas proporcionais e C tem uma coluna nula. Portanto, para todo **x** temos $f'(x) = 0$.

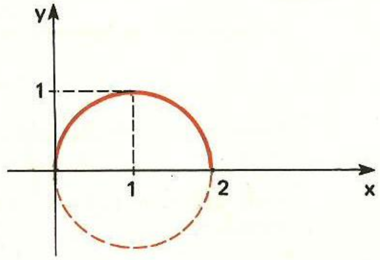
12.13) Considere a função **f** cujo gráfico é a semicircunferência de centro (1 ; 0) representada na figura. Determine o valor de **x** para o qual $f'(x) = 1$.



Solução

1.° modo

Conforme sabemos da Geometria Analítica (ver capítulo 10 do volume 6 desta coleção), a equação da circunferência "inteira" é



$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 1$$

isto é,

$$y^2 = -x^2 + 2x$$

ou,

$$y = \pm\sqrt{-x^2 + 2x}$$

onde $0 \leqslant x \leqslant 2$

Porém, para a semicircunferência dada, devemos ter $y \geqslant 0$ e portanto sua equação é

$$y = \sqrt{-x^2 + 2x}$$

e a nossa função **f** é dada por

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x} = (-x^2 + 2x)^{1/2}$$

Assim, usando a regra da cadeia, temos

$$f'(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 2x)^{-1/2} \cdot (-x^2 + 2x)' = \frac{1}{2(-x^2 + 2x)^{1/2}} \cdot (-2x + 2) = \frac{-x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x}}$$

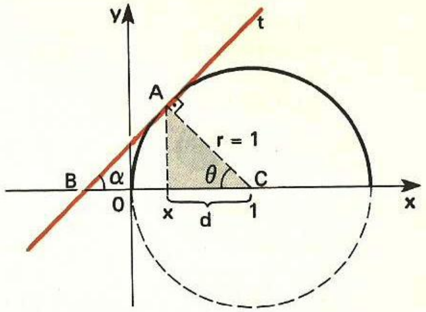
Portanto, para que ocorra $f'(x) = 1$, devemos ter

$$\frac{-x + 1}{\sqrt{-x^2 + 2x}} = 1$$

Resolvendo esta última equação obtemos $x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ que é a solução do exercício.

2.° modo

Queremos $f'(x) = 1$. Mas nós sabemos que $f'(x)$ é igual ao coeficiente angular **m** da reta **t** que é tangente ao gráfico de **f** no ponto A (x ; f(x)). Como $f'(x) = 1 > 0$, concluímos que a reta **t** deve formar com o eixo Ox um ângulo α tal que $0 < \alpha < 90°$. Considerando a figura ao lado, temos



$$m = \operatorname{tg}\alpha = f'(x) = 1$$

Como A é ponto de tangência, a reta **t** é perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ e o triângulo ABC é retângulo. Daí concluímos que os ângulos α e θ são complementares e, portanto:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{1} = 1$$

De $\operatorname{tg}\theta = 1$, tiramos facilmente que $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e portanto:

$$d = r \cdot \cos\theta = (1) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim,

$$x = 1 - d = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

12.14) Consideremos a função **f** dada por $f(x) = x^3 - 1$. Calcule $(f^{-1})'(7)$.

Solução

Fazendo $y = f(x) = x^3 - 1$, temos $x = \sqrt[3]{y+1}$, donde:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$$

Portanto,

$$(f^{-1})'(x) = [(x+1)^{1/3}]' = \frac{1}{3} \cdot (x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x+1)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

de onde tiramos

$$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(7+1)^2}} = \frac{1}{12}$$

Este exercício será resolvido de outro modo no capítulo 13 (exercício 13.1).

Exercícios Propostos

12.15) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^4$

b) $f(x) = (\cos x)^4$

c) $f(x) = (2x^4 + 5)^{10}$

d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

e) $f(x) = (\log_2 x)^6$

f) $f(x) = (\ln x)^3$

g) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}$

i) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 5}$

12.16) Obtenha as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{sen } x^5$
b) $f(x) = 5 \cdot \cos x^3$
c) $f(x) = \text{tg } x^4$
d) $f(x) = \text{sen } (5x^3 + x^2)$
e) $f(x) = \cos (\text{sen } x)$
f) $f(x) = \ln x^7$
g) $f(x) = \ln (3x^2 + 5x)$
h) $f(x) = \log_2 (x^2 + 1)$
i) $f(x) = e^{3x}$
j) $f(x) = e^{x^3}$
k) $f(x) = e^{2x^3 + x}$
l) $f(x) = 4^{x^2}$
m) $f(x) = 2^{\text{sen } x}$
n) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
o) $f(x) = \text{sen} \dfrac{1}{x^2}$

12.17) Derive as funções:

a) $f(x) = (\text{sen } x^2)^5$
b) $f(x) = 2 \cdot \text{sen}^3 x^7$
c) $f(x) = (\ln x^2)^4$
d) $f(x) = (\log_3 x^2)^5$
e) $f(x) = e^{\text{sen } x^3}$
f) $f(x) = 2^{\text{sen } x^3}$
g) $f(x) = \sqrt[2]{\text{sen } x^3}$
h) $f(x) = \sqrt[3]{\text{sen}^2 x^5}$
i) $f(x) = \text{sen } (\ln x^3)$

12.18) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{sen} \left(\dfrac{x^3}{x^2 + 1} \right)$

b) $f(x) = \text{sen}^2 x \cdot \ln x^3$

c) $f(x) = \cos x - \dfrac{1}{3} \cos^3 x$

d) $f(x) = \sec^2 x + e^{6x}$

e) $f(x) = \dfrac{4 \cdot \ln x}{\text{sen } x^2}$

f) $f(x) = e^{x^2} \cdot \sqrt{x^3 + 4x}$

g) $f(x) = x^3 \cdot \text{sen} \dfrac{1}{x^2}$

h) $f(x) = \dfrac{1}{3 \text{ sen}^3 x} - \dfrac{1}{\text{sen } x}$

12.19) Sejam **f** e **g** funções deriváveis tais que, para todo **x**:

$$[f(x)]^3 - 3x^4 + 3 = [g(x)]^2 + 4x^3 + 3x^2$$

Sabendo que $f(2) = 5$ e $f'(2) = 4$, calcule:

a) $g(2)$
b) $g'(2)$

12.20) Considere as funções deriváveis **f** e **g** tais que, para todo **x**:

$$g(x) = x^2 \cdot [f(x)]^3$$

Sabendo que $f(3) = 2$ e $f'(3) = 1$, calcule o valor de $g'(3)$.

12.21) Consideremos as funções $g(x) = x^3$ e $h(x) = \text{sen } x$.

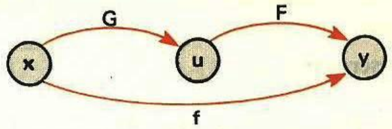
a) Determine a função **f** tal que $f(x) = (h \circ g)(x)$.
b) Obtenha $f'(x)$.

12.22) Sejam as funções $g(x) = \cos x$ e $h(x) = x^4$. Determine:

a) $(g \circ h)'(x)$
b) $(h \circ g)'(x)$
c) $(h \circ h)'(x)$

12.3 – DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DA CADEIA

Faremos a demonstração para o caso em que temos a composição de duas funções.



Considerando as funções deriváveis F e G, dadas por $y = F(u)$ e $u = G(x)$, suponhamos que exista a **composta de F e G**, indicada por **f**:

$$y = f(x) = (F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(u)$$

Façamos **x** receber um acréscimo $\Delta x \neq 0$. Assim, **u** e **y** receberão acréscimos de Δu e Δy, onde

$$\Delta u = G(x + \Delta x) - G(x) \quad \text{e} \quad \Delta y = F(u + \Delta u) - F(u)$$

Devemos observar que, para $\Delta x \to 0$, teremos $\Delta u \to 0$ e $\Delta y \to 0$.

Supondo $\Delta u \neq 0$ temos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Portanto

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) =$$

$$= \left(\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Assim, está demonstrada a regra da cadeia para o caso em que $\Delta u \neq 0$. No entanto, pode acontecer que $\Delta u = 0$ para infinitos valores de Δx, quando $\Delta x \to 0$ e então não podemos considerar a igualdade

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Neste caso devemos procurar um outro caminho. Vamos definir uma nova função H, que depende de Δu, através de:

$$H(\Delta u) = \begin{cases} \dfrac{\Delta y}{\Delta u} - \dfrac{dy}{du} & \text{se} \quad \Delta u \neq 0 \\ 0 \quad \text{se} \quad \Delta u = 0 \end{cases}$$

Para esta função, temos que a igualdade

$$\Delta y = \left[H(\Delta u) + \frac{dy}{du} \right] \cdot \Delta u$$

vale, mesmo que $\Delta u = 0$. Além disso, é claro também que $H(\Delta u) \to 0$ quando $\Delta u \to 0$ (e portanto quando $\Delta x \to 0$). Agora, podemos considerar a igualdade

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left[H(\Delta u) + \frac{dy}{du}\right] \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

e escrever:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[H(\Delta u) + \frac{dy}{du}\right] \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Fica, deste modo, completada a demonstração da regra da cadeia.

Exemplo

Vamos justificar a regra da cadeia para o caso em que temos a composição de três funções deriváveis.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

12.4 – FUNÇÃO POTÊNCIA DE EXPOENTE REAL

Até agora demonstramos que a regra

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

vale para $a \in \mathbb{Z}^*$. Falta ainda verificar os casos em que **a** é **racional não-inteiro** e os casos em que **a** é **irracional**.

Devemos nos lembrar que:

(i) Se **a** é irracional, x^a só é definida para $x \geqslant 0$.
(ii) Se **a** é racional não inteiro, x^a é definida para qualquer $x \geqslant 0$ e em alguns casos para $x < 0$.

Assim, para completar o estudo da derivada da função potência $f(x) = x^a$, devemos considerar dois casos:

1.º) **a** real qualquer não-nulo e $x > 0$;
2.º) **a** racional não-inteiro e $x < 0$.

O primeiro caso será estudado agora e o segundo caso será estudado no capítulo 13.

Consideremos então a função $f(x) = x^a$, com $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $a \in \mathbb{R}^*$. Lembrando que, para $x > 0$, vale

$$e^{\ln x} = x$$

temos

$$f(x) = x^a = (e^{\ln x})^a = e^{a \ln x}$$

Assim, aplicando a regra da cadeia,

$$f'(x) = (e^{a \ln x})' = (e^{a \ln x}) \cdot (a \ln x)' = (e^{a \ln x}) \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

Portanto

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1} \qquad \begin{cases} a \in \mathbb{R}^* \\ x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

12.5 – DERIVADA DE $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$

Consideremos a função **f** dada por

$$f(x) = [g(x)]^{h(x)}$$

onde **g** e **h** são funções deriváveis, com $g(x) > 0$. Podemos obter $f'(x)$ com o auxílio da seguinte propriedade dos logaritmos:

$$a = e^{\ln a}, \quad \text{para} \quad a > 0$$

Assim, $g(x) = e^{\ln g(x)}$ e portanto:

$$f(x) = [g(x)]^{h(x)} = [e^{\ln g(x)}]^{h(x)} = e^{h(x) \cdot \ln g(x)}$$

Em seguida calculamos $f'(x)$ usando a regra da cadeia.

No item seguinte veremos um outro modo de obter $f'(x)$.

Exercício Resolvido

12.23) Obtenha a derivada da função $f(x) = x^{\text{sen}\, x}$, onde $x > 0$.

Solução

Temos

$$f(x) = x^{\text{sen}\, x} = [e^{\ln x}]^{\text{sen}\, x} = e^{(\text{sen}\, x) \cdot \ln x}$$

Portanto

$$f'(x) = e^{(\text{sen } x) \cdot \ln x} \cdot [(\text{sen } x) \cdot \ln x]' =$$

$$= e^{(\text{sen } x) \cdot \ln x} \cdot \left[(\cos x) \cdot \ln x + (\text{sen } x) \cdot \frac{1}{x}\right] =$$

$$= x^{\text{sen } x} \cdot \left[(\cos x) \cdot \ln x + (\text{sen } x) \cdot \frac{1}{x}\right]$$

Exercícios Propostos

12.24) Dê as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = (\text{sen } x)^{\cos x}$

b) $f(x) = x^x$

c) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

d) $f(x) = (x^2 + 1)^x$

e) $f(x) = x^{\ln x}$

f) $f(x) = (\text{sen } x)^x$

12.25) Sendo $f(x) = [g(x)]^{h(x)}$, com $g(x) > 0$, obtenha $f'(x)$.

12.6 — DERIVAÇÃO LOGARÍTMICA

Consideremos uma função **f** dada pelo produto, quociente ou potenciação de outras funções. Às vezes o processo de obtenção de f' pode ser simplificado se, primeiramente, obtivermos o logaritmo neperiano de **f** para depois derivarmos. Este processo é chamado de **derivação logarítmica**.

Exemplo

Consideremos a função $f(x) = x^{\text{sen } x}$, cuja derivada já havíamos obtido no exercício 12.23. Vamos agora obter essa derivada com o auxílio dos logarítmos. Como $f(x) > 0$, temos

$$\ln f(x) = \ln (x^{\text{sen } x})$$

isto é,

$$\ln f(x) = (\text{sen } x) \cdot \ln x$$

Derivando os dois membros desta última equação, em relação a **x**, temos

$$[\ln f(x)]' = [(\text{sen } x) \cdot \ln x]'$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = (\text{sen } x)' \cdot \ln x + (\text{sen } x) \cdot (\ln x)'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\cos x) \cdot \ln x + (\text{sen } x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left[(\cos x) \cdot \ln x + (\text{sen } x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$f'(x) = x^{\text{sen } x} \cdot \left[(\cos x) \cdot \ln x + (\text{sen } x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

Observações

1.ª) Sabemos que $\ln f(x)$ só é definido para $f(x) > 0$. No entanto, o processo da derivação logarítmica, em geral, nos conduz a um resultado correto, mesmo para $f(x) < 0$. (Veja, por exemplo, o exercício 12.26). Isto se justifica pelo fato, visto no exercício 12.11, de que

$$[\ln |x|]' = \frac{1}{x}$$

Aplicando ao caso da função composta, observamos que

$$[\ln |f(x)|]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

Assim, $f'(x) = f(x) \cdot [\ln |f(x)|]'$.
Observemos que esta igualdade independe do sinal de $f(x)$.

2.ª) A expressão $\frac{f'(x)}{f(x)}$ costuma ser chamada de **derivada logarítmica** da função **f**.

Exercício Resolvido

12.26) Obtenha a derivada da função **f** dada por $f(x) = x^3 \cdot \text{sen } x$.

Solução

1.º modo Vamos usar a regra da derivada do produto. Sendo $f(x) = x^3 \cdot \text{sen } x$, temos

$$f'(x) = (x^3)' \cdot \text{sen } x + x^3 \cdot (\text{sen } x)' = 3x^2 \cdot \text{sen } x + x^3 \cdot \cos x$$

2.º modo Vamos usar o processo da derivação logarítmica. Sendo $f(x) = x^3 \cdot \text{sen } x$, temos

$$|f(x)| = |x^3 \cdot \text{sen } x| = |x^3| \cdot |\text{sen } x|$$

Assim

$$\ln |f(x)| = \ln |x^3 \cdot \text{sen } x| = \ln |x^3| + \ln |\text{sen } x|$$

Derivemos os dois membros desta última equação, em relação a **x**:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\text{sen } x} \cdot (\text{sen } x)'$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

$$f'(x) = f(x) \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)$$

$$f'(x) = (x^3 \cdot \text{sen } x)\left(\frac{3}{x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x}\right) = 3x^2 \cdot \text{sen } x + x^3 \cdot \cos x$$

Conforme podemos observar, neste caso não foi vantajoso usar a derivação logarítmica.

Exercício Proposto

12.27) Obtenha a derivada de cada função a seguir, usando o processo da derivação logarítmica:

a) $f(x) = x^2 \cdot (\cos x) \cdot e^x$

b) $f(x) = (x^3 + 2)^4 \cdot (x^2 - 1)^3 \cdot \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\cos x}$

d) $f(x) = x^x$

e) $f(x) = x^{(x^2)}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot (x^2 - 3)^3}{\operatorname{sen} x}$

g) $f(x) = \dfrac{(x - 2)^3 \sqrt{x + 2}}{e^{2x} \cdot (x - 1)^2}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x \cdot \operatorname{sen} x}{(x + 1)^2}}$

i) $f(x) = \sqrt[5]{x^3} \cdot \left(\dfrac{x^2 + 1}{1 - x}\right) \cdot \operatorname{sen}^2 x$

12.7 — DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Consideremos, por exemplo, a função **f** dada por

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$$

Fazendo $y = f(x)$, temos

$$y = \frac{x - 1}{x^2 + 1} \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando em cruz, obtemos a equação

$$yx^2 + y = x - 1 \qquad \text{(II)}$$

que é equivalente à equação (I). Tanto a equação (I) como a equação (II) definem a mesma função **f**, onde "**y** é função de **x**". No entanto, há uma diferença: na equação (I), **y aparece isolado** enquanto que na equação (II), **y** não está isolado. Dizemos então que:

- a equação (I) define a função **f** de forma **explícita**.
- a equação (II) define a função **f** de forma **implícita**.

Suponhamos que nos dêem a função **f** de forma **implícita**; como obter **f'**? Uma coisa que podemos fazer, é *tentar* expressar **f** de forma **explícita** e depois usar as regras de derivação conhecidas. Porém, pode acontecer que essa passagem, da forma implícita para a forma explícita, seja muito trabalhosa ou até impossível. Mostraremos, através de um exemplo, que em geral é possível obter **f'** a partir da forma implícita, usando a regra da cadeia. Esse processo é chamado de **derivação implícita**.

Exemplo

Consideremos a função **f** mencionada acima:

$$y = f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1} \qquad \text{(I)}$$

Como vimos, **f** pode ser definida, implicitamente, por:

$$yx^2 + y = x - 1 \qquad \text{(II)}$$

Derivando os dois membros de (II) em relação a **x**, temos

$$(yx^2)' + y' = (x - 1)' \qquad \text{(III)}$$

Mas, $\begin{cases} (yx^2)' = y' \cdot x^2 + y \cdot (x^2)' = y' \cdot x^2 + y \cdot (2x) \\ (x - 1)' = 1 \end{cases}$

Substituindo em (III), obtemos

$$y' \cdot x^2 + y \cdot (2x) + y' = 1$$

donde

$$y' = \frac{1 - 2xy}{x^2 + 1} \qquad \text{(IV)}$$

Poderíamos parar por aqui; mas, se quisermos, podemos fazer $y = \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$ na equação (IV) e obter

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} \qquad \text{(V)}$$

Vamos agora obter y' a partir da forma explícita, para verificarmos se chegamos ao mesmo resultado:

$$y = f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow y' = \frac{(x - 1)' \cdot (x^2 + 1) - (x - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x^2 + 1) - (x - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow y' = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 1)^2} \qquad \text{(VI)}$$

Comparando (VI) com (V) observamos que chegamos ao mesmo resultado.

Quando nos dão uma equação envolvendo duas variáveis, pode ocorrer que essa equação não represente nenhuma função. Por exemplo, é fácil verificar que a equação

$$x^2 + y^2 = -5$$

não é satisfeita por nenhum par de números reais **x** e **y**. Pode ocorrer também, que a equação dada represente *implicitamente* mais de uma função. Por exemplo, a equação

$$x^2 + y^2 = 4$$

que é equação da circunferência de centro na origem e raio igual a 2 (figura **a**), é equivalente a

$$y^2 = 4 - x^2$$

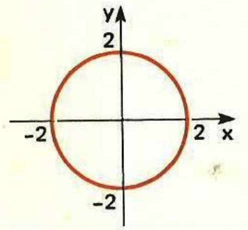
isto é

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

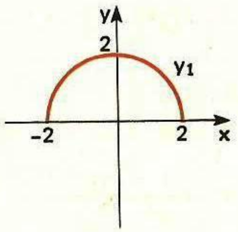
Daí podemos dizer que a equação dada representa implicitamente duas funções:

$$y_1 = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$$

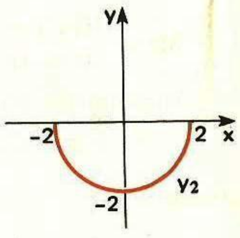
cujos gráficos estão nas figuras **b** e **c**.



(Fig. a)



(Fig. b)



(Fig. c)

Em casos como este, o processo de derivação implícita nos dá um resultado que é, ao mesmo tempo, a derivada de todas as funções representadas pela equação dada. (Veja, por exemplo, o exercício 12.28.)

Observação

No caso geral, pode ser difícil decidir se uma determinada equação representa implicitamente alguma função. Existem teoremas para analisar tais situações; no entanto não veremos esses teoremas, pois eles aparecem num nível mais avançado, quando são estudadas as funções de várias variáveis e, neste livro, estamos estudando apenas as funções de uma variável. Assim, nos exercícios a seguir, admitiremos que as equações dadas representam implicitamente pelo menos uma função, definida em pelo menos um intervalo.

Exercícios Resolvidos

12.28) Sendo $x^2 + y^2 = 4$, obtenha $\frac{dy}{dx}$.

Solução

Admitamos então que a equação $x^2 + y^2 = 4$ representa pelo menos uma função $y = f(x)$. Derivando os dois membros da equação, em relação a **x** temos

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

isto é

$$\boxed{y' = -\frac{x}{y}} \quad (I)$$

A equação (I) já é a resposta do problema. No entanto, a título de ilustração, vamos tentar obter y' exprimindo **f** na forma explícita. De $x^2 + y^2 = 4$ tiramos

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$

Assim, podemos dizer que a equação dada representa implicitamente as funções:

$$y_1 = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{e} \quad y_2 = -\sqrt{4 - x^2}$$

Derivando estas funções, usando os processos vistos anteriormente, obtemos

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{-x}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{-x}{y_1} \\ y_2' = \dfrac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{-x}{-\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{-x}{y_2} \end{cases}$$

Com isso, percebemos que a equação (I) nos dá, ao mesmo tempo, as derivadas de y_1 e y_2.

12.29) Obtenha a equação da reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$, no ponto $(-1; \sqrt{3})$.

Solução

Admitindo que a equação dada represente uma função **f**, pelo menos em uma vizinhança do ponto $(-1; \sqrt{3})$, podemos dizer que a equação da reta **t** procurada é

$$y - \sqrt{3} = m(x + 1) \quad (I)$$

onde $m = f'(-1)$. Conforme vimos no exercício anterior, de $x^2 + y^2 = 4$ obtemos

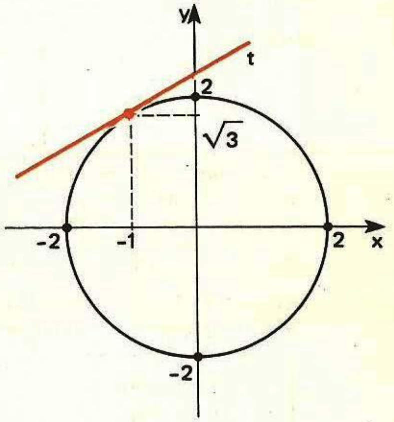
$$f'(x) = y' = \frac{-x}{y}$$

Mas, para $x = -1$ temos $y = \sqrt{3}$. Assim:

$$f'(-1) = \frac{-(-1)}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Substituindo em (I) obtemos a equação da reta procurada:

$$y - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 1)$$



12.30) Em cada caso a seguir, admita que a equação dada represente pelo menos uma função $y = f(x)$ e obtenha y':

a) $y^4 - y = x^3$

b) $y = \text{sen}(x + y)$

c) $xy^3 - 3x^2 = xy + 5$

d) $y^x = x^y$

Solução

a) Sendo $y^4 - y = x^3$, derivemos ambos os membros em relação a **x**:

$$4y^3y' - y' = 3x^2$$

Colocando y' em evidência, obtemos

$$(4y^3 - 1)y' = 3x^2$$

Assim,

$$\boxed{y' = \frac{3x^2}{4y^3 - 1}}$$

b) $y = \text{sen}\,(x + y) \Rightarrow y' = [\cos(x + y)] \cdot (x + y)' \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = [\cos(x + y)] \cdot (1 + y') \Rightarrow$
$\Rightarrow y' = \cos(x + y) + y' \cdot \cos(x + y) \Rightarrow$
$\Rightarrow y' - y' \cdot \cos(x + y) = \cos(x + y) \Rightarrow$
$\Rightarrow y' \cdot [1 - \cos(x + y)] = \cos(x + y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{\cos(x + y)}{1 - \cos(x + y)}}$$

c) $xy^3 - 3x^2 = xy + 5 \Rightarrow (xy^3)' - 6x = (xy)' \qquad (I)$

Mas $\begin{cases} (xy^3)' = x' \cdot y^3 + x(y^3)' = 1 \cdot y^3 + x(3y^2y') = y^3 + x(3y^2y') \\ (xy)' = x'y + xy' = 1 \cdot y + xy' = y + xy' \end{cases}$

Substituindo em (I), obtemos

$$y^3 + x(3y^2y') - 6x = y + xy'$$

ou

$$3xy^2y' - xy' = y + 6x - y^3$$

ou ainda

$$y'(3xy^2 - x) = y + 6x - y^3.$$

donde

$$\boxed{y' = \frac{y + 6x - y^3}{3xy^2 - x}}$$

d) $y^x = x^y \Rightarrow \ln y^x = \ln x^y \Rightarrow x \ln y = y \ln x \Rightarrow$
$\Rightarrow (x \ln y)' = (y \ln x)' \Rightarrow$
$\Rightarrow x' \cdot \ln y + x(\ln y)' = y' \cdot \ln x + y(\ln x)' \Rightarrow$
$\Rightarrow \ln y + x \cdot \frac{y'}{y} = y' \ln x + y \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$
$\Rightarrow xy \ln y + x^2 y' = xyy' \ln x + y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow y'(x^2 - xy \ln x) = y^2 - xy \ln y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x}}$$

Exercícios Propostos

12.31) Em cada caso a seguir, admita que a equação dada represente pelo menos uma função $y = f(x)$ e obtenha y'.

a) $x^2y + y^3 = 2$
b) $xy - \ln y = 1$
c) $\text{tg}\, y = xy$
d) $e^y = x + y$

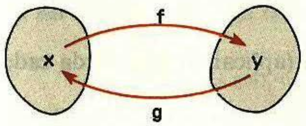
12.32) Obtenha a equação da reta tangente à curva de equação $y^4 - 4x^4 = 6xy$, no ponto $(1; 2)$.

Capítulo 13

Funções inversas e derivadas

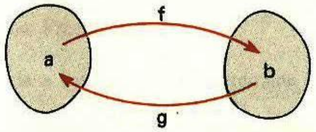
13.1 — DERIVADA DE UMA FUNÇÃO INVERSA

Sejam **f** e **g** duas funções, tais que uma é a **inversa** da outra.



$$\begin{bmatrix} g = f^{-1} \\ f = g^{-1} \\ y = f(x) = g^{-1}(x) \\ x = g(y) = f^{-1}(y) \end{bmatrix}$$

Suponhamos que **g** seja **derivável** no ponto **b** e que **f** seja **contínua** no ponto **a**, onde $a = g(b)$.



$$\begin{bmatrix} b = f(a) \\ a = g(b) \end{bmatrix}$$

Demonstraremos que

> Se $g'(b) \neq 0$, então **f** é derivável no ponto **a** e
>
> $$f'(a) = \frac{1}{g'(b)}$$

Feita a demonstração, poderemos escrever

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{g'(y)}} \qquad (\text{para } g'(y) \neq 0)$$

ou

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}} \qquad \left(\text{para } \frac{dx}{dy} \neq 0\right)$$

Demonstração

Como **f** e **g** são inversas uma da outra, ambas são bijetoras e portanto, para $x \neq a$ temos $f(x) \neq b$. Por outro lado, sendo **f** contínua no ponto **a**, quando $x \to a$ temos $y \to b$. Assim:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{y \to b} \frac{y - b}{g(y) - g(b)} = \lim_{y \to b} \frac{1}{\left(\dfrac{g(y) - g(b)}{y - b}\right)} = \frac{1}{g'(b)}$$

Portanto, para $g'(b) \neq 0$, temos $f'(a) = \dfrac{1}{g'(b)}$.

Se já soubéssemos de antemão que $f'(x)$ existe, poderíamos partir de

$$g(f(x)) = x$$

e derivarmos ambos os membros em relação a **x** (aplicando a regra da cadeia ao membro esquerdo) obtendo

$$g'(y) \cdot f'(x) = 1$$

ou

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$$

Exemplo

Consideremos as funções:

$$\begin{cases} y = f(x) = \log_a x & \text{(função logaritmo)} \\ x = g(y) = a^y & \text{(função exponencial)} \end{cases}$$

as quais são inversas uma da outra.

Vimos no capítulo 11 que $g'(y) = a^y \cdot \ln a$, com $g'(y) \neq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$. Assim, de acordo com a regra deduzida acima, temos

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{a^y \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

o que está de acordo com o que vimos no capítulo 11 sobre a derivada da função logaritmo.

Exercícios Resolvidos

13.1) Consideremos a função definida por

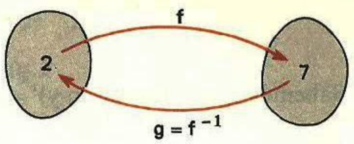
$$y = f(x) = x^3 - 1$$

Calcule a derivada de f^{-1} no ponto $y = 7$.

Solução

Para $y = 7$ temos $x^3 - 1 = 7$, donde $x = 2$. Seja $x = g(y)$ a inversa de **f**, isto é, $g = f^{-1}$

$$\begin{cases} f(2) = 7 \\ g(7) = f^{-1}(7) = 2 \end{cases}$$



Temos $f'(x) = 3x^2$ e portanto $f'(2) = 12$.

Assim: $(f^{-1})'(7) = g'(7) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{12}$

Compare este exercício com o exercício 12.14.

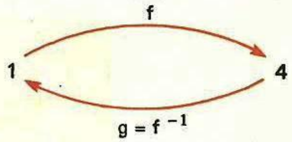
13.2) Dada a função $y = x^3 + 3x$, calcule a derivada de sua função inversa no ponto $y = 4$.

Solução

Sendo $y = f(x) = x^3 + 3x$, seja $x = f^{-1}(y) = g(y)$.

Para $y = 4$ temos $x^3 + 3x = 4$. Esta última equação pode ser resolvida pelo método de **pesquisa das raízes racionais** (veja capítulo 15, do volume 7 desta coleção) e obtemos $x = 1$.

$$\begin{cases} f(1) = 4 \\ f^{-1}(4) = g(4) = 1 \end{cases}$$



Temos $f'(x) = 3x^2 + 3$ e, portanto, $f'(1) = 6$.

Assim: $(f^{-1})'(4) = g'(4) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{6}$

Exercícios Propostos

13.3) Dada a função $y = 2x^3$, determine a derivada de sua função inversa no ponto $y = -2$.

13.4) Consideremos a função definida por

$$y = f(x) = x^3 + 4x$$

Obtenha a derivada de f^{-1} no ponto $y = 16$.

13.5) Seja a função definida por $f(x) = x^7 + x^5 + 17$. Calcule $(f^{-1})'(19)$.

13.6) Seja **f** uma função invertível tal que a reta tangente ao gráfico de **f** no ponto $(a; b)$ tem coeficiente angular **m** $(m \neq 0)$. Qual é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f^{-1} no ponto $(b; a)$?

13.2 — DERIVADAS DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

a) Função arco-seno

Consideremos a função **f**, de $[-1; 1]$ em $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, tal que

$$y = f(x) = \text{arc sen } x$$

A inversa de **f** é a função **g**, de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ em $[-1; 1]$, dada por

$$x = g(y) = \text{sen } y$$

Sabemos que $g'(y) = (\text{sen } y)' = \cos y$. Como $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, temos $\cos y \geqslant 0$ e portanto

$$g'(y) = \cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Assim, para $g'(y) \neq 0$ (isto é, para $x \neq \pm 1$), temos

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ou

$$(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) Função arco-cosseno

Seja a função **f**, de $[-1; 1]$ em $[0; \pi]$, dada por:

$$y = f(x) = \text{arc cos } x$$

A inversa de **f** é a função **g**, de $[0; \pi]$ em $[-1; 1]$, dada por

$$x = g(y) = \cos y$$

Sabemos que $g'(y) = -\text{sen } y$. Como $0 \leqslant y \leqslant \pi$, temos $\text{sen } y \geqslant 0$ e portanto:

$$g'(y) = -\text{ sen } y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - x^2}$$

Assim, para $g'(y) \neq 0$ (isto é, para $x \neq \pm 1$), temos

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ou

$$(\text{arc cos } x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

c) Função arco-tangente

Consideremos a função **f**, de IR em $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, dada por

$$y = f(x) = \text{arc tg } x$$

Sua inversa é a função **g**, de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ em IR, definida por

$$x = g(y) = \text{tg } y$$

Sabemos que

$$g'(y) = (\text{tg } y)' = \sec^2 y = 1 + \text{tg}^2 y = 1 + x^2$$

Assim

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

ou

$$(\text{arc tg } x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

d) Função arco-cotangente

A função **f**, de IR em $]0; \pi[$, definida por

$$y = f(x) = \text{arc cotg } x$$

tem como inversa a função **g**, de $]0; \pi[$ em IR, definida por

$$x = g(y) = \text{cotg } y$$

Mas

$$g'(y) = (\text{cotg } y)' = -\text{cossec}^2 y = -(1 + \text{cotg}^2 y) = -(1 + x^2)$$

Assim

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

ou

$$(\text{arc cotg } x)' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

Exercícios Propostos

13.7) Obtenha as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{arc sen } 5x$

b) $f(x) = \text{arc cos } 6x$

c) $f(x) = \text{arc tg } 7x$

d) $f(x) = \text{arc cotg } 3x$

e) $f(x) = 3(\text{arc sen } 2x)$

f) $f(x) = \text{arc sen } (x^2 + 2x)$

g) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot (\text{arc cos } x)$

h) $f(x) = \dfrac{1}{\text{arc tg } x}$

13.8) Determine as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{arc cos } e^x$

b) $f(x) = \text{arc sen } \dfrac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{\text{arc tg } x}$

d) $f(x) = \text{arc sen } \sqrt{x}$

13.3 — FUNÇÃO POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

A regra de derivação da função potência $f(x) = x^a$ é

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

Como vimos no capítulo 12, estava faltando a justificativa dessa regra, para o caso em que **a** é racional não inteiro e $x < 0$. Com o auxílio da derivada da função inversa, é possível completar essa justificativa. Daremos a seguir a justificativa da regra para o caso geral em que **a** é racional.

Inicialmente consideremos a função **g** dada por

$$y = g(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$$

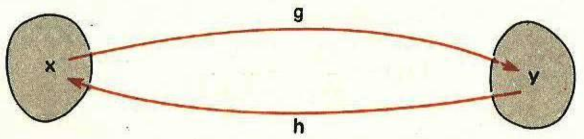
onde **n** é um número natural não nulo tal que:

se **n** é ímpar, **x** é um real qualquer

e se **n** é par, $x \geqslant 0$

A inversa de **g** é a função **h** dada por

$$x = h(y) = y^n$$



De acordo com o que vimos sobre a derivada da função inversa, temos

$$g'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{1}{(y^n)'} = \frac{1}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Portanto

$$(x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \qquad \text{(I)}$$

Consideremos agora a função potência

$$f(x) = x^a$$

onde $a = \dfrac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Assim

$$f(x) = x^a = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m$$

Usando a regra da cadeia e a igualdade (I) acima, temos

$$f'(x) = [m \cdot (x^{1/n})^{m-1}] \cdot [x^{1/n}]' =$$

$$= [m \cdot (x^{1/n})^{m-1}] \cdot \left[\frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}\right] =$$

$$= \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1} = a \cdot x^{a-1}$$

Portanto

$$(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$$

para **a** racional, desde que estejam satisfeitas as condições de existência.

Capítulo

14

Algumas aplicações das derivadas

14.1 — REGRA DE L'HOSPITAL

Ao estudarmos o cálculo de limites, vimos que ao tentarmos calcular um limite do tipo

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{(I)}$$

às vezes ocorre que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

e assim o limite (I) toma a forma $\frac{0}{0}$, que chamamos de **indeterminação**. Neste caso, como vimos, freqüentemente era necessário executarmos alguns artifícios para calcular o limite. A seguir, apresentaremos um teorema, conhecido pelo nome de **regra de L'Hospital***, o qual às vezes facilita o cálculo de tais limites.

Teorema (regra de L'Hospital)

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ e se existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Deixaremos a demonstração deste teorema para o próximo capítulo pois ela depende de outros teoremas que lá serão apresentados. Por enquanto vamos apenas aplicar o teorema.

* Guillaume François Antoine de L'Hospital, Marquês de St. Même, francês, 1661-1704.

Exemplos

Consideremos o $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$. Observamos que

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 9) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to 3} (x - 3) = 0$$

Observamos também que

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)'}{(x - 3)'} = \lim_{x \to 3} \frac{2x}{1} = 6$$

isto é, existe o $\lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)'}{(x - 3)'}$. Portanto, as hipóteses do teorema de L'Hospital estão satisfeitas e, assim, temos

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)'}{(x - 3)'} = 6$$

Apenas para comparar, vamos calcular esse limite sem usar a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x + 3)(x - 3)}{(x - 3)} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

De acordo com a regra de L'Hospital, sendo $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ e existindo o $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existirá também o $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Porém isto **não** quer dizer que se não existir o $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ também não existirá o $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Na realidade é possível existir o $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ sem que exista o $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo

Sejam $f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Usando as técnicas de cálculo de limites vistas anteriormente, obtemos

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}}_{1}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{sen}\frac{1}{x}}_{0} = 0$$

isto é, **existe** o $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$. Analisemos agora a expressão $\frac{f'(x)}{g'(x)}$:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\left(x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \frac{2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

É possível verificar que **não existe** o $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\left(\text{pois não existe} \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{1}{x}}{\cos x}\right)$ e, assim, temos um caso em que **existe** o $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ mas **não existe** o $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Pode ocorrer que, ao aplicarmos a regra de L'Hospital, a expressão $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ainda seja indeterminada. Neste caso, desde que as condições do teorema estejam verificadas, aplicamos a regra novamente, como ilustra o exemplo a seguir.

Exemplo

Sejam

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$$

Temos

$$\begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} & \left(= \frac{0}{0} \text{ para } x = 1\right) \\ \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{4x^3 - 3x^2 - 6x + 5}{4x^3 - 15x^2 + 18x - 7} & \left(= \frac{0}{0} \text{ para } x = 1\right) \\ \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{12x^2 - 6x - 6}{12x^2 - 30x + 18} & \left(= \frac{0}{0} \text{ para } x = 1\right) \\ \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = \frac{24x - 6}{24x - 30} & (= -3 \text{ para } x = 1) \end{cases}$$

Vemos então que existe o $\lim_{x\to 1}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}$. Portanto existirão também

$$\lim_{x\to 1}\frac{f''(x)}{g''(x)}, \quad \lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Assim

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{4x^3 - 3x^2 - 6x + 5}{4x^3 - 15x^2 + 18x - 7} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{12x^2 - 6x - 6}{12x^2 - 30x + 18} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{24x - 6}{24x - 30} = -3$$

Quando tentamos aplicar a regra de L'Hospital várias vezes em seguida precisamos tomar o cuidado de, a cada passagem, verificarmos se ainda temos uma indeterminação pois se não houver a indeterminação, não vale a regra e poderemos chegar a resultados errados. Consideremos por exemplo a seguinte seqüência de igualdades:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x} \overset{(?)}{=} \lim_{x\to 2}\frac{6x}{2} = 6$$

O quociente $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ é indeterminado para $x = 2$, mas o quociente $\frac{3x^2}{2x}$ não é. Assim, a igualdade

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x} = \lim_{x\to 2}\frac{6x}{2}$$

é falsa e o limite não é 6. Apenas a primeira igualdade é verdadeira:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x} = 3$$

Pode-se demonstrar ainda, que a regra de L'Hospital vale para os limites laterais, isto é:

1.º) Se $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} g(x) = 0$ e existe o

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{então} \quad \lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.º) Se $\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a-} g(x) = 0$ e existe o

$$\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{então} \quad \lim_{x\to a-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exercícios Resolvidos

14.1) Calcule $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^3-8}$.

Solução

Observamos que

$$\lim_{x \to 2} (x-2) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 2} (x^3-8) = 0$$

Notamos também que

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)'}{(x^3-8)'} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{12}$$

isto é, existe $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)'}{(x^3-8)'}$. Portanto, de acordo com a regra de L'Hospital, temos

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^3-8} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)'}{(x^3-8)'} = \frac{1}{2}$$

14.2) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x^2}$.

Solução

Aqui temos

$$\lim_{x \to 0} (e^x-1) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} (x^2) = 0$$

Vemos também que $\frac{(e^x-1)'}{(x^2)'} = \frac{e^x}{2x}$

donde $\lim_{x \to 0+} \frac{(e^x-1)'}{(x^2)'} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0-} \frac{(e^x-1)'}{(x^2)'} = -\infty$

Assim $\lim_{x \to 0+} \frac{(e^x-1)}{(x^2)} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0-} \frac{e^x-1}{x^2} = -\infty$

e não existe $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x^2}$, por serem diferentes os limites laterais.

14.3) Calcule o $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Solução

Observemos que

$$\lim_{x \to 0} (1-\cos x) = \lim_{x \to 0} (x^2) = 0$$

e

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{2x} = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}}_{1} = \frac{1}{2}$$

Vemos então que existe $\lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}$ e, portanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \frac{1}{2}$$

14.4) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{5x^3}$

Solução

Notamos que

$$\lim_{x \to 0} (2e^x - 2 - 2x - x^2) = \lim_{x \to 0} (5x^3) = 0$$

Derivemos o numerador e o denominador:

$$\frac{(2e^x - 2 - 2x - x^2)'}{(5x^3)'} = \frac{2e^x - 2 - 2x}{15x^2} \qquad \text{(I)}$$

Observando que

$$\lim_{x \to 0} (2e^x - 2 - 2x) = \lim_{x \to 0} (15x^2) = 0$$

vamos derivar novamente o numerador e o denominador:

$$\frac{(2e^x - 2 - 2x)'}{(15x^2)'} = \frac{2e^x - 2}{30x}$$

Notando que

$$\lim_{x \to 0} (2e^x - 2) = \lim_{x \to 0} (30x) = 0$$

vamos derivar mais uma vez o numerador e o denominador:

$$\frac{(2e^x - 2)'}{(30x)'} = \frac{2e^x}{30}$$

Vemos que $\lim_{x \to 0} \frac{2e^x}{30} = \frac{1}{15}$. Portanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{5x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x}{15x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2}{30x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x}{30} = \frac{1}{15}$$

14.5) Calcule $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{\cos x}{\sqrt{x - \pi/2}}$.

Solução

Observamos que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \cos x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \sqrt{x - \frac{\pi}{2}} = 0$$

Neste caso, devemos ter $x \to \frac{\pi}{2}+$ e não $x \to \frac{\pi}{2}$, para satisfazer a condição de existência da raiz quadrada: $x - \frac{\pi}{2} \geqslant 0$. Vemos que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{(\cos x)'}{\left(\sqrt{x - \frac{\pi}{2}}\right)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \left(-2\sqrt{x - \frac{\pi}{2}} \cdot \text{sen } x\right) = 0.$$

Portanto

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{\cos x}{\sqrt{x - \pi/2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{(\cos x)'}{(\sqrt{x - \pi/2})'} = 0$$

Exercícios Propostos

14.6) Calcule os seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^3+8}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{1-x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3}{2^x - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{3x-5} - 2}{\sqrt{4x-3} - 3}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^n - 1}$ (com $n \in \mathbb{N}^*$)

g) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1 - \operatorname{sen} \dfrac{\pi x}{2}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 7x}$

14.7) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 + x^2 - e^x - e^{-x}}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x + 2 \ln (x+1)}{x^3}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x}$

14.8) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\ln x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{tg} 3x}{\ln \operatorname{tg} 2x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{cotg} x$

f) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \cdot \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}$

14.2 — OUTRAS FORMAS DA REGRA DE L'HOSPITAL

Pode-se demonstrar que valem os seguintes teoremas:

1.º) Se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$ e existe o

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{então} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.º) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$ e existe o

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{então} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.º) Se $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \infty$ e existe o

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \text{então} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exercícios Resolvidos

14.9) Calcule o $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Solução

Aqui temos $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} 5x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} 3x) = +\infty$

Observamos que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\operatorname{tg} 5x)'}{(\operatorname{tg} 3x)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{5 \sec^2 5x}{3 \sec^2 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{5 \cos^2 3x}{3 \cos^2 5x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{5 \cdot 3 \cdot 2 \cos 3x \cdot \operatorname{sen} 3x}{3 \cdot 5 \cdot 2 \cos 5x \cdot \operatorname{sen} 5x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos 3x}{\cos 5x} \cdot \underbrace{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}}_{-1} =$$

$$= \underbrace{\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{3 \operatorname{sen} 3x}{5 \operatorname{sen} 5x} \right]}_{-3/5} \cdot (-1) = \frac{3}{5}$$

Assim

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(\operatorname{tg} 5x)'}{(\operatorname{tg} 3x)'} = \frac{3}{5}$$

14.10) Calcule o $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

Solução

Aqui temos $\lim\limits_{x \to \infty} (x) = \lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2+2} = \infty$

Derivemos o numerador e o denominador:

$$\frac{(x)'}{(\sqrt{x^2+2})'} = \frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x} = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$$

Este último quociente ainda é indeterminado para $x \to \infty$. Derivemos novamente o numerador e o denominador:

$$\frac{(\sqrt{x^2+2})'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x}{1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

Podemos observar que voltamos à expressão original, donde concluímos que neste caso a regra de L'Hospital não nos pode ajudar. Vamos então calcular esse limite de um outro modo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+2}}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+2}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}} = 1$$

14.11) Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \text{sen } x}{x}$.

Solução

Notamos que

$$\lim_{x\to\infty} (x + \text{sen } x) = \lim_{x\to\infty} (x) = \infty$$

Derivando o numerador e o denominador obtemos

$$\frac{(x + \text{sen } x)'}{(x)'} = 1 + \cos x$$

No entanto a expressão $1 + \cos x$ não tem limite para $x \to \infty$, pois seu valor fica oscilando de 0 a +2. Assim, neste caso também a regra de L'Hospital não pode nos ajudar e devemos calcular esse limite de um outro modo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \text{sen } x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{\text{sen } x}{x}\right) = 1$$

Exercícios Propostos

14.12) Calcule os limites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\text{sen} \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln \text{sen } 3x}{\ln \text{sen } 4x}$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} \frac{\text{tg } 3x}{\text{tg } x}$

d) $\lim_{x\to 2+} \frac{\ln (x-2)}{\ln (e^x - e^2)}$

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x}$

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^5}$

14.3 — APLICAÇÃO DA REGRA DE L'HOSPITAL A OUTROS CASOS DE INDETERMINAÇÃO

Vimos a aplicação da Regra de L'Hospital a indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$. No entanto, há outros casos de indeterminação, como por exemplo

$$0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty \quad \text{e} \quad \infty - \infty$$

que podem ser reduzidos a $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, mediante transformações que são indicadas a seguir.

1.º) $\lim f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$

Neste caso fazemos $f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ou $f(x) \cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$.

2.º) $\lim [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$

Aqui tentamos transformar a diferença $f(x) - g(x)$ em uma única expressão:

$$f(x) - g(x) = h(x)$$

Caso seja necessário, usamos o artifício:

$$f(x) - g(x) = f(x) \cdot \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right]$$

3.º) $\lim [f(x)]^{g(x)} = 0^0$ ou ∞^0 ou 1^0

Neste caso calculamos o $\lim \{\ln [f(x)]^{g(x)}\}$.

Exercícios Resolvidos

14.13) Calcule o $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 \text{ sen } \frac{\pi}{x}\right)$.

Solução

Como $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \text{sen } \frac{\pi}{x} = 0$, o limite dado é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$.

Fazemos então

$$x^2 \text{ sen } \frac{\pi}{x} = \frac{\text{sen } \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x^2}}$$

Assim, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x^2}}$.

Este último limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e assim, podemos tentar aplicar a regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi x}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{x}\right) = \infty$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}\right) = \infty$.

14.14) Calcule o $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

Solução

Como $\lim\limits_{x\to 1+}\frac{1}{x-1} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{\ln x} = -\infty$ e também $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{x-1} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{\ln x} = -\infty$ vê-se que os dois limites laterais representam indeterminação do tipo $\infty - \infty$ para a diferença $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$

Fazemos então

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\cdot\ln x} = \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\cdot\ln x}$$

Assim, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\cdot\ln x}$.

Este último limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e portanto podemos tentar usar a regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 1}\frac{[\ln x - x + 1]'}{[(x-1)\cdot\ln x]'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1)\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x\ln x + x - 1}$$

Este último limite ainda é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Vamos então derivar o numerador e o denominador.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{(x\ln x + x - 1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{\ln x + 2} = \frac{-1}{2}$$

Portanto: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \frac{-1}{2}$

14.15) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

Solução

Tem-se $\lim\limits_{x\to 1} x = 1$ e ainda $\lim\limits_{x\to 1+}\frac{1}{1-x} = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{1-x} = +\infty$. Assim, os limites laterais representam indeterminações dos tipos $1^{+\infty}$ e $1^{-\infty}$, para a expressão $x^{\frac{1}{1-x}}$.

Vamos então calcular

$$\lim_{x\to 1}\{\ln x^{\frac{1}{1-x}}\}$$

$$\lim_{x\to 1}\{\ln x^{\frac{1}{1-x}}\} = \lim_{x\to 1}\left\{\frac{1}{1-x}\cdot\ln x\right\} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}$$

Este último limite é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ e, assim, podemos tentar usar a regra de L'Hospital.

$$\lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

Assim, $\lim\limits_{x\to 1}\{\ln x^{\frac{1}{1-x}}\} = -1$.

Neste ponto devemos nos lembrar de que, devido à continuidade da função logarítmica, temos $\lim\limits_{x\to a}\{\ln f(x)\} = \ln\{\lim\limits_{x\to a} f(x)\}$. Portanto:

$$\lim_{x\to 1}\{\ln x^{\frac{1}{1-x}}\} = -1 \Rightarrow \ln\{\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}\} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$$

Exercícios Propostos

14.16) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0+}(x^3\ln x)$ b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-\operatorname{tg}x)\cdot\sec 2x$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$

14.17) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cossec} x\right)$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$

14.18) Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

f) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{cotg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$

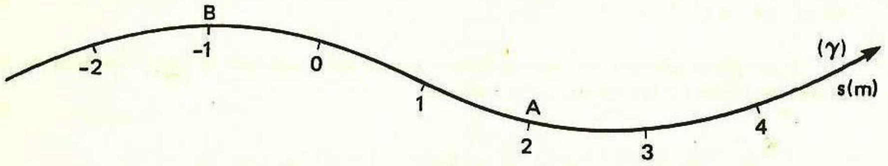
l) $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + 2x)^{\frac{1}{3x}}$

14.4 — VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

Consideremos um ponto material P movendo-se sobre uma curva γ. Para descrever o movimento de P é útil estabelecer-se sobre γ um sistema de coordenadas abscissas sendo que, por razões históricas, a palavra "abscissa" é substituída pela palavra "espaço" e é simbolizada pela letra **s**.

Exemplo

Na figura a seguir, temos uma curva γ sobre a qual foi estabelecido um sistema de coordenadas abscissas, usando-se o **metro (m)** como unidade de medida.



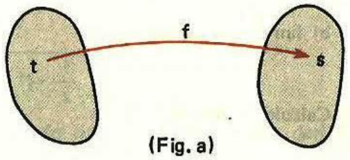
Nessa figura temos

$$\begin{cases} \text{o espaço do ponto A é 2 metros, isto é, } s_A = 2 \text{ m} \\ \text{o espaço do ponto B é } -1 \text{ m, isto é, } s_B = -1 \text{ m} \end{cases}$$

Se um ponto material P tem espaço s_1 no instante t_1 e espaço s_2 no instante t_2, com $t_2 \neq t_1$, a velocidade escalar média de P, entre os instantes t_1 e t_2 é definida por

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Suponhamos que exista uma função **f** que a cada instante **t** associa o espaço **s** de P (Figura a), isto é, s = f(t). A **velocidade escalar instantânea** de P no instante t_1 é definida por



(Fig. a)

$$v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = f'(t_1)$$

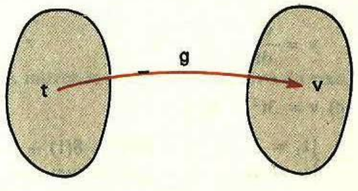
Se fizermos $t_1 = t$ e $t_2 = t_1 + \Delta t$, temos

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Sejam v_1 e v_2 as velocidades escalares de P nos instantes t_1 e t_2, respectivamente, com $t_2 \neq t_1$. A **aceleração escalar média** de P entre os instantes t_1 e t_2, é definida por

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Suponhamos que exista uma função **g** que a cada instante **t** associa a velocidade escalar instantânea de P (Figura b), isto é, v = g(t). A aceleração escalar instantânea de P no instante t_1 é definida por



(Fig. b)

$$a(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$= \lim_{t_2 \to t_1} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = g'(t_1)$$

Fazendo $t_1 = t$ e $t_2 = t_1 + \Delta t$, temos

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

Às vezes é possível relacionar o espaço de P com o tempo, através de uma equação. Neste caso, tal equação é denominada **equação horária do espaço**. Se for possível relacionar a velocidade escalar instantânea de P com o tempo, através de uma equação, esta equação denomina-se **equação horária da velocidade escalar**. Se existe uma equação que relaciona a aceleração escalar instantânea com o tempo, essa equação é denominada **equação horária da aceleração escalar**.

Exercícios Resolvidos

14.19) Um ponto material move-se sobre uma curva de modo que a equação horária do espaço é

$$s = t^3 - 4t^2 + 6t - 10$$

com **s** em metros e **t** em segundos.

a) Calcule a velocidade escalar média desse ponto entre os instantes $t_1 = 3s$ e $t_2 = 5s$.

b) Determine a equação horária da velocidade escalar instantânea.

c) Calcule a aceleração escalar média entre os instantes $t_1 = 1s$ e $t_2 = 4s$.

d) Determine a equação horária da aceleração escalar instantânea.

Solução

a) $s = t^3 - 4t^2 + 6t - 10$

$$\begin{cases} t_1 = 3s \Rightarrow s_1 = (3)^3 - 4(3)^2 + 6(3) - 10 = -1 \text{ m} \\ t_2 = 5s \Rightarrow s_2 = (5)^3 - 4(5)^2 + 6(5) - 10 = 45 \text{ m} \end{cases}$$

$$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{(45) - (-1)}{5 - 3} = 23 \text{ m/s}$$

b) $s = t^3 - 4t^2 + 6t - 10$

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 8t + 6$$

c) $v = 3t^2 - 8t + 6$

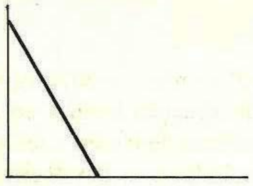
$$\begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 3(1)^2 - 8(1) + 6 = 1 \text{ m/s} \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 3(4)^2 - 8(4) + 6 = 22 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{22 - 1}{4 - 1} = 7 \text{ m/s}^2$$

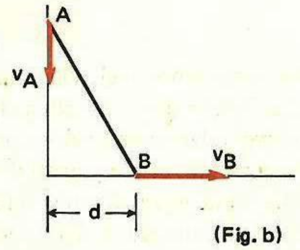
d) $v = 3t^2 - 8t + 6$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 8$$

14.20) Uma escada de comprimento igual a 5 m está com uma extremidade apoiada no chão e outra apoiada numa parede vertical, como indica a figura **a**. A escada começa a escorregar, de modo que num instante t_1, a distância **d** é igual a 4 metros (ver figura b) e a extremidade B tem velocidade $v_B = 1{,}2$ m/s. Calcule nesse instante, a velocidade v_A da extremidade A.



(Fig. a)



(Fig. b)

Solução

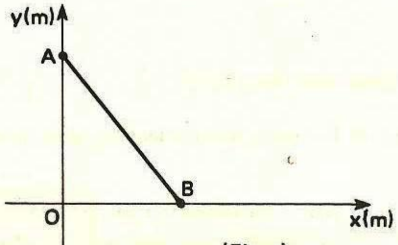
Adotemos um sistema de coordenadas ortogonais como indica a figura **c**. Sejam **x** a abscissa de B e **y** a ordenada de A. A cada instante devemos ter

$$x^2 + y^2 = 5^2$$

ou

$$x^2 + y^2 = 25 \qquad \text{(I)}$$

Portanto, para $x = 4$ m teremos $y = 3$ m. Vamos derivar todos os termos da equação (I), em relação ao tempo e usando a regra da cadeia:



(Fig. c)

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Mas $\frac{dx}{dt} = v_B$ e $\frac{dy}{dt} = v_A$. Portanto temos:

$$2x \cdot v_B + 2y \cdot v_A = 0 \qquad \text{(III)}$$

No instante pedido no enunciado, temos

$$x = 4 \text{ m}, \quad y = 3 \text{ m} \quad \text{e} \quad v_B = 1{,}2 \text{ m/s}$$

Substituindo na equação (III) obtemos:

$$2(4)(1{,}2) + 2(3)v_A = 0$$

donde

$$v_A = -1{,}6 \text{ m/s}$$

O sinal de v_A é negativo pelo fato de o ponto A mover-se no sentido negativo do eixo Oy.

Exercícios Propostos

14.21) Um ponto material move-se sobre uma curva de modo que a equação horária do espaço é

$$s = t^4 - 2t^3 + 3t^2 + 6$$

com **s** em metros e **t** em segundos.

a) Calcule a velocidade escalar média entre os instantes $t_1 = 3$s e $t_2 = 5$s.
b) Determine a equação horária da velocidade escalar instantânea.
c) Calcule a aceleração escalar média entre os instantes $t_1 = 1$s e $t_2 = 5$s.
d) Determine a equação horária da aceleração escalar instantânea.

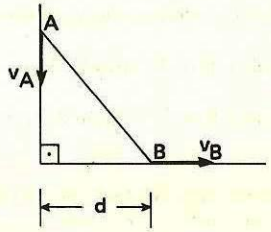
14.22) Consideremos uma partícula movendo-se sobre um eixo Ox de modo que a equação horária da abscissa **x** é

$$x = 5\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right)$$

com **x** em metros e **t** em segundos.

a) Determine a equação horária da velocidade escalar instantânea.
b) Determine a equação horária da aceleração escalar instantânea.

14.23) Uma escada de comprimento igual a 13 m tem uma extremidade apoiada no chão e a outra extremidade apoiada numa parede vertical, como indica a figura, de modo que num instante t_1, a distância **d** é igual a 12 m e a extremidade A tem velocidade 1,5 m/s. Calcule, nesse instante, a velocidade da extremidade B.



14.5 — TAXA DE VARIAÇÃO

Consideremos a função **f** dada por $y = f(x)$. Costuma-se dizer que $f'(x)$ é a **taxa de variação** de **y** em relação a **x**. Assim, podemos dizer que a velocidade escalar instantânea é a taxa de variação do espaço em relação ao tempo. Do mesmo modo, a aceleração escalar instantânea é a taxa de variação da velocidade escalar instantânea em relação ao tempo.

Exercícios Resolvidos

14.24) Um balão de borracha de forma esférica é enchido de ar, de modo que seu raio aumenta à razão de 0,2 cm/s. Calcule a taxa de variação do volume desse balão em relação ao tempo, no instante em que o raio for igual a 10 cm.

Solução

O volume de uma esfera de raio R é dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Usando a regra da cadeia temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 \cdot \frac{dR}{dt} \qquad \text{(I)}$$

No instante mencionado no enunciado, temos

$$R = 10\text{ cm} \quad \text{e} \quad \frac{dR}{dt} = 0{,}2\text{ cm/s}$$

Substituindo em (I):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \cdot (10)^2 \cdot (0{,}2)$$

$$\frac{dV}{dt} = 80\,\pi\text{ cm}^3/\text{s}$$

Exercícios Propostos

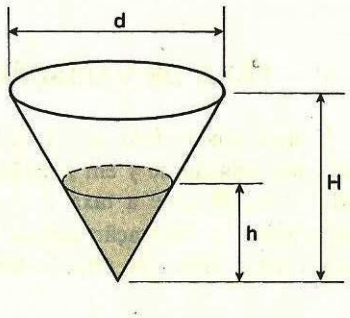
14.25) Uma esfera aumenta de volume de modo que seu raio aumenta à razão de 1,5 centímetros por segundo. Calcule a taxa de variação do volume da esfera em relação ao tempo, quando o raio for igual a 20 cm.

14.26) O raio de um círculo aumenta à razão de 0,4 metros por segundo. Calcule a taxa de variação da área do círculo em relação ao tempo, no instante em que o raio for igual a 5 metros.

14.27) Calcule a taxa de variação da área A de um círculo em relação ao seu raio R.

14.28) Calcule a taxa de variação da área de um círculo em relação ao seu raio R no instante em que R = 5 m.

14.29) Um reservatório de água tem a forma de um cone de altura H = 8 m e diâmetro da base d = 4 m como indica a figura. O reservatório está sendo enchido à razão de 0,015 m³/s. Calcule a taxa de variação da altura **h** do nível da água em função do tempo, no instante em que h = 2 m.



Capítulo **15**

Variação das funções

15.1 — INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores vimos algumas aplicações das derivadas. Neste capítulo veremos que a derivada tem aplicações importantes no estudo da variação de uma função. Apresentaremos teoremas que nos permitem determinar os pontos de máximo ou de mínimo e os intervalos em que a função é crescente ou decrescente. Assim, antes de prosseguir, é interessante que o leitor reveja os conceitos de **ponto de máximo, ponto de mínimo, ponto de máximo relativo, ponto de mínimo relativo, função crescente** e **função decrescente** que foram expostos no capítulo 3.

No final deste capítulo faremos a demonstração da regra de L'Hospital vista no capítulo anterior, pois esta demonstração depende de teoremas que aqui serão apresentados.

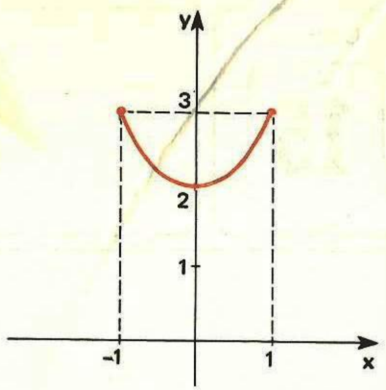
15.2 — TEOREMA DE WEIERSTRASS

Se **f** é uma função contínua num intervalo fechado [a; b], então **f** tem ponto de máximo e ponto de mínimo nesse intervalo.

Se imaginarmos o gráfico de uma função contínua como uma linha sem saltos ou interrupções, é fácil "acreditarmos" que o teorema deve ser válido. No entanto a demonstração desse teorema é muito complexa e, assim, não a daremos aqui (O leitor poderá encontrar essa demonstração em livros de Cálculo Avançado). Vamos apenas dar alguns exemplos para ressaltar as hipóteses do teorema.

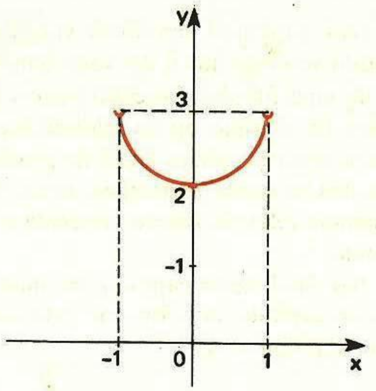
Exemplo 1

Consideremos a função **f** definida por $f(x) = x^2 + 2$ e o intervalo fechado $[-1; 1]$. Temos uma função contínua em um intervalo fechado. Portanto essa função deve ter ponto de máximo e ponto de mínimo nesse intervalo. Há dois pontos de máximo que são os números 1 e -1 e o valor máximo correspondente é o número 3. Há um ponto de mínimo que é o número 0 e o valor mínimo correspondente é o número 2.



Exemplo 2

Consideremos agora a função definida por $f(x) = x^2 + 2$ e o intervalo aberto $]-1; 1[$. Temos uma função contínua num intervalo *aberto*. Portanto o teorema não garante que haja ponto de máximo e ponto de mínimo nesse intervalo. De fato, é fácil perceber que a função assume um valor mínimo nesse intervalo (que é o número 2), mas não tem valor máximo.

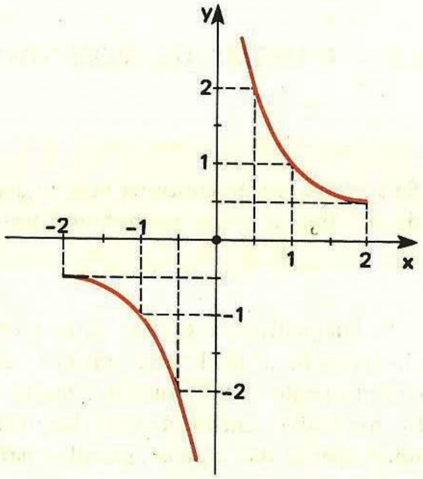


Exemplo 3

Seja a função **f** definida por

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x}, \text{ para } x \neq 0 \\ f(x) = 0, \quad \text{para } x = 0 \end{cases}$$

e o intervalo fechado $[-2; 2]$. O intervalo é fechado, mas a função não é contínua nesse intervalo. Assim, o teorema não garante a existência de ponto de máximo e ponto de mínimo nesse intervalo. De fato, é fácil perceber que a função não assume valor máximo nem valor mínimo nesse intervalo.



15.3 — TEOREMA DE FERMAT

> Seja f uma função derivável no ponto x_0 e definida em uma vizinhança de x_0. Se x_0 é ponto de máximo (ou de mínimo) relativo, então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

Consideremos o caso em que x_0 é ponto de máximo relativo. Isto significa que existe uma vizinhança V de x_0 de modo que para qualquer $x \in V$ temos

$$f(x) \leqslant f(x_0)$$

ou

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0$$

Assim, para $x > x_0$ temos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$$

donde

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \qquad \text{(I)}$$

pois, já que **f** é derivável em x_0, podemos garantir que existe $f'_+(x_0)$. Se $x < x_0$, temos

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

donde

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \qquad \text{(II)}$$

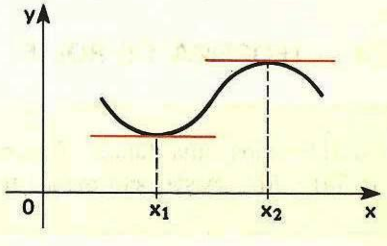
Como **f** é derivável em x_0, devemos ter

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \qquad \text{(III)}$$

Assim, de I, II e III concluímos que $f'(x_0) = 0$.

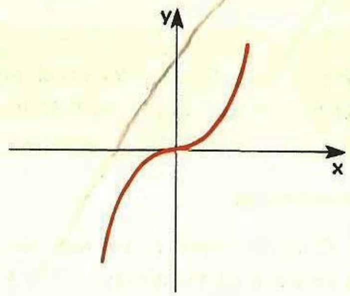
De modo análogo se prova o teorema para o caso em que x_0 é ponto de mínimo relativo.

Geometricamente, o significado do teorema de Fermat é que nos pontos de máximo ou mínimo relativo em que a função seja derivável a tangente ao gráfico da função é paralela ao eixo Ox, como ilustra a figura ao lado, onde x_1 é ponto de mínimo relativo e x_2 é ponto de máximo relativo.

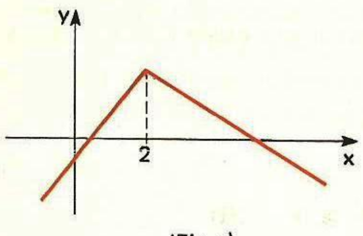


Observações

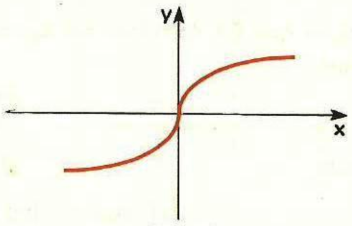
1.ª) O recíproco do teorema de Fermat não é válido, pois é possível termos $f'(x_0) = 0$ sem que x_0 seja ponto de máximo ou mínimo relativo. Consideremos por exemplo, a função $f(x) = x^3$. É fácil concluir que $f'(0) = 0$, mas o número 0 não é ponto de máximo nem de mínimo relativo, como ilustra a figura ao lado.



2.ª) Uma das hipóteses do teorema de Fermat é que a função **f** seja derivável no ponto x_0 considerado. Portanto nada é afirmado para o caso em que $f'(x_0)$ não existe. Na realidade, quando $f'(x_0)$ não existe, pode acontecer que x_0 seja ponto de máximo ou mínimo relativo, mas pode acontecer também que não seja nem ponto de máximo nem ponto de mínimo relativo. Assim, por exemplo, a função representada na **figura a**, a seguir, tem um ponto de máximo relativo que é o número 2 e no entanto não existe $f'(2)$. Como outro exemplo, podemos citar a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (**figura b**). Neste caso não existe $f'(0)$ e o ponto 0 não é nem de máximo nem de mínimo relativo.



(Fig. a)



(Fig. b)

Definição

Um ponto x_0 para o qual $f'(x_0) = 0$, é denominado ponto crítico da função **f**.

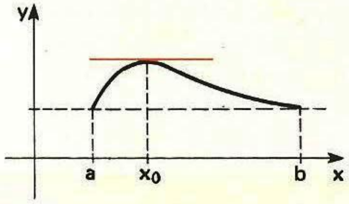
De acordo com a primeira observação acima, um ponto crítico pode ser um ponto de máximo ou mínimo relativo, mas também pode não ser nem ponto de máximo nem de mínimo relativo.

15.4 — TEOREMA DE ROLLE

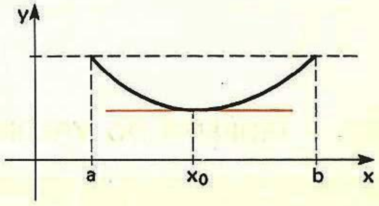
> Consideremos uma função f, contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$. Se $f(a) = f(b)$, existe pelo menos um ponto x_0 em $]a; b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

Sendo **f** contínua em $[a; b]$, pelo teorema de Weierstrass podemos garantir que **f** tem um máximo e um mínimo em $[a; b]$. Se o ponto de máximo é um ponto $x_0 \in]a; b[$, de acordo com o teorema de Fermat teremos $f'(x_0) = 0$ (**figura a**). Se o ponto de mínimo é um ponto $x_0 \in]a; b[$, novamente, de acordo com o teorema de Fermat, teremos $f'(x_0) = 0$ (**figura b**).

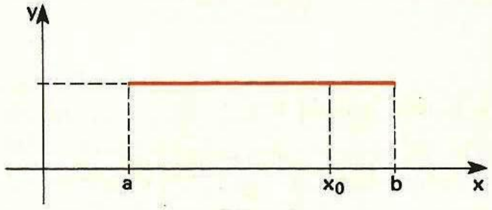


(**Fig. a**)



(**Fig. b**)

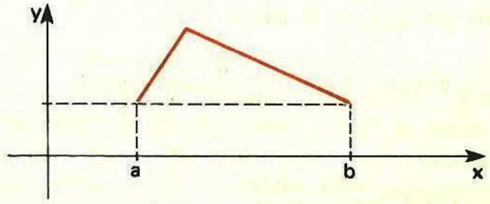
Se tanto o valor máximo como o valor mínimo forem atingidos nos extremos de $[a; b]$, como $f(a) = f(b)$, a função **f** é constante, e, assim, para qualquer $x_0 \in]a; b[$, teremos $f'(x_0) = 0$ (**figura c**)



(**Fig. c**)

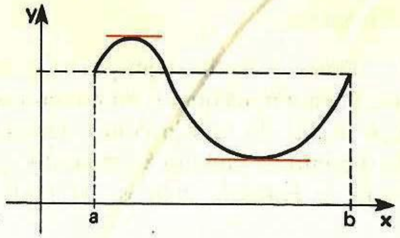
Observações

1.ª) A hipótese do teorema de Rolle, de que **f** é derivável em $]a; b[$, é importante, pois sem ela não poderíamos aplicar o teorema de Fermat. Assim, por exemplo, para a função representada na **figura d**, não há nenhum $x_0 \in]a; b[$ para o qual $f'(x_0) = 0$, pelo fato de a função não ser derivável no intervalo $]a; b[$.



(**Fig. d**)

2.ª) Satisfeitas as hipóteses do teorema de Rolle, este afirma que há pelo menos um ponto $x_0 \in]a; b[$, tal que $f'(x_0) = 0$. Isto quer dizer que pode haver mais de um ponto cuja derivada seja nula, como ilustra a **Figura e.**



(Fig. e)

15.5 – TEOREMA DO VALOR MÉDIO

Se a função **f** é contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$, existe pelo menos um número $x_0 \in]a; b[$, tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração

Consideremos a função **g** dada por

$$g(x) = f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](x - a)$$

É fácil concluir que **g** é contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$, pois o mesmo ocorre com as funções $f(x)$ e $h(x) = x - a$. Por outro lado, temos:

$$g(a) = f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](a - a) = f(a)$$

e

$$g(b) = f(b) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right](b - a) = f(a)$$

donde concluímos que $g(a) = g(b)$. Assim, de acordo com o teorema de Rolle, existe $x_0 \in]a; b[$ tal que $g'(x_0) = 0$, isto é:

$$g'(x_0) = f'(x_0) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right] = 0$$

Portanto

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Observações

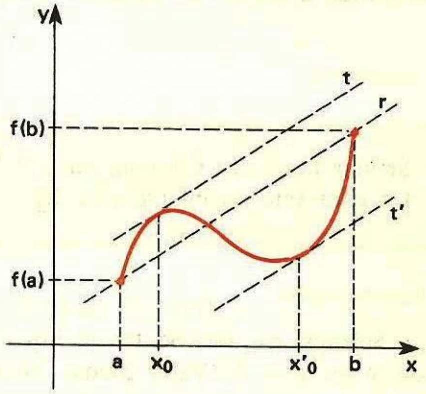
1.ª) A figura a seguir nos ajuda a dar uma interpretação geométrica do teorema do valor médio. O número

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

é o coeficiente angular da reta **r** que passa pelos pontos $(a; f(a))$ e $(b; f(b))$. Por outro lado, $f'(x_0)$ é igual ao coeficiente angular da reta **t** tangente ao gráfico da função, no ponto de abscissa x_0. Assim, a igualdade

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

significa que a reta **t** é paralela à reta **r**.



2.ª) Dada uma função **f, a taxa de variação média** de **f** no intervalo $[a; b]$ é igual a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e a **taxa de variação instantânea** de **f** no ponto x_0 é igual a $f'(x_0)$, como já havíamos mencionado no capítulo anterior. Assim, o teorema do valor médio afirma que, se **f** é contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$, existe pelo menos um $x_0 \in]a; b[$ tal que a taxa de variação instantânea de **f** no ponto x_0 é igual à taxa de variação média de **f** no intervalo $[a, b]$. Daí vem o nome **teorema do valor médio.** Um exemplo físico interessante é o caso da velocidade escalar. Suponhamos que o espaço de uma partícula em função do tempo seja dado pela função **f**. A velocidade escalar média da partícula, no intervalo de tempo $[t_1; t_2]$, é dada por

$$v_m = \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

e a velocidade escalar instantânea da partícula num instante t_0 é dada por

$$v = f'(t_0)$$

Portanto, de acordo com o teorema do valor médio, em pelo menos um instante $t_0 \in]t_1; t_2[$, a velocidade escalar instantânea foi igual à velocidade escalar média no intervalo $[t_1; t_2]$. Assim, por exemplo, se a velocidade escalar média de uma partícula, em um dado intervalo de tempo, foi igual a 40 km/h, em pelo menos um instante desse intervalo sua velocidade escalar instantânea foi igual a 40 km/h.

Sabemos que, se uma função **f** é constante, sua derivada é nula. Cabe então a pergunta: "Se $f'(x) = 0$ para todo **x** pertencente a um intervalo, podemos concluir que essa função é constante nesse intervalo?" A resposta é "sim" e ela é justificada a seguir, no **corolário 1** do teorema do valor médio.

Corolário 1

> Se uma função **f** é contínua em $[a; b]$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a; b[$, então **f** é constante no intervalo $[a; b]$.

Demonstração

Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer de $[a; b]$, com $x_1 < x_2$. Então, de acordo com o teorema do Valor Médio, existe $x \in]x_1; x_2[$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Mas $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a; b[$. Portanto,

$$0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

donde

$$f(x_2) = f(x_1)$$

Concluímos então que o valor de **f** é o mesmo para dois pontos quaisquer do intervalo $[a; b]$, o que significa que **f** é constante no intervalo.

Corolário 2

> Sejam **f** e **g** funções contínuas em $[a; b]$ e deriváveis em $]a; b[$. Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in]a; b[$, então existe um $c \in \mathbb{R}$, tal que
>
> $$f(x) = g(x) + c$$
>
> para todo $x \in [a; b]$

Demonstração

Consideremos a função **h** definida por $h(x) = f(x) - g(x)$.

A função **h** é contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$, pois **f** e **g** o são. Como, para todo $x \in]a; b[$, temos $f'(x) = g'(x)$, concluímos que $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$

para todo $x \in]a; b[$. Portanto, de acordo com o **corolário 1**, a função **h** é constante no intervalo $[a; b]$, isto é, existe $c \in \mathbb{R}$, tal que

$$h(x) = c$$

ou

$$f(x) - g(x) = c$$

ou ainda

$$f(x) = g(x) + c$$

para todo $x \in [a; b]$.

Os **corolários 1** e **2** terão aplicações importantes no capítulo 16.

15.6 — DERIVADAS E CRESCIMENTO DAS FUNÇÕES

Teorema

> A) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$, então f é crescente em $]a; b[$.
> B) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a; b[$, então f é decrescente em $]a; b[$.

Demonstração

Faremos apenas a demonstração da parte A do teorema; a demonstração da parte B é análoga.

Consideremos dois pontos x_1 e x_2 do intervalo $]a; b[$, com $x_1 < x_2$. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$, concluímos que **f** é derivável em $]a; b[$. Portanto, de acordo com o teorema do Valor Médio, existe $x_0 \in]x_1; x_2[$ tal que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Mas, como $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$, devemos ter $f'(x_0) > 0$ e, portanto,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \qquad \text{(I)}$$

Lembrando que $x_2 > x_1$, a desigualdade I nos conduz a

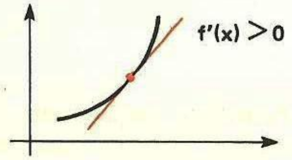
$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

ou

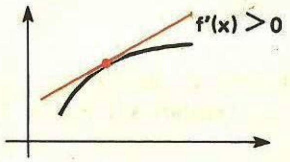
$$f(x_2) > f(x_1)$$

Vemos então que para $x_2 > x_1$, temos $f(x_2) > f(x_1)$, o que nos leva a concluir que **f** é crescente no intervalo dado.

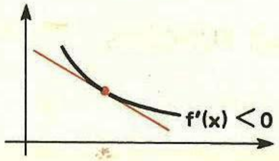
As figuras a seguir ilustram o teorema. Nas **figuras a e b**, vemos que a reta tangente ao gráfico de **f** num ponto qualquer tem coeficiente angular positivo, isto é, $f'(x) > 0$. Assim, a função é crescente. Nas **figuras c e d**, vemos que a reta tangente ao gráfico de **f** num ponto qualquer tem coeficiente angular negativo, isto é, $f'(x) < 0$. Assim, a função é decrescente.



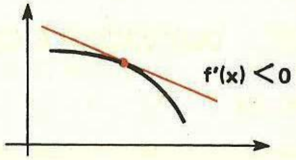
(Fig. a)



(Fig. b)



(Fig. c)

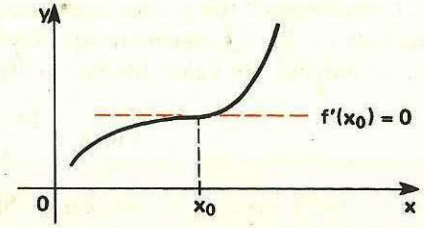


(Fig. d)

Devemos observar que o recíproco do teorema *não* é válido, isto é, *não é verdade que*

$$\begin{cases} \text{f é crescente} \Rightarrow f'(x) > 0 \\ \text{f é decrescente} \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$$

Consideremos, por exemplo, a função **f** representada na **figura e**. A função **f** é crescente e, no entanto, no ponto x_0 a reta tangente ao gráfico é paralela ao eixo Ox, isto é, $f'(x_0) = 0$. É fácil perceber então que as implicações corretas são

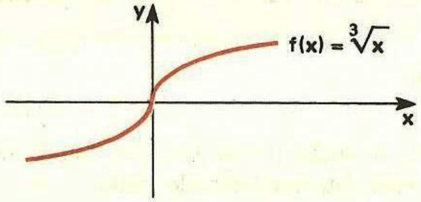


$$\begin{cases} \text{f é crescente} \Rightarrow f'(x) \geqslant 0 \\ \text{f é decrescente} \Rightarrow f'(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

desde que **f** seja derivável no intervalo considerado.

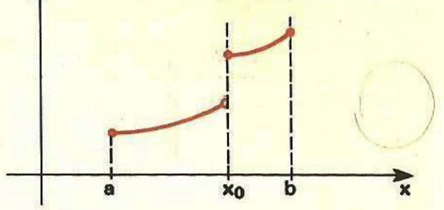
Exemplo

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[3]{x}$, é crescente em todo o seu domínio, mas *não* é verdade que $f'(x) \geqslant 0$ em todo o seu domínio, pois não existe $f'(0)$.



Exemplo

A função **f** representada na figura é crescente em todo o intervalo $[a; b]$, mas não é verdade que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a; b[$, pois **f** não é derivável no ponto x_0.



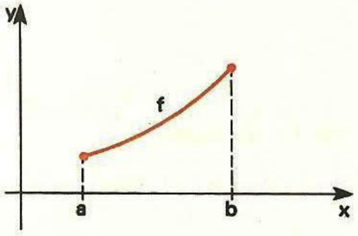
Caso em que f é contínua em [a; b]

Se a função **f** é contínua em $[a; b]$, acompanhando a demonstração do teorema, vemos que seu enunciado pode ser alterado para:

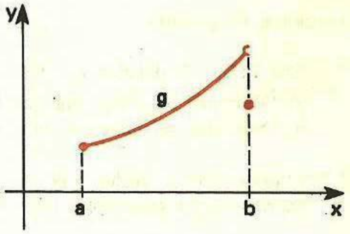
A) Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$, então **f** é crescente em $[a; b]$.
B) Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in]a; b[$, então **f** é decrescente em $[a; b]$.

Exemplo

A função **f** representada na **figura a** é contínua em $[a; b]$ e tem-se $f'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$. Temos então que **f** é crescente em $[a; b]$. A função **g** representada na **figura b** satisfaz $g'(x) > 0$ para todo $x \in]a; b[$, mas não é crescente em $[a; b]$ (embora seja crescente em $]a; b[$). Isto pode ocorrer porque **g** não é contínua em $[a; b]$.



(Fig. a)



(Fig. b)

Exercícios Resolvidos

15.1) Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x$.

a) Determine os pontos em que f' se anula.
b) Determine os intervalos onde **f** é crescente e onde **f** é decrescente.

Solução

a) $f(x) = x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

Portanto, os pontos onde f' se anula são $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$

b) Estudando os sinais de f'(x), temos

x		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	
f'(x)	+ + + + +	0	− − − − − −	0	+ + + + +

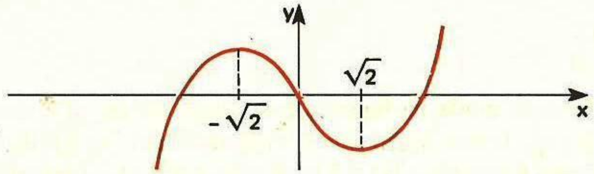
Assim

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\sqrt{2} \text{ ou } x > \sqrt{2} \\ f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

Como a função **f** é contínua em todo o seu domínio, temos:

$$\begin{cases} \textbf{f} \text{ é crescente nos intervalos }]-\infty; -\sqrt{2}] \text{ e } [\sqrt{2}; +\infty[\\ \textbf{f} \text{ é decrescente no intervalo } [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \end{cases}$$

Na figura a seguir temos um esboço do gráfico de **f**.



O ponto $x_1 = -\sqrt{2}$ é um ponto de máximo relativo e o ponto $x_2 = \sqrt{2}$ é um ponto de mínimo relativo.

Exercícios Propostos

15.2) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x^3 - 24x + 8$.

a) Determine os pontos em que $f(x) = 0$.

b) Determine os intervalos onde **f** é crescente e onde **f** é decrescente.

15.3) Consideremos a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$. Determine os intervalos onde **f** é crescente e onde **f** é decrescente.

15.4) Seja **f** definida por $f(x) = \frac{x^3}{3} + mx^2 + x + 12$. Determine **m** de modo que a função seja crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.

15.7 — PESQUISA DE MÁXIMOS E MÍNIMOS — APLICAÇÃO AOS GRÁFICOS

O teorema do item anterior pode nos ajudar a determinar os pontos de máximo relativo e mínimo relativo de uma função **f**.

Em primeiro lugar determinamos todos os pontos x_0 para os quais ou $f'(x_0) = 0$, ou não existe $f'(x_0)$. Depois aplicamos a regra a seguir, a qual é conseqüência imediata daquele teorema.

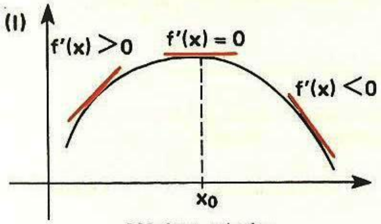
Regra

Seja f contínua em x_0 e derivável em uma vizinhança de x_0.

A) Se $f'(x) > 0$ em algum intervalo à esquerda de x_0 (sendo x_0 um extremo desse intervalo) e $f'(x) < 0$ em algum intervalo à direita de x_0 (sendo x_0 um extremo desse intervalo), então x_0 é ponto de máximo relativo (Veja as figuras I, II e III).

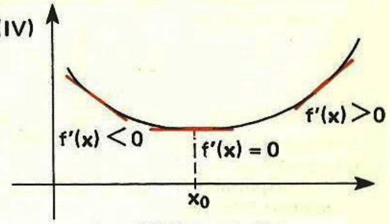
B) Se $f'(x) < 0$ em algum intervalo à esquerda de x_0 (sendo x_0 um extremo desse intervalo) e $f'(x) > 0$ em algum intervalo à direita de x_0 (sendo x_0 um extremo desse intervalo), então x_0 é ponto de mínimo relativo (Veja as figuras IV, V e VI).

(I)



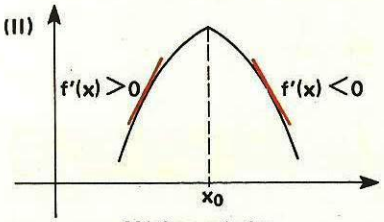
Máximo relativo
$f'(x_0) = 0$

(IV)



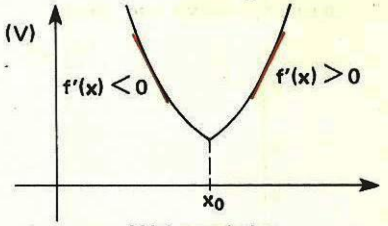
Mínimo relativo
$f'(x_0) = 0$

(II)



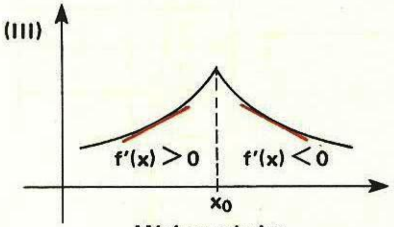
Máximo relativo
$\nexists f'(x_0)$

(V)



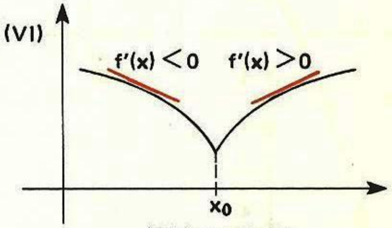
Mínimo relativo
$\nexists f'(x_0)$

(III)



Máximo relativo
$\nexists f'(x_0)$

(VI)



Mínimo relativo
$\nexists f'(x_0)$

Exercícios Resolvidos

15.5) Consideremos a função **f** definida por

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

Determine os pontos de máximo e mínimo relativo e esboce o gráfico de **f**.

Solução

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

Como vemos, **f'** está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.
Vamos então determinar os pontos onde $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 3$$

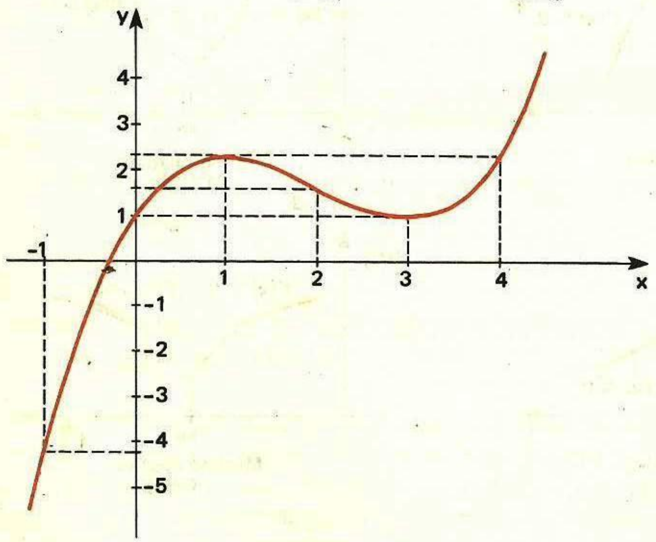
O quadro a seguir nos dá o sinal de f'(x) e o comportamento de **f** para cada **x**.

x		1		3	
f'(x)	+ + + +	0	− − − −	0	+ + + +
f	crescente		decrescente		crescente

Aplicando a regra estabelecida, vemos que 1 é ponto de máximo relativo e 3 é ponto de mínimo relativo.

Para esboçarmos o gráfico de **f**, podemos calcular f(x) para alguns valores de **x** *nas pr... ximidades* dos pontos de máximo e mínimo relativo, como mostra a tabela (Se possível, de... minamos os pontos onde $f(x) = 0$). É interessante também verificarmos o comportamento de f no infinito. Neste caso, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$



x	f(x)
−1	−13/3
0	1
1	7/3
2	5/3
3	1
4	7/3

15.6) Determine os pontos de máximo e mínimo relativo e esboce o gráfico da função **f** definida por

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

Solução

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 \\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 \end{cases}$$

Vemos que f' está definida para todo $x \in \mathbb{R}$.

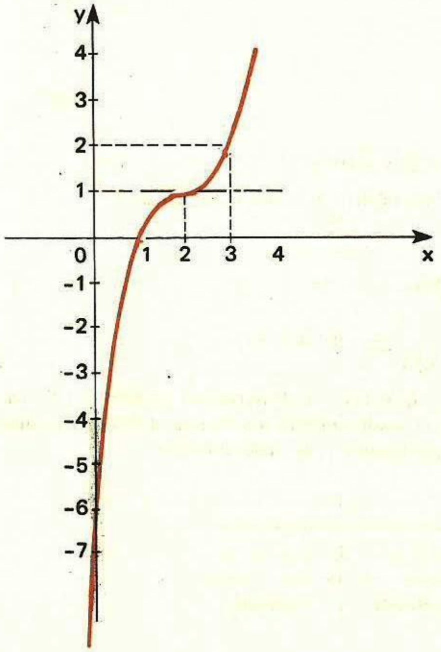
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x		2	
f'(x)	+ + + + +	0	+ + + + +
f	crescente		crescente

Como **f** é contínua no ponto 2, concluímos que ela é crescente para todo o domínio. Portanto não há nem ponto de máximo nem ponto de mínimo relativo. Temos também:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Calculando f(x) para alguns valores de **x** próximos do ponto crítico $x = 2$, podemos esboçar o gráfico de **f**, não nos esquecendo de que $f'(2) = 0$, isto é, para $x = 2$ a tangente ao gráfico é paralela ao eixo Ox. Num caso como este dizemos que o ponto 2 é um ponto de **inflexão horizontal**



x	f(x)
0	−7
1	0
2	1
3	2

15.7) Determine os pontos de máximo e mínimo relativo e esboce o gráfico da função **f** definida por $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

Solução

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x-2} \\ f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} \quad (\text{para } x \neq 2) \end{cases}$$

Observamos que não existe **x** para o qual $f'(x) = 0$. Vemos também que f' está definida para todo **x**, com exceção de $x = 2$. Calculando o limite de $f'(x)$ para **x** tendendo a 2, obtemos:

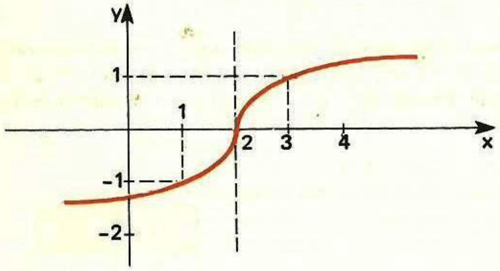
$$\lim_{x \to 2+} f'(x) = \lim_{x \to 2-} f'(x) = +\infty$$

Isto significa que a tangente ao gráfico de **f**, no ponto 2, é vertical.

Vemos também que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Calculando f(x) para alguns valores de **x** próximos do ponto 2, podemos esboçar o gráfico.



x	f(x)
1	−1
2	0
3	1

15.8) Consideremos a função **f** definida por

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2$$

Determine os pontos de máximo e mínimo relativo e esboce o gráfico de **f**.

Solução

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2 \\ f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-1}} \quad (\text{para } x \neq 1) \end{cases}$$

Observamos que não existe **x** para o qual $f'(x) = 0$. Observamos também que f' está definida para todo **x**, com exceção de $x = 1$. O quadro a seguir nos dá o sinal de $f'(x)$ e o comportamento de **f** para cada **x** (O sinal ⊗ significa que f' não está definida).

x		1	
f'(x)	− − − − −	⊗	+ + + +
f	decrescente		crescente

Aplicando a regra apresentada na teoria, concluímos que 1 é ponto de mínimo relativo. Na realidade, pelo comportamento de **f** é fácil concluir que 1 é também ponto de mínimo absoluto de **f**.

Calculando o limite de $f'(x)$ para **x** tendendo a 1, obtemos:

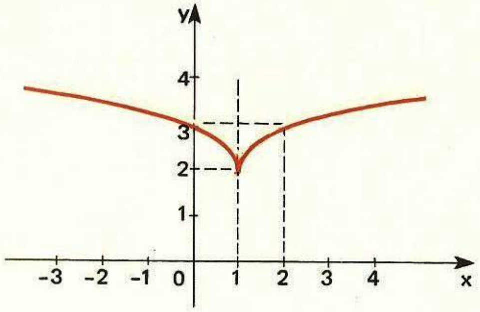
$$\lim_{x \to 1+} f'(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1-} f'(x) = -\infty$$

Isto significa que no ponto 1 a reta tangente ao gráfico de **f** é vertical.

Temos também:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Calculando f(x) para alguns valores de **x** próximos do ponto de mínimo, podemos fazer o esboço do gráfico de **f**.



x	f(x)
0	3
1	2
2	3

15.9) Determine os pontos de máximo e mínimo relativo e esboce o gráfico da função **f** definida por

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

Solução

$$\begin{cases} f(x) = x + \dfrac{1}{x} \quad (x \neq 0) \\ f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

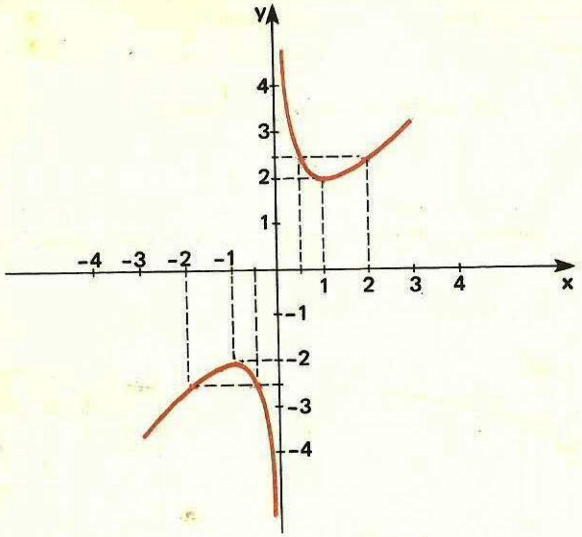
x		−1		0		1	
f'(x)	+ + + +	○	− − − −	⊗	− − − −	○	+ + + +
f	crescente		decrescente		decrescente		crescente

Pela regra apresentada, concluímos que −1 é ponto de máximo relativo e +1 é ponto de mínimo relativo.

Temos também:

$$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty & \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 0+} f'(x) = -\infty & \lim_{x \to 0-} f'(x) = -\infty \end{cases}$$

A figura a seguir nos dá o esboço do gráfico de **f**.



x	f(x)
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
1	2
2	$\frac{5}{2}$

15.10) Seja a função **f** definida por

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x - 3}$$

Determine os pontos de máximo e mínimo relativo e esboce o gráfico de **f**.

Solução

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x - 4}{x - 3} & (\text{para } x \neq 3) \\ f'(x) = \dfrac{-2}{(x - 3)^2} & (\text{para } x \neq 3) \end{cases}$$

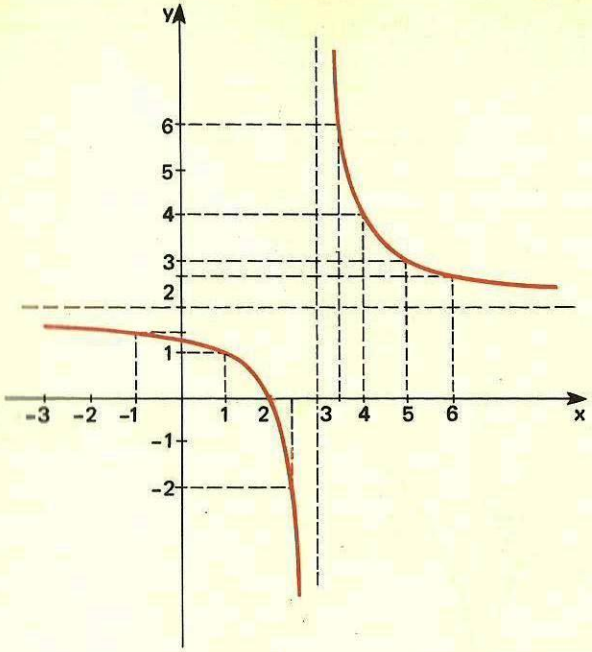
Não há nenhum **x** para o qual $f'(x) = 0$.

x		3	
f'(x)	− − − −	⊗	− − − −
f	decrescente	¦	decrescente

Temos

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 & \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3+} f'(x) = -\infty & \lim\limits_{x \to 3-} f'(x) = -\infty \end{cases}$$

Pelo comportamento de **f**, vemos que não há ponto de máximo relativo nem mínimo relativo. A figura a seguir nos dá o esboço do gráfico de **f**.



x	f(x)
−1	3/2
0	4/3
1	1
2	0
5/2	−2
7/2	6
4	4
5	3
6	8/3

15.11) Seja a função **f** definida por

$$f(x) = \frac{3}{5} x^{5/3} + 12\, x^{2/3}$$

Determine os pontos de máximo e mínimo relativo e esboce o gráfico de **f**.

Solução

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{5} x^{5/3} + 12x^{2/3} \\ f'(x) = x^{2/3} + 8x^{-1/3} \quad (x \neq 0) \end{cases}$$

Observamos que não existe $f'(0)$.

Temos

$$f'(x) = x^{2/3} + 8x^{-1/3} = x^{-1/3}(x + 8) = \frac{x + 8}{\sqrt[3]{x}}$$

Assim

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x + 8}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow x = -8$$

x		−8		0	
f'(x)	+ + +	0	− − −	⊗	+ + +
f	crescente	¦	decrescente	¦	crescente

Aplicando a regra apresentada na teoria, concluímos que -8 é ponto de máximo relativo e 0 é ponto de mínimo relativo. Calculemos o lim f'(x) para **x** tendendo a 0 (que é o ponto para o qual não existe f'(x)):

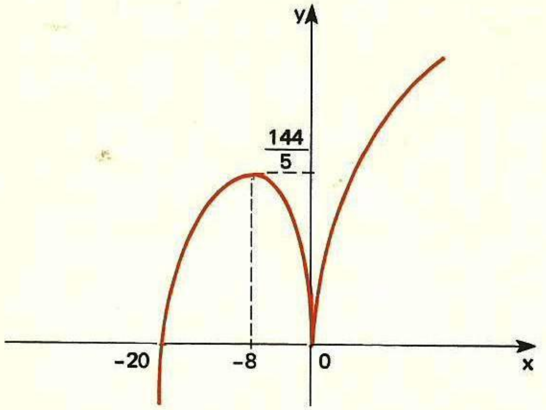
$$\lim_{x \to 0+} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0-} f'(x) = -\infty$$

Concluímos então que para $x = 0$ a reta tangente ao gráfico de **f** é vertical (neste caso é o próprio eixo Oy).

Para esboçarmos o gráfico é útil estudar o comportamento de **f** para $x \to \infty$ e calcular as raízes de **f**.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5}x^{5/3} + 12x^{2/3} = 0 \Leftrightarrow x^{2/3}\left(\frac{3}{5}x + 12\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -20$$



x	f(x)
-20	0
-8	$\frac{144}{5}$
0	0
1	$\frac{63}{5}$
8	$\frac{336}{5}$

15.12) Consideremos a função **f** definida por

$$f(x) = x^3 - 3x$$

Determine os pontos de máximo absoluto e mínimo absoluto de **f**, no intervalo $\left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$

Solução

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 3x \\ f'(x) = 3x^2 - 3 \end{cases}$$

Tanto **f** como f' são contínuas em todo o intervalo dado.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

Observemos que os números 1 e -1 são interiores ao intervalo dado.

x		-1		1	
f'(x)	+ + +	0	− − −	0	+ + +
f	crescente		decrescente		crescente

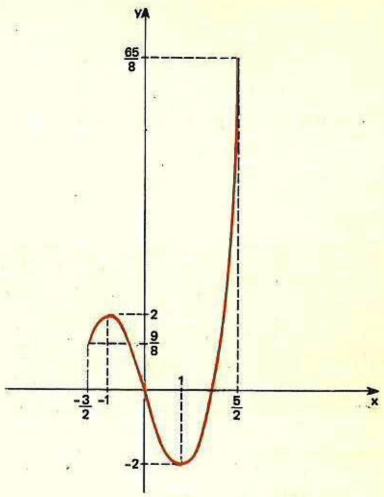
De acordo com a regra apresentada na teoria, concluímos que -1 é ponto de máximo relativo e 1 é ponto de mínimo relativo. Temos:

$$f(-1) = 2 \quad \text{e} \quad f(1) = -2$$

Calculemos os valores de f(x) nos extremos do intervalo:

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{8} \quad \text{e} \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{65}{8}$$

Fazendo o esboço do gráfico de **f**, concluímos que o número 1, além de ser ponto de mínimo relativo, é também o ponto de mínimo absoluto de **f** no intervalo dado. Concluímos também que o número $\frac{5}{2}$ é o ponto de máximo absoluto de **f** no intervalo dado. No intervalo dado, o mínimo absoluto de **f** é -2 e o máximo absoluto de **f** é $\frac{65}{8}$.



Exercícios Propostos

Para cada função dada nos exercícios de números 15.13 a 15.30, pedem-se:

a) pontos de máximo relativo;
b) pontos de mínimo relativo;
c) esboço do gráfico.

15.13) $f(x) = x^3 - 3x + 4$

15.14) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

15.15) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

15.16) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5$

15.17) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$

15.18) $f(x) = \sqrt[3]{-x+2}$

15.19) $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + 1$

15.20) $f(x) = \frac{4x-6}{x-2}$

15.21) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+3}$

15.22) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$

15.23) $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$

15.24) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x-4}$

15.25) $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

15.26) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

15.27) $f(x) = x^{5/3} + 4x^{2/3}$

15.28) $f(x) = \frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{3}{2}x^{2/3}$

15.29) $f(x) = \frac{3}{4}x^{4/3} - 6x^{1/3}$

15.30) $f(x) = x\sqrt{3-x}$

15.31) Consideremos a função **f** definida por $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Determine os pontos de máximo absoluto e de mínimo absoluto dessa função no intervalo $\left[-3; \frac{3}{2}\right]$.

15.8 – PESQUISA DE MÁXIMOS E MÍNIMOS – USO DA DERIVADA SEGUNDA

No item anterior vimos um método de pesquisa de máximos e mínimos relativos que se baseia no estudo da derivada primeira da função dada. Veremos agora um outro processo, que às vezes é de grande utilidade, baseado na derivada segunda da função dada.

Teorema

> Seja **f** uma função tal que $f'(x_0) = 0$.
> A) Se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo relativo.
> B) Se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo relativo.

Demonstração

A) Pela definição de derivada, temos

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}$$

Mas, como por hipótese $f'(x_0) = 0$, vem:

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h}$$

Supondo que $f''(x_0) > 0$, a igualdade (I) nos diz que, para **h** *suficientemente pequeno*, devemos ter(*):

$$\text{se } h > 0, \quad f'(x_0 + h) > 0$$
$$\text{se } h < 0, \quad f'(x_0 + h) < 0$$

Mas, de acordo com a regra do item 15.7, isto significa que x_0 é ponto de mínimo relativo.

B) A demonstração deste caso é análoga à do caso A.

Exemplo

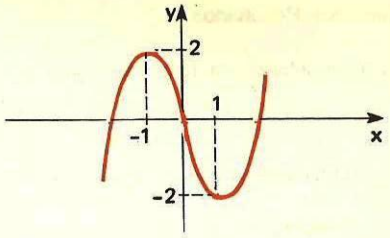
Consideremos a função **f** definida por $f(x) = x^3 - 3x$. Temos

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$$

(*) Veja o exercícios 4.12.

Assim, os pontos 1 e −1 são "candidatos" a ponto de máximo e ponto de mínimo relativo. Tentaremos decidir através da derivada segunda de **f**.

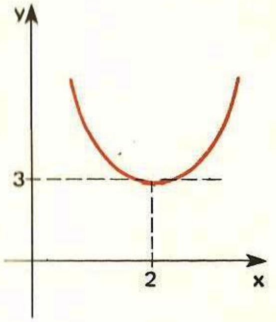


$$f''(x) = 6x$$
$$f''(1) = 6 > 0$$
$$f''(-1) = -6 < 0$$

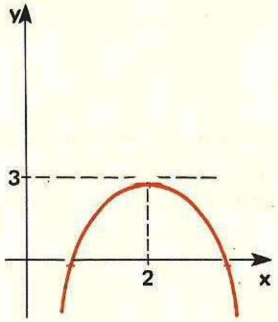
Como $f''(1) > 0$, concluímos que o número 1 é ponto de mínimo relativo; e, como $f''(-1) < 0$, concluímos que o número −1 é ponto de máximo relativo.

Observações

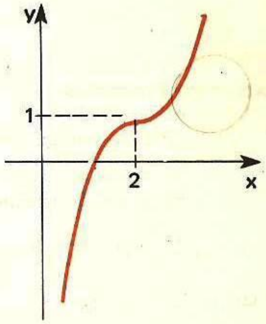
1.ª) Pode acontecer que, além de $f'(x_0) = 0$, tenhamos também $f''(x_0) = 0$. Neste caso o teorema acima não nos informa o que acontece no ponto x_0. Na realidade, neste caso o ponto x_0 poderá ser um ponto de máximo relativo ou um ponto de mínimo relativo ou nenhuma das duas coisas, conforme ilustram as funções $f(x) = (x-2)^4 + 3$, $f(x) = -(x-2)^4 + 3$ e $f(x) = (x-2)^3 + 1$, cujos gráficos estão esboçados nas figuras **a**, **b** e **c**.



a) $f(x) = (x-2)^4 + 3$



b) $f(x) = -(x-2)^4 + 3$



c) $f(x) = (x-2)^3 + 1$

Para as três funções dadas, temos $f'(2) = 0$ e $f''(2) = 0$, mas no caso **a** o número 2 é ponto de mínimo relativo, no caso **b** o número 2 é ponto de máximo relativo e no caso **c** o ponto 2 não é ponto de máximo nem ponto de mínimo relativo.

2.ª) Quando ocorre $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$, para decidirmos o que ocorre no ponto x_0 podemos recorrer ao método da derivada primeira (apresentado no item anterior) ou a um método mais geral, o qual é estudado em Cálculo Avançado.

3.ª) O teorema apresentado acima também não nos ajuda a obter os máximos e mínimos relativos que ocorrem em pontos onde a derivada não existe. Nestes casos recorremos ao método da derivada primeira.

Exercícios Resolvidos

15.32) Consideremos a função **f** definida por

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

Determine os pontos de máximo relativo e mínimo relativo.

Solução

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \\ f'(x) = x^2 - 4x + 3 \text{ (existe para todo } \mathbf{x}) \\ f''(x) = 2x - 4 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 3$$

Temos então $f'(1) = 0$ e $f'(3) = 0$. Para decidir se os pontos 1 e 3 são pontos de máximo ou mínimo relativo, usamos a derivada segunda.

$$\begin{cases} f''(1) = 2(1) - 4 = -2 < 0 \\ f''(3) = 2(3) - 4 = 2 > 0 \end{cases}$$

$f''(1) < 0 \Rightarrow$ *1* é ponto de máximo relativo
$f''(3) > 0 \Rightarrow$ *3* é ponto de mínimo relativo

Exercícios Propostos

Para as funções dadas nos exercícios de números 15.33 a 15.36, pedem-se:

a) pontos de máximo relativo
b) pontos de mínimo relativo

15.33) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 7$

15.34) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

15.35) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

15.36) $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{13}{3}x^3 + 36x - 1$

15.9 — MÁXIMOS E MÍNIMOS: ALGUMAS APLICAÇÕES

A pesquisa de máximos e mínimos tem aplicações interessantes tanto na Matemática como na Física. Nos exercícios a seguir teremos oportunidade de ver algumas dessas aplicações

Exercício Resolvido

15.37) Determine dois números positivos cuja soma é igual a 45, de modo que o produto de um deles pelo quadrado do outro seja máximo.

Solução

Sejam **x** e **y** os números procurados.

Temos:

$$x + y = 45$$

ou

$$y = 45 - x$$

Sendo P o produto de um deles pelo quadrado do outro, temos:

$$P = yx^2 = (45 - x)x^2 = -x^3 + 45x^2$$

Devemos agora procurar o valor de **x** para o qual P tem valor máximo, isto é, devemos obter o valor máximo da função **f** dada por $f(x) = P = -x^3 + 45x^2$.

Tentemos o processo da derivada segunda.

$$\begin{cases} f'(x) = -3x^2 + 90x \\ f''(x) = -6x + 90 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 90x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 30$$

Em vista do enunciado do problema, é fácil concluir que a solução $x = 0$ não serve. Vamos agora verificar se o número 30 é ponto de máximo ou de mínimo.

$$f''(30) = -6(30) + 90 = -90 < 0$$

$f''(30) < 0 \Rightarrow$ *30* é ponto de máximo relativo

Resta verificar se 30 é também ponto de máximo absoluto. Fazendo o estudo do sinal da derivada de **f**, obtemos:

x		0		30	
f'(x)	−	0	+	0	−
f	decrescente		crescente		decrescente

Porém, levando-se em conta que **x** e **y** são números positivos, tais que $x + y = 45$, concluímos que $0 < x < 45$.

Assim, temos:

x	0		30		45
f'(x)		+	0	−	
f		crescente		decrescente	

Observamos então que, dentro do intervalo $]0; 45[$, à esquerda do ponto 30, **f** é sempre crescente e, à direita do ponto 30, **f** é sempre decrescente. Portanto, dentro do intervalo considerado, o ponto 30 é ponto de máximo absoluto.

Devemos ter então $x = 30$, donde concluímos que $y = 15$ (pois $x + y = 45$). Assim, os números procurados são 15 e 30.

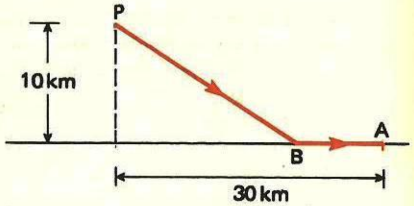
Observações

1.ª) De modo geral, nos problemas analisados neste item, procuramos representar a grandeza da qual se quer achar o valor máximo ou mínimo através de uma função de apenas uma variável.

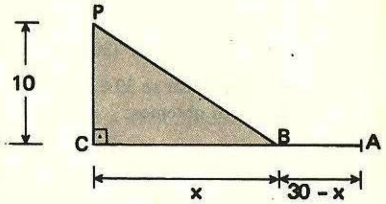
2.ª) Nos problemas dos tipos que estamos analisando neste item, às vezes pode ser muito trabalhoso (ou difícil) determinar se um ponto crítico é ponto de máximo relativo ou mínimo relativo; do mesmo modo, pode ser trabalhoso verificar se o ponto de máximo (mínimo) relativo é também ponto de máximo (mínimo) absoluto. Em casos como esses, às vezes é possível tirarmos a dúvida através de uma análise geométrica ou física do problema.

Exercícios Resolvidos

15.38) Um homem está em um barco sobre um lago, em um ponto P situado a 10 km da margem do lago, a qual é reta, como ilustra a figura. Na margem do lago há uma casa, sobre um ponto A. O homem vai de barco até um ponto B da margem e de lá prossegue a pé até a casa. Sabendo que a velocidade do barco é 12 km/h e que a velocidade do homem é 13 km/h, determine a posição do ponto B, de modo que o trajeto total seja feito no menor tempo possível.



Solução



Seja x a distância entre os pontos C e B da figura ao lado. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo PCB, concluímos que a distância entre os pontos P e B é $\sqrt{x^2+100}$. Sejam Δt_1 e Δt_2, respectivamente, os intervalos de tempo para ir de P a B e de B a A.

Temos: $$\Delta t_1 = \frac{\sqrt{x^2+100}}{12} \quad \text{e} \quad \Delta t_2 = \frac{30-x}{13}$$

Portanto, o intervalo de tempo total Δt é dado por:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{x^2+100}}{12} + \frac{30-x}{13}$$

Podemos considerar então a função **f**, definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+100}}{12} + \frac{30-x}{13}$$

para $0 \leqslant x \leqslant 30$. Como queremos que Δt seja mínimo, devemos procurar o ponto de mínimo de **f**.

$$f'(x) = \frac{x}{12\sqrt{x^2+100}} - \frac{1}{13}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{12\sqrt{x^2+100}} - \frac{1}{13} = 0 \Leftrightarrow x = 24$$

$$f''(x) = \frac{100}{12(x^2+100)\sqrt{x^2+100}}$$

Mesmo sem efetuar os cálculos, é fácil perceber que $f''(24) > 0$, donde concluímos que 24 é ponto de mínimo.

Se x = 24 km, então 30 – x = 6 km. Portanto, o ponto B deve estar a 6 km da casa.

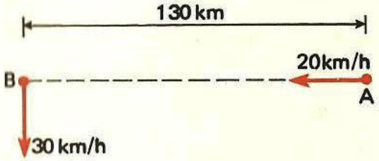
15.39) Às 15 horas, um navio A está a 130 km a leste de um navio B. O navio A move-se para oeste a 20 km/h e o navio B move-se para o sul a 30 km/h.

A) A que horas a distância entre eles será mínima?

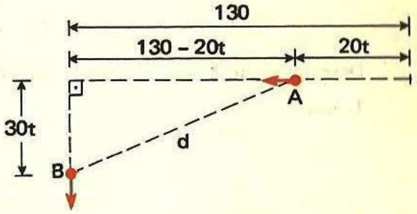
B) Qual é a distância mínima entre eles?

Solução

a) As velocidades dos navios A e B são respectivamente iguais a 20 km/h e 30 km/h. Assim, em **t** horas, as distâncias percorridas pelos navios A e B serão, em quilômetros, respectivamente iguais a 20t e 30t. A **figura a** mostra as posições dos navios às 15 horas e a **figura b** mostra as posições dos navios **t** horas depois.



(Fig. a)



(Fig. b)

Seja **d** a distância entre os navios, **t** horas depois das 15 horas. Da **figura b** tiramos:

$$d^2 = (30t)^2 + (130 - 20t)^2 \qquad \text{(I)}$$

Queremos que a distância **d** seja mínima. Mas, levando-se em conta que a distância é um número não negativo, quando **d** for mínimo, d^2 também será mínimo. Assim, para facilitar os cálculos, vamos procurar o valor mínimo de d^2, isto é, vamos determinar o ponto de mínimo da função **f** definida por $f(t) = (30t)^2 + (130 - 20t)^2$.

Temos:

$$f'(t) = 2(30t)(30) + 2(130 - 20t)(-20)$$

ou

$$f'(t) = 60(30t) - 40(130 - 20t)$$

Assim,

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 60(30t) - 40(130 - 20t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Estudando os sinais de $f'(t)$ ou através de $f''(t)$, é fácil concluir que o número 2 é ponto de mínimo da função **f**. Portanto, a distância mínima entre os navios ocorre 2 horas depois das 15 horas, isto é, às 17 horas.

b) Vimos que $d^2 = (30t)^2 + (130 - 20t)^2$. Para t = 2 temos:

$$d^2 = 60^2 + (130 - 40)^2 = 11\,700$$

ou

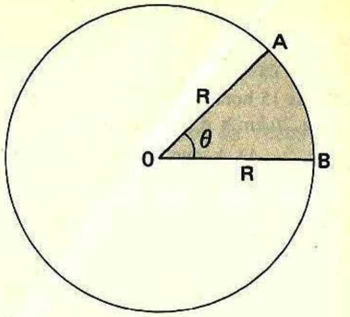
$$d = \sqrt{11\,700} = 30\sqrt{13}$$

Portanto, a distância mínima entre os navios é igual a $30\sqrt{13}$ km.

15.40) Determine o raio e o ângulo central de um setor circular de perímetro 12 m, de modo que sua área seja máxima.

Solução

Consideremos o setor circular sombreado na figura. Sendo θ medido em radianos, o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento ℓ, onde $\ell = \theta \cdot R$. Portanto, o perímetro desse setor é igual a $2R + \theta R$, isto é,



$$2R + \theta R = 12 \qquad (I)$$

A área A do setor circular é dada por:

$$A = \frac{\ell \cdot R}{2} = \frac{\theta \cdot R \cdot R}{2} = \frac{\theta R^2}{2} \qquad (II)$$

Da igualdade (I) tiramos $\theta = \frac{12}{R} - 2$. Substituindo em (II), obtemos:

$$A = \left(\frac{12}{R} - 2\right)\frac{R^2}{2} = 6R - R^2$$

Devemos então procurar o ponto de máximo da função **f** definida por $f(R) = 6R - R^2$.

Temos:

$$f'(R) = 6 - 2R$$

$$f'(R) = 0 \Leftrightarrow 6 - 2R = 0 \Leftrightarrow R = 3$$

Para decidirmos se o número 3 é ponto de máximo ou de mínimo usamos a derivada segunda.

$$\begin{cases} f''(R) = -2 \\ f''(3) = -2 < 0 \end{cases}$$

Como $f''(3) < 0$, concluímos que 3 é ponto de máximo. Assim,

$$R = 3 \text{ m}$$

Substituindo em (I), obtemos:

$$\theta = 2 \text{ radianos}$$

15.41) Determine o raio da base e a altura de um cone circular reto circunscrito a uma esfera de raio $R = 4$ m, de modo que o volume do cone seja mínimo.

Solução

Sejam **r** e **h**, respectivamente, o raio da base e a altura do cone. De acordo com a figura temos:

$$h = x + R = x + 4 \qquad (I)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo POC, obtemos

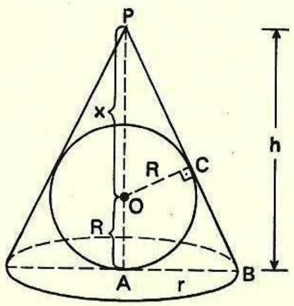
$$PC = \sqrt{x^2 - R^2} = \sqrt{x^2 - 16}$$

Da semelhança dos triângulos POC e PAB tiramos:

$$\frac{PA}{AB} = \frac{PC}{OC}$$

ou

$$\frac{x + 4}{r} = \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{4}$$



donde

$$r = \frac{4(x + 4)}{\sqrt{x^2 - 16}} \qquad (II)$$

Sendo V o volume do cone, temos:

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h \qquad (III)$$

Substituindo (I) e (II) em (III), temos...

$$V = \frac{\pi}{3}\left[\frac{4(x + 4)}{\sqrt{x^2 - 16}}\right]^2 \cdot (x + 4) = \frac{16\pi\,(x + 4)^2}{3(x - 4)}$$

Devemos então obter o ponto de mínimo da função **f** definida por

$$f(x) = \frac{16\pi(x + 4)^2}{3(x - 4)}$$

observando (veja figura) que $x > 4$.

Temos:

$$f'(x) = \frac{16\pi}{3}\,\frac{x^2 - 8x - 48}{(x - 4)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 8x - 48}{(x - 4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 12$$

O valor -4 obviamente não nos serve; ficamos então com o ponto crítico 12. Fazendo o estudo do sinal de $f'(x)$ e observando que devemos ter $x > 4$, concluímos que 12 é ponto de mínimo. Portanto, temos $x = 12$. Substituindo em (I) e (II), obtemos:

$$r = 4\sqrt{2} \text{ m} \qquad \text{e} \qquad h = 16 \text{ m}$$

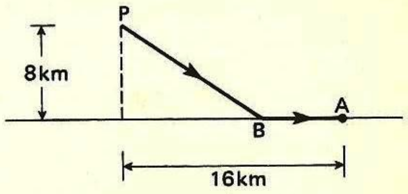
x		−4		4		12	
f'(x)	+ + +	0	− −	⊗	− −	0	+ + +
f					decrescente		crescente

Exercícios Propostos

15.42) Determine dois números positivos cuja soma é igual a 8, de modo que seja mínima a soma do quadrado do primeiro com o cubo do segundo.

15.43) Determine o ponto do gráfico de $y = \frac{x^2}{4}$ que está mais próximo do ponto (1; 2).

15.44) Um homem está em um barco sobre um lago, em um ponto P situado a 8 km da margem do lago, que é reta, como ilustra a figura. O homem vai de barco até um ponto B da margem e de lá prossegue a pé até o ponto A. Sabendo que a velocidade do barco é 3 km/h e que a velocidade do homem é 5 km/h, determine a posição do ponto B de modo que o trajeto total seja feito no menor tempo possível.



15.45) Ao meio-dia, um navio A está a 100 km ao norte de um navio B. O navio A move-se para o sul a 20 km/h e o navio B move-se para leste a 10 km/h.

a) A que horas a distância entre eles será mínima?

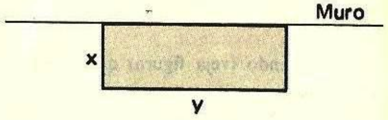
b) Qual é a distância mínima entre eles?

15.46) Determine o raio R e o ângulo central θ de um setor circular de perímetro igual a **k** de modo que a área do setor seja máxima.

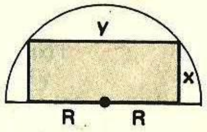
15.47) Determine as dimensões de um retângulo de área 64 m^2 de modo que seu perímetro seja mínimo.

15.48) Determine as dimensões de um retângulo de perímetro 20 m de modo que sua área seja máxima.

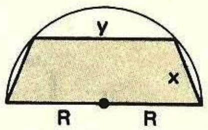
15.49) Um indivíduo pretende construir um galinheiro retangular usando um muro como um dos lados do retângulo. Sabendo que ele dispõe de material suficiente para construir 400 metros de cerca, determine as dimensões do retângulo de modo que sua área seja máxima.



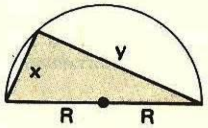
15.50) Determine as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito em um semicírculo de raio R.



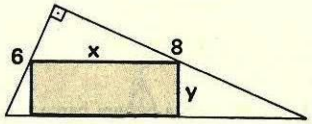
15.51) Determine as dimensões de um trapézio inscrito num semicírculo de raio R de modo que seu perímetro seja máximo e calcule esse perímetro máximo.



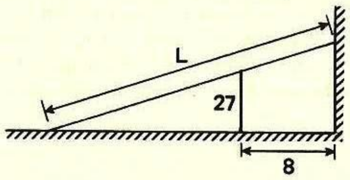
15.52) Determine os lados de um triângulo inscrito em um semicírculo de raio R de modo que sua área seja máxima.



15.53) Consideremos um triângulo retângulo de catetos medindo 6 m e 8 m. Determine as dimensões de um retângulo que tem um de seus lados sobre a hipotenusa do triângulo e os dois vértices do lado oposto sobre os catetos de modo que a área do retângulo seja máxima.



15.54) Um muro de altura 27 dm está a 8 dm da parede lateral de um edifício. Determine o menor comprimento L de uma escada cujos extremos se apóiam na parede e no chão do lado de fora do muro.



15.55) Uma folha de papel usada para impressão tem área de 900 cm^2. As margens na parte superior e inferior são de 4 cm e as margens laterais são de 1 cm. Determine as dimensões da folha sabendo que a área impressa é máxima.

15.56) Um pedaço de arame de comprimento L é cortado em dois pedaços, um dos quais é dobrado em forma de círculo e o outro é dobrado em forma de quadrado. Como deve ser feito esse corte de modo que:

a) a soma das áreas do círculo e do quadrado seja mínima?

b) a soma das áreas do círculo e do quadrado seja máxima?

15.57) Determine o raio da base e a altura de um cone circular reto, inscrito em uma esfera de raio R, de modo que o volume do cone seja máximo. Calcule esse volume máximo.

15.58) Determine o raio da base e a altura de um cilindro inscrito numa esfera de raio R de modo que o volume do cilindro seja máximo.

15.59) Determine o raio da base e a altura de um cilindro circular reto, de área total igual a 30 m^2, de modo que seu volume seja máximo.

15.60) Determine o raio da base e a altura de um cilindro circular reto, de volume $V = 16\pi$ m^3, de modo que a sua área total seja mínima.

15.61) Um cone circular reto está inscrito numa esfera de raio R. Calcule o raio da base e a altura do cone, sabendo que sua área lateral é máxima.

15.10 – DEMONSTRAÇÃO DA REGRA DE L'HOSPITAL

Neste item faremos a demonstração da regra de L'Hospital que foi apresentada no capítulo 14. Porém, para essa demonstração, precisamos do teorema do valor médio de Cauchy, que será demonstrado a seguir.

Teorema do Valor Médio de Cauchy

Consideremos duas funções **f** e **g**, contínuas em $[a; b]$ e deriváveis em $]a; b[$. Existe pelo menos um $x_0 \in]a; b[$, tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0)$$

Observemos que:

1.º) Se $g(a) \neq g(b)$ e $g'(x_0) \neq 0$, a equação acima pode ser transformada em:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

2.º) Se a função g for a função identidade, (isto é, $g(x) = x$, para todo x) teremos

$$g'(x_0) = 1, \quad g(b) = b \quad e \quad g(a) = a$$

Assim, obtemos o teorema do valor médio demonstrado no item 15.5

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração

Consideremos a função **h** definida por

$$h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]\,g(x) \qquad (I)$$

A função **h** é contínua em $[a; b]$ e derivável em $]a; b[$, pois **f** e **g** o são. Observemos ainda que:

$$\begin{cases} h(a) = f(a)\,g(b) - f(b)\,g(a) \\ h(b) = f(a)\,g(b) - f(b)\,g(a) \end{cases}$$

isto é, $h(a) = h(b)$. Assim, de acordo com o teorema de Rolle, existe $x_0 \in]a; b[$, tal que $h'(x_0) = 0$. Portanto, tendo em conta a equação (I), temos

$$h'(x_0) = [g(b) - g(a)]\,f'(x_0) - [f(b) - f(a)]\,g'(x_0) = 0$$

donde,

$$[g(b) - g(a)]\,f'(x_0) = [f(b) - f(a)]\,g'(x_0)$$

Regra de L'Hospital

> Sejam **f** e **g** funções tais que
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = 0$$
>
> Se existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, então existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e
>
> $$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demonstração

Observemos que o teorema não exige que existam f(a) ou f(b) e também não se refere aos valores de f(a) e f(b). Em qualquer caso, redefinimos **f** e **g** de modo que $f(a) = g(a) = 0$, e assim **f** e **g** tornam-se contínuas no ponto **a** (pois, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$)

Como existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, concluímos que existe uma vizinhança V de **a**, com $V =]a - \varepsilon; a + \varepsilon[$, de modo que:

(I) $f'(x)$ e $g'(x)$ existem para todo $x \in V$, com a possível exceção de $x = a$

(II) $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in V$, com a possível exceção de $x = a$.

Suponhamos inicialmente que $a < x < a + \varepsilon$. Das considerações anteriores deduzimos que podemos aplicar os teoremas de Rolle e de Cauchy às funções **f** e **g**, no intervalo $[a; x]$. Assim, concluímos que $g(x) \neq 0$, pois se $g(x) = 0$, de acordo com o teorema de Rolle, existiria pelo menos um $x_0 \in]a; x[$, tal que $g'(x_0) = 0$, o que contraria a conclusão (II) acima.

De acordo com o teorema do valor médio de Cauchy, deve existir pelo menos um $k \in]a; x[$, tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(k)}{g'(k)}$$

ou

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(k)}{g'(k)} \qquad (III)$$

Sendo $a < k < x$, se $x \to a$, então $k \to a$.

Como por hipótese existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, temos que existe $\lim_{k \to a} \frac{f'(k)}{g'(k)}$ e são iguais.

Assim,

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(k)}{g'(k)} = \lim_{k \to a} \frac{f'(k)}{g'(k)}$$

Da igualdade (III) tiramos então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(k)}{g'(k)} = \lim_{k \to a} \frac{f'(k)}{g'(k)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exercícios Suplementares

III.1) Em cada caso a seguir, admitindo que a equação dada represente pelo menos uma função **f**, tal que $y = f(x)$, determine $f'(x)$.

a) $\cos x + \operatorname{sen} y = 1$

b) $e^{xy} + y \ln x = \cos 2x$

III.2) Usando a regra de L'Hospital, calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + \operatorname{sen} x - 1}{\ln(1 + x)}$

c) $\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-1/x}}{x}$

d) $\lim_{x \to 0+} \frac{\sec x - 1}{x^3}$

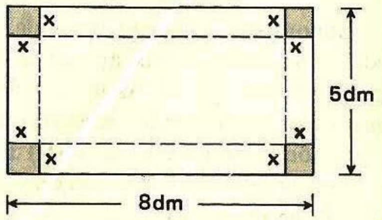
III.3) Um cubo se expande de modo que sua aresta aumenta à razão de 0,2 cm/segundo. Determine a taxa de variação de seu volume, no momento em que sua aresta mede 20 cm.

III.4) Consideremos a função $f: [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen } x + \cos x$.

a) Determine os intervalos em que **f** é crescente.

b) Determine os intervalos em que **f** é decrescente.

III.5) Uma caixa de base retangular e sem tampa é construída do seguinte modo: de uma placa retangular, de dimensões 8 dm e 5 dm, corta-se um pequeno quadrado de cada canto e, em seguida, as beiradas são dobradas nas linhas pontilhadas. Determine a medida dos lados dos quadrados cortados de modo que o volume da caixa seja máximo.



III.6) Determine os pontos de máximo e mínimo relativo da função **f** definida por

$$f(x) = e^{x^3 - 3x^2 - 24x}$$

III.7) Determine os valores de **m** e **n**, de modo que a função **f**, definida por $f(x) = x^3 - 9x^2 + ax + b$, tenha um mínimo relativo igual a 7 para $x = 2$.

PARTE IV

Integração: Noções Básicas

Capítulo 16 — **Noções de cálculo integral**

Capítulo 17 — **Técnicas de integração**

Capítulo 18 — **A integral definida**

Capítulo

16

Noções de cálculo integral

16.1 — INTRODUÇÃO

Neste capítulo, entraremos em contato com um dos conceitos fundamentais da Matemática: a **integral**.

O cálculo da área de figuras planas, cujos contornos sejam formados por *segmentos de reta*, é bastante familiar, mesmo para aqueles menos acostumados ao formalismo matemático. No entanto, se os contornos das figuras não são formados por segmentos de reta, o cálculo da área não mais parece tão simples. Foi esse tipo de problema que, historicamente, fez surgir a noção de integral, e será também nossa motivação para introduzir tal noção. Fique claro, porém, que são inúmeras as aplicações do Cálculo Integral, não se limitando apenas à determinação de áreas.

16.2 — O CÁLCULO DE ÁREAS — FUNÇÕES PRIMITIVAS

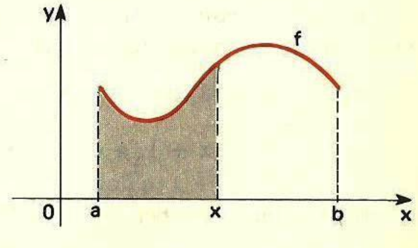
Foi **Arquimedes** (287-212 a.C.) um dos primeiros a considerar o problema de encontrar a área de figuras planas de contornos curvos (ele se utilizou de um método bastante interessante: recortava a figura em questão em um material de densidade uniforme e comparava seu peso com o de uma figura de área conhecida, recortada no mesmo material).

Quase vinte séculos depois de Arquimedes, a **integração** foi formalizada; e os grandes nomes do Cálculo Integral são **Isaac Newton** (1642-1727) e **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716). É a Leibniz que devemos as notações dx, dy e $\int y\,dx$, até hoje usadas.

E são as noções básicas da teoria criada por esses dois cientistas que passamos a estudar.

Consideremos uma função **f, contínua e não negativa** no intervalo $[a; b]$.

Vamos supor que exista uma função A, definida em $[a; b]$, que *forneça*, para todo x desse intervalo, a **área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo Ox**, no intervalo $[a; x]$.



Como determinar A?

Vamos examinar dois exemplos elementares:

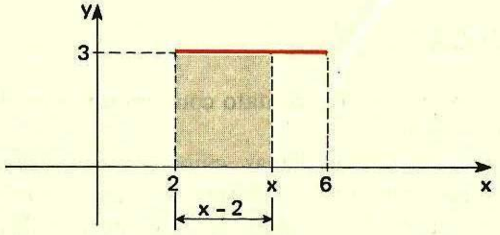
Exemplo 1 – Seja **f** definida por $f(x) = 3$, no intervalo $[a; b] = [2; 6]$.

A área procurada é a de um retângulo de base $x - 2$ e altura 3. Temos

$$A(x) = (x - 2) \cdot 3$$

ou seja

$$A(x) = 3x - 6$$



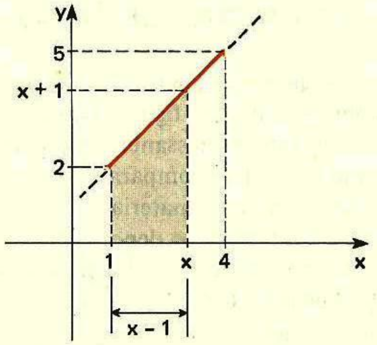
Exemplo 2 – Seja **f** definida por $f(x) = x + 1$, no intervalo $[a; b] = [1; 4]$.

A área procurada é a de um trapézio de base maior $x + 1$, base menor 2 e altura $x - 1$. Temos

$$A(x) = \frac{(x + 1) + 2}{2} \cdot (x - 1) = \frac{(x + 3)(x - 1)}{2}$$

ou seja

$$A(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$



Nestes dois exemplos, foi bastante simples determinar a *expressão da função área* A; nem por isso, eles são menos significativos, principalmente se observarmos com atenção os resultados e suas relações com os dados.

$$f(x) = 3,\ a = 2 \rightarrow A(x) = 3x - 6$$

$$f(x) = x + 1,\ a = 1 \rightarrow A(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

Não é difícil perceber que a função A encontrada obedece a duas condições:

1.º) $A(a) = 0$, isto é, a área é nula se $x = a$

– no exemplo 1: $A(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$

– no exemplo 2: $A(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 - \frac{3}{2} = 0$

2.º) $A'(x) = f(x)$, isto é, a derivada da *função área* A é igual à função dada **f**.

– no exemplo 1: $A'(x) = 3 \cdot 1 - 0 = 3 = f(x)$

– no exemplo 2: $A'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x + 1 - 0 = x + 1 = f(x)$

Estas observações sugerem a formulação de um *teorema* de caráter mais geral, que passaremos a apresentar aqui.

> Seja dada uma função **f**, contínua e não negativa no intervalo $[a; b]$. Vamos supor que a "área sob o gráfico de f", no intervalo $[a; x]$ seja dada por uma função A, para todo **x** de $[a; b]$. Sendo assim, tem-se
>
> (I) $A(a) = 0$ (II) $A'(x) = f(x)$
>
> para todo $x \in [a; b]$ (devendo-se entender que $A'(a)$ e $A'(b)$ são as derivadas laterais).

(Propriedade 1)

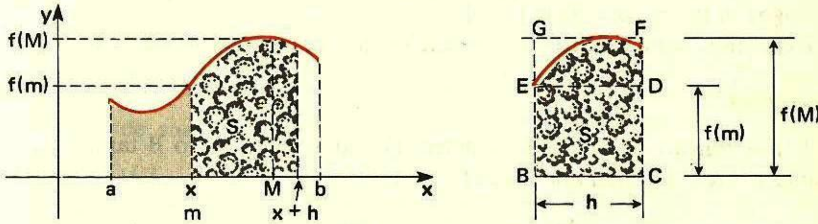
Demonstração

1.º) $A(a) = 0$

Isto é imediato, pois, se $x = a$, a região sob o gráfico de **f** reduz-se a um segmento de reta e tem, por isso, área nula.

2.º) $A'(x) = f(x)$

Consideremos inicialmente o caso $x \neq a$ e $x \neq b$. Sejam **x** e $x + h$, $h > 0$, pontos do intervalo aberto $]a; b[$. Se A é a função que fornece a área, temos que



- $A(x)$ é a área no intervalo $[a; x]$
- $A(x + h)$ é a área no intervalo $[a; x + h]$
- $S = A(x + h) - A(x)$

Como **f** é contínua em $[a; b]$, existem **m** e M, respectivamente pontos de mínimo e de máximo de **f** no intervalo $[x; x + h]$(*).

É evidente, então, que o *valor* da área S "está entre" os *valores* das áreas dos retângulos BCDE e BCFG, ambos de base **h** e alturas f(m) e f(M), respectivamente, conforme ilustra a figura.

Portanto, podemos escrever:

$$h \cdot f(m) \leqslant S \leqslant h \cdot f(M)$$
$$h \cdot f(m) \leqslant A(x + h) - A(x) \leqslant h \cdot f(M)$$

Dividindo todos os membros desta desigualdade por **h**, vem

$$f(m) \leqslant \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leqslant f(M) \qquad (I)$$

(O leitor pode verificar com facilidade que a relação (I) é válida, também, no caso em que $h < 0$.)

Como a área em estudo é a que corresponde ao intervalo $[a; x]$, devemos fazer **h** tender a zero, passando, então, a relação (I) ao limite:

$$\lim_{h \to 0} f(m) \leqslant \lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leqslant \lim_{h \to 0} f(M) \qquad (II)$$

Devido à continuidade de **f**, temos

$$\lim_{h \to 0} f(m) = f(x)$$

$$\lim_{h \to 0} f(M) = f(x)$$

E, da definição de derivada:

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = A'(x)$$

Fica assim a relação (II):

$$f(x) \leqslant A'(x) \leqslant f(x)$$

Logo, $A'(x) = f(x)$, $\forall x \in \,]a; b[$.

Deixamos para o leitor a verificação dos casos $x = a$ e $x = b$.

Observações

1.ª) A função A, se existir, **é única**. De fato, se a função B também representasse a área no intervalo $[a; x]$, teríamos

$$\begin{cases} A(a) = 0 \\ A'(x) = f(x) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} B(a) = 0 \\ B'(x) = f(x) \end{cases}$$

(*) Veja capítulo 15, item 15.2.

para todo

$$x \in [a; b]$$

Mas, então, $A'(x) - B'(x) = 0$. Esta é a expressão da derivada da função dada por

$$G(x) = A(x) - B(x)$$

Se $G'(x) = 0$, então $G(x) = k$ (função constante). Ora, em particular temos

$$G(a) = A(a) - B(a) = 0$$

donde $\qquad k = 0$

isto é $\qquad A(x) = B(x)$

para todo $\qquad x \in [a, b]$

Isto significa que $A = B$, ou seja, que a função A, se existir, é única.

2.ª) **PRIMITIVAS DE f** – Considerando apenas a condição (II), é fácil verificar que a função A **não é única**. De fato, toda função G tal que

$$G(x) = A(x) + c$$

onde **c** é uma constante real, obedece a condição $G'(x) = f(x)$. Note:

$$G'(x) = [A(x) + c]' = A'(x) + 0 = A'(x) = f(x)$$

Toda função G tal que $G'(x) = f(x)$ num intervalo I (finito ou infinito) é chamada primitiva de f em I(**).

Conclui-se, desta maneira, que, existindo A, existe *toda uma família* de funções G, com $G(x) = A(x) + c$, tais que $G'(x) = f(x)$, já que **c** é um número real qualquer. No entanto, é fundamental salientar que o conceito de primitiva *não está vinculado ao cálculo de áreas*, valendo também para intervalos em que **f** é **negativa**, desde que, é claro, $G'(x) = f(x)$.

Exemplos(*)

a) Sendo $f(x) = x^2$, as funções definidas por

$$\frac{1}{3}x^3 + 2, \ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}x^3 + \pi$$

são algumas de suas primitivas, pois

$$\left(\frac{1}{3}x^3 + c\right)' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' + 0 = \frac{1}{3}3x^2 = x^2 = f(x)$$

(*) G também é chamada de **antiderivada** de f.

(**) Nestes exemplos, omitimos o intervalo $[a; b]$, porque as funções aqui examinadas são contínuas em qualquer intervalo fechado onde elas se definem.

b) Sendo f(x) = cos x, as funções definidas por

$$\text{sen } x, \ \text{sen } x - 3, \ \text{sen } x + \sqrt{2}$$

são algumas de suas primitivas, pois

$$(\text{sen } x + c)' = (\text{sen } x)' + 0 = \cos x = f(x)$$

c) Sendo $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, as funções definidas por

$$\ln x, \ \ln x + 8, \ \ln x - e$$

são algumas de suas primitivas, pois

$$(\ln x + c)' = (\ln x)' + 0 = \frac{1}{x} = f(x)$$

Nestes exemplos, as *funções primitivas* foram determinadas com o auxílio das tabelas de derivadas vistas nos capítulos anteriores; podemos, então, montar, pelo mesmo caminho, uma **tabela de primitivas** com as funções mais simples e usuais, para ser utilizada em exercícios.

f(x)	x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	a^x $(a > 0 \text{ e } a \neq 1)$	e^x	sen x	cos x
G(x)	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	ln | x |	$\frac{a^x}{\ln a}$	e^x	− cos x	sen x

(Tabela 1).

É claro que, se quisermos verificar qualquer elemento desta tabela, basta fazer a derivação da função G correspondente.

Exercícios Resolvidos

16.1) Calcule a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$, no intervalo $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.

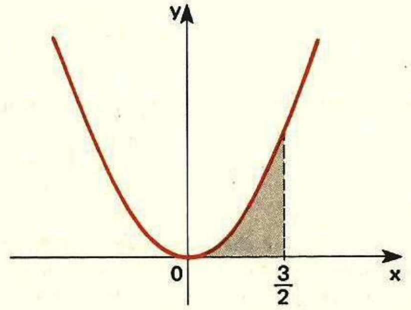
Solução

Devemos encontrar a *função área* A tal que

$$A(0) = 0 \quad \text{e} \quad A'(x) = f(x)$$

Esta última condição nos informa que A(x) é uma **primitiva** de $f(x) = x^2$.

Como as primitivas de funções da forma x^n, $n \neq -1$, são dadas por $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (veja a tabela 1), temos



$$A(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{1}{3}x^3 + c$$

Como A(0) = 0, vem $A(0) = \frac{1}{3} \cdot 0^3 + c = 0$, isto é, c = 0.

Logo $$A(x) = \frac{1}{3}x^3$$

(Agora é possível calcular a área sob o gráfico de $f(x) = x^2$ em qualquer intervalo do tipo [0; x].)

Fazendo, em A(x), $x = \frac{3}{2}$, encontramos a área no intervalo $\left[0; \frac{3}{2}\right]$:

$$A\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{8} = \frac{9}{8} = 1{,}125$$

16.2) Calcule a área sob o gráfico de f(x) = cos x nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$ e $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

Solução

Determinemos, inicialmente, a função A, tal que

$$A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{e} \quad A'(x) = f(x) = \cos x$$

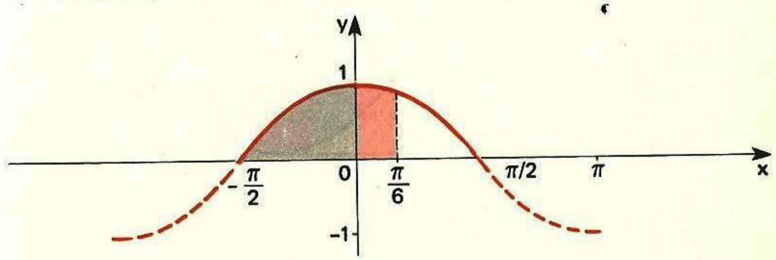
Sabemos (veja a tabela 1) que as primitivas de cos x são funções da forma sen x + c. Então, devemos ter

$$A(x) = \text{sen } x + c$$

Como $A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, vem $A\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + c = 0$, isto é, $-1 + c = 0$, c = 1.

Logo $$A(x) = \text{sen } x + 1.$$

(Agora é possível calcular a área sob o gráfico de f(x) = cos x nos intervalos $\left[-\frac{\pi}{2}; x\right]$ onde f não é negativa.)



Fazendo, em A(x), x = 0 e $x = \frac{\pi}{6}$, temos:

área no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$: $A(0) = \text{sen } 0 + 1 = 0 + 1 = 1$

área no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$: $A\left(\frac{\pi}{6}\right) = \text{sen }\frac{\pi}{6} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Para o cálculo da área no intervalo $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, é claro que poderíamos determinar uma *nova* função A, tal que $A(0) = 0$ e $A'(x) = f(x)$. No entanto, simplificaremos bastante esse cálculo se utilizarmos os resultados obtidos para os dois primeiros intervalos; basta notarmos que a área em $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ é igual à diferença entre as áreas em $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$ e $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Assim, indicando por $S_0^{\frac{\pi}{6}}$ a área em $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, temos

$$S_0^{\frac{\pi}{6}} = A\left(\frac{\pi}{6}\right) - A(0) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Este exercício nos sugere, então, uma propriedade bastante útil:

Sendo **f** e **A** funções tais que **f** é contínua e não negativa em $[a; b]$ e **A** é uma primitiva de **f**, com $A(a) = 0$, a área sob o gráfico de **f**, em qualquer intervalo $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$, é dada por

$$S_\alpha^\beta = A(\beta) - A(\alpha)$$

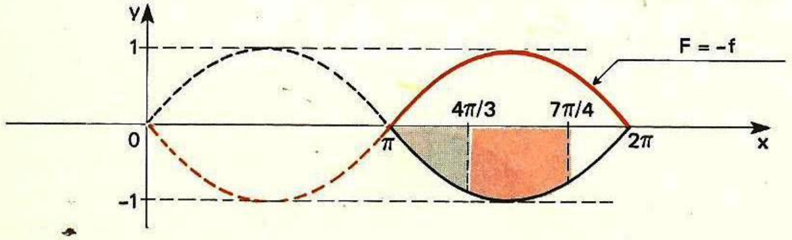
(Propriedade 2)

Nota – Sendo uma consequência imediata da propriedade 1, consideramos desnecessária a demonstração desta propriedade 2.

16.3) Calcule a área da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de $f(x) = \text{sen } x$ nos intervalos $\left[\pi; \frac{4\pi}{3}\right]$ e $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

Solução

Notemos, inicialmente, que **f** não é positiva nos intervalos dados. Como a propriedade 1 exige **f** não negativa, contornamos o problema considerando para os cálculos a função $F(x) = -f(x) = -\text{sen } x$ (por simetria, vemos que os resultados serão iguais àqueles procurados para $f(x) = \text{sen } x$).



Determinemos, então, A tal que:

$$A(\pi) = 0 \quad \text{e} \quad A'(x) = F(x) = -\text{sen } x$$

Na tabela 1, vemos que uma primitiva de sen x é $-\cos x$; portanto, uma primitiva de $-\text{sen } x$ é cos x. Assim, a função A deve ser da forma:

$$A(x) = \cos x + c$$

Como $A(\pi) = 0$, vem $A(\pi) = \cos \pi + c = 0$, isto é, $-1 + c = 0$, $c = 1$
Logo, $A(x) = \cos x + 1$

Fazendo $x = \frac{4\pi}{3}$, temos a área no intervalo $\left[\pi; \frac{4\pi}{3}\right]$:

$$A\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos \frac{4\pi}{3} + 1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

Para o cálculo da área no intervalo $\left[\frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{4}\right]$ utilizamos a propriedade 2:

$$S_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{4}} = A\left(\frac{7\pi}{4}\right) - A\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left[\cos\frac{7\pi}{4} + 1\right] - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \cong 1{,}207$$

16.4) Sejam **f** e **g** funções contínuas num intervalo I e **m** e **n** números reais.
Mostre que

se φ e γ são, respectivamente, primitivas de **f** e **g** em I, então $Y = m\varphi + n\gamma$ é primitiva de $y = mf + ng$ em I.

(Propriedade 3)

Solução

Temos que $\varphi'(x) = f(x)$ e $\gamma'(x) = g(x)$, e devemos provar que $Y'(x) = y(x)$, isto é, que a derivada de $m\varphi + n\gamma$ é $mf + ng$.

$$Y'(x) = (m\varphi + n\gamma)'(x) = m\varphi'(x) + n\gamma'(x) = mf(x) + ng(x) = (mf + ng)(x) = y(x)$$

Assim, por exemplo, as primitivas de $y = 3x^4 + 2\cos x$ são dadas por

$$Y = \frac{3x^5}{5} + 2\,\text{sen } x + c$$

pois

$$\left(\frac{3x^5}{5} + 2\,\text{sen } x + c\right)' = \left(\frac{3x^5}{5}\right)' + (2\,\text{sen } x)' + 0 = \frac{3 \cdot 5x^4}{5} + 2\cos x = 3x^4 + 2\cos x$$

16.5) Calcule a área sob o gráfico de $y = 3x^2 + 2x$ no intervalo $[1; 4]$.

Solução

Procuremos a função A tal que $A(1) = 0$ e $A'(x) = y$ (notemos que $y > 0$ em $[1; 4]$).
Como:

uma primitiva de $3x^2$ é $\frac{3x^{2+1}}{2+1} = x^3$

uma primitiva de $2x$ é $\frac{2x^{1+1}}{1+1} = x^2$

as primitivas de $y = 3x^2 + 2x$ são da forma $x^3 + x^2 + c$. Então:

$$A(x) = x^3 + x^2 + c$$

Como $A(1) = 0$, vem $A(1) = 1^3 + 1^2 + c = 0$, isto é, $c = -\frac{1}{2}$ e, portanto:

$$A(x) = x^3 + x^2 - 2$$

Logo, a área no intervalo $[1; 4]$ é

$$A(4) = 4^3 + 4^2 - 2 = 78$$

Exercícios Propostos

16.6) Determine a expressão da **família** de primitivas de cada uma das seguintes funções:

a) x^6
b) x^{-3}, $x \neq 0$
c) $\sqrt[3]{x^2}$
d) e^x
e) $3x^2 + 2$
f) $6x^2 + 4x + 1$
g) $\sqrt{x} + 3 \cos x$, $x \geqslant 0$
h) $4x^4 - 3 \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{x}$, $x > 0$

16.7) Calcule a área sob o gráfico de $f(x) = 6x^2$ nos intervalos $[1; 3]$, $[1; 5]$ e $[3; 5]$.

16.8) Calcule a área da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de $f(x) = \cos x$ nos seguintes intervalos:

a) $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ b) $\left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right]$ c) $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ d) $\left[\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{4\pi}{3}\right]$

16.9) Calcule a área da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 3$ nos intervalos:

a) $[1; 3]$ b) $\left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$

16.10) Calcule a área sob o gráfico de $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ nos intervalos:

a) $[0; 2\pi]$ b) $\left[\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

16.11) Seja $f(x) = \cos x$, definida no intervalo $[a; b] \subset [0; \pi]$, onde $a \neq 0$ e $b \geqslant 2a$.
Seja, também, G uma primitiva de **f** tal que $G(a) = 0$. Determine **a** de modo que $G(2a)$ seja igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de **f** no ponto $x = 2a$.

16.12) Calcule a área da região compreendida entre as curvas $f_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $f_2(x) = \cos x$ no intervalo $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$.

16.13) Calcule a área da região limitada pelo eixo Ox e pelas curvas de equações $y = x^2 - 5x + 6$ e $y = x^2 + 7x + 6$.

16.3 — A INTEGRAL INDEFINIDA

Ficou claro, no item anterior, que, sendo φ uma primitiva de **f** num intervalo I, toda função da forma $\varphi(x) + c$ (onde **c** é um número real), também é primitiva de **f**.

A qualquer uma das funções $\varphi(x) + c$ damos o nome de integral indefinida de $f(x)$, e a indicaremos pelo símbolo

$$\int f(x)\, dx$$

Exemplos

a) $\displaystyle\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + c$

pois $\left(\dfrac{x^4}{4} + c\right)' = \left(\dfrac{x^4}{4}\right)' + 0 = \dfrac{4x^3}{4} = x^3 = f(x)$

b) $\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$

pois $(\operatorname{sen} x + c)' = (\operatorname{sen} x)' + 0 = \cos x = f(x)$

c) $\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + c$

pois $(e^x + c)' = (e^x)' + c = e^x = f(x)$

d) $\displaystyle\int 1\, dx = \int dx = x + c$

pois $(x + c)' = (x)' + 0 = 1 = f(x)$

Vemos, então, que calcular a integral indefinida de uma função **f** é encontrar uma *nova* função cuja derivada é **f**.

Notas:

1.ª) Observe que $\int \cos x\, dx$ pode indicar as primitivas $\operatorname{sen} x$, $\operatorname{sen} x + 3$, $\operatorname{sen} x - 8$, etc. A constante **c** é, em geral, arbitrária; mas nos problemas e aplicações que veremos, encontraremos dados e meios para determiná-la convenientemente.

2.ª) A tabela 1 de primitivas pode agora ser escrita com a notação de integral:

$\displaystyle\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c, \; (\alpha \neq -1)$
$\displaystyle\int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + c$
$\displaystyle\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \; (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$
$\displaystyle\int e^x\, dx = e^x + c$
$\displaystyle\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c$
$\displaystyle\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c$

(Tabela 2)

Exercícios Resolvidos

16.14) Calcule $\int f(x)\,dx$ nos seguintes casos:

a) $f(x) = x^2 + 3x + 1$ b) $f(x) = 2^{-x}$

Solução

a) uma primitiva de $f(x) = x^2 + 3x + 1$ é dada por $\frac{x^{2+1}}{2+1} + 3 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 1 \cdot x$. Então:

$$\int f(x)\,dx = \int (x^2 + 3x + 1)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + x + c$$

b) $$\int 2^{-x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + c = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + c \left(\text{note que } \ln\frac{1}{2} = \ln(2)^{-1} = -\ln 2\right)$$

16.15) Calcule $\int e^{2x}\,dx$.

Solução

$$\int e^{2x}\,dx = \int (e^2)^x\,dx = \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} + c = \frac{e^{2x}}{2} + c \quad (\text{note que } \ln e^2 = \log_e e^2 = 2)$$

16.16) Determine a primitiva de $f(x) = \text{sen}\,x$, que se anula para $x = \frac{\pi}{3}$

Solução

Se $\varphi(x)$ é a primitiva (de f(x)) procurada, podemos escrever:

$$\varphi(x) = \int \text{sen}\,x\,dx \quad \text{e} \quad \varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

Então, temos:

$$\varphi(x) = \int \text{sen}\,x\,dx = -\cos x + c \quad \text{e}$$

$$\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow -\cos\frac{\pi}{3} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Logo, $\varphi(x) = -\cos x + \frac{1}{2}$

16.17) Determine as primitivas de $f(x) = 2x - 3$ que são positivas para todo **x** real.

Solução

Se $\varphi(x)$ é uma primitiva procurada, podemos escrever

$$\varphi(x) = \int (2x - 3)\,dx = \left(2\frac{x^2}{2} - 3x\right) + c$$

donde

$$\varphi(x) = x^2 - 3x + c$$

Para termos $\varphi(x) = x^2 - 3x + c > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, basta impor que o discriminante Δ desse trinômio do segundo grau seja negativo:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 4c < 0 \Leftrightarrow -4c < -9 \Leftrightarrow c > \frac{9}{4}$$

Assim, as primitivas procuradas são dadas por $\varphi(x) = x^2 - 3x + c$, onde $c > \frac{9}{4}$.

Exercícios Propostos

16.18) Calcule:

a) $\int x\,dx$

b) $\int 3x^2\,dx$

c) $\int (x + 2)\,dx$

d) $\int (x + 2)^2\,dx$

e) $\int 5^x\,dx$

f) $\int 5^{-x}\,dx$

g) $\int e^{-x}\,dx$

h) $\int e^{\frac{x}{2}}\,dx$

16.19) Sendo **k** um real não nulo, mostre que

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$$

16.20) Determine a primitiva de $f(x) = \cos x$ que se anula para $x = \frac{\pi}{4}$.

16.21) Determine a primitiva $\varphi(x)$ de $f(x) = 3x^2 + 3$ de tal forma que o polinômio $\varphi(x) - f(x)$ admita uma raiz dupla.

16.4 — PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

Para ampliarmos nossas possibilidades no cálculo de integrais, é conveniente conhecermos algumas propriedades.

Sendo **f** e **g** funções contínuas num intervalo **I**, e **m** um número real, vamos provar que são verdadeiras as igualdades:

$$\int m \cdot f(x)\,dx = m \int f(x)\,dx$$

(Propriedade 4)

(em particular, se m = − 1, temos $\int - f(x)\,dx = - \int f(x)\,dx$)

$$\int (f + g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \text{(Propriedade 5)}$$

$$\int (f - g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx \qquad \text{(Propriedade 6)}$$

As três propriedades acima estarão provadas se demonstrarmos, genericamente, que

$$\int (mf + ng)(x)\,dx = m\int f(x)\,dx + n\int g(x)\,dx$$

onde **m** e **n** são números reais.

Vamos, então, à prova desta última propriedade.

Se φ e γ são, respectivamente, primitivas de **f** e **g** em I, temos

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + c_1 \quad \text{e} \quad \int g(x)\,dx = \gamma(x) + c_2$$

Multiplicando ambos os membros da primeira igualdade por **m**, e os da segunda por **n**, vem

$$m\int f(x)\,dx = m\varphi(x) + c_1 m \quad \text{e} \quad n\int g(x)\,dx = n\gamma(x) + c_2 n$$

Somando membro a membro estas duas últimas igualdades, obtemos

$$m\int f(x)\,dx + n\int g(x)\,dx = m\varphi(x) + n\gamma(x) + c_1 m + c_2 n$$

ou seja (fazendo $c_1 m + c_2 n = c$):

$$m\int f(x)\,dx + n\int g(x)\,dx = (m\varphi + n\gamma)(x) + c \qquad \text{(I)}$$

Como $m\varphi + n\gamma$, *pela propriedade 3*, é uma primitiva de $mf + ng$, é claro que

$$(m\varphi + n\gamma)(x) + c = \int (mf + ng)(x)\,dx \qquad \text{(II)}$$

Logo, (I) e (II) mostram que:

$$\int (mf + ng)(x)\,dx = m\int f(x) + n\int g(x)\,dx$$

Estão, assim, provadas as propriedades 4,5 e 6. Confirmando, atribuamos valores convenientes para **m** e **n** nesta última igualdade.

$$(\mathbf{m}\ \text{qualquer};\ n = 0) \longrightarrow \int mf(x)\,dx = m\int f(x)\,dx$$

(Propriedade 4)

$$(m = 1;\ n = 1) \longrightarrow \int (f + g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

(Propriedade 5)

$$(m = 1;\ n = -1) \longrightarrow \int (f - g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

(Propriedade 6)

Exemplos

a) $\int 3\,\text{sen}\,x\,dx = 3\int \text{sen}\,x\,dx = 3(-\cos x + c)$

b) $\int (-e^x)\,dx = -\int e^x\,dx = -(e^x + c)$

c) $\int (2^x + x^2)\,dx = \int 2^x dx + \int x^2 dx = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + c_1\right) + \left(\frac{x^3}{3} + c_2\right)$

d) $\int \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx = \int 2dx - \int \frac{1}{x}\,dx = (2x + c_1) - (\ln|x| + c_2)$

Observação – Como c, c_1 e c_2 são números reais arbitrários, é claro que existe um número real C igual a 3c, ou igual a −c, ou igual a $c_1 + c_2$, ou igual a $c_1 - c_2$. Portanto, os resultados dos exemplos acima podem ser escritos da seguinte maneira:

a) $\int 3\,\text{sen}\,x\,dx = -3\cos x + C$

b) $\int (-e^x)\,dx = -e^x + C$

c) $\int (2^x + x^2)\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3} + C$

d) $\int \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx = 2x - \ln|x| + C$

16.22) Calcule:

a) $\int 5 \cos x \, dx$

b) $\int (-3 e^x) \, dx$

c) $\int (2^x \cdot \ln 2) \, dx$

d) $\int (-\operatorname{sen} t) \, dt$

e) $\int (-\cos t) \, dt$

f) $\int 2 (x - 3)^2 \, dx$

16.23) Calcule:

b) $\int (4x^3 + x^4 + 2 \operatorname{sen} x) \, dx$

b) $\int (1 - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}) \, dx$

c) $\int \left(-e^x - \frac{1}{x} + 5x^5\right) dx$

d) $\int \left(3^x \cdot \ln 3 - \frac{11}{x} - 5\right) dx$

16.24) Sendo **x** um número real, as funções **seno hiperbólico** e **cosseno hipérbólico** são definidas pelas expressões:

$$y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \; ; \; y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Mostre, então, que:

a) $\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + c$

b) $\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + c$

Capítulo

17

Técnicas de integração

17.1 – INTRODUÇÃO

As propriedades estudadas no item 4 do capítulo anterior, apesar de extremamente úteis e abrangentes, não são suficientes para a solução de vários problemas de cálculo de integrais.

Em particular, integrais da forma $\int f(x) \cdot g(x)dx$ não têm, de modo geral, um cálculo simples; sua determinação exige, quase sempre, um procedimento mais sofisticado do que uma mera aplicação daquelas propriedades.

Para enfrentarmos alguns desses problemas, vamos estudar as técnicas especiais de integração mais comuns.

17.2 – TÉCNICA I: INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Trataremos do cálculo de integrais do tipo

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)dx$$

que pode ser efetuado através da **mudança de variável**

$$g(x) = u$$

Vamos supor que F é uma primitiva de **f**, isto é:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad (1)$$

e seja G a função dada por $G(x) = F[g(x)]$.

Temos

$$G'(x) = F'[g(x)] \cdot g'(x)$$

ou seja:

$$G'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$$

Isto mostra que G é uma primitiva da função dada por

$$f[g(x)] \cdot g'(x)$$

isto é

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = G(x) + C$$

ou ainda:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = F[g(x)] + C \qquad (2)$$

Observe, agora, que, com a mudança de variável $g(x) = u$, podemos escrever $g'(x) = \frac{du}{dx}$, e a fórmula (2) fica

$$\int f(u) \cdot \left(\frac{du}{dx}\right) dx = F(u) + C$$

Neste momento, todos nos sentimos tentados a *cancelar* dx no 1.º membro, obtendo a fórmula

$$\int f(u) du = F(u) + C \qquad (3)$$

É verdade que, por enquanto, não demos qualquer significado aos símbolos du e dx, portanto, tal cancelamento não está teoricamente justificado. Entretanto, é fato que a fórmula (3) tem exatamente o mesmo aspecto da fórmula (1), que é correta. Em suma, o cancelamento de dx, feito embora *mecanicamente*, conduz a um resultado verdadeiro e é um excelente recurso para facilitar a integração.

Podemos construir uma *regra prática* a ser utilizada no cálculo de integrais do tipo

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx$$

1.º) Fazemos $g(x) = u$ e $g'(x)dx = du$ e a integral fica

$$\int f(u) du$$

2.º) Calculamos esta integral, obtendo

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

3.º) Voltamos a substituir **u** por g(x)

Exemplos

1.º) Calculemos $\int sen^3 x \cdot \cos x\, dx$. A maior dificuldade é reconhecer que esta é uma integral do tipo $\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx$. Considere as funções dadas por $g(x) = sen\, x$ e $f(x) = x^3$. É claro que $f[g(x)] = (sen\, x)^3 = sen^3\, x$ e que $g'(x) = \cos x$. Assim:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)\, dx = \int sen^3\, x \cdot \cos x\, dx$$

Pode-se, portanto, aplicar a regra prática, fazendo

$$sen\, x = u$$

e

$$\cos x\, dx = du$$

donde

$$\int sen^3\, x \cdot \cos x\, dx = \int u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4} + C$$

e, finalmente, voltando a fazer $u = sen\, x$:

$$\int sen^3\, x \cos x\, dx = \frac{sen^4\, x}{4} + C$$

2.º) Calculemos $\int 5(sen\, x^5)x^4 dx$. Neste caso, devemos fazer $g(x) = x^5$ e $f(x) = sen\, x$, donde $f[g(x)] = sen\, x^5$ e $g'(x) = 5x^4$. Portanto, fazendo a mudança de variável

$$x^5 = u$$

e

$$5x^4 dx = du$$

obtemos

$$\int 5(sen\, x^5)x^4\, dx = \int sen\, u\, du = -\cos u + C = -\cos x^5 + C$$

17.3 — TÉCNICA II: $\int f(ax + b)\, dx \quad (a \neq 0)$

Esta técnica é um caso particular da Técnica I, que recebe aqui um maior destaque, por ser bastante freqüente em aplicações.

Se desejamos calcular a integral

$$\int a \cdot f(ax + b)\, dx$$

basta fazer a mudança de variável

$$ax + b = u \qquad e \qquad a \cdot dx = du$$

donde

$$\int a \cdot f(ax + b)\,dx = \int f(u)du$$

e daí resulta que

$$\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du$$

Exemplos

1.º) Para calcular $\int \cos(3x + 2)\,dx$, basta escrever $\int \cos u\,du = \text{sen}\,u + C$ (com $u = 3x + 2$) e então

$$\int \cos(3x + 2)\,dx = \frac{1}{3}\,\text{sen}\,u + C = \frac{1}{3}\,\text{sen}\,(3x + 2) + C$$

2.º) Para calcular $\int (5x - 3)^3 dx$, basta escrever

$$\int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C \qquad (\text{com } u = 5x - 3)$$

e, então, $\int (5x - 3)^3\,dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^4}{4} + C = \frac{(5x - 3)^4}{20} + C$

Exercícios Resolvidos

17.1) Calcule $\int (2x + 3)^{10}\,dx$.

Solução

Temos $2x + 3 = u$, com $a = 2$.
Então:

$$\int (2x + 3)^{10}dx = \frac{1}{2}\int u^{10}du$$

$$\int (2x + 3)^{10}dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{10+1}}{10+1} + c$$

$$\int (2x + 3)^{10}dx = \frac{1}{22} \cdot u^{11} + c = \frac{(2x + 3)^{11}}{22} + c$$

$$2x + 3 = u$$
$$(2x + 3)' = \frac{du}{dx}$$
$$2 = \frac{du}{dx}$$
$$dx = \frac{1}{2} \cdot du$$

17.2) Calcule $\int \frac{dx}{(3x - 1)^4}$.

Solução

Temos $3x - 1 = u$, com $a = 3$.
Então:

$$\int \frac{dx}{(3x - 1)^4} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^4} = \frac{1}{3}\int u^{-4}\,du$$

$$\int \frac{dx}{(3x - 1)^4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-4+1}}{-4+1} + c$$

$$\int \frac{dx}{(3x - 1)^4} = \frac{1}{-9} \cdot u^{-3} + c = -\frac{1}{9u^3} + c = -\frac{1}{9(3x - 1)^3} + c$$

$$3x - 1 = u$$
$$(3x - 1)' = \frac{du}{dx}$$
$$3 = \frac{du}{dx}$$
$$dx = \frac{1}{3} \cdot du$$

17.3) Calcule $\int \cos 8x\,dx$.

Solução

Temos $8x = u$, com $a = 8$.
Então:

$$\int \cos 8x\,dx = \frac{1}{8}\int \cos u\,du$$

$$\int \cos 8x\,dx = \frac{1}{8}\,\text{sen}\,u + c = \frac{1}{8}\,\text{sen}\,8x + c$$

$$8x = u$$
$$(8x)' = \frac{du}{dx}$$
$$8 = \frac{du}{dx}$$
$$dx = \frac{1}{8}\,du$$

17.4) Calcule $\int \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx$.

Solução

Temos $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = u$, com $a = \frac{1}{2}$.

Então:

$$\int \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx = \frac{1}{\frac{1}{2}}\int \text{sen}\,u\,du$$

$$\int \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx = 2\int \text{sen}\,u\,du$$

$$\int \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)dx = 2(-\cos u) + c = -2\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + c$$

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = u$$
$$\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)' = \frac{du}{dx}$$
$$\frac{1}{2} = \frac{du}{dx}$$
$$dx = 2\,du$$

17.5) Calcule $\int \frac{dx}{x-3}$.

Solução

Temos $x - 3 = u$, com $a = 1$.
Então:

$$\int \frac{dx}{x-3} = \frac{1}{1} \int \frac{du}{u}$$

$$\begin{aligned} x - 3 &= u \\ (x-3)' &= \frac{du}{dx} \\ 1 &= \frac{du}{dx} \\ dx &= du \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x-3} = \ln|u| + c = \ln|x-3| + c$$

17.6) Calule $\int \frac{dx}{-3x+5}$.

Solução

Temos $-3x + 5 = u$, com $a = -3$.
Então:

$$\int \frac{dx}{-3x+5} = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{u}$$

$$\begin{aligned} -3x + 5 &= u \\ (-3x+5)' &= \frac{du}{dx} \\ -3 &= \frac{du}{dx} \\ dx &= -\frac{1}{3}\,du \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{-3x+5} = -\frac{1}{3} \ln|u| + c = -\frac{1}{3} \cdot \ln|-3x+5| + c$$

17.7) Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

Solução

Como $\operatorname{sen}^2 x$ não *está* na forma $f(ax+b)$, devemos, inicialmente, transformá-la. Para isso, recorremos à fórmula da Trigonometria:

$$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$$

de onde tiramos

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

ou ainda

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

Com isso, a integral pedida fica:

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left[\int dx - \int \cos 2x\, dx\right]$$

$$\text{Como } \begin{cases} \int dx = x + c_1 \\ \int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \cos u\, du = \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + c_2 = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + c_2 \end{cases}$$

vem, finalmente

$$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left[x + c_1 - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + c_2\right] = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$$

17.8) Calcule $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.

Solução

Como $\frac{1}{x^2-5x+6}$ não *está* na forma $f(ax+b)$, devemos, inicialmente, transformá-la. Para isso, recorremos à teoria dos Polinômios para decompô-la em uma soma de frações (note que $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$)

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{m}{x-2} + \frac{n}{x-3}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{mx - 3m + nx - 2n}{(x-2)(x-3)}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} \equiv \frac{(m+n)x - 3m - 2n}{x^2-5x+6}$$

Temos, então

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ -3m - 2n = 1 \end{cases}$$

obtendo $m = -1$ e $n = 1$

Com isso, a integral pedida fica:

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = \int \left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3}\right) dx = -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3}$$

$$\text{Como } \begin{cases} \int \frac{dx}{x-2} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c_1 = \ln|x-2| + c_1 \\ \int \frac{dx}{x-3} = \int \frac{dv}{v} = \ln|v| + c_2 = \ln|x-3| + c_2 \end{cases}$$

vem, finalmente

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = -\ln|x-2| + c_1 + \ln|x-3| + c_2 = \ln\frac{|x-3|}{|x-2|} + c$$

17.9) Calcule $\int \frac{3x+5}{2x+1}\, dx$.

Solução

Também aqui, a exemplo dos dois últimos exercícios devemos escrever a expressão $\frac{3x+5}{2x+1}$ numa forma em que seja possível a aplicação da Técnica II. Para isso, lembramos da Divisão de Polinômios:

$$3x + 5 \equiv (2x+1) \cdot Q(x) + R$$

$$3x + 5 \equiv (2x+1) \cdot \frac{3}{2} + \frac{7}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x + 5 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} -3x - \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \cline{1-1} \frac{7}{2} & \end{array}$$

Dividindo esta identidade por $2x + 1$, vem

$$\frac{3x+5}{2x+1} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x+1}$$

Com isso, a integral pedida fica:

$$\int \frac{3x+5}{2x+1}\,dx = \int \left(\frac{3}{2} + \frac{\frac{7}{2}}{2x+1}\right) dx = \frac{3}{2}\int dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{2x+1}$$

$$\text{Como} \begin{cases} \int dx = x + c_1 \\ \int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c_2 = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c_2 \end{cases}$$

vem, finalmente:

$$\int \frac{3x+5}{2x+1}\,dx = \frac{3}{2}(x + c_1) + \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|2x+1| + c_2\right) = \frac{3x}{2} + \frac{7\ln|2x+1|}{4} + c$$

17.10) Calcule $\int e^{\text{sen}\,x} \cdot \cos x\,dx$.

Solução

Fazendo $g(x) = \text{sen}\,x = u$:

$\text{sen}\,x = u$
$(\text{sen}\,x)' = \frac{du}{dx}$
$\cos x \cdot dx = du$

$$\int e^{\text{sen}\,x} \cdot \cos x\,dx = \int e^u\,du$$

$$\int e^{\text{sen}\,x} \cdot \cos x\,dx = e^u + c$$

$$\int e^{\text{sen}\,x} \cdot \cos x\,dx = e^{\text{sen}\,x} + c$$

17.11) Calcule $\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx$.

Solução

Fazendo $g(x) = x^2 + 3 = u$

$x^2 + 3 = u$
$(x^2 + 3)' = \frac{du}{dx}$
$2x\,dx = du$

$$\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx = \int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{u^3}}{3} + c$$

$$\int 2x\sqrt{x^2+3}\,dx = \frac{2\sqrt{(x^2+3)^3}}{3} + c$$

17.12) Calcule $\int e^x \cdot \text{sen}\,e^x\,dx$.

Solução

Fazendo $g(x) = e^x = u$:

$e^x = u$
$(e^x)' = \frac{du}{dx}$
$e^x\,dx = du$

$$\int e^x\,\text{sen}\,e^x\,dx = \int \text{sen}\,u\,du$$

$$\int e^x\,\text{sen}\,e^x\,dx = -\cos u + c$$

$$\int e^x\,\text{sen}\,e^x\,dx = -\cos e^x + c$$

17.13) Calcule $\int \cos^3 x \cdot \text{sen}\,x\,dx$.

Solução

Fazendo $g(x) = \cos x = u$:

$\cos x = u$
$(\cos x)' = \frac{du}{dx}$
$-\text{sen}\,x = \frac{du}{dx}$
$\text{sen}\,x\,dx = -du$

$$\int \cos^3 x \cdot \text{sen}\,x\,dx = \int u^3(-du) = -\int u^3\,du$$

$$\int \cos^3 x \cdot \text{sen}\,x\,dx = -\frac{u^{3+1}}{3+1} + c = -\frac{u^4}{4} + c$$

$$\int \cos^3 x \cdot \text{sen}\,x\,dx = -\frac{\cos^4 x}{4} + c$$

17.14) Calcule $\int x^5 \cdot \text{sen}\,x^6\,dx$.

Solução

Fazendo $g(x) = x^6 = u$:

$x^6 = u$
$(x^6)' = \frac{du}{dx}$
$6x^5 = \frac{du}{dx}$
$x^5\,dx = \frac{du}{6}$

$$\int x^5 \cdot \text{sen}\,x^6\,dx = \int \text{sen}\,u\frac{du}{6} = \frac{1}{6}\int \text{sen}\,u\,du$$

$$\int x^5\,\text{sen}\,x^6\,dx = \frac{1}{6}(-\cos u) + c$$

$$\int x^5\,\text{sen}\,x^6\,dx = -\frac{\cos x^6}{6} + c$$

7.15) Calcule $\int \frac{x\,dx}{x^2+3}$.

Solução

Fazendo $g(x) = x^2 + 3 = u$:

$$x^2 + 3 = u$$
$$(x^2 + 3)' = \frac{du}{dx}$$
$$2x' = \frac{du}{dx}$$
$$x\,dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+3} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$$
$$\int \frac{x\,dx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln|u| + c$$
$$\int \frac{x\,dx}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln|x^2+3| + c$$

17.16) Calcule $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Solução

Notemos, inicialmente, que

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$

Fazendo, então, $g(x) = \cos x = u$:

$$\cos x = u$$
$$(\cos x)' = \frac{du}{dx}$$
$$-\operatorname{sen} x = \frac{du}{dx}$$
$$\operatorname{sen} x\,dx = -du$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u}$$
$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c$$
$$\int \operatorname{tg} x = -\ln|\cos x| + c$$

17.17) Calcule $\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,dx$.

Solução

Aqui podemos *escolher* entre fazer a mudança $g(x) = \operatorname{sen} x = u$ ou $g(x) = \cos x = u$. Vamos fazer das duas maneiras:

1.º) Fazendo $\operatorname{sen} x = u$, temos $(\operatorname{sen} x)' = \frac{du}{dx}$, isto é, $\cos x\,dx = du$.

Então:

$$\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c_1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c_1$$

2.º) Fazendo $\cos x = u$, temos $(\cos x)' = \frac{du}{dx}$, isto é, $\operatorname{sen} x\,dx = -du$.

Então:

$$\int \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,dx = \int u(-du) = -\int u\,du = -\frac{u^2}{2} + c_2 = -\frac{\cos^2 x}{2} + c_2$$

Observe que os resultados obtidos apresentam uma aparente incoerência: encontramos primitivas diferentes $\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c_1 \text{ e } -\frac{\cos^2 x}{2} + c_2\right)$ para a mesma função $A(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$. Mas é fácil entender que não houve erro: primeiramente, basta derivar ambas as funções encontradas para acharmos a mesma função A(x)

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c_1\right)' = \frac{2\operatorname{sen} x}{2} \cdot (\operatorname{sen} x)' = \operatorname{sen} x \cos x$$
$$\left(-\frac{\cos^2 x}{2} + c_2\right)' = -\frac{2\cos x}{2} \cdot (\cos x)' = \operatorname{sen} x \cos x$$

Em segundo lugar, lembramos que o símbolo $\int f(x)\,dx$ representa qualquer primitiva $\varphi(x) + c$ de $f(x)$ $\left(\text{por exemplo, } \int x\,dx \text{ pode ser } \frac{x^2}{2} \text{ ou } \frac{x^2}{2} + 3 \text{ ou } \frac{x^2}{2} + 10\text{, etc.}\right)$ e, portanto, duas primitivas da mesma função devem **diferir de uma constante**. De fato, isso ocorre no nosso caso:

$$\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2} + c_1\right) - \left(-\frac{\cos^2 x}{2} + c_2\right) = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{2} + c_1 - c_2 = \frac{1}{2} + c_1 - c_2 = \text{constante.}$$

Assim, verificamos que ambas as respostas são equivalentes.

17.18) Calcule $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-3}}$.

Solução

Temos aqui uma situação mais delicada que a dos exercícios anteriores, já que não reconhecemos, de imediato, na integral dada, a forma $\int f[g(x)] \cdot g'(x)\,dx$.

Lembremos, no entanto, que a derivada da função $\sqrt{x}$ é dada por $\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Isso sugere que façamos a substituição $\sqrt{x-3} = u$ pois assim conseguiremos colocar o quociente $\frac{dx}{\sqrt{x-3}}$ e o próprio numerador **x** em função de **u**. Senão, vejamos:

$$(\sqrt{x-3})' = \frac{du}{dx}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x-3}} \cdot (x-3)' = \frac{du}{dx}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{du}{dx}$$
$$\frac{dx}{\sqrt{x-3}} = 2\,du$$

$$\sqrt{x-3} = u$$
$$x - 3 = u^2$$
$$x = u^2 + 3$$

Com isso, escrevemos:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-3}} = \int (u^2+3)\cdot 2\,du = 2\int (u^2+3)\,du = 2\left(\frac{u^3}{3}+3u\right)+c$$

Logo,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-3}} = 2\left(\frac{\sqrt{(x-3)^3}}{3}+3\sqrt{x-3}\right)+c$$

Exercícios Propostos

17.19) Calcule:

a) $\int (3x-1)^5\,dx$

b) $\int \frac{dx}{(-2x+3)^{10}}$

c) $\int \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx$

d) $\int \cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)dx$

e) $\int e^{-2x+1}\,dx$

f) $\int 2^{x-3}\,dx$

g) $\int \frac{dx}{5x-1}$

h) $\int \frac{dx}{-x+3}$

i) $\int \frac{dx}{4x+2}$

j) $\int \frac{dx}{-3x+7}$

17.20) Calcule $\int \cos^2 x\,dx$.

17.21) Calcule $\int \operatorname{sen}^2 \frac{3x}{2}\,dx$.

17.22) Calcule:

a) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

b) $\int \frac{dx}{3x^2-10x+3}$

17.23) Calcule $\int \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$.

17.24) Calcule $\int \frac{x^2-3x+4}{x-1}\,dx$.

17.25) Calcule:

a) $\int 4x^3 e^{x^4}\,dx$

b) $\int 2x\cos x^2\,dx$

c) $\int 3x^2\sqrt{x^3-1}\,dx$

d) $\int \frac{4x\,dx}{2x^2-1}$

e) $\int (2x^3+2x)(6x^2+2)\,dx$

f) $\int \frac{12x-5}{6x^2-5x+1}\,dx$

17.26) Calcule:

a) $\int \operatorname{sen}^4 x\cdot\cos x\,dx$

b) $\int \operatorname{cotg} x\,dx$

17.27) Calcule:

a) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

b) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

17.28) Calcule $\int \operatorname{cotg} x\cdot \ln \operatorname{sen} x\,dx$.

17.29) Calcule:

a) $\int \cos^5 x\cdot\operatorname{sen} x\,dx$

b) $\int \frac{8x^2\,dx}{x^3+1}$

c) $\int 5x\sqrt[4]{x^2-3}\,dx$

d) $\int \frac{x^2}{2}\cdot\operatorname{sen} x^3\,dx$

17.30) Calcule:

a) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$

b) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x+3}}$

17.4 — TÉCNICA III: INTEGRAÇÃO POR PARTES. INTEGRAIS DA FORMA $\int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

Para o cálculo de integrais da forma $\int f(x)\cdot g'(x)dx$(*), vamos retornar, de início, à regra de derivação do produto de duas funções:

$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Temos, então, que

$$f(x)\cdot g'(x) = (f(x)\cdot g(x))' - f'(x)\cdot g(x)$$

ou ainda

$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = \int (f(x)\cdot g(x))'dx - \int f'(x)\cdot g(x)dx$$

Como *uma* primitiva de $(f(x)\cdot g(x))'$ é $f(x)\cdot g(x)$, isto é,

$$\int (f(x)\cdot g(x))'dx = f(x)\cdot g(x)$$

vem

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx}$$

(*) Entendam-se **f** e **g** como sendo funções deriváveis, de derivadas contínuas num intervalo I.

Percebe-se, então, que, para o cálculo da integral do **produto** de duas funções, o que se coloca como fundamental é a **escolha** de qual das funções será chamada de f(x) e qual será chamada de g'(x), já que a esperança no uso da fórmula acima é de que a integral em que cairemos seja mais simples do que a integral pedida. O primeiro exercício da série abaixo esclarece este comentário.

Exercícios Resolvidos

17.31) Calcule $\int x \cdot \text{sen } x \, dx$.

Solução

Façamos $f(x) = x$ e $g'(x) = \text{sen } x$.
Vamos determinar, agora, $f'(x)$ e $g(x)$:

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = \text{sen } x \Rightarrow g(x) = \int g'(x)dx = \int \text{sen } x \, dx = -\cos x \quad (c_1 = 0)$$

Utilizando a fórmula

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

vem: $\int x \cdot \text{sen } x \, dx = x \cdot (-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)dx = -x \cos x + \text{sen } x + c$

Note que se tivéssemos *invertido* a escolha, isto é, se fizéssemos $f(x) = \text{sen } x$ e $g'(x) = x$, teríamos:

$$f(x) = \text{sen } x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \int g'(x)\,dx = \int x \, dx = \frac{x^2}{2} \quad (c_1 = 0)$$

e, com o uso da fórmula de integração por partes, viria:

$$\int x \text{ sen } x \, dx = \text{sen } x \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \cos x \cdot \frac{x^2}{2} dx$$

o que é correto, mas inconveniente, pois a nova integral não é mais simples de se calcular que a integral pedida.

17.32) Calcule $\int e^x(2x + 5)dx$.

Solução

Vamos fazer $f(x) = 2x + 5$ e $g'(x) = e^x$, e calcular $f'(x)$ e $g(x)$:

$$f(x) = 2x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2$$

$$g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = \int g'(x)dx = \int e^x dx = e^x \quad (c_1 = 0)$$

Com a fórmula de integração por partes, vem:

$$\int e^x(2x + 5)dx = (2x + 5)e^x - \int 2 \cdot e^x dx = (2x + 5)e^x - 2e^x + c$$

17.33) Calcule $\int \ln x \, dx$.

Solução

Vamos resolver este exercício de duas maneiras, onde destacamos a simplicidade da segunda e a sofisticação algébrica e o aprendizado da primeira.

1.º modo – Vamos fazer $\ln x = u$.
Derivando em relação a x:

$$(\ln x)' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{du}{dx}$$

donde $dx = x\,du$ (I)
Como $\ln x = u$, isto é, $\log_e x = u$, temos $x = e^u$. Substituindo em (I), vem

$$dx = e^u du$$

A integral pedida, então, se escreve:

$$\int \ln x \, dx = \int u \cdot e^u du$$

Utilizemos, agora, a técnica III.
Fazendo $f(u) = u$ e $g'(u) = e^u$, calculemos $f'(u)$ e $g(u)$.

$$f(u) = u \Rightarrow f'(u) = 1$$

$$g'(u) = e^u \Rightarrow g(u) = \int g'(u)du = \int e^u du = e^u \quad (c_1 = 0)$$

Então

$$\int \ln x \, dx = \int u\, e^u du = f(u) \cdot g(u) - \int f'(u) \cdot g(u)\,du$$

$$\int \ln x \, dx = \int u\, e^u du = u \cdot e^u - \int 1 \cdot e^u du$$

$$\int \ln x \, dx = \int u\, e^u du = u \cdot e^u - e^u + c = e^u(u - 1) + c$$

Como $u = \ln x$, e lembrando que $e^{\ln x} = e^{\log_e x} = x$, temos, finalmente:

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + c$$

2.º modo – Apliquemos a técnica III diretamente em $\int \ln x \, dx$, fazendo $f(x) = \ln x$ e $g'(x) = 1$.
Calculando $f'(x)$ e $g(x)$:

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = \int g'(x)\,dx = \int 1\,dx = x \quad (c_1 = 0)$$

Então

$$\int 1 \cdot \ln x\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

$$\int 1 \cdot \ln x\, dx = (\ln x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx$$

$$\int \ln x\, dx = (\ln x) \cdot x - \int dx = (\ln x) \cdot x - x + c$$

$$\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + c$$

17.34) Calcule $X = \int e^x \cdot \cos x\, dx$.

Solução

Fazendo $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos x$, temos:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$g'(x) = \cos x \Rightarrow g(x) = \int \cos x\, dx = \text{sen}\, x \quad (c_1 = 0)$$

Então

$$X = \int e^x \cdot \cos x\, dx = e^x \cdot \text{sen}\, x - \int e^x \text{sen}\, x\, dx \quad \text{(I)}$$

Como vemos, neste caso não tivemos sucesso imediato com a aplicação da técnica III. No entanto, vamos aplicar essa técnica, novamente, na integral da expressão I: fazendo $F(x) = e^x$ e $G'(x) = \text{sen}\, x$, temos

$$F(x) = e^x \Rightarrow F'(x) = e^x$$

$$G'(x) = \text{sen}\, x \Rightarrow G(x) = \int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x \quad (c_2 = 0)$$

Então

$$\int e^x \text{sen}\, x\, dx = F(x) \cdot G(x) - \int F'(x) \cdot G(x)\, dx$$

$$\int e^x \text{sen}\, x\, dx = e^x \cdot (-\cos x) - \int e^x(-\cos x)\, dx$$

$$\int e^x \text{sen}\, x\, dx = -e^x \cos x + \underbrace{\int e^x \cos x\, dx}_{X}$$

substituindo na expressão (I), vem:

$$X = e^x \text{sen}\, x - (-e^x \cos x + X)$$

$$X = e^x \text{sen}\, x + e^x \cos x - X$$

$$2X = e^x \text{sen}\, x + e^x \cos x$$

Logo

$$X = \frac{e^x(\text{sen}\, x + \cos x)}{2} + c$$

Exercícios Propostos

17.35) Calcule:

a) $\int xe^x\, dx$

b) $\int (3x - 1)e^x\, dx$

c) $\int x \cos x\, dx$

d) $\int (2x + 1)\, \text{sen}\, x\, dx$

17.36) Calcule $\int x^2 \ln x\, dx$.

17.37) Calcule $X = \int x^2 e^x\, dx$.

17.38) Calcule $X = \int e^x \text{sen}\, x\, dx$.

17.39) Calcule $X = \int x^2 \cos x\, dx$.

17.40) Encontre uma fórmula de recorrência para

$$X_n = \int x^n e^x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

Capítulo

18

A integral definida

18.1 — DEFINIÇÃO

Seja A uma primitiva da função **f**, contínua, num intervalo I, isto é:

$$A(x) = \int f(x)\,dx$$

Se, para um certo $a \in I$, tem-se $A(a) = 0$, a função A é única (note que esta condição permite determinar a constante **c** que surge no cálculo de $\int f(x)\,dx$).

Pois bem, determinada a função A tal que $A(x) = \int f(x)\,dx$ e $A(a) = 0$, o valor numérico A(b), para todo $b \in I$, é chamado **integral definida** de **f**(*), e é indicado por

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Os números **a** e **b** são chamados *extremos de integração.*

Exemplos

a) Vamos determinar $\int_1^3 (2x - 1)\,dx$.

Primeiro, calculamos A(x):

$$A(x) = \int (2x - 1)\,dx = x^2 - x + c$$

(*) O leitor já percebeu que, caso **f** seja **não negativa** no intervalo de extremos **a** e **b**, a função A é a função área estudada no capítulo 16 e A(b) é a área sob o gráfico de **f** nesse intervalo (veja item 16.2).

Como $A(a) = 0$, para $a = 1$ temos:

$$A(1) = 1^2 - 1 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Assim, $A(x) = x^2 - x$; portanto:

$$\int_1^3 (2x - 1)\,dx = A(3) = 3^2 - 3 = 6$$

b) Vamos determinar $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \operatorname{sen} x\,dx$.

Primeiro, calculamos A(x):

$$A(x) = \int 2 \operatorname{sen} x\,dx = -2\cos x + c$$

Como $A(a) = 0$, para $a = 0$ temos:

$$A(0) = -2\cos 0 + c = 0 \Rightarrow c = 2$$

Assim, $A(x) = -2\cos x + 2$; portanto:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \operatorname{sen} x\,dx = A\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4} + 2 = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 = 2 - \sqrt{2}$$

18.2 — TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Vejamos, agora, o teorema que, entre outras utilidades, permitirá eliminar a determinação da constante **c** no cálculo da integral definida:

Se φ é uma primitiva da função **f** no intervalo I, e **a** e **b** são números de I, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

A prova deste teorema é bastante simples:

Se A é a primitiva de **f** para a qual $A(a) = 0$, sabemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b)$$

Como A e φ são primitivas da mesma função **f**, sabemos que a diferença entre elas é uma constante **c**, isto é

$$A(x) = \varphi(x) + c$$

Então

$$A(b) = \varphi(b) + c$$
$$A(a) = \varphi(a) + c$$

Subtraindo membro a membro essas duas igualdades, vem:

$$A(b) - A(a) = \varphi(b) - \varphi(a)$$

ou seja

$$\int_a^b f(x)\,dx - 0 = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Logo $$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Em suma, podemos agora calcular a integral definida determinando inicialmente a integral indefinida correspondente e, em seguida, obter a diferença entre os valores numéricos desta para os extremos de integração (superior menos inferior). A notação a seguir esclarece bem essa idéia:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big]_a^b = \varphi(x)\Big]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Assim, para os exemplos do item anterior, temos:

a) $\displaystyle\int_1^3 (2x - 1)\,dx = \int (2x - 1)\,dx\Big]_1^3 = x^2 - x + c\Big]_1^3 =$

$= (3^2 - 3 + c) - (1^2 - 1 + c) = 6$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\,\text{sen}\,x\,dx = \int 2\,\text{sen}\,x\,dx\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -2\cos x + c\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} =$

$\displaystyle= \left(-2\cos\frac{\pi}{4} + c\right) - (2\cos 0 + c) = 2 - \sqrt{2}$

Outros exemplos

c) $\displaystyle\int_1^2 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c\Big]_1^2 = \left(\frac{2^2}{\ln 2} + c\right) - \left(\frac{2^1}{\ln 2} + c\right) = \frac{2}{\ln 2}$

d) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x} = \ln x\Big]_2^5 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}$

e) $\displaystyle\int_{-1}^4 \frac{dx}{(2x + 1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x + 1)^{-2+1}}{-2 + 1}\Big]_{-1}^4 = -\frac{1}{2(2x + 1)}\Big]_{-1}^4 =$

$\displaystyle= \left(-\frac{1}{18}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{9}$

(note que, aqui, utilizamos a técnica I para calcular $\displaystyle\int\frac{dx}{(2x + 1)^2}$, fazendo $2x + 1 = u$:

$$\int\frac{dx}{(2x + 1)^2} = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du = \frac{1}{2}\,\frac{u^{-2+1}}{-2 + 1} = -\frac{1}{2u}\Big)$$

Exercícios Propostos

18.1) Calcule:

a) $\displaystyle\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 1)\,dx$ b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} e^x\,dx$ d) $\displaystyle\int_1^5 \frac{dx}{2x}$

18.2) Calcule:

a) $\displaystyle\int_{-1}^0 (3x - 1)^5\,dx$ b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2 + 3}$ d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \text{tg}\,x\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\text{sen}\,x\,dx$ f) $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$

18.3) **Duas propriedades da integral definida**. Prove que:

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

18.3 — A INTEGRAL DEFINIDA E A ÁREA

Já sabemos que, caso **f** seja contínua e **não negativa** em $[a; b]$, o número

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

(lembre que $A(a) = 0$) representa a área sob o gráfico de **f** no intervalo $[a; b]$.

Nos casos em que **f** não obedeça a condição de ser não negativa, também é possível dar interpretação geométrica, associando $\int_a^b f(x)\,dx$ a uma medida de área. Veja:

1.º) caso f seja não positiva em [a; b]

As áreas (1) e (2) do gráfico são, por simetria, iguais.

A área (2) é dada por

$$\int_a^b - f(x)\,dx$$

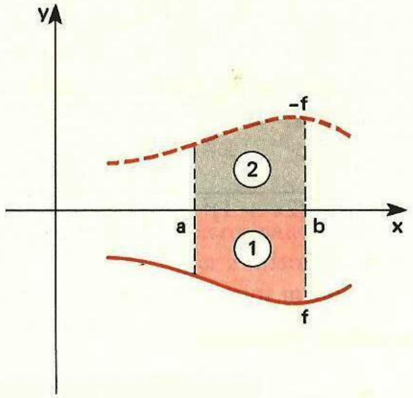
pois $-f$ é não negativa em $[a; b]$.

Portanto,

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

representará a medida da área (1) *com sinal trocado*, já que

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b - f(x)\,dx$$

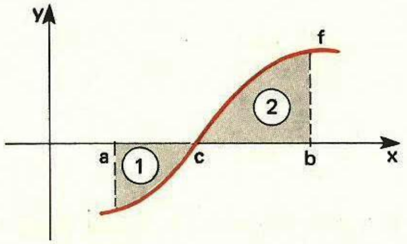


2.º) caso f tenha trecho positivo e trecho negativo.

Como mostra o gráfico ao lado, $f(x) \leqslant 0$ em $[a; c]$ e $f(x) \geqslant 0$ em $[c; b]$.

A propriedade **a** do exercício 18.3, acima, permite escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)\,dx$$



A primeira parcela desta soma representa a área (1) com sinal trocado; a segunda parcela representa a área (2). Vemos, portanto, que neste caso $\int_a^b f(x)\,dx$

representa o *saldo* das medidas das áreas limitadas pelo gráfico de **f** e pelo eixo Ox em $[a; b]$.

Como aplicação desta interpretação geométrica da integral definida, sugerimos que o leitor refaça os exercícios de números 16.7 a 16.13, utilizando a notação e as propriedades da integral.

18.4 — A INTEGRAL DEFINIDA E A SOMATÓRIA

Vamos, agora, utilizar o relacionamento da integral definida com área para estabelecer a ligação daquela com um certo tipo de somatória.

Tomemos o caso em que a função **f** é não negativa em $[a; b]$; a área sob o gráfico de **f** é $S = \int_a^b f(x)\,dx$ neste intervalo.

No entanto, S pode também ser obtida pelo seguinte processo: dividimos $[a; b]$ em **n** intervalos *tão pequenos* que, em cada um deles, **f** possa ser considerada uma função constante. Temos, então, S subdividida em **n** retângulos. A soma das áreas desses retângulos é *igual* a S. (É claro que este processo fornecerá um resultado aproximado, mas tanto mais preciso quanto maior for **n**, isto é, quanto menores forem os intervalos em que dividimos $[a; b]$.

Vejamos um exemplo:

Seja S a área sob o gráfico de $f(x) = 1 + \cos\frac{x}{2}$ no intervalo $[0; 3]$.

Utilizemos, inicialmente, a integral para conhecer S (note que $f(x) \geqslant 0$ em $[0; 3]$).

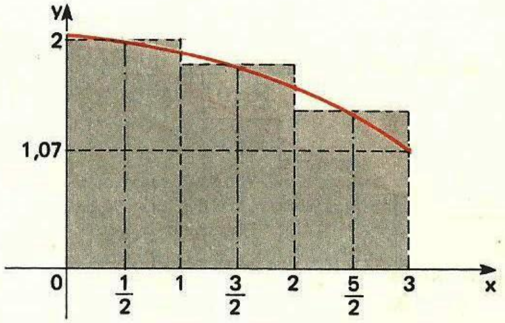
$$\int_0^3 \left(1 + \cos\frac{x}{2}\right) dx = \left[\left(x + 2\,\text{sen}\,\frac{x}{2}\right)\right]_0^3 =$$

$$= \left(3 + 2\,\text{sen}\,\frac{3}{2}\right) - (0 + 2\,\text{sen}\,0) \cong 4{,}995$$

(utilizamos sen 1,5 = 0,997)

Agora, vamos ao processo acima descrito.

Vamos subdividir o intervalo $[0; 3]$ em três subintervalos: $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$.



Temos então, (apenas) três retângulos de bases $\Delta_1 = 1 - 0$, $\Delta_2 = 2 - 1$ e $\Delta_3 = 3 - 2$.

Para que o erro não aumente, vamos tomar como alturas desses retângulos os números:

$$f(\overline{x_1}) = f\left(\frac{1}{2}\right), \quad f(\overline{x_2}) = f\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{e} \quad f(\overline{x_3}) = \frac{5}{2}$$

Assim a área S é dada por:

$$S = f(\bar{x}_1) \cdot \Delta_1 + f(\bar{x}_2) \cdot \Delta_2 + f(\bar{x}_3) \cdot \Delta_3 = \sum_{k=1}^{3} f(\bar{x}_k) \cdot \Delta_k$$

ou seja:

$$S = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}\right) \cdot 1 =$$

$$= \left(1 + \cos\frac{1}{4}\right) + \left(1 + \cos\frac{3}{4}\right) + \left(1 + \cos\frac{5}{4}\right) \cong$$

$$\cong 1{,}969 + 1{,}732 + 1{,}315 \cong 5{,}016$$

Obtivemos uma aproximação excelente, se considerarmos que a divisão de S em apenas três retângulos é um procedimento muito simplificado.

Vamos, então, passar à descrição formal do nosso processo, chamando a atenção de que, mesmo considerando **f** não negativa, não há perda da generalidade da conclusão, uma vez que a integral definida está diretamente ligada a áreas, como vimos no item anterior.

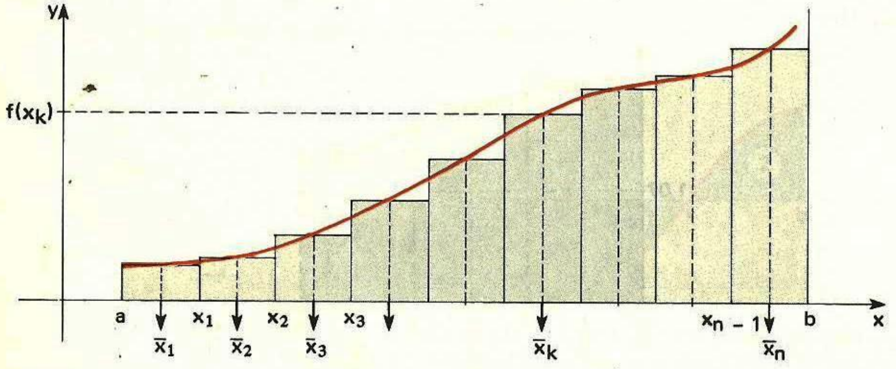
Sendo **f** contínua e não negativa em $[a; b]$, consideremos os **n** subintervalos

$$[x_0 = a; x_1], [x_1; x_2], [x_2; x_3], \ldots, [x_{n-1}; x_n = b]$$

(onde, é claro, $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n$) cujos comprimentos são dados por

$$\Delta_k x = x_k - x_{k-1}, \qquad \text{com} \qquad k = 1; 2; \ldots; n$$

(Os números Δx serão as bases dos retângulos em que dividimos a área S sob o gráfico de **f**).



Tomemos, agora, $\overline{x_k} \in [x_{k-1}; x_k]$, $k = 1; 2; \ldots; n$ (supondo, em cada intervalo, **f** constante e igual a $f(\overline{x_k})$, temos aqui as alturas dos retângulos).

A soma das áreas desses retângulos se aproxima do valor de S. Então:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \cong f(\overline{x_1}) \cdot \Delta_1 x + f(\overline{x_2}) \cdot \Delta_2 x + f(\overline{x_3}) \cdot \Delta_3 x +$$

$$+ \ldots + f(\overline{x_k}) \cdot \Delta_k x + \ldots + f(\overline{x_n}) \cdot \Delta_n x$$

ou seja:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}) \cdot \Delta_k x$$

À medida que aumentamos **n**, a somatória acima mais se aproxima de S, a ponto então de podermos escrever que, para **n** suficientemente grande

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x_k}) \cdot \Delta_k x \qquad (*)$$

É de extrema importância a relação que acabamos de ver: são inúmeras as situações do cálculo aplicado às ciências, em que há a necessidade de se determinar o número de que se aproximam as somas da forma $\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta_k x$ quando **n** aumenta; damos aos raciocínios que conduzem a tais somas o nome de **processos de integração**. Aliás, é histórico (e da preferência de muitos autores) que se **defina** a integral definida a partir das somatórias.

Vejamos duas aplicações.

18.5 – APLICAÇÃO À GEOMETRIA: VOLUMES

Consideremos, como exemplo introdutório, o seguinte problema:

Calcule o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico de $f(x) = \frac{x}{2}$ em torno do eixo Ox no intervalo $[0; 3]$.

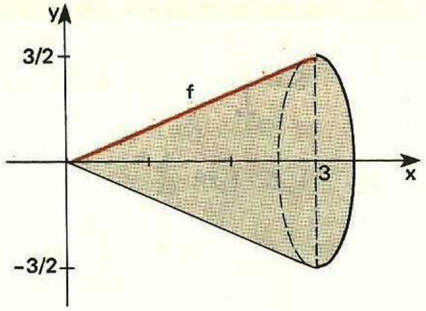
(*) Note, novamente, que aumentar **n** significa diminuir mais e mais os comprimentos (dos intervalos) $\Delta_k X$. Esta situação, então, seria melhor traduzida escrevendo que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta k \to 0} \Sigma\, f(\overline{X}_k)\,\Delta_k X$$

Não o fizemos no texto por questão de simplificação.

É claro que, neste caso, sendo o sólido um cone, podemos utilizar a fórmula da Geometria:

$$V_{cone} = \frac{\text{área da base} \times \text{altura}}{3}$$

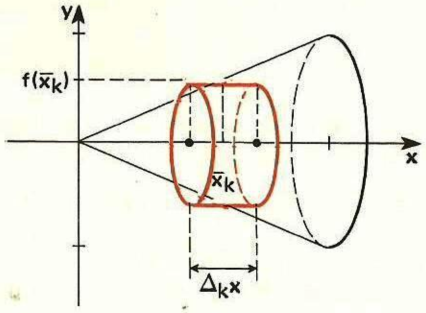


Como a base é um círculo de raio $f(3) = \dfrac{3}{2}$ e a altura é 3, temos

$$V_{cone} = \frac{\pi \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \times 3}{3} = \frac{9\pi}{4}$$

No entanto, vamos utilizar o processo de *fatiar* o sólido, dividindo o intervalo $[0; 3]$ em **n** subintervalos de comprimento $\Delta_k x$ tão pequeno que, neles, f(x) possa ser considerada constante.

Temos, assim, o sólido dividido em **n** cilindros de altura $\Delta_k x$ e raio da base $f(\bar{x}_k)$. O volume de cada um desses cilindros é



área da base × altura $= \pi[f(\bar{x}_k)]^2 \Delta_k x$

O volume do sólido é, então:

$$V = \sum_{k=1}^{n} \pi[f(\bar{x}_k)]^2 \Delta_k x$$

Portanto, temos aqui um *processo de integração* e, pelo exposto no item anterior, podemos escrever, para **n** suficientemente grande,

$$V = \sum_{k=1}^{n} \pi[f(\bar{x}_k)]^2 \Delta_k x = \int_0^3 \pi[f(x)]^2 \, dx$$

Então

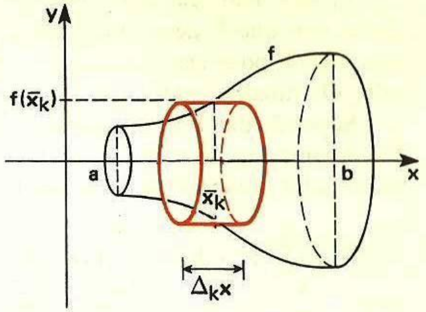
$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{x^3}{3 \cdot 4}\right)\Bigg]_0^3 = \pi \frac{3^3}{12} = \frac{9\pi}{4}$$

De modo geral, para calcular o volume do sólido gerado pela rotação do gráfico de **f**, contínua e não negativa; em torno do eixo Ox no intervalo $[a; b]$, *fatiamos* o sólido, dividindo $[a; b]$ em subintervalos pequenos onde **f** é considerada constante.

Tomemos $\bar{x}_k$ em cada um dos intervalos e, sendo $\Delta_k x$ o comprimento desses intervalos, cada cilindro obtido por esse processo tem raio da base $f(\bar{x}_k)$ e altura $\Delta_k x$.

A soma dos volumes desses cilindros dará o volume V do sólido:

$$V = \sum_{k=1}^{n} \pi[f(\bar{x}_k)]^2 \Delta_k x$$



Este processo de integração nos leva a

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

Como outro exemplo, calculemos o volume do sólido gerado pela rotação de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ em torno de Ox no intervalo $[e; e^3]$:

$$V = \pi \int_a^b \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \pi \int_e^{e^3} \frac{dx}{x} = \pi (\ln x)\Bigg]_e^{e^3} = \pi[\ln e^3 - \ln e] = 2\pi$$

Exercícios Propostos

18.4) Calcule o volume do sólido gerado pela rotação, em torno de Ox, do gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no intervalo $[1; 4]$.

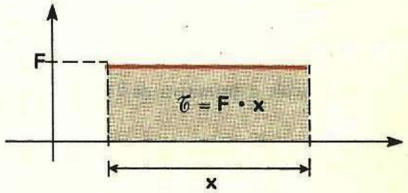
18.5) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $r > 0$, representa uma semicircunferência de centro O(0; 0) e raio r. Mostre que o volume da esfera obtida pela rotação de **f** em torno de Ox é $\dfrac{\Delta}{3} \pi r^3$.

18.6) Calcule o volume do tronco de cone obtido pela rotação do segmento de extremos P(2; 2) e Q(5; 1) em torno de Ox.

18.6 — APLICAÇÃO À FÍSICA: TRABALHO

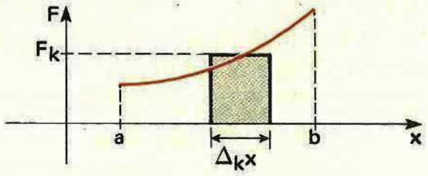
Na Física elementar, aprendemos que o **trabalho** $\mathcal{T}$ realizado por uma força **constante** $\vec{F}$ para deslocar um corpo de uma distância **x** (sendo $\vec{F}$ paralela ao deslocamento) é dado por:

$$\mathcal{T} = F \cdot x$$



Caso F não seja constante, para calcularmos o trabalho, dividimos a distância (em que F deve atuar) em **n** pequenos intervalos, de comprimento $\Delta_k x$, nos quais F pode ser considerada constante e igual a um certo F_k de cada intervalo. O trabalho, então, em cada intervalo, é $F_k \cdot \Delta_k x$.

Supondo que F varie segundo o gráfico de uma função contínua F(x), o trabalho total realizado é dado por



$$\mathcal{T} = \sum_{k=1}^{n} F_k \cdot \Delta_k x = \int_a^b F(x)\,dx$$

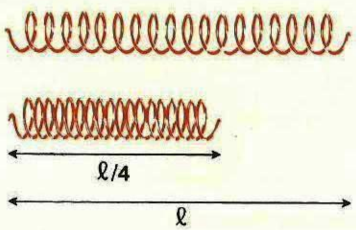
onde **a** e **b** são, respectivamente, as abscissas dos pontos inicial e terminal em que F deve atuar.

Por exemplo, a força F necessária para comprimir uma mola é dada por

$$F(x) = kx$$

onde **k** é uma constante própria da mola e **x** é a distância entre os pontos de início e final da compressão.

Sendo ℓ o comprimento da mola *solta*, vamos calcular o trabalho realizado por F para deixar a mola com $\frac{1}{4}$ de seu comprimento.



A distância a ser vencida é de $\ell - \frac{\ell}{4} = \frac{3\ell}{4}$; adotando, então, zero e $\frac{3\ell}{4}$ como extremos de integração, temos

$$\mathcal{T} = \int_0^{\frac{3\ell}{4}} F(x)\,dx = \int_0^{\frac{3\ell}{4}} kx\,dx = \left.\frac{kx^2}{2}\right]_0^{\frac{3\ell}{4}} = \frac{k}{2} \cdot \frac{9\ell^2}{16} = \frac{9k\ell^2}{32}$$

(Admitimos aqui que F e ℓ foram dadas em unidades do mesmo sistema, resultando, então, $\mathcal{T}$ em unidades de trabalho desse sistema.)

Exercícios Suplementares

IV.1) a) Determine os números A, B e C tais que

$$\frac{x^2 + 3x}{x + 1} \equiv Ax + B + \frac{C}{x + 1}$$

b) Calcule a primitiva de $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$ que se anula para x = 0.

IV.2) Calcule $\int x\sqrt{1 + x}\,dx$.

IV.3) Calcule $X = \int \sec^3 x\,dx$, sabendo que

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

(sugestão: $\sec^3 x = \sec^2 x \cdot \sec x$)

IV.4) Mostre que $\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + c$.

(sugestão: $\sec x = \dfrac{\sec x\,(\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x}$

IV.5) Calcule $\int \operatorname{cossec} x\,dx$.

IV.6) Calcule $\int \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x\,dx$.

IV.7) Considere o polinômio $P(x) = (1 + x)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calcule $\int P(x)\,dx$

b) Desenvolva P(x) pelo Binômio de Newton e, nessa nova forma, calcule outra expressão para $\int P(x)\,dx$.

c) Calcule a soma

$$1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{2} + \binom{n}{2}\frac{1}{3} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{4} + \ldots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n + 1}$$

(É importante, neste exercício, lembrar que duas primitivas de uma mesma função diferem de uma constante.)

IV.8) Seja a função **f** definida por $f(x) = e^x \cdot x^2$.

Toma-se $P(x) = ax^2 + bx + k$.

Determine **a**, **b** e **k** para que se tenha

$$\int f(x)\,dx = e^x \cdot P(x)$$

IV.9) Seja **f** definida por $f(x) = ax^2 + b$.

a) Determine **a** e **b** sabendo que

$$I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{7}{3} \quad \text{e} \quad I_2 = \int_1^2 f(x)\,dx = \frac{31}{3}$$

b) Calcule a área da região do plano limitada pelo gráfico de **f** e pelas retas y = 0, x = 0 e x = 2.

c) Por que essa área é igual a $I_1 + I_2$?

IV.10) Seja $I(a;n) = \int_0^1 x^a \cdot (1-x)^n\,dx$, $a \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

Mostre que $I(a+1;n) = \dfrac{a+1}{n+1} \cdot I(a;n+1)$.

IV.11) Seja $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Mostre, utilizando integração por partes, que para $n \geqslant 2$ tem-se $I_n = \dfrac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$.

b) Calcule I_2, I_4, I_6.

EXERCÍCIOS DE VESTIBULARES

NÚMEROS REAIS E FUNÇÕES

1) (EPUSP) O número **x** não pertence ao intervalo aberto de extremos -1 e 2. Sabe-se que $x < 0$ ou $x > 3$. Pode-se então concluir que

a) $x \leqslant -1$ ou $x > 3$
b) $x \geqslant 2$ ou $x < 0$
c) $x \geqslant 2$ ou $x \leqslant -1$
d) $x > 3$
e) n.r.a.

2) (CESCEA-SP) O conjunto de todos os **x** para os quais $|2x - 3| > x$ é

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0$ ou $x > 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1$ ou $x > 3\}$

3) (EPUSP) As raízes da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$

a) são positivas
b) têm soma 0
c) têm soma 1
d) têm produto 6
e) n.r.a.

4) (PUC-SP) Qualquer que seja o número real não nulo **x**, tem-se sempre

a) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geqslant 2$ b) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \leqslant 10$ c) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \leqslant x$ d) $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| < \dfrac{1}{x}$

5) (FEI-SP) "Assinale a verdadeira".
Quaisquer que sejam os números reais x e y, tem-se

a) $|-x| = x$
b) $\big||x| - |y|\big| < |x| + |y|$
c) $|-x| = -|x|$
d) $|x + y| = |x| + |y|$
e) n.r.a.

6) (FUVEST-SP) Sendo **x** um número real, $(1 + x)(1 - |x|) \geqslant 0$ se e somente se

a) $|x| \leqslant 1$ b) $x \leqslant 1$ c) $|x| \geqslant 1$ d) $x \geqslant 1$ e) $x \leqslant -1$

7) (ITA-SP) Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e C um subconjunto de $\mathbb{R}$. Definimos supremo de C como sendo o número L satisfazendo as seguintes condições:

1.ª) $L \geqslant x, \quad x \in C$
2.ª) $L' < L \Rightarrow \exists x \in C \mid x > L'$

Seja C o conjunto dos números naturais menores do que 11. Assinale a afirmação verdadeira, relativa ao conjunto C.

a) L = 9
b) L = 10
c) L = 11
d) L = 12
e) não existe L

8) (ITA-SP) Seja B um subconjunto do conjunto dos números reais IR. Dizemos que um número **b** é um ponto de acumulação do conjunto B, se para qualquer número real positivo **k**, arbitrariamente dado, existir um elemento **c** de B tal que $0 < |b - c| < k$. Nestas condições, $b = 10$ é ponto de acumulação do conjunto dos

a) naturais menores do que 10
b) naturais menores ou iguais a 10
c) racionais maiores do que 1 e menores ou iguais a 9
d) racionais maiores do que 1 e menores do que 10
e) n.r.a.

9) (FEI-SP) Se $x > y > 0$ e $z \neq 0$, a única desigualdade que nem sempre é verdadeira é

a) $x + z > y + z$
b) $xz > yz$
c) $xz^2 > yz^2$
d) $\frac{z^2}{x} < \frac{z^2}{y}$
e) n.r.a.

10) (FEI-SP) A desigualdade $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ se verifica

a) quaisquer que sejam os reais **x** e **y**
b) para $x \neq 0$
c) para quaisquer **x** e **y** de mesmo sinal e distintos
d) para quaisquer **x** e **y** de sinais contrários
e) n.r.a.

11) (MACKENZIE-SP) O domínio da função definida por $f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$ é

a) $\{x \in IR \mid x \leq 3\}$
b) $\{x \in IR \mid |x| \leq 3 \text{ e } x \neq 0\}$
c) IR
d) o conjunto dos números reais estritamente negativos
e) $\{x \text{ e } IR \mid 3 < x < -3,\ x \neq 0\}$

12) (FUVEST-SP) $f: IR \rightarrow IR$ associa a **x** o número $\frac{1}{1 + x^2}$. Quanto vale $f(\sqrt[4]{7})$?

a) $1 - \sqrt{7}$
b) $\frac{\sqrt{7} - 1}{6}$
c) $\frac{\sqrt{7} - 1}{8}$
d) $0{,}0\overline{714285}$
e) $1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$

13) (FEI-SP) Uma função f(x), definida no conjunto dos números reais, sendo **a** um número real determinado, verifica as propriedades:
$f(x) = -f(-x)$ e $f(x + a) = f(x)$

Então:

a) $f(a + x) = f(-x)$
b) $f(x) = f(a)$
c) $f(2a - x) = -f(-x)$
d) $f(2a) = f(a)$
e) n.r.a.

14) (FUVEST-SP) As funções **f** e **g** são dadas por $f(x) = \frac{3}{5}x - 1$ e $g(x) = \frac{4}{3}x + a$. Sabe-se que $f(0) - g(0) = \frac{1}{3}$. O valor de $f(3) - 3g\left(\frac{1}{5}\right)$ é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

15) (FUVEST-SP) Seja **f** uma função tal que $f(x + 3) = x^2 + 1$, para todo **x** real. Então f(x) é igual a

a) $x^2 - 2$
b) $10 - 3x$
c) $-3x^2 + 16x - 20$
d) $x^2 - 6x + 10$
e) $x^2 + 6x - 16$

16) (FUVEST-SP) Se $f: IR \rightarrow IR$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f(f(x)) = x + 1$ para todo **x** real, então **a** e **b** valem, respectivamente:

a) 1 e $\frac{1}{2}$
b) -1 e $\frac{1}{2}$
c) 1 e 2
d) 1 e -2
e) 1 e 1

17) (FUVEST-SP) Foram feitos os gráficos das funções $f(x) = \text{sen } 4x$ e $g(x) = \frac{x}{100}$, para todo **x** no intervalo $[0; 2\pi]$. O número de pontos comuns aos dois gráficos é

a) 16
b) 8
c) 4
d) 2
e) 1

18) (F.G.V.-SP) Dada a função $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ e o intervalo $A =]0; 1[$, então a função **f** no intervalo A

a) é crescente para $x < \frac{1}{2}$ e decrescente para $x > \frac{1}{2}$
b) é sempre crescente
c) é sempre decrescente
d) não tem nenhuma raiz
e) tem duas raízes

19) (CICE-RJ) O maior valor de $x^2 - |x| + 1$ no intervalo $[-3; 3]$ é

a) 2
b) -3
c) 0
d) 6
e) 7

20) (FEI-SP) O gráfico da função $f(x) = |x - 1| - 1$ é tal que

a) é o mesmo da função $f(x) = |x|$
b) passa pelo ponto (1; 0)
c) passa pelo ponto (0; 1)
d) não tem ponto de ordenada negativa
e) passa pela origem

21) (CESGRANRIO) Considere as funções:

$$\begin{cases} f: IR \rightarrow IR \\ x \rightarrow 2x + b \end{cases} \qquad \begin{cases} g: IR \rightarrow IR \\ x \rightarrow x^2 \end{cases}$$

onde **b** é uma constante. Conhecendo-se a composta

$$\begin{cases} g \circ f: IR \rightarrow IR \\ g(f(x)) = 4x^2 - 12x + 9 \end{cases}$$

podemos afirmar que **b** é elemento do conjunto

a) $]-4; 0[$
b) $]0; 2[$
c) $]2; 4[$
d) $]4; +\infty[$

22) (MACKENZIE-SP) Seja $f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}.$$

Pode-se afirmar que

a) não existe $\lim_{x \to 1} f(x)$
b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$
c) $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$
d) $\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$
e) $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$

23) (U.F.UBERLÂNDIA-MG) A função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ não está definida para $x = 1$. Para que a função f(x) seja contínua no ponto $x = 1$, devemos completá-la com f(1) igual a

a) 0 b) $+\infty$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\infty$

24) (FASP) O limite $\lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$ vale

a) a^3 b) $2a^3$ c) $3a^3$ d) $4a^3$

25) (FASP) Dada a função $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$, se $x \neq 0$ e $f(0) = a$, o valor de **a**, para que esta função seja contínua no ponto $x = 0$ é

a) 0 b) -1 c) 1 d) $-\frac{1}{2}$

26) (MACKENZIE-SP) O $\lim_{x \to 9} \left(\frac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 9x} \right)$ é igual a

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{27}$ c) $\frac{1}{243}$ d) $\frac{1}{81}$ e) $\frac{1}{54}$

27) (U.C.MG) O valor do $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ é

a) -1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) 1

28) (F.M.SANTA CASA-SP) Calculando-se

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen } 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \text{sen } x}$$

obtém-se

a) $\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) n.r.a.

29) (F.M.ABC-SP) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} =$

a) 0 b) ∞ c) 1 d) -1 e) 0,5

30) (U.F.UBERLÂNDIA-MG) Se $y = f(x)$ é uma função real de variável real, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{para } x \neq 3 \\ 5 & \text{para } x = 3 \end{cases}$$

então, podemos afirmar que $\lim_{x \to 3} f(x)$ é igual a

a) 5 b) 1 c) -1 d) 0 e) n.r.a.

31) (U.C.MG) O valor do $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 kx}{x}$ é

a) k b) 1 c) 0 d) k^2 e) 2

32) (MACKENZIE-SP) $\lim_{x \to 2} \left[\frac{1}{x - 2} + \frac{x - 7}{x^2 + x - 6} \right]$ é igual a

a) 0 b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{5}$ d) 1 e) $\frac{5}{2}$

33) (F.M.SANTA CASA-SP) O $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}$

a) é 1 b) é 2 c) é 4 d) é zero e) não existe

34) (MACKENZIE-SP) O $\lim_{t \to 0} \frac{2 - \sqrt{4 - t}}{t}$ é igual a

a) 0 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 2 e) 4

35) (MACKENZIE-SP) O $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$ é igual a

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) ∞

36) (PUC-SP) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 6x + 3}{x^2 - 5}}$ é igual a

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

37) (U.U.-MG) O valor do limite $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - x)$ é

a) zero b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) 2 e) 1

38) (FUVEST-SP) Sabe-se que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = 1$$

Conclui-se que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

a) é $\frac{1}{2}$ b) é 0 c) é infinito d) é indeterminado e) não existe.

39) (PUC-SP) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{2x + 6} - 2}{x - 1}$ é igual a

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{7}$ e) $\frac{1}{8}$

40) (PUC-SP) $\lim_{x \to 0} \frac{tg\, x - x}{x - sen\, x}$ é igual a

a) 0　　b) 2　　c) 3　　d) 1　　e) 4

41) (CESCEM-SP) $\lim_{n \to \infty} \left[5 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$ vale

a) 5e　　b) e^5　　c) $5 - e$　　d) $5 + e$　　e) 5^e

42) (PUC-SP) O $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ é igual a

a) $\log_a e$　　b) $\log_e a$　　c) 1　　d) e　　e) a

43) (PUC-SP) $\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^3 - 3x^2 + 2}$

a) $\frac{5}{3}$　　b) $\frac{4}{3}$　　c) $\frac{2}{3}$　　d) $\frac{1}{3}$　　e) $\frac{7}{3}$

44) (PUC-SP) $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

a) 0　　b) 1　　c) 2　　d) 3　　e) 4

45) (F.G.V.-SP) O limite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

a) não existe　　b) é 4　　c) é zero　　d) é 2　　e) é $+\infty$

46) (PUC-SP) O limite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

a) não existe
b) não é nenhum número real
c) vale 2
d) vale 0
e) vale 4

47) (PUC-SP) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$　　b) $\frac{2}{5}$　　c) $\frac{3}{5}$　　d) $\frac{2}{3}$　　e) $\frac{3}{2}$

48) (PUC-SP) Sendo **e** a base dos logaritmos neperianos, o limite $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ vale:

a) 0　　b) ∞　　c) -1　　d) 1　　e) $\frac{1}{2}$

49) (PUC-SP) Se $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, então, para **k** real e não nulo, o limite $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{kx}$ vale

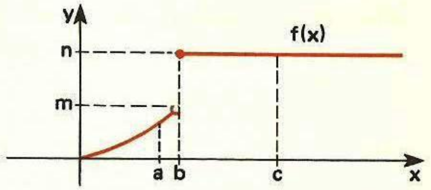
a) ke　　b) e^k　　c) k^e　　d) $e + k$　　e) $\frac{e}{k}$

50) (PUC-SP) O limite $\lim_{x \to 7} \frac{x - 7}{\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{7}}$ vale

a) $5\sqrt[5]{7^4}$　　b) 0　　c) 7^5　　d) $\sqrt[5]{7}$　　e) 1

DERIVADAS

51) (U.F.PR) Observando o gráfico da função f(x), podemos afirmar:



a) a função f(x) é derivável em $x = b$
b) $\lim_{x \to b+} f(x) = m$
c) $\lim_{x \to b} f(x) = n$
d) a função f(x) não é derivável no intervalo $]b; c[$
e) n.r.a.

52) (EPUSP) A função $y = |sen\, x|$

a) é descontínua nos pontos da forma $k\pi$ (**k** inteiro)
b) não é derivável nos pontos da forma $k\pi$
c) é derivável em qualquer ponto
d) é derivável mas não é contínua
e) n.r.a.

53) (F.M.SANTOS-SP) Assinale a alternativa falsa:

a) se existe $f'(x_0)$ então existe também a reta tangente ao gráfico de f(x) no ponto de abscissa x_0
b) se f(x) é contínua em x_0 então ela tem derivada em x_0
c) a derivada da função identidade é a unidade
d) se f(x) tem derivada em x_0 então ela é contínua em x_0
e) a derivada da função seno é a função cosseno

54) (MACKENZIE-SP) Se $f(x) = \frac{x^2}{a}$, então f'(a) vale:

a) 2　　b) 1　　c) 0　　d) a　　e) 2a

55) (U.F.UBERLÂNDIA-MG) A equação da reta tangente à parábola $y = x^2 - 7x + 10$ no ponto de abscissa $x = 6$ é

a) $y - 4 = 5(x - 6)$
b) $y - 4 = -\frac{1}{5}(x - 6)$
c) $y - 6 = 5(x - 4)$
d) $y - 6 = 2(x - 4)$
e) $y - 4 = \frac{-1}{2}(x - 6)$

56) (FUVEST-SP) A equação da reta que é tangente à curva de equação $y = x|x|$, no ponto $(-1; -1)$ é

a) $y = 2x$
b) $y = -2x - 1$
c) $y = -2x - 3$
d) $y = -2x$
e) $y = 2x + 1$

57) (UU-MG) A equação da tangente à curva $y = x^3 - 5x + 1$ no ponto de abscissa $x = 1$ é

a) $x - y - 4 = 0$
b) $x - y + 4 = 0$
c) $x + y - 4 = 0$
d) $2x + y - 1 = 0$
e) $2x + y + 1 = 0$

58) (FATEC-SP) A parábola **P** e a reta **r** são definidas respectivamente, por $y = x^2 - x - 2$ e $y = x - 4$. A equação da reta s, paralela a **r** e tangente a **P** é:

a) $y = x - 2$ c) $y = x - 5$ e) $y = x - 4$
b) $y = x - 1$ d) $y = x - 3$

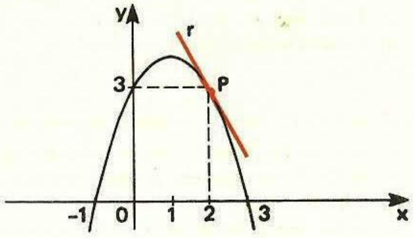
59) (PUC-SP) A derivada primeira da função $y = \frac{1}{kx}$ é

a) $y' = -\frac{1}{kx^2}$ c) $y' = -\frac{k}{x}$ e) $y' = -\frac{1}{k^2x}$
b) $y' = -\frac{1}{k^2x^2}$ d) $y' = -\frac{k}{x^2}$

60) (MACKENZIE-SP) A reta tangente à curva $y = \frac{1}{x}$ no ponto de abscissa $x = 2$ é perpendicular à reta

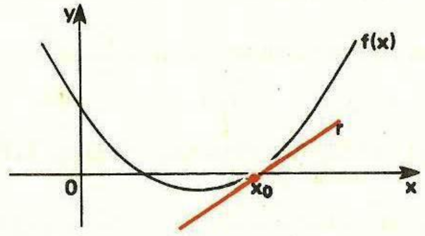
a) $y - x = 0$ c) $x - 1 = 0$ e) $4y - x + 2 = 0$
b) $y - 1 = 0$ d) $y - 4x + 7 = 0$

61) (MACKENZIE-SP) Na figura, a reta **r** é tangente à parábola no ponto **P**. Então, a equação de **r** é



a) $3x + 2y - 12 = 0$
b) $2x + y - 7 = 0$
c) $x + 3y - 11 = 0$
d) $x + 6y - 20 = 0$
e) n.r.a.

62) (F.M.SANTA CASA-SP) No gráfico estão representadas a função f(x) e a reta **r** tangente a f(x) no ponto $(x_0; 0)$. Sendo $y = x - x_0$ a equação de **r**, podemos afirmar que a derivada de f(x) no ponto $x = x_0$ vale



a) 2
b) −1
c) 1
d) −2
e) n.r.a.

63) (U.F.PA) Dado $f(x) = (x^2 + 1)^{1/2}$ tem-se para f'(x):

a) $\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2}$
b) $(x^2 + 1)^{-1/2}$
c) $\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot x$
d) $\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot (2x + 1)$
e) $(x^2 + 1)^{-1/2} \cdot x$

64) (MACKENZIE-SP) A relação entre **m** e **n**, para que a reta $y = x + m$ seja tangente à parábola

$$y = x^2 - 5x + n$$

é

a) $m + n = 3$ c) $n - m = \frac{1}{9}$ e) $n - m = \frac{1}{3}$
b) $m + n = 9$ d) $n - m = 9$

65) (MACKENZIE-SP) A reta $y = ax + b$ é tangente à parábola $y = 3x^2 + c$ no ponto de abscissa 1. Os valores de **b** e **c** são tais que

a) $c - b = 3$ c) $c - b = -3$
b) $c + b = 3$ d) $c + b = -3$

66) (CESCEM-SP) Dado o trinômio do 2.° grau $y = x^2 + bx + \frac{b^2 + 4}{4}$, o seu polinômio derivado tem como gráfico uma reta tangente ao gráfico do trinômio. Então, a ordenada do ponto de tangência

a) é sempre igual a 2, qualquer que seja o valor de **b**.
b) é igual a 4 para **b** = 0.
c) é igual a **b** para **b** = 3.
d) não pode ser determinada, pois a condição de tangência é impossível, na hipótese formulada.
e) é igual a 5 para algum valor de **b**.

67) (U.C.MG) Um dos valores que anula a derivada primeira de $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ é

a) −2 b) −1 c) 1 d) 2 e) 3

68) (MACKENZIE-SP) Se $f(x) = \frac{x - 2}{x}$, então f'(x) é igual a

a) −1 b) $\frac{2}{x^2}$ c) $x - 2$ d) $-\frac{1}{x}$ e) $1 - \frac{2}{x^2}$

69) (FUVEST-SP) Qual a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \frac{1}{1 + x^2}$ no ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$?

a) $3x + 2y = 4$ c) $3x - 2y = 2$ e) $2x + 3y = 5$
b) $x - 2y = 0$ d) $x + 2y = 2$

70) (U.C.PR) Se $f(x) = \cos x$, então

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x + h)}{h}$$

quando $x = \frac{\pi}{2}$ é

a) 0 b) 1 c) −1 d) 1/2 e) −1/2

71) (U.C.MG) O valor da derivada primeira de $f(x) = \cos 3x$ no ponto $x = \frac{\pi}{6}$ é

a) −3 b) −1 c) 0 d) 1 e) 3

72) (U.F.PA) Se $f(x) = \text{sen } x$, então a derivada quarta $f^{iv}(x)$ vale

a) −sen x b) cos x c) sen x d) −cos x e) sen x cos x

73) (MACKENZIE-SP) Seja a curva de equação $y = \text{tg } x$. A tangente a esta curva no ponto de abscissa $x = \pi/4$ é perpendicular à reta

a) $x - 2y + 3 = 0$ c) $2x + 2y - 3 = 0$ e) $x + y = 0$
b) $2x - y + 3 = 0$ d) $x + 2y + 3 = 0$

74) (U.F.MG) Se $f(x) = \text{sen}\, x + \cos x + \text{tg}\, x$, então $f'(0)$ é

a) -1 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 1 e) 2

75) (U.F.JUIZ DE FORA-MG) Se $f(x) = e^x \ln x$, então o valor de $f'(1)$ é

a) e b) e^2 c) e^{-1} d) e^{-2} e) n.r.a.

76) (U.C.MG) Se $f(x) = \frac{x}{e^x}$, então $f'(x)$ é

a) e^{-x} b) $e^{-x} \cdot (1-x)$ c) $-e^{-x}$ d) $e^x(1-x)$ e) $e^{3x}(1-x)$

77) (CICE-RJ) Sendo **e** a base dos logaritmos neperianos, a derivada da função $y = e^{-|x|}$ no ponto $x = 0$

a) é igual a 1
b) é igual a -1
c) é igual a ± 1
d) é igual a $\pm e$
e) não existe

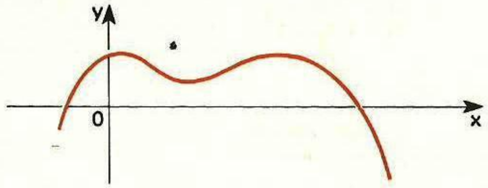
78) (MACKENZIE-SP) Se $f(x) = \frac{x \cos x}{1 + e^x}$, $f'(0)$ é igual a

a) -1 b) $-1/2$ c) $-1/4$ d) $1/2$ e) 2

79) (FEI-SP) Indicando por Df a derivada de uma função f, tem-se

a) $D\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{Du}$
b) $D(uv) = Du \cdot Dv$
c) $D\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{Du}{u^2}$
d) $D(uv) = v \cdot Du - u \cdot Dv$
e) n.r.a.

80) (MACKENZIE-SP) Seja a função definida por $y = f(x)$ e representada pelo gráfico:



Então, certamente:

a) $\nexists$ k tal que $f'(k) > 0$
b) $\exists$ k tal que $f'(k) = 0$
c) $\nexists$ k tal que $f'(k) < 0$
d) dados k_1 e k_2 quaisquer $f'(k_1) \leqslant f'(k_2)$
e) dados k_1 e k_2 quaisquer $f'(k_1) \geqslant f'(k_2)$

81) (FEI-SP) Sendo $f(x) = (5 - 2x)^8$, a derivada $f'(3)$ é igual a

a) -8 b) 1 c) 8 d) 16 e) n.r.a.

82) (E.E.LINS-SP) O ponto de contacto da tangente à curva $y = \sqrt{x^2 - 16}$ e paralela à reta $5x + 3y - 2 = 0$ é

a) (5, 3) b) $(-5, 3)$ c) $(-3, 5)$ d) $(-3, -5)$ e) n.r.a.

83) (U.F.-PR) Se $f(x) = \text{sen}\, 2x$, então $f'(\pi)$ é

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

84) (PUC-SP) Sendo $f(x) = \text{sen}^2\, 2x$, então sua derivada primeira calculada para $x = \frac{\pi}{8}$ vale

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

85) (CATANDUVA-SP) Seja a função

$$f(x) = \sqrt{\text{sen}\,(2x+1)}$$

Sua derivada primeira é

a) $\frac{-\text{sen}\,(2x+1)}{\sqrt{\cos\,(2x+1)}}$
b) $\frac{\cos\,(2x+1)}{\sqrt{\text{sen}\,(2x+1)}}$
c) $\frac{-\cos\,(2x+1)}{\sqrt{-\text{sen}\,(2x+1)}}$
d) $\frac{\text{sen}\,(2x+1)}{\sqrt{-\text{sen}\,(2x+1)}}$
e) n.r.a.

86) (U.F.-PA) Se $f(x) = e^{x^2}$, então $f''(0)$ será

a) 2 b) 4 c) 0 d) 1 e) 3

87) (PUC-SP) A derivada da função

$$f(x) = e^{\log_e x}$$

é

a) x b) e^x c) 1 d) 0 e) 2

88) (UU-MG) Qual a afirmativa **errada?**

a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^4 - 5x + 18\right) = 6x^3 - 5$
b) $\frac{d}{dx}(e^{2x} - e^{-x}) = 2e^{2x} + e^{-x}$
c) $\frac{d}{dx}(\text{sen}^2\, x) = \text{sen}\, 2x$
d) $\frac{d}{dx}(x \cdot \cos x) = \cos x + x\, \text{sen}\, x$
e) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-2}{x^3}$

89) (U.F.PR) Se $f(x) = \frac{\ell n\, x^2}{e^{2x}}$, então $f'(1)$ é

a) $2e^{-2}$ b) $-2e^{-2}$ c) e d) 2 e) $2e^2$

90) (CICE-RJ) Sendo $y = \ell n \cos\left(\frac{3x - \pi}{4}\right)$, $0 \leqslant x < \pi$, a derivada primeira de **y** em relação a **x**, no ponto $x = \frac{2\pi}{3}$, é igual a

a) $-\frac{3}{4}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $-\frac{\pi}{2}$ d) 0 e) $\frac{3\pi}{4}$

(F.M.SANTOS-SP) As funções apresentadas nas alternativas abaixo são derivadas primeiras das funções apresentadas nas questões de números 91 a 95. Associe a cada função a sua derivada.

a) $y = \frac{2}{2x - 3}$
b) $y = 8x(2x^2 - 3)$
c) $y = \frac{1}{\cos x}$
d) $y = 18x^2 - 2x$
e) $y = -\text{tg}\, x$

91) $y = (2x^2 - 3)^2$

92) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \text{sen } x}{1 - \text{sen } x}}$

93) $y = 6x^3 - x^2$

94) $y = \ln \cos x$

95) $y = \ln (2x - 3)$

96) (U.F.UBERLÂNDIA-MG) Seja $y = f(x)$ uma função tal que $f(1) < 0$ e $x^2 + y^2 = 4$. Qual é o valor da derivada de f(x) no ponto 1?

a) Não existe b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

97) (PUC-SP) A equação da reta tangente à elipse de equação $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ no ponto $P = \left(3, \dfrac{12}{5}\right)$ é

a) $y - \dfrac{12}{5} = \dfrac{9}{20}(x - 3)$

b) $y - \dfrac{12}{5} = \dfrac{3}{10}(x - 3)$

c) $y - \dfrac{12}{5} = -\dfrac{3}{10}(x - 3)$

d) $y + \dfrac{12}{5} = -\dfrac{1}{3}(x - 3)$

e) $y - \dfrac{12}{5} = -\dfrac{9}{20}(x - 3)$

98) (PUC-SP) A derivada primeira da função $y = \text{arc tg } \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen } x}$ é

a) $\cos x + \text{sen } x$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) $\text{sen } x - \cos x$ d) $\cos 2x$ e) $\dfrac{1}{2}$

99) (MACKENZIE-SP) O valor de

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log_e x}{1 - x}$$

a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) -2

100) (MACKENZIE-SP) O valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3}{2^x - 1}$$

é

a) -1 b) -2 c) ∞ d) 0 e) 1

101) (F.M.SANTA CASA-SP) O $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}$

a) é 1 b) é 4 c) é 2 d) é 0 e) não existe

102) (U.F.-PR) O valor de

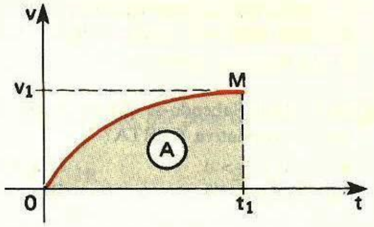
$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\text{sen } 3x + 3 \text{ sen } x + \text{sen } 2x}{\text{sen } 4x - 2 \text{ sen } x + \text{sen } 2x}\right]$$

é

a) -1 b) 0 c) $+1$ d) 2 e) 3

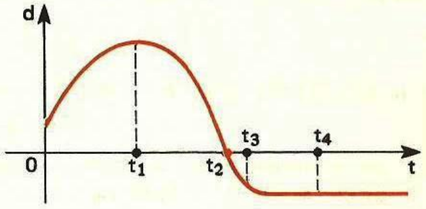
103) (MACKENZIE-SP) Um móvel se desloca sobre uma reta, segundo o diagrama. Para o intervalo de tempo entre O e t_1, a aceleração máxima do móvel é representada

a) pelo coeficiente angular da tangente à curva no ponto M.
b) pelo coeficiente angular da tangente à curva no ponto O.
c) pelo coeficiente angular da reta OM
d) pela área A da figura
e) pelo quociente $\dfrac{v_1}{t_1}$.



104) (F.C.CHAGAS-SP) No gráfico ao lado está representada a posição (d) de um corpo em função do tempo (t). Em que instantes a velocidade deste corpo é nula?

a) t_2
b) 0 e t_2
c) t_1 e t_4
d) 0, t_1 e t_4
e) t_2, t_3 e t_4



VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES. MÁXIMOS E MÍNIMOS.

105) (JUIZ DE FORA-MG) A função $y = x^3 - 3x$ tem ponto de mínimo relativo para x igual a

a) 0 b) 1 c) -1 d) 3 e) 1/3

106) (F.FRANCISCANAS-SP) Na função $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 + x$, onde o domínio é IR, o ponto $\left(1; \dfrac{1}{3}\right)$ é

a) ponto de máximo
b) ponto de mínimo
c) ponto de inflexão
d) não é ponto crítico
e) n.r.a.

107) (PUC-SP) O ponto de máximo da função $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x - 1$ no intervalo $\left[-\dfrac{3}{2}, 3\right]$ é

a) $x_0 = 0$ b) $x_0 = -1$ c) $x_0 = 2$ d) $x_0 = 1$ e) $x_0 = -2$

108) (PUC-SP) A função $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ $(x \neq \pm 2)$ tem um ponto de máximo para **x** igual a

a) 1 b) 2 c) -1 d) 0 e) -2

109) (MACKENZIE-SP) O maior valor que **y** pode assumir na igualdade $y = \dfrac{x + 2}{2x^2 + 3x + 6}$ (x real) é

a) 1/2 b) 1/3 c) 1/4 d) 1/5 e) 1/6

110) (MACKENZIE-SP) O valor máximo de

$$y = 2 \text{ sen } x + \cos 2x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$$

é

a) 1,5 b) 2 c) 2,5 d) 3 e) ∞

111) (U.F.JUIZ DE FORA-MG) Uma função real de variável real y, cuja derivada primeira é $y' = -\frac{1}{x^2}$ para todo $x \neq 0$, possui a propriedade

a) y tem valor máximo para $x = 1$,
b) y tem valor mínimo para $x = 1$.
c) y é sempre crescente.
d) y é sempre decrescente.
e) y é crescente se $x > 0$ e decrescente se $x < 0$.

112) (U.F.MG) Sabendo-se que $f(x) = ax^3 + 3bx$ possui um máximo local (relativo) no ponto $x = 1$, qual a afirmativa CERTA?

a) $a > 0$ e $b > 0$
b) $a < 0$ e $b < 0$
c) $a < 0$ e $3a + b = 0$
d) $a > 0$ e $a + b = 0$
e) $a < 0$ e $a + b = 0$

113) (U.C.MG) Se $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - ax + 8$ tem um valor mínimo em $x = 2$, então o valor de a é

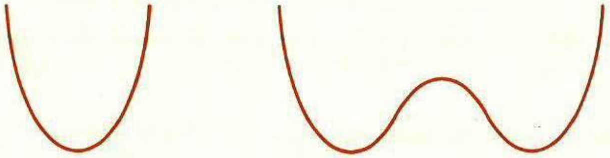
a) 1 b) 3 c) 6 d) 9 e) 12

114) (FUVEST-SP) Sendo **b** e **c** reais, a função **f**, definida por

$$f(x) = x^4 + bx^2 + c,$$

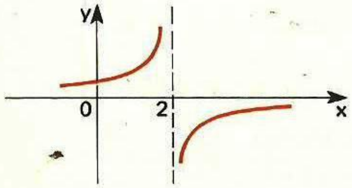
tem um ou dois pontos de mínimo (ver figura). Terá dois pontos de mínimo se e somente se

a) $b^2 - 4c \geq 0$ b) $b^2 - 4c > 0$ c) $b < 0$ d) $c < 0$ e) $bc < 0$

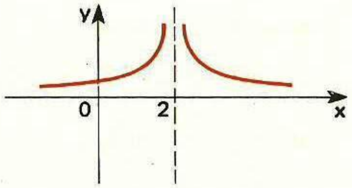


115) (MACKENZIE-SP) O gráfico da função f dada por $f(x) = \frac{1}{4x - x^2 - 4}$ é, aproximadamente

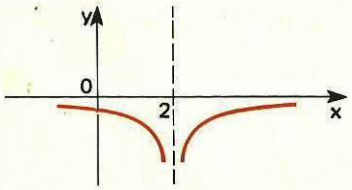
a)



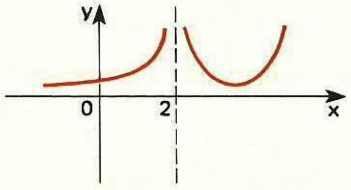
b)



c)



d)



116) (ITA-SP) Seja $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - 4}}$ onde $x \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais. Um subconjunto D de $\mathbb{R}$ tal que $f : D \to \mathbb{R}$ é uma função injetora é

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \text{ e } x \leq -2\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2\}$
c) $D = \mathbb{R}$
d) $D = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < 2\}$
e) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$

117) (PUC-SP) A altura do cilindro circular reto de volume V máximo, que pode ser inscrito em uma esfera de raio R é

a) $\frac{R}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{R}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{2R}{\sqrt{2}}$ d) $\frac{3R}{\sqrt{2}}$ e) $\frac{2R}{\sqrt{3}}$

118) (F.G.V.-SP) Uma parede de tijolos será usada como um dos lados de um curral retangular. Para os outros lados iremos usar 400 metros de tela de arame, de modo a produzir a área máxima. Então, o quociente do maior lado pelo menor lado do retângulo é igual a

a) 1 b) 2 c) 3 d) 2,5 e) 1,5

119) (PUC-SP) O ponto de inflexão do gráfico de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$$

é

a) (1; −10) b) (2; 10) c) (−1; 20) d) (−1; −10) e) (2; −10)

QUESTÕES DISCURSIVAS

120) (MAPOFEI-SP) Dada a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, definida para $x \geq 1$, obter a expressão de sua função inversa e fazer o gráfico de ambas.

121) (FEI-SP) Calcular $\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h}$.

122) (F.ITAJUBÁ-MG) Achar

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\text{sen } x + \text{sen}^2 x + \text{sen}^3 x + \ldots).$$

123) (E.E.MAUÁ-SP) Calcule o $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 3\sqrt{x}}{7\sqrt{x} + 2x}$.

124) (FEI-SP) Calcular o limite:

$$\lim_{x \to +\infty} [\log (x + 1) - \log x]$$

125) (E.E.MAUÁ-SP) Dada a função $f(x) = \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$, para que valores reais de **x** existe f(x)? Determine $\lim_{x \to a} f(x)$.

126) (E.E.MAUÁ-SP) Calcule o $\lim_{x \to k} \frac{x - k}{x^3 - k^3}$, para:

a) $k \neq 0$ b) $k = 0$

127) (E.E.MAUÁ-SP) Dada a função

$$f(x) = \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$$

determine o $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

128) (FEI-SP) Achar a declividade da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto de coordenadas $(-2; 4)$.

129) (F.ITAJUBÁ-MG) Determine **k** na parábola $y = 2x^2 + kx + 3$, de modo que a reta tangente no ponto de abscissa $x = 2$ seja paralela ao segmento AB de extremos $A(8; 7)$ e $B(2; -5)$.

130) (FUVEST-SP) É dada a parábola de equação $y = (x + 1)(x + \alpha - 1)$, $\alpha \in R$. Sejam **r** e **s** as retas tangentes à parábola nos pontos onde ela encontra o eixo dos **x**. Determine α de modo que **r** seja perpendicular a **s**.

131) (IME-RJ) Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0$$

$$f(x) = 1, \text{ se } x = 0$$

determine os valores de **m** para os quais o gráfico de **f** admite tangente paralela à reta de equação $y = mx$.

132) (MAPOFEI-SP) Para cada número real **k**, considere a curva de equação

$$y = kx^2 + (3 - 2k)x + k$$

Prove que todas elas passam por um ponto fixo A e que são tangentes em A a uma reta fixa.

133) (E.E.MAUÁ-SP) Determine os valores de **x** que anulam a derivada de

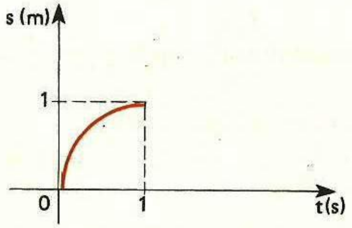
$$f(x) = x - \text{sen}^2 x$$

134) (FEI-SP) Dada $f(x) = \sqrt{x - 1}$ verifique se a função é derivável no ponto $x = 1$. Justifique.

135) (F.ITAJUBÁ-MG) Obtenha a derivada da função

$$y = \text{arc sen}(\cos x)$$

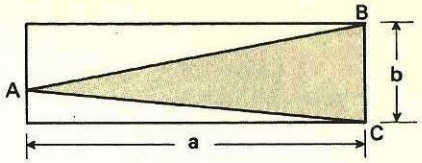
136) (FEI-SP) O gráfico do espaço de um móvel em função do tempo é representado por um quarto de circunferência, conforme a figura. Determine o instante em que a velocidade escalar do móvel é igual a 1 m/s.



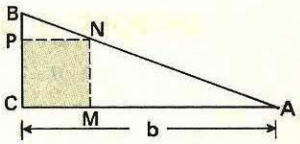
137) (FUVEST-SP) Calcule as eventuais raízes, pontos de máximo e de mínimo da função **f** dada por $f(x) = x - \sqrt{x}$. Esboce o gráfico dessa função.

138) (FUVEST-SP) O polinômio P(x) de grau $k > 0$ tem mínimo relativo para $x = 0$. Q(x) é um monômio de grau $r > k$. Mostre que $P(x) + Q(x)$ tem mínimo relativo para $x = 0$.

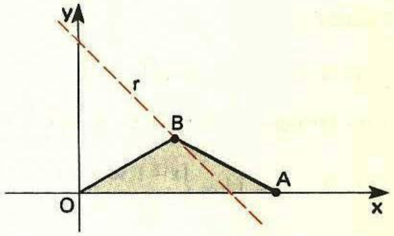
139) (FEI-SP) Dado o retângulo ao lado de perímetro 16 m, calcular **a** e **b**, para que a área do triângulo ABC seja máxima.



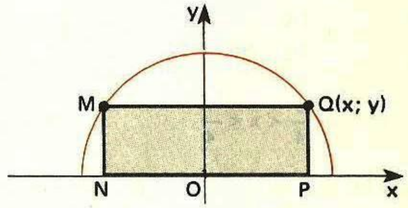
140) (E.E.MAUÁ-SP) O triângulo ABC é retângulo em C e seus catetos medem **a** e **b**. Determine x = CM de modo que o retângulo CMNP, inscrito nesse triângulo, tenha área máxima.



141) (E.E.MAUÁ-SP) Na figura, calcule o máximo da área do triângulo isósceles OAB (OB = AB) que se pode obter com a base OA no eixo **x** e o vértice B no 1.º quadrante e sobre a reta **r** cuja equação é $4x + 3y = 12$.



142) (U.F.-MG) Calcule as coordenadas do ponto Q(x; y) de modo que o retângulo MNPQ, inscrito no semicírculo de centro O e raio R, tenha área máxima.



RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Capítulo 1

1.9) a) 4 b) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ c) k^2 d) k^2

1.10) Deve-se ter $x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$, isto é, $x \leqslant 2$ ou $x \geqslant 3$.

1.11) $Y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geqslant 1 \\ -x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \end{cases}$

1.12) a) $\{11; -5\}$ b) $\{4; -2\}$ c) $\{-3; 2\}$

d) $\left\{\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ e) $\left\{\frac{11}{8}; -\frac{11}{10}\right\}$

1.13) a) $\frac{5}{4} < x < \frac{7}{4}$ b) $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 6$ c) $x < \frac{5}{2}$

1.14) O primeiro membro pode ser escrito:

$$E = \frac{|xy|}{xy} + \frac{|x-y|}{x-y}\left[\frac{|x|}{x} - \frac{|y|}{y}\right]$$

1.º) $xy > 0$

$$\begin{cases} x > 0 \text{ e } y > 0: & E = \dfrac{xy}{xy} + \dfrac{|x-y|}{x-y}\left[\dfrac{x}{x} - \dfrac{y}{y}\right] = 1 \\ x < 0 \text{ e } y < 0: & E = \dfrac{xy}{xy} + \dfrac{|x-y|}{x-y}\left[\dfrac{-x}{x} - \dfrac{-y}{y}\right] = 1 \end{cases}$$

2.º) $xy < 0$. Neste caso, temos que $|x - y| = |x| + |y|$

$$E = \frac{-xy}{xy} + \frac{|x| + |y|}{x-y}\left[\frac{|x|y - x|y|}{xy}\right] = -1 + \frac{x^2y - x|xy| + y|xy| - xy^2}{xy(x-y)}$$

$$= -1 + \frac{x^2y + x^2y - xy^2 - xy^2}{xy(x-y)} = -1 + 2 = 1$$

1.15) $\left.\begin{matrix} |x| > a \\ a > 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow |x|^2 > a^2 \Leftrightarrow x^2 > a^2 \Leftrightarrow x^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (x < -a \text{ ou } x > a).$

1.16) a) $\left|\frac{x}{y}\right| = \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2}} = \frac{|x|}{|y|}$

b) $|x^n| = \sqrt{(x^n)^2} = \sqrt{(x^2)^n} = (\sqrt{x^2})^n = |x|^n$

1.17) **Teorema 1.** $n = 1$: $|a_1| \leqslant |a_1|$

Teorema 2.

Hipótese: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_k| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k|$

Tese: $|a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|$

Sejam $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = A$ e $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| = B$. Pela hipótese, temos $|A| \leqslant B$. Então,

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}| = \underbrace{|A + a_{k+1}| \leqslant |A| + |a_{k+1}|}_{\text{Prop. triangular}} \leqslant$$

$$\leqslant B + |a_{k+1}| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_k| + |a_{k+1}|.$$

1.18) $|(x - y) - (x_0 - y_0)| = |(x - x_0) - (y - y_0)| \leqslant |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

1.19) Se $x \geqslant 0$: $|x| = x$ e máx $\{x; -x\} = x$, logo $|x| =$ máx $\{x; -x\}$.
Se $x \leqslant 0$: $|x| = -x$ e máx $\{x; -x\} = -x$, logo $|x| =$ máx $\{x; -x\}$.

1.20) $|x^3 - 2x + 1| \leqslant |x^3| + |2x| + 1 = |x|^3 + 2|x| + 1$

Se $-2 < x < 3$, então $\begin{cases} 0 \leqslant |x| \leqslant 3 \\ |x|^3 \leqslant 27 \\ 2|x| \leqslant 6 \end{cases}$

Assim, $|x^3 - 2x + 1| \leqslant 27 + 6 + 1 = 34$ $M = 34$.

1.21) $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 4(a^2 + b^2 + ab) - 1$

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|a - b|} \leqslant |4a^2| + |4b^2| + |4ab| + 1 < 16 + 16 + 16 + 1 = 49$$

Assim, $|f(a) - f(b)| < 49 \cdot |a - b|$.

Capítulo 2

2.6) a) $[-1; 1[$ b) $\left[-3; \frac{5}{4}\right[$ c) $\varnothing$ d) $\left[-1; \frac{5}{4}\right[$

2.7) a) $[2; 3[$ b) $]1; 5]$ c) $\varnothing$ d) $[1; 3]$ e) $]-\infty; 10]$ f) $\{(2; a); (2; b)\}$

2.8) a) $S = \left]-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup \left]\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right[$

b) Se $a \leqslant 0$: $S = \varnothing$

Se $a \geqslant 1$: $S =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

Se $0 < a < 1$: $S = \left]-\infty; -\sqrt{\frac{1}{a} - 1}\right] \cup \left[\sqrt{\frac{1}{a} - 1}; +\infty\right[$

2.9) $\delta = \frac{1}{2}$

2.10) Os pontos $-1 < a < 1$, $a \neq 0$ possuem uma vizinhança contida em A; o ponto zero possui uma vizinhança reduzida contida em A.

Capítulo 3

3.5) a) 14 b) 50 c) 2 d) 11 e) $3t^2 + 2$

3.6) a) 4 b) -8 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{3,1}$ e) 5,8

f) $\begin{cases} \frac{1}{t^2} & \text{se } t \leq -\sqrt{3} \text{ ou } t \geq \sqrt{3} \\ 2t^2 & \text{se } -\sqrt{3} < t < \sqrt{3} \end{cases}$

3.7) a) $]-\infty; -2] \cup]2; +\infty[$ c) $]2; +\infty[$
b) $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$ d) $[2; +\infty[$

3.8) a) $[-1; 1]$ b) $\mathbb{R}^*_-$ c) $\mathbb{R}^*_+$ d) $]-1; 1[$

3.9) a) $\{1\}$ b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

3.10) 2

3.11) -6

3.12) a) $[-5; 5]$
b) $[-2; 3]$
c) $x \in \{-4; -3; -2; 2; 3\}$
d) $x \in \{0; 4\}$
e) $[-4; -3] \cup [-2; 2] \cup [3; 5]$

3.17) a) $t^2 + 1$ b) $t^2 + 4t + 5$ c) $x^2 + 4x + 5$ d) $\frac{1}{x^2} + 1$ e) $x^2 + 2hx + h^2 + 1$ f) $x^2 + 1$ g) $x + 1$, $(x \geq 0)$ h) $9x^2 + 1$

3.18) a) $-2x - 5$, $\mathbb{R}$
$6x - 5$, $\mathbb{R}$
$-8x^2 + 20x$, $\mathbb{R}$
$\frac{2x - 5}{-4x}$, $\mathbb{R} - \{0\}$

b) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{2 - x}$, $[-2; 2]$
$\sqrt{x + 2} - \sqrt{2 - x}$, $[-2; 2]$
$\sqrt{4 - x^2}$, $[-2; 2]$
$\sqrt{\frac{x + 2}{x - 2}}$; $[-2; 2[$

c) $\sqrt[5]{x + 2} + \sqrt[4]{x - 3}$; $[3; +\infty[$
$\sqrt[5]{x + 2} - \sqrt[4]{x - 3}$; $[3; +\infty[$
$\sqrt[5]{x + 2} \cdot \sqrt[4]{x - 3}$; $[3; +\infty[$
$\frac{\sqrt[5]{x + 2}}{\sqrt[4]{x - 3}}$; $]3; +\infty[$

3.19) a) $2x + 1$, $\mathbb{R}$
$2x + 2$, $\mathbb{R}$

b) $\frac{x - 1}{3x - 1}$; $\mathbb{R} - \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$

$\frac{-2}{x}$; $\mathbb{R} - \{-2; 0\}$

3.20) sugestão: escreva

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$$

e multiplique o numerador e o denominador por $\sqrt{x + h} + \sqrt{x}$.

3.21) a) 0; 8; -1; 12

b) $g[f(x)] = \begin{cases} -2x, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $f[g(x)] = \begin{cases} -2x, & x \leq 1/2 \\ 2x, & x > 1/2 \end{cases}$

3.22) $\frac{x + 3}{2}$

3.23) $bc + d = ad + b$

3.24) $\frac{1 - x}{1 + x}$

3.25) a) $C(0) = 1$, $S(0) = 0$, $T(0) = 0$
$C(1) = \frac{5}{3}$, $S(1) = \frac{4}{3}$, $T(1) = \frac{4}{5}$

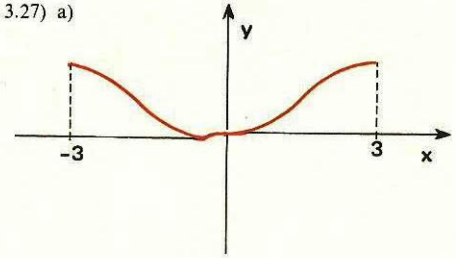
b) $[C(x)]^2 - [S(x)]^2 = \frac{1}{4}(3^x + 3^{-x})^2 - \frac{1}{4}(3^x - 3^{-x})^2 =$

$= \frac{1}{4}(3^{2x} + 2 + 3^{-2x}) - \frac{1}{4}(3^{2x} - 2 + 3^{-2x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

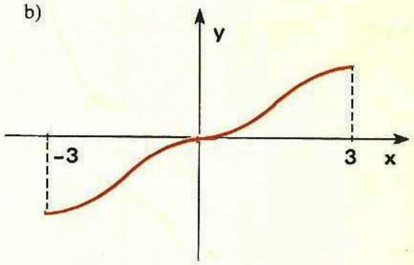
c) $1 - [T(x)]^2 = 1 - \left[\frac{S(x)}{C(x)}\right]^2 = 1 - \frac{[S(x)]^2}{[C(x)]^2} = \frac{[C(x)]^2 - [S(x)]^2}{[C(x)]^2} = \frac{1}{[C(x)]^2}$

3.26) a) ímpar b) não se classifica c) par d) ímpar

3.27) a)



b)



3.32) $f(x_1) - f(x_2) = (x_1^2 + 1) - (x_2^2 + 1) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$

$\left.\begin{array}{l} x_1 < x_2 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

3.33) Sugestão: Observe que

$h(x_1) - h(x_2) = (f(x_1) + g(x_1)) - (f(x_2) + g(x_2)) = [f(x_1) - f(x_2)] + [g(x_1) - g(x_2)]$

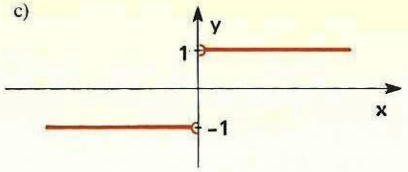
e use o fato de f e g serem *não-decrescentes.*

3.34) sim

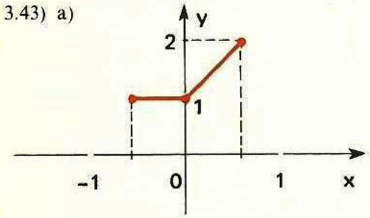
3.35) não

3.36) a) $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $f(3) = 1$, $f(-2) = 0$ b) **x** é qualquer número par.

3.42) a) $f(-2) = -1 \quad f(2) = 1$ b) $\mathbb{R}^*$ c)

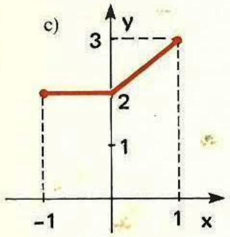


3.43) a)

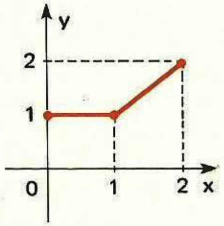


b) $D(f) = [-1; 1] \quad I(f) = [1; 2]$

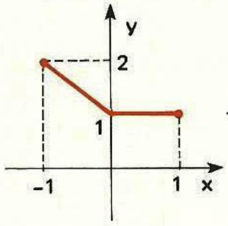
c)



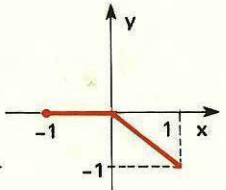
$f(x) + 1$



$f(x - 1)$



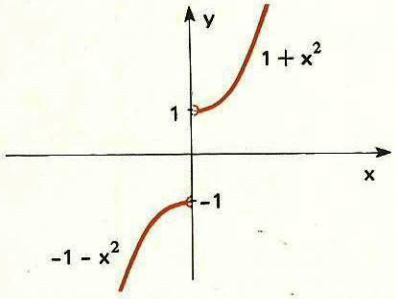
$f(-x)$



$1 - f(x)$

3.44) $m = -1$

3.45)



3.46) a) Em $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, fazendo $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$ vem $f(1) = f\left(\dfrac{1}{x_2}\right) + f(x_2)$ e daí

$$f\left(\frac{1}{x_2}\right) = -f(x_2)$$

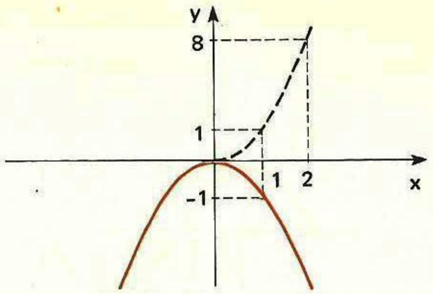
Também $f\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = f\left(x_1 \cdot \dfrac{1}{x_2}\right) = f(x_1) + f\left(\dfrac{1}{x_2}\right) = f(x_1) - f(x_2)$

b) 1.º) $\varphi(0) = f\left(\dfrac{1-0}{1+0}\right) = f(1) = 0$

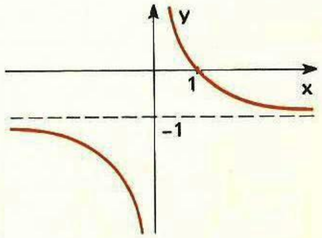
2.º) $D_\varphi =]-1; 1[$

3.º) φ é ímpar.

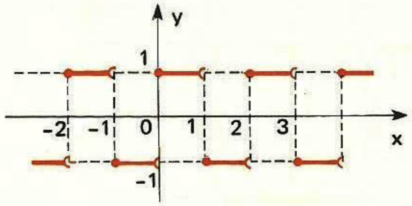
3.51) $\begin{cases} x \geq 0 & f(x) = -x^3 \\ x \leq 0 & f(x) = x^3 \end{cases}$



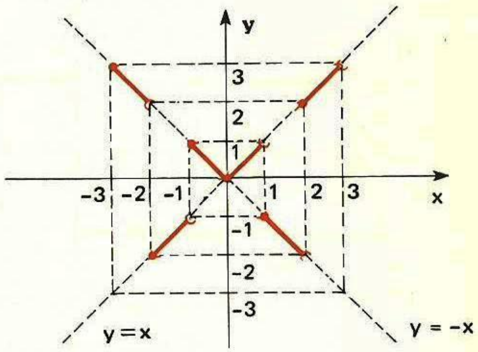
3.52) $f(x) = \dfrac{1}{x} - 1$; o gráfico de $y = \dfrac{1}{x}$ sofre uma translação "para baixo", de 1.



3.53)

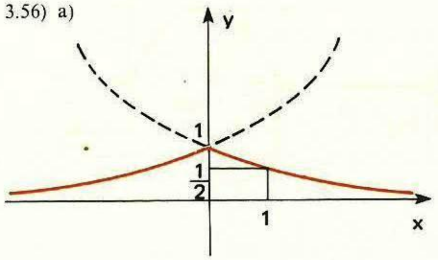


3.54)

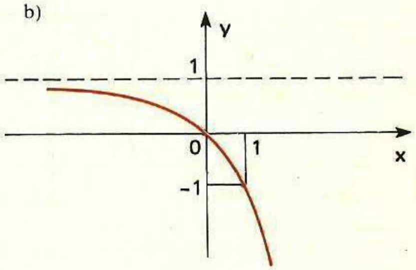


3.55) $[5; +\infty[$

3.56) a)



b)



3.60) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -5 \text{ ou } y \geq 1\}$

3.61) $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

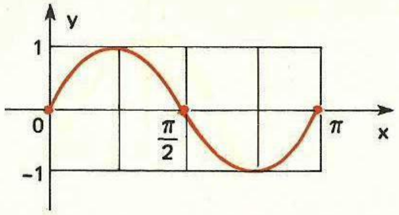
3.62) $f(-x) = \dfrac{\text{sen}(-x)}{-x} = \dfrac{-\text{sen } x}{-x} = \dfrac{\text{sen } x}{x} = f(x)$

3.63) $A = \pm 4; \; k = \pm \dfrac{1}{3}$

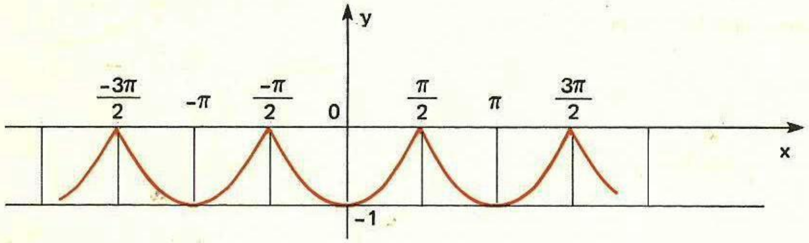
3.64) a) o gráfico de $y = \text{sen}\, x$ sofre uma translação "para cima", de 2.

b) o gráfico de $y = \cos x$ sofre uma translação "para a direita", de $\frac{\pi}{4}$.

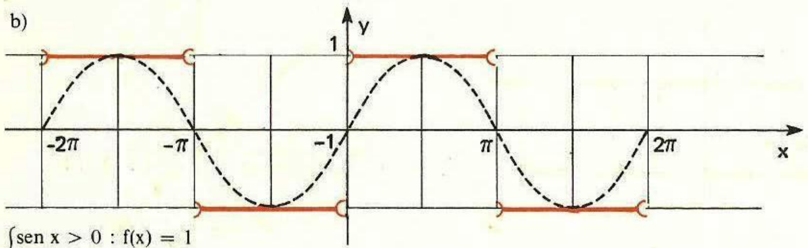
c) período = π



3.65) a) período = π

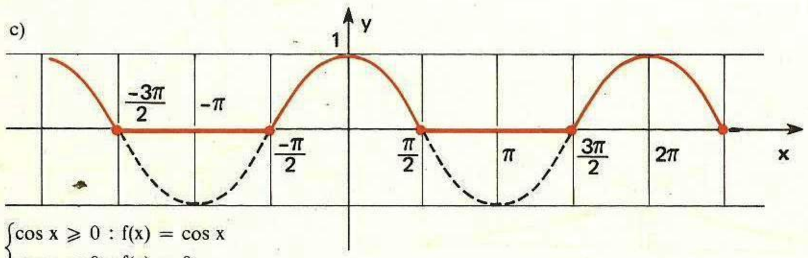


b)



$\begin{cases} \text{sen}\, x > 0 : f(x) = 1 \\ \text{sen}\, x < 0 : f(x) = -1 \end{cases}$

c)



$\begin{cases} \cos x \geqslant 0 : f(x) = \cos x \\ \cos x \leqslant 0 : f(x) = 0 \end{cases}$

3.66) $f^{-1} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*;\ f^{-1}(x) = \frac{1}{x}\ (f^{-1} = f)$.

3.67) $f^{-1} : \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\};\ f^{-1}(x) = \frac{3x + 2}{2x - 1}$.

3.68) $(a = 1 \text{ e } b = 0)$ ou $(a = -1 \text{ e } b \text{ qualquer})$.

3.69) a) $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

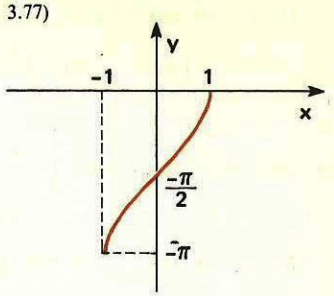
b) x; x

3.74) $\left]\frac{1}{3};\ +\infty\right[$

3.75) $[-8;\ -4]$

3.76) $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}\right]$

3.77)



Capítulo 4

4.13) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x - 4| < \delta$, então

$$|f(x) - 5| = |(3x - 7) - 5| = 3|x - 4| < 3\delta = \varepsilon.$$

4.14) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

$$|f(x) - 5| = |(2x + 3) - 5| = 2|x - 2| < 2\delta = \varepsilon.$$

4.15) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x - 5| < \delta$, então

$$|f(x) - (-3)| = |(2 - x) - (-3)| = |5 - x| = |x - 5| < \delta = \varepsilon.$$

4.16) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Se $0 < |x - 0| < \delta$, então

$$|f(x) - 1| = |(1 - 2x) - 1| = 2|x| < 2\delta = \varepsilon.$$

4.17) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 1| < 1$, donde $x \neq 2$. Assim, $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$.

2.º) $0 < |x - 1| < \varepsilon$

Portanto, $|f(x) - 3| = \left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - 3\right| = |x + 2 - 3| = |x - 1| < \varepsilon$.

4.18) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, então

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2\right| = |(x + 1) - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon.$$

4.19) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

$$|f(x) - 3| = \left|\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} - 3\right| = |(x + 1) - 3| = |x - 2| < \delta = \varepsilon.$$

4.20) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|f(x) - (-2)| = \left|\frac{4x - x^2 - 3}{x - 3} + 2\right| = |(1 - x) + 2| = |x - 3| < \delta = \varepsilon.$$

4.21) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 1| < 1$, donde $|x + 1| < 3$

2.º) $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$, donde $|x - 1| \cdot 3 < \varepsilon$.

Assim, $|x - 1| \cdot |x + 1| < \varepsilon$
$|x^2 - 1| < \varepsilon$
$|(x^2 + 2) - 3| < \varepsilon$
e então $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

4.22) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Se $0 < |x - 0| < \delta$, então

$$|f(x) - 1| = |(1 - x^2) - 1| = |x^2| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

4.23) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 1| < 1$, donde $|x - 2| < 2$

2.º) $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $|x - 1| \cdot 2 < \varepsilon$.

Assim, $|x - 1| \cdot |x - 2| < \varepsilon$. Temos então

$$|f(x) - 0| = |x^2 - 3x + 2| = |x - 1| \cdot |x - 2| < \varepsilon.$$

4.24) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Se $0 < |x - 0| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 0| < 1$, donde $|x - 1| < 2$

2.º) $0 < |x - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $|x| \cdot 2 < \varepsilon$ e daí

$$|x| \cdot |x - 1| < \varepsilon$$

Assim, $|f(x) - 1| = |x^2 - x| = |x| \cdot |x - 1| < \varepsilon$.

4.25) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{10}\right\}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 2| < \frac{1}{2}$, donde $|x - 1| > \frac{1}{2}$

2.º) $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{10}$, donde $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot \frac{1}{2}$ e então $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot |x - 1|$

Assim, $|f(x) - 5| = \left|\frac{5}{x - 1} - 5\right| = \frac{5|x - 2|}{|x - 1|} < \varepsilon$.

4.26) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 2| < 1$, donde $|x| > 1$

2.º) $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |x|$

Assim, $|f(x) - 2| = \left|\frac{4}{x} - 2\right| = \frac{2|x - 2|}{|x|} < \varepsilon$.

4.27) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 2| < \frac{1}{2}$, donde $|x - 1| > \frac{1}{2}$

2.º) $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{8}$, donde $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{2} < \frac{\varepsilon}{4}|x - 1|$

Assim, $|f(x) - 5| = \left|\frac{x + 3}{x - 1} - 5\right| = \left|\frac{8 - 4x}{x - 1}\right| = \frac{4|x - 2|}{|x - 1|} < \varepsilon$.

4.28) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 1| < \frac{1}{2}$, donde $|x| > \frac{1}{2}$

2.º) $0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, donde $|x - 1| < \varepsilon \cdot |x|$

Assim, $|f(x) - 1| = \left|\frac{2x - 1}{x} - 1\right| = \left|\frac{x - 1}{x}\right| = \frac{|x - 1|}{|x|} < \varepsilon$.

4.29) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$. Se $0 < |x - (-1)| < \delta$, então

1.º) $0 < |x + 1| < 1$, donde $-2 < x < 0$. Daí vem que $0 < x^2 < 4$ e $0 < -x < 2$, donde $|x^2 - x + 1| < 7$.

2.º) $0 < |x + 1| < \frac{\varepsilon}{7}$, donde $|x + 1| \cdot 7 < \varepsilon$ e então

$$|x + 1| \cdot |x^2 - x + 1| < \varepsilon$$

Assim, $|f(x) - 2| = |(1 - x^3) - 2| = |x^3 + 1| = |x + 1| \cdot |x^2 - x + 1| < \varepsilon$.

4.30) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{3, 3\varepsilon\}$. Se $0 < |x - 4| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 4| < 3$, donde $1 < x < 7$. Daí vem $\sqrt{x} > 1$, ou seja, $\sqrt{x} + 2 > 3$.
2.º) $0 < |x - 4| < 3\varepsilon$, donde $|x - 4| < \varepsilon \cdot (\sqrt{x} + 2)$

Assim, $|f(x) - 2| = |\sqrt{x} - 2| = \left|\frac{x - 4}{\sqrt{x} + 2}\right| = \frac{|x - 4|}{|\sqrt{x} + 2|} < \varepsilon$.

4.31) 1.º) Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$, o que significa também que $|[f(x) - L] - 0| < \varepsilon$, isto é, $\lim_{x \to x_0} [f(x) - L] = 0$.

2.º) Se $\lim_{x \to x_0} [f(x) - L] = 0$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|[f(x) - L] - 0| < \varepsilon$, isto é, $|f(x) - L| < \varepsilon$, o que significa que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

4.32) Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta_1$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.
Mas, pela desigualdade triangular,

$$|f(x)| - |L| \leqslant |f(x) - L| < \varepsilon$$

e então

$$|f(x)| < \varepsilon + |L|.$$

Como $\lim_{x \to x_0} h(x) = 0$, dado $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + |L|} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que, se $0 < |x - x_0| < \delta_2$, então $|h(x) - 0| < \varepsilon'$ e então $|h(x)| < \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon + |L|}$.
Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se

$$|f(x) \cdot h(x) - 0| = |f(x)| \cdot |h(x)| < (\varepsilon + |L|) \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |L|} = \varepsilon \text{ isto é, } \lim_{x \to x_0} f(x)h(x) = 0.$$

4.33) Como f é limitada, existe um número $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo x de seu domínio.

Como $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, dado $\varepsilon > 0$, em correspondência ao número $\dfrac{\varepsilon}{M} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então $|g(x) - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, isto é, $|g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$.

Assim, $|f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

4.34) Reveja a demonstração do **teorema da conservação do sinal** (exerc. 4.12). Ali, ficou provado que dado $\varepsilon = \dfrac{|L|}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$0 < \frac{L}{2} < g(x) < \frac{3L}{2} \quad (\text{para } L > 0)$$

ou

$$\frac{3L}{2} < g(x) < \frac{L}{2} < 0 \quad (\text{para } L < 0)$$

Em ambos os casos, $0 < \dfrac{|L|}{2} < |g(x)| < \dfrac{|3L|}{2}$, logo tem-se $M = \dfrac{|L|}{2}$ e $N = \dfrac{|3L|}{2}$ e assim

$$0 < M < |g(x)| < N.$$

Capítulo 5

5.9) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

$$|f(x) - f(2)| = |(3x + 2) - 8| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta = \varepsilon.$$

5.10) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Se $0 < |x - 0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(0)| = |(1 - 2x) - 1| = 2|x| < 2\delta = \varepsilon.$$

5.11) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \varepsilon$. Se $0 < |x - (-1)| < \delta$, então

$$|f(x) - f(-1)| = |-x - 1| = |x + 1| < \delta = \varepsilon.$$

5.12) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(x_0)| = |3x - 3x_0| = 3|x - x_0| < 3\delta = \varepsilon.$$

5.13) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{\varepsilon, |2 - x_0|\}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - x_0| < |2 - x_0|$, o que garante que $x \neq 2$.
2.º) $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, donde (sendo $x \neq 2$ e $x_0 \neq 2$):

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x^2 - 4}{x - 2} - \frac{x_0^2 - 4}{x_0 - 2}\right| = |(x + 2) - (x_0 + 2)| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

5.14) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{\varepsilon, |1 - x_0|\}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - x_0| < |1 - x_0|$, o que garante que $x \neq 1$.
2.º) $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, donde (com $x \neq 1$ e $x_0 \neq 1$):

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x^2 - 1}{x - 1} - \frac{x_0^2 - 1}{x_0 - 1}\right| = |(x + 1) - (x_0 + 1)| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

5.15) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 2| < \dfrac{1}{2}$, donde $|x - 1| > \dfrac{1}{2}$

2.º) $0 < |x - 2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, donde $|x - 2| < \varepsilon \cdot |x - 1|$.

Assim, $|f(x) - f(2)| = \left|\dfrac{1}{x - 1} - 1\right| = \dfrac{|x - 2|}{|x - 1|} < \varepsilon$.

5.16) Seja $x_0 > 1$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \min\left\{\dfrac{x_0 - 1}{2}, \dfrac{\varepsilon(x_0 - 1)^2}{2}\right\}$

Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - x_0| < \dfrac{x_0 - 1}{2}$, donde

$$-\frac{x_0 - 1}{2} < x - x_0 < \frac{x_0 - 1}{2}$$

$$x_0 - \frac{x_0 - 1}{2} - 1 < x - 1 < x_0 + \frac{x_0 - 1}{2} - 1$$

$$0 < \frac{x_0 - 1}{2} < x - 1 < \frac{3(x_0 - 1)}{2}$$

e então $|x - 1| > \dfrac{x_0 - 1}{2}$

2.º) $0 < |x - x_0| < \dfrac{\varepsilon(x_0 - 1)^2}{2}$, donde

$$|x - x_0| < \varepsilon \cdot |x - 1| \cdot (x_0 - 1)$$

Assim

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x_0 - 1}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x-1| \cdot |x_0 - 1|} < \varepsilon.$$

5.17) a) $f(x) - f(2) = (5x^2 - 2x - 15) - 1 = 5x^2 - 2x - 16 = (5x + 8)(x - 2)$

b) Se $|x - 2| < \frac{7}{5}$, tem-se $-\frac{7}{5} < x - 2 < \frac{7}{5}$, donde $\frac{3}{5} < x < \frac{17}{5}$ e então $|x| < \frac{17}{5}$. Temos ainda

$$3 < 5x < 17, \text{ donde } 11 < 5x + 8 < 25, \text{ logo } |5x + 8| < 25$$

Assim, para $x \neq 2$ tem-se

$$|f(x) - f(2)| = |5x + 8| \cdot |x - 2| < 25 \cdot |x - 2|$$

Como, para $x = 2$, tem-se

$$|f(x) - f(2)| = 25|x - 2| = 0,$$

podemos escrever

$$|f(x) - f(2)| \leqslant 25|x - 2|$$

c) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{\frac{7}{5}, \frac{\varepsilon}{25}\right\}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - 2| < \frac{7}{5}$, donde $|f(x) - f(2)| < 25|x - 2|$

2.º) $0 < |x - 2| < \frac{\varepsilon}{25}$, donde $|f(x) - f(2)| < 25 \cdot \frac{\varepsilon}{25} = \varepsilon$.

Capítulo 6

6.20) a) -13 b) 40 c) 14 d) 1 e) $\frac{5}{4}$ f) $\frac{5}{2}$ g) $\frac{3}{7}$ h) $\frac{3}{7}$

6.21) a) 0 b) -4 c) 4 d) $\frac{9}{4}$ e) 12 f) -1

6.22) a) 0 c) $-\frac{9}{2}$ e) $\frac{4}{3}$ g) $\frac{5}{2}$ i) $\frac{1}{12}$ k) 0

b) 18 d) 0 f) $\frac{2}{5}$ h) $\frac{11}{4}$ j) 3

6.23) $\frac{1}{12}$

6.24) a) 1 b) -1 c) -3

6.25) $k = -\frac{1}{2}$

6.26) $a = 6$, $b = 12$.

6.27) $f(x) = (x + 1)(x - 2)(3x - 4)$.

6.32) a) $-\frac{1}{40}$ c) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ g) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ i) -1 k) 2

b) 3 d) 1 f) $\frac{4}{3}$ h) $3\sqrt[3]{x^2}$ j) $\frac{1}{3}$ l) $\frac{27\sqrt{2}}{8}$

6.33) -1

6.34) $a = 5$, $b = \frac{\sqrt{5}}{10}$

6.35) $a = 1$, $b = -2$

6.36) $3 + 2a + b$

6.37) $a = 0$, $b = -1$, $c = \frac{1}{4}$

6.38) $\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{25}\right)$

6.39) a) $2x_0$ b) $3x_0^2$ c) $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ d) $-\frac{1}{x_0^2}$ e) $-\frac{2}{x_0^3}$ f) $\frac{x_0}{|x_0|}$

6.40) a) $3 + 2a + b$

b) $3 + a$

Capítulo 7

7.5)	1.º) -3	2.º) -2	3.º) não existe
7.6)	1.º) $n - 1$	2.º) n	3.º) não existe
7.7)	1.º) 1	2.º) 0	3.º) não existe
7.8)	1.º) 5	2.º) 6	3.º) não existe
7.9)	1.º) 1	2.º) 0	3.º) não existe
7.10)	1.º) $2n - 1$	2.º) $2n$	3.º) não existe
7.11)	1.º) -1	2.º) 1	3.º) não existe
7.12)	1.º) -1	2.º) 1	3.º) não existe
7.13)	1.º) -4	2.º) 4	3.º) não existe
7.14)	1.º) -3	2.º) 3	3.º) não existe
7.15)	1.º) -5	2.º) 5	3.º) não existe
7.16)	1.º) -10	2.º) 10	3.º) não existe
7.17)	1.º) -4	2.º) 4	3.º) não existe
7.18)	1.º) -5	2.º) 5	3.º) não existe
7.19)	1.º) -3	2.º) 3	3.º) não existe
7.20)	1.º) $-\frac{3}{2}$	2.º) $\frac{3}{2}$	3.º) não existe
7.21)	1.º) $a = -2$	2.º) $a = -3$	
7.22)	1.º) $m = 1$	2.º) $m = 0$	

7.23) a) $a = 3$ b) $a = 1$ c) não existe d) não

7.24) a) **f** é contínua no ponto $x_0 = 0$

b) **f** é contínua à direita no ponto $x_0 = 1$

7.25) **f** é contínua no ponto $x_0 = 0$.

Capítulo 8

8.9) $+\infty$	8.10) $+\infty$	8.11) $+\infty$	8.12) $+\infty$
8.13) $-\infty$	8.14) $+\infty$	8.15) $+\infty$	8.16) $+\infty$
8.17) $-\infty$	8.18) $-\infty$	8.19) $-\infty$	8.20) $+\infty$
8.21) $+\infty$	8.22) $+\infty$	8.23) $+\infty$	8.24) $-\infty$
8.25) $-\infty$	8.26) $-\infty$	8.27) $-\infty$	8.28) $+\infty$
8.29) $-\infty$	8.30) $-\infty$	8.31) $-\infty$	8.32) $-\infty$
8.33) $-\infty$	8.34) $+\infty$	8.35) $-\infty$	8.36) $+\infty$
8.54) a) $-\infty$	b) $+\infty$	8.55) a) $+\infty$	b) $+\infty$
8.56) a) $+\infty$	b) $+\infty$	8.57) a) $+\infty$	b) $\nexists$
8.58) a) $+\infty$	b) $-\infty$	8.59) a) $+\infty$	b) $+\infty$
8.60) a) 0	b) 0	8.61) a) 1	b) 1
8.62) a) $+\infty$	b) $-\infty$	8.63) a) 0	b) 0
8.64) a) $\frac{64}{45}$	b) $\frac{64}{45}$	8.65) a) 0	b) 0
8.66) a) 8	b) 8	8.67) a) 72	b) 72
8.68) a) 16	b) 16	8.69) a) $\frac{2}{9}$	b) $\frac{2}{9}$
8.70) a) 1	b) 1	8.71) a) 2	b) 2
8.72) a) 0	b) $\nexists$	8.73) a) 0	b) 0
8.74) a) $\frac{1}{2}$	b) $+\infty$	8.75) a) 1	b) -1
8.76) a) 0	b) 0	8.77) a) $+\infty$	b) $\nexists$
8.78) a) $\frac{1}{2}$	b) $-\infty$	8.79) a) 0	b) 0
8.80) a) 0	b) 0	8.81) a) 2	b) 0
8.82) a) $+\infty$	b) $+\infty$	8.83) a) 0	b) $\nexists$
8.84) a) 1	b) $\nexists$		
8.85) $a = 1,\ b = 0$		8.87) $a = 9$	
8.86) -1		8.88) $a = 0,\ b = 1,\ c = -2,\ d = 1$	

Capítulo 9

9.5) 3	9.6) $\frac{1}{3}$	9.7) $\frac{1}{3}$	9.8) $\frac{4}{7}$	9.9) 5	9.10) $\frac{8}{3}$
9.11) 1	9.12) 2	9.13) $\frac{3}{5}$	9.14) $\frac{1}{2}$	9.15) $-\frac{1}{2}$	9.16) 1
9.17) $\frac{1}{4}$	9.18) 2	9.19) $6\sqrt{2}$	9.20) $\frac{1}{2}$	9.21) 8	9.22) $-\sqrt{2}$

9.23) 4	9.24) $-$ sen a		9.25) 3	9.26) 2	9.27) 1
9.28) 2	9.29) 0	9.30) 0	9.31) $\frac{1}{4}$	9.32) 1	9.33) 1

9.34) $-\sqrt{3}$	9.41) 25	9.42) $\frac{1}{7}$
9.43) 1	9.44) 2	9.45) $\frac{1}{3}$
9.46) $\frac{1}{27}$	9.47) 4	9.48) $+\infty$
9.49) 0	9.50) 0	9.51) $+\infty$
9.52) $\frac{1}{32}$	9.53) 27	9.54) 128
9.55) 5	9.56) 1	9.57) 64
9.58) 9	9.59) 64	9.60) 25
9.61) $\sqrt{2}$	9.62) 1	9.63) 4
9.64) 16	9.65) 2	9.66) 9
9.67) 0	9.68) $+\infty$	9.69) 1
9.70) 0	9.71) $+\infty$	
9.76) 2	9.77) -3	9.78) 0
9.79) $+\infty$	9.80) $-\infty$	9.81) $-\infty$
9.82) $+\infty$	9.83) 1	9.84) 0
9.85) -1	9.86) $-\frac{1}{2}$	9.87) 0
9.88) $-\frac{1}{2}$	9.89) $+\infty$	9.90) $-\infty$
9.91) $+\infty$	9.92) $+\infty$	9.93) $-\infty$
9.103) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$	9.104) $\frac{1}{e}$	9.105) e^2
9.106) e^3	9.107) e^4	9.108) $\sqrt[3]{e^2}$
9.109) $\sqrt[3]{e}$	9.110) $\frac{1}{e^2}$	9.111) e^4
9.112) e^2	9.113) $\frac{1}{\sqrt{e^5}}$	9.114) $\frac{1}{e}$
9.115) e^2	9.116) e^6	9.117) $\sqrt[4]{e^3}$
9.118) e^4	9.119) $\sqrt[3]{e^2}$	9.120) e^3
9.121) e	9.122) 2 ln a	9.123) -1
9.124) 1	9.125) 10 log e	9.126) 1
9.127) 1	9.128) 1	9.129) 0
9.130) 1	9.131) $\frac{1}{2}$	9.132) 1
9.133) -1	9.134) 1	

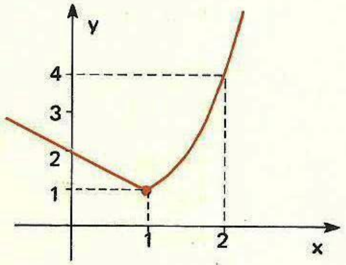
Capítulo 10

10.13) a) -7 b) $y = -7x - 4$

10.14) $f'(a) = 3a^2 + 2a$

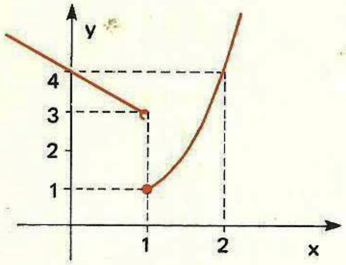
10.15) a) 6 b) $-\frac{1}{9}$ c) 1 d) -1 e) $\frac{1}{2\sqrt{10}}$ f) $\frac{1}{2}$

10.16)



a) 2
b) -1
c) $y = 2x - 1$
d) $y = -x + 2$

10.17)



a) 2
b) não existe

10.18) a) não existe b) $x = 2$

Capítulo 11

11.11) a) $f'(x) = 0$
b) $f'(x) = 5x^4$
c) $f'(x) = 1$
d) $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$
e) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
f) $f'(x) = \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}$
g) $f'(x) = \frac{-5}{2\sqrt{x^7}}$
h) $f'(x) = 35x^4$
i) $f'(x) = 4\cos x$
j) $f'(x) = \frac{-24}{x^4}$
k) $f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}$
l) $f'(x) = \pi x^{\pi - 1}$
m) $f'(x) = \sqrt{3}\,x^{\sqrt{3}-1}$

11.12) a) $f'(x) = 12x^2 - 12x - 7$
b) $f'(x) = 6x^5 + 2\cos x + 3\,\text{sen}\, x$
c) $f'(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{3}{4}\cos x$

11.13) $y = 32x - 48$

11.14) $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

11.15) $(2; 8)$ e $(-2; -8)$

11.16) $y = -2\sqrt{3}\,x + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} + 4$

11.17) $y = 5$

11.18) a) $f'(x) = |4x^3|$
b) $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{para } x \geqslant 0 \\ -3x^2, & \text{para } x < 0 \end{cases}$
c) $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 3 \\ -1, & \text{para } x < 3 \end{cases}$
d) $f'(x) = |2x - 6|$

11.19) A equação da reta t é

$$y - \text{sen}\, a = \cos a\,(x - a)$$

Como a reta passa pela origem, temos:

$$-\,\text{sen}\, a = \cos a\,(-a)$$

donde $a = \text{tg}\, a$

11.20) $S = \{0; n\}$, para $n > 1$
$S = \{1\}$, para $n = 1$

11.21) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ou $f(x) = -x^2 - 2x - 3$

11.22) $b = 2$ e $c = 1$

11.23) $a = -\frac{1}{2}$, $b = 3$ e $c = 4$

11.24) $g(2) = 5$ e $g'(3) = 13$

11.27) a) $f'(x) = (2x)\,\text{sen}\, x + x^2\cos x$
b) $f'(x) = (5x^4)\cdot(\text{sen}\, x)(\cos x) + x^5(\cos^2 x) - x^5(\text{sen}^2\, x)$
c) $f'(x) = \frac{6x(\cos x) + 3x^2(\text{sen}\, x)}{\cos^2 x}$
d) $f'(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 3}{(x^2+3)^2}$
e) $f'(x) = \frac{-6x - 5}{(3x^2 + 5x)^2}$
f) $f'(x) = \frac{-3x^2 - 1}{(x^3 + x)^2} + \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$
g) $f'(x) = \sec^2 x + \text{cossec}^2\, x$
h) $f'(x) = \sec x\ \text{tg}\, x - \text{cossec}\, x$
i) $f'(x) = 3x^2\,\text{tg}\, x + x^3\sec^2 x$
j) $f'(x) = 2x + 7\sec x\ \text{tg}\, x$

11.28) $y - \frac{\pi^2}{4} = \pi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

11.29) $y' = \frac{2x \cos x - \text{sen } x}{2x\sqrt{x}}$

11.31) a) $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4$
b) $f'(x) = e^x$
c) $f'(x) = 3^{2x} \cdot 2 \ln 3$
d) $f'(x) = 40 \cdot \ln 2 \cdot 2^{5x}$
e) $f'(x) = \frac{1}{x}$
f) $f'(x) = \frac{1}{x}$
g) $f'(x) = \frac{1}{x \ln 3}$
h) $f'(x) = \frac{5}{x \ln 2}$
i) $f'(x) = \frac{6}{x \ln 2}$

11.32) a) $f'(x) = 4^x \cdot \ln 4 \cdot \text{sen } x + 4^x \cdot \cos x$
b) $f'(x) = \frac{2^x (\ln 2 \cdot \cos x + \text{sen } x)}{\cos^2 x}$
c) $f'(x) = 5x^2 (3 \text{ sen } x \ln x + x \cos x \ln x + \text{sen } x)$

11.34) a) $f'(x) = 6x^5 + 20x^3 - 6x^2$
b) $f'(x) = 15x^4 - 21x^2 + 6x - 1$

11.35) $f'(x) = (21x^6 + 5x^2) \text{ sen } x + (3x^7 - 10x) \cos x$

11.36) a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 10x - 2$
b) $f''(x) = 12x^2 - 12x + 10$
c) $f'''(x) = 24x - 12$
d) $f^{(4)}(x) = 24$
e) $g'(x) = 3 \cos x - \text{sen } x$
f) $g^{(2)}(x) = -3 \text{ sen } x - \cos x$

11.37) 0

Capítulo 12

12.15) a) $f'(x) = 4 \text{ sen}^3 x \cdot \cos x$
b) $f'(x) = -4 \cos^3 x \cdot \text{sen } x$
c) $f'(x) = 80 x^3 (2x^4 + 5)^9$
d) $f'(x) = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$
e) $f'(x) = \frac{6}{x \ln 2} (\log_2 x)^5$
f) $f'(x) = \frac{3}{x} (\ln x)^2$
g) $f'(x) = \frac{-2 \cos x}{\text{sen}^3 x}$
h) $f'(x) = \frac{2 \cos x}{3\sqrt[3]{\text{sen } x}}$
i) $f'(x) = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2 + 5)^3}}$

12.16) a) $f'(x) = 5x^4 \cdot \cos x^5$
b) $f'(x) = -15x^2 \text{ sen } x^3$
c) $f'(x) = 4x^3 \sec^2 x^4$
d) $f'(x) = (15x^2 + 2x) \cos (5x^3 + x^2)$
e) $f'(x) = -(\cos x) \cdot \text{sen}(\text{sen } x)$
f) $f'(x) = \frac{7}{x}$
g) $f'(x) = \frac{6x + 5}{3x^2 + 5x}$
h) $f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln 2}$
i) $f'(x) = 3 e^{3x}$
j) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{x^3}$
k) $f'(x) = (6x + 1) \cdot e^{2x^3 + x}$
l) $f'(x) = 2x (\ln 4) \cdot 4^{x^2}$
m) $f'(x) = (\ln 2)(\cos x) \cdot 2^{\text{sen } x}$
n) $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
o) $f'(x) = -\frac{2}{x^3} \cdot \cos \frac{1}{x^2}$

12.17) a) $f'(x) = 10x (\text{sen}^4 x^2) \cdot \cos x^2$
b) $f'(x) = 42x^6 (\text{sen } x^7)^2 (\cos x^7)$
c) $f'(x) = \frac{8}{x} \cdot (\ln x^2)^3$
d) $f'(x) = \frac{10}{x \ln 3} \cdot (\log_3 x^2)^4$
e) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{\text{sen } x^3} \cdot \cos x^3$
f) $f'(x) = (\ln 2) \cdot (3x^2)(\cos x^3) \cdot 2^{\text{sen } x^3}$
g) $f'(x) = \frac{3x^2(\cos x^3)}{2\sqrt{\text{sen } x^3}}$
h) $f'(x) = \frac{10x^4 \cdot \cos x^5}{3\sqrt[3]{\text{sen } x^5}}$
i) $f'(x) = \frac{3}{x} \cdot \cos (\ln x^3)$

12.18) a) $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} \cdot \cos \frac{x^3}{x^2 + 1}$
b) $f'(x) = 2(\text{sen } x \cos x) \ln x^3 + \frac{3}{x} \cdot \text{sen}^2 x$
c) $f'(x) = -\text{sen } x + \text{sen } x \cos^2 x$
d) $f'(x) = 2(\sec^2 x)(\text{tg } x) + 6e^{6x}$
e) $f'(x) = \frac{4}{x \text{ sen}^2 x^2} \cdot (\text{sen } x^2 - 2x^2 \ln x \cdot \cos^3 x^2)$
f) $f'(x) = e^{x^2} \left(2x\sqrt{x^3 + 4x} + \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}\right)$
g) $f'(x) = 3x^2 \cdot \text{sen} \frac{1}{x^2} - 2 \cos \frac{1}{x^2}$
h) $f'(x) = \frac{-\cos x}{\text{sen}^4 x} - \frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$

12.19) a) 6 ou −6
b) 12 ou −12

12.20) 56

12.21) a) $f(x) = \text{sen } x^3$
b) $f'(x) = 3x^2 \cdot \cos x^3$

12.22) a) $-4x^3 \cdot \text{sen } x^4$
b) $-4 \text{ sen } x \cdot (\cos x)^3$
c) $16 x^{15}$

12.24) a) $f'(x) = (\text{sen } x)^{\cos x} \left[-\text{sen } x \cdot \ln (\text{sen } x) + \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x}\right]$
b) $f'(x) = x^x \cdot (1 + \ln x)$
c) $f'(x) = x^{1/x} \cdot \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right)$
d) $f'(x) = (x^2 + 1)^x \cdot \left[\ln (x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}\right]$
e) $f'(x) = \frac{2}{x} \cdot \ln x \cdot x^{\ln x}$
f) $f'(x) = (\text{sen } x)^x \left[\ln (\text{sen } x) + \frac{x \cos x}{\text{sen } x}\right]$

12.25) $f'(x) = [g(x)]^{h(x)} \cdot \left\{h'(x) \cdot \ln [g(x)] + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)}\right\}$

12.27) a) $f'(x) = x^2 \cdot \cos x \cdot e^x \left(\frac{2}{x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x} + 1\right)$
b) $f'(x) = (x^3 + 2)^4 (x^2 - 1)^3 (\text{sen } x) \left[\frac{12x^2}{x^3 + 2} + \frac{6x}{x^2 - 1} + \frac{\cos x}{\text{sen } x}\right]$
c) $f'(x) = (\text{sen } x)^{\cos x} \left[-\text{sen } x \ln (\text{sen } x) + \frac{\cos^2 x}{\text{sen } x}\right]$

d) $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$

e) $f'(x) = x^{(x^2)} \cdot (2x \ln x + x)$

f) $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3)^3}{\text{sen } x}\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{6x}{x^2-3} - \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}\right)$

g) $f'(x) = f(x) \cdot \left(\dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1}{2(x+2)} - 2 - \dfrac{2}{x-1}\right)$

h) $f'(x) = \dfrac{f(x)}{3} \cdot \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} - \dfrac{2}{x+1}\right)$

i) $f'(x) = f(x) \cdot \left[\dfrac{3}{5x} + \dfrac{2x}{x^2+1} + \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{2\cos x}{\text{sen } x}\right]$

12.31) a) $y' = \dfrac{-2xy}{x^2+3y^2}$

b) $y' = \dfrac{y^2}{1-xy}$

c) $y' = \dfrac{y}{\sec^2 y - x}$

d) $y' = \dfrac{1}{e^y - 1} = \dfrac{1}{x+y-1}$

12.32) $14x - 13y + 12 = 0$

Capítulo 13

13.3) $\dfrac{1}{6}$ 13.4) $\dfrac{1}{16}$ 13.5) $\dfrac{1}{12}$ 13.6) $\dfrac{1}{m}$

13.7) a) $f'(x) = \dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-6}{\sqrt{1-36x^2}}$

c) $f'(x) = \dfrac{7}{1+49x^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{-3}{1+9x^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{6}{\sqrt{1-4x^2}}$

f) $f'(x) = \dfrac{2x+2}{\sqrt{1-(x^2+2x)^2}}$

g) $f'(x) = 3x^2 \cdot \text{arc cos } x - \dfrac{x^3+1}{\sqrt{1-x^2}}$

h) $f'(x) = \dfrac{-1}{(\text{arc tg } x)(1+x^2)}$

13.8) a) $f'(x) = \dfrac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

b) $f'(x) = \dfrac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\text{arc tg } x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

Capítulo 14

14.6) a) $\dfrac{1}{12}$ c) -2 e) $\dfrac{9}{8}$ g) ∞

b) -1 d) $\dfrac{1}{2}$ f) $\dfrac{1}{n}$ h) $\dfrac{3}{7}$

14.7) a) $\dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{12}$ e) $\dfrac{2}{3}$

b) 0 d) $-\dfrac{1}{4}$ f) 2

14.8) a) $-\infty$ c) $\dfrac{4}{9}$ e) 0

b) -1 d) 1 f) $\dfrac{2}{\pi}$

14.12) a) π c) $\dfrac{1}{3}$ e) 0

b) 1 d) 1 f) ∞

14.16) a) 0 b) π c) 1 d) 0

14.17) a) $\dfrac{1}{2}$ b) 0 c) $\dfrac{1}{2}$ d) -1

14.18) a) e^{-6} c) $e^{-1/2}$ e) 1 g) e^3 i) 1 k) e^{-1}

b) 1 d) e^{-6} f) 1 h) 1 j) e^3 l) 1

14.21) a) 198 m/s c) 94 m/s^2

b) $v = 4t^3 - 6t^2 + 6t$ d) $a = 12t^2 - 12t$

14.22) a) $v = -\dfrac{5\pi}{6}\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $a = \dfrac{-5\pi^2}{36}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

14.23) $\dfrac{5}{8}$ m/s

14.25) 2 400 π cm^3/s

14.26) 4π m^2/s

14.27) $2\pi R$

14.28) 10π m

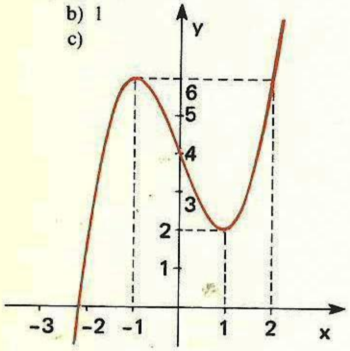
14.29) $\dfrac{0{,}06}{\pi}$ m/s

15.2) a) 2 e −2
b) crescente em]−∞; −2] e [2; +∞[decrescente em [−2; 2]

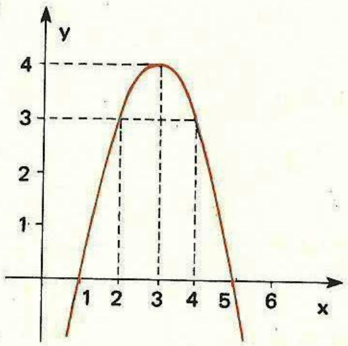
15.3) crescente em [0; 1] e [2; +∞[
decrescente em]−∞; 0] e [1; 2]

15.4) −1 < m < 1

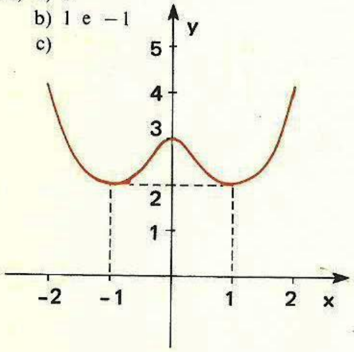
15.13) a) −1
b) 1
c)



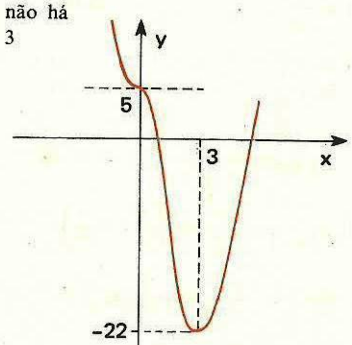
15.14) a) 3
b) não há
c)



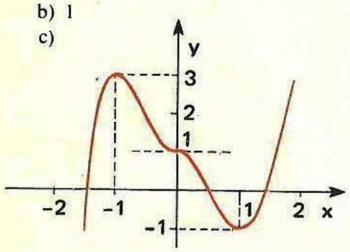
15.15) a) 0
b) 1 e −1
c)



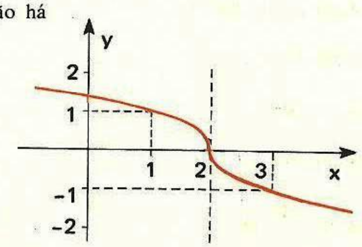
15.16) a) não há
b) 3
c)



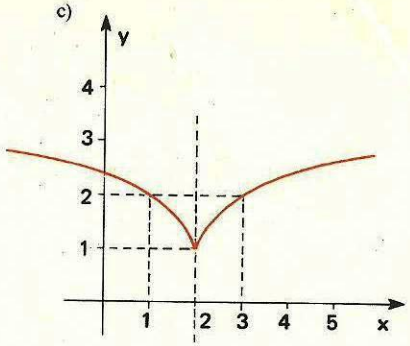
15.17) a) −1
b) 1
c)



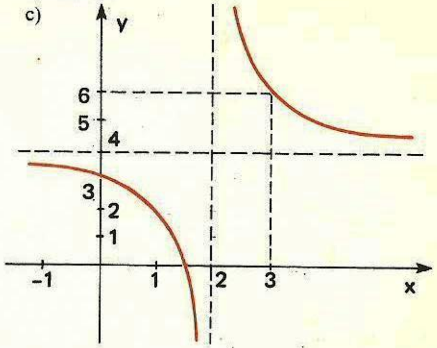
15.18) a) não há
b) não há
c)



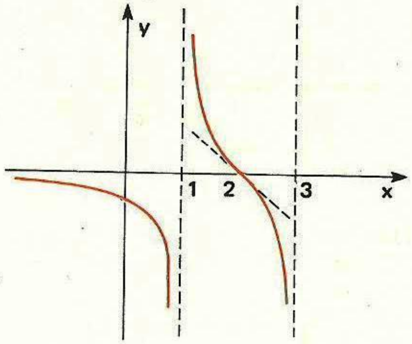
15.19) a) não há
b) 2
c)



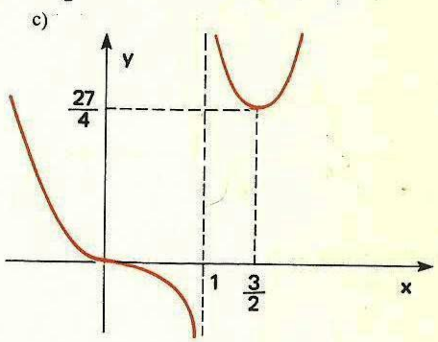
15.20) a) não há
b) não há
c)



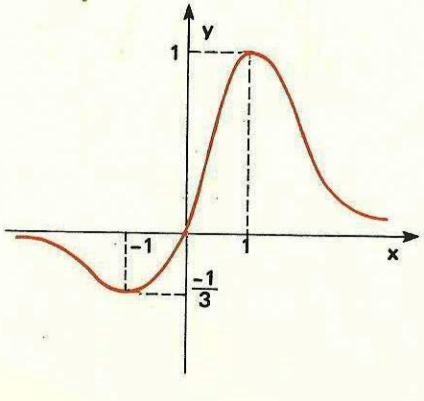
15.21) a) não há
b) não há
c)



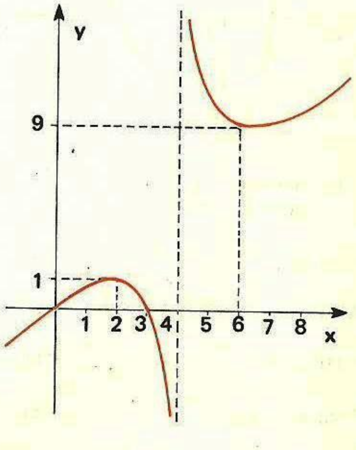
15.22) a) não há
b) $\frac{3}{2}$
c)



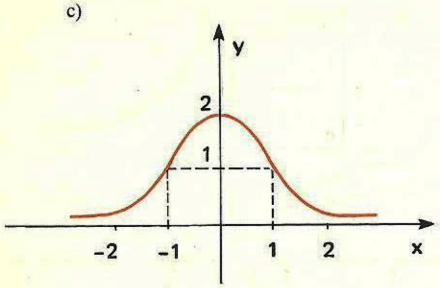
15.23) a) 1
b) −1
c)



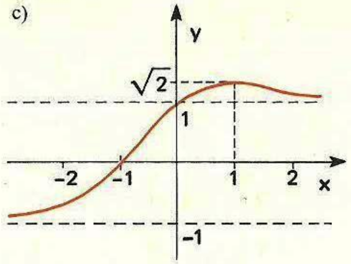
15.24) a) 2
b) 6
c)



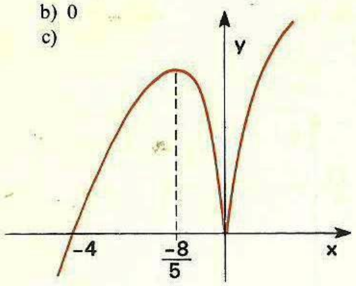
15.25) a) 0
b) não há
c)



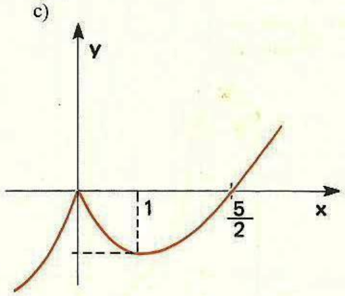
15.26) a) 1
b) não há
c)



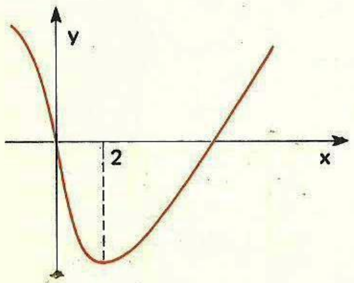
15.27) a) $-\frac{8}{5}$
b) 0
c)



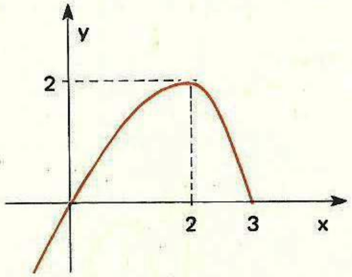
15.28) a) 0
b) 1
c)



15.29) a) não há
b) 2
c)



15.30) a) 2
b) 3
c)



15.31) máximo: -1
mínimo: -3

15.33) a) 1 b) -2

15.34) a) 3 b) não há

15.35) a) 0 b) -1 e 1

15.36) a) -3 e 2 b) -2 e 3

15.42) 6 e 2

15.43) (2; 1)

15.44) A 10 km de A

15.45) a) Às 16 horas b) $20\sqrt{5}$ km

15.46) $\begin{cases} R = \frac{k}{4} \\ \theta = 2 \text{ rad} \end{cases}$

15.47) é o quadrado de lado 8 m

15.48) Quadrado de lado 5 m

15.49) x = 100 m e y = 200 m

15.50) $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ e $y = R\sqrt{2}$

15.51) $\begin{cases} x = R \text{ e } y = R \\ \text{perímetro} = 5R \end{cases}$

15.52) $x = y = R\sqrt{2}$

15.53) $x = 5$ e $y = \frac{12}{5}$

15.54) $\frac{26\sqrt{13}}{2}$ m

15.55) $\begin{cases} \text{base} = 15 \text{ cm} \\ \text{altura} = 60 \text{ cm} \end{cases}$

15.56) a) $\begin{cases} \text{pedaço do círculo: } \frac{\pi L}{4+\pi} \\ \text{pedaço do quadrado: } \frac{4L}{4+\pi} \end{cases}$

b) Deve-se usar todo o arame para o círculo.

15.57) $\begin{cases} \text{raio da base} = \frac{4R}{3} \\ \text{altura} = \frac{2\sqrt{2}R}{3} \\ \text{volume} = \frac{32\pi R^3}{81} \end{cases}$

15.58) $h = \frac{2\sqrt{3}R}{3}$ e $r = \frac{\sqrt{6}\cdot R}{3}$

15.59) $r = \sqrt{\frac{5}{\pi}}$ e $h = 2\sqrt{\frac{5}{\pi}}$

15.60) r = 2 m e h = 4 m

15.61) $r = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$ e $h = \frac{4R}{3}$

Capítulo 16

16.6) a) $\dfrac{x^7}{7} + c$

b) $-\dfrac{1}{2x^2} + c$

c) $\dfrac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + c$

d) $e^x + c$

e) $x^3 + 2x + c$

f) $2x^3 + 2x^2 + x + c$

g) $\dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} + 3 \operatorname{sen} x + c$

h) $\dfrac{4x^5}{5} + 3 \cos x + \ln x$

16.7) 52; 248; 196

16.8) a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866$ b) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2} \cong 0{,}159$ c) 1 d) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \cong 0{,}366$

16.9) a) $\dfrac{4}{3} \cong 1{,}333$ b) $\dfrac{11}{24} \cong 0{,}458$

16.10) a) $2\pi \cong 6{,}283$ b) $\dfrac{\pi}{2} - 1 \cong 0{,}571$

16.11) $a \cong 1{,}3$ ($\cong 75°$) 16.12) $\sqrt{2} - 1 \cong 0{,}414$ 16.13) 37,500

16.18) a) $\dfrac{x^2}{2} + c$

b) $x^3 + c$

c) $\dfrac{x^2}{2} + 2x + c$

d) $\dfrac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + c$

e) $\dfrac{5^x}{\ln 5} + c$

f) $-\dfrac{5^{-x}}{\ln 5} + c$

g) $-e^{-x} + c$

h) $2e^{x/2} + c$

16.19) $\displaystyle\int e^{kx}dx = \int (e^k)^x dx = \frac{(e^k)^x}{\ln e^k} + c = \frac{e^{kx}}{\log_e e^k} + c = \frac{e^{kx}}{k} + c = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + c$

16.20) $\varphi(x) = \operatorname{sen} x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

16.21) $\varphi(x) = x^3 + 3x + 2$

16.22) a) $5 \operatorname{sen} x + c$ c) $2^x + c$ e) $-\operatorname{sen} t + c$

b) $-3e^x + c$ d) $\cos t + c$ f) $\dfrac{2x^3}{3} - 6x^2 + \dfrac{9}{2}x + c$

16.23) a) $x^4 + \dfrac{x^5}{5} - 2 \cos x + c$

b) $x - \dfrac{2\sqrt{x^3}}{3} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + c$

c) $-e^x - \ln|x| + \dfrac{5x^6}{6} + c$

d) $3^x - 11 \cdot \ln|x| - 5x + c$

16.24) a) $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\, dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\int (e^x - e^{-x})\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\int e^x dx - \int e^{-x} dx\right] = \frac{1}{2}\,[e^x + c_1 - (-e^{-x}) + c_2] =$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \underbrace{\frac{c_1 + c_2}{2}}_{c} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c = \cosh x + c$$

b) $\displaystyle\int \cosh x\, dx = \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{1}{2}\int (e^x + e^{-x})\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\int e^x dx + \int e^{-x} dx\right] = \frac{1}{2}\,[e^x + c_1 - e^{-x} + c_2] =$$

$$= \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \underbrace{\frac{c_1 + c_2}{2}}_{c} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c = \operatorname{senh} x + c$$

Capítulo 17

17.10) a) $\dfrac{(3x-1)^6}{18} + c$

b) $\dfrac{1}{18(-2x+3)^9} + c$

c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) + c$

d) $3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) + c$

e) $-\dfrac{1}{2}\, e^{-2x+1} + c$

f) $\dfrac{2^{x-3}}{\ln 2} + c$

g) $\dfrac{1}{5} \ln|5x - 1| + c$

h) $-\ln|-x + 3| + c$

i) $\dfrac{1}{4} \ln|4x + 3| + c$

j) $-\dfrac{1}{3} \ln|-3x + 7| + c$

17.11) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$

17.12) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{6} + c$

17.13) a) $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{|x-2|}{|x+2|} + c$ b) $\dfrac{1}{8} \ln \dfrac{|x-3|}{|3x-1|} + c$

17.14) $x - \ln|2x + 1| + c$

17.15) $\dfrac{x^2}{2} - 2x + 2 \ln|x - 1| + c$

17.25) a) $e^{x^4} + c$

b) $\operatorname{sen} x^2 + c$

c) $\dfrac{2\sqrt{(x^3-1)^3}}{3} + c$

d) $\ln|2x^2 - 1| + c$

e) $2(x^3 + x)^2 + c$

f) $\ln|6x^2 - 5x + 1| + c$

17.26) a) $\dfrac{\operatorname{sen}^5 x}{5} + c$ b) $\ln|\operatorname{sen} x| + c$

17.27) a) $\dfrac{\ln^2 x}{2} + c$ b) $\ln |\ln x| + c$ 17.28) $\dfrac{\ln^2 \operatorname{sen} x}{2} + c$

17.29) a) $-\dfrac{\cos^6 x}{6} + c$ b) $\dfrac{8}{3} \ln |x^3 + 1| + c$ c) $2\sqrt[4]{(x^2 - 3)^5} + c$ d) $-\dfrac{\cos x^3}{6} + c$

17.30) a) $2\left(\dfrac{\sqrt{(x-1)^3}}{3} + \sqrt{x-1}\right) + c$ b) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{(2x+3)^5}}{5} - 2\sqrt{(2x+3)^3} + 9\sqrt{2x+3}\right)$

17.35) a) $e^x(x-1) + c$ c) $x \operatorname{sen} x + \cos x + c$
b) $e^x(3x-4) + c$ d) $-(2x+1)\cos x + 2 \operatorname{sen} x + c$

17.36) $\dfrac{x^3}{3}\left(\ln x - \dfrac{1}{3}\right) + c$ 17.37) $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$ 17.38) $\dfrac{e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)}{2}$

17.39) $x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$ 17.40) $X_n = x^n e^x - nX_{n-1}$

Capítulo 18

18.1) a) -1 b) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) 2 d) $\ln\sqrt{5}$

18.2) a) $\dfrac{63}{18}$ b) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ c) $\ln\sqrt{\dfrac{4}{3}}$ d) $\ln\sqrt{2}$ e) 0 f) $\ln 4 - 1$

18.3) Seja φ uma primitiva de f.

a) Pelo teorema fundamental do Cálculo, temos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad \int_b^c f(x)\,dx = \varphi(c) - \varphi(b)$$

Somando membro a membro

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \varphi(c) - \varphi(a)$$

Logo

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) = -(\varphi(a) - \varphi(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$

18.4) $\dfrac{3}{4}$ 18.6) $\dfrac{9\pi}{2}$

18.5) $V = \pi \displaystyle\int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx =$

$$= \pi\left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big]_{-r}^{r} = \pi\left[\left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3}\right) - \left(r^2(-r) - \frac{-r^3}{3}\right)\right] = \pi\left[\frac{2r^3}{3} + \frac{2r^3}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi r^3$$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES

I.1) 1.ª) Observe que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, e desenvolva o quadrado.

2.ª) $(a-b)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow$

$\dfrac{a^2 + b^2}{ab} \geqslant 2 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geqslant 2$

3.ª) Observe que $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$, e desenvolva os quadrados.

4.ª) Da 2.ª desigualdade acima:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geqslant 6$$

Daí $\quad \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{a}{a}\right) + \left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{b}{b}\right) + \left(\dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{c}{c}\right) \geqslant 9$

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

etc.

5.ª) A 1.ª desigualdade permite escrever:

$$\frac{a_1 + 1}{2} \geqslant \sqrt{a_1 \cdot 1}$$

$$\frac{a_2 + 1}{2} \geqslant \sqrt{a_2 \cdot 1}$$

....

$$\frac{a_n + 1}{2} \geqslant \sqrt{a_n \cdot 1}$$

Multiplique membro a membro.

6.ª) $\dfrac{p + \alpha^2 q}{p + q} > \alpha \Rightarrow p + \alpha^2 q > \alpha(p+q) \Rightarrow$

$p(1-\alpha) > \alpha q(1-\alpha) \Rightarrow p < \alpha q \Rightarrow \dfrac{p}{q} < \alpha$

I.2) Compare x^2 e y^2; daí:

$$\begin{cases} ab < 0 \Rightarrow x > y \\ ab > 0 \Rightarrow x = y \end{cases}$$

I.3) a) todos os elementos de E e também o número zero.

b) zero

c) Suponha que numa vizinhança V(a) o número de elementos de E é finito; há, então, aquele ponto cuja distância a a é a menor; tome então uma vizinhança de a com raio menor que essa distância. Há, então, uma contradição.

I.4) a) Faça $a = 0 : f(0) = 0$

b) faça $b = -a$

c) $$\left.\begin{array}{l} f(2) = f(1) + f(1) \\ f(3) = f(2) + f(1) \\ f(4) = f(3) + f(1) \\ \vdots \\ f(n) = f(n-1) + f(1) \end{array}\right\} \oplus \; f(n) = nf(1) = nk$$

Faça uma verificação da fórmula acima, usando INDUÇÃO.

I.5) $b = 0$ e $a = \pm 1$

I.6) a) $]-1; 1[$ b) $\{0\}$

I.7) $$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 1 + \frac{1}{(a-1)(b-1)} > 0$$

I.8) Faça $\begin{cases} \text{arc sen } x = \alpha \Rightarrow \text{sen } \alpha = x \\ \text{arc cos } x = \beta \Rightarrow \cos \beta = x \end{cases}$

e calcule $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$

II.1) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$. Se $0 < |x - 1| < \delta$, então

1.º) $0 < |x-1| < 1$, donde $|2x+3| < 7$

2.º) $0 < |x-1| < \frac{\varepsilon}{7}$, donde $|x-1| \cdot 7 < \varepsilon$

Assim, $|x-1| \cdot |2x+3| < \varepsilon$

$|2x^2 + x - 3| < \varepsilon$

$|(2x^2 + x + 3) - 6| < \varepsilon$

e então $|f(x) - 6| < \varepsilon$.

II.2) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$. Se $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$, então

1.º) $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}$, donde $|x| > \frac{1}{4}$

2.º) $0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{8}$, donde $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |x|$

Assim, $|f(x) - 2| = \left|\frac{1}{x} - 2\right| = \dfrac{2 \cdot \left|x - \frac{1}{2}\right|}{|x|} < \varepsilon.$

II.3) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x-1| < \delta$, então

$$|f(x) - 5| = \left|\frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} - 5\right| = 3 \cdot \left|\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}\right| = 3 \cdot |x - 1| < 3\delta = \varepsilon.$$

II.4) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\left\{\frac{3}{4}; \frac{3\varepsilon}{2}\right\}$. Se $0 < |x-1| < \delta$, então:

1.º) $0 < |x-1| < \frac{3}{4}$, donde $\frac{1}{4} < x < \frac{7}{4}$. Daí vem:

$\sqrt{x} > \frac{1}{2}$ e então $\sqrt{x} + 1 > \frac{3}{2}$

2.º) $0 < |x-1| < \frac{3\varepsilon}{2}$, donde $\dfrac{|x-1|}{\frac{3}{2}} < \varepsilon$.

Assim, $|f(x) - 1| = |\sqrt{x} - 1| = \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}+1} < \dfrac{|x-1|}{\frac{3}{2}} < \varepsilon$

II.5) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{7, 7\varepsilon\}$. Se $0 < |x-8| < \delta$, então:

1.º) $0 < |x-8| < 7$, donde $1 < x < 15$. Daí vem:

$\sqrt[3]{x} > 1$ e $\sqrt[3]{x^2} > 1$, logo $|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4| > 7$

2.º) $0 < |x-8| < 7\varepsilon$, donde $\dfrac{|x-8|}{7} < \varepsilon$.

Assim, $|f(x) - 2| = |\sqrt[3]{x} - 2| = \dfrac{|x-8|}{|\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4|} < \dfrac{|x-8|}{7} < \varepsilon.$

II.6) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

$$|f(x) - f(x_0)| = |(2x+3) - (2x_0 + 3)| = 2|x - x_0| < \varepsilon$$

II.7) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min\{\varepsilon, |1 + x_0|\}$. Se $0 < |x - x_0| < \delta$, então

1.º) $0 < |x - x_0| < |1 + x_0|$. Isto garante que $x \neq -1$.

2.º) $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, donde (sendo $x \neq -1$ e $x_0 \neq -1$):

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} - \frac{x_0^2 - x_0 - 2}{x_0 + 1}\right| = |(x-2) - (x_0 - 2)| = |x - x_0| < \varepsilon.$$

II.8) a) $f(x) - f(1) = (x-1)(2x+3)$

b) Se $|x-1| < \frac{7}{2}$, então $-\frac{7}{2} < x - 1 < \frac{7}{2}$.

Daí, vem: $-\frac{5}{2} < x < \frac{9}{2}$ e então $|x| < \frac{9}{2}$. Temos

$$|f(x) - f(1)| = |(x-1)| \cdot |2x+3|$$

Como $-5 < 2x < 9$, temos $-2 < 2x + 3 < 12$, donde $| 2x + 3 | < 12$. Assim, (vale a igualdade para $x = 1$):

$$| f(x) - f(1) | \leqslant 12 \cdot | x - 1 |$$

c) Dado $\varepsilon > 0$, seja $\delta = \min \left\{ \frac{7}{2}, \frac{\varepsilon}{12} \right\}$. Se $0 < | x - 1 | < \delta$, então

1.°) $0 < | x - 1 | < \frac{7}{2}$, donde $| f(x) - f(1) | < 12 | x - 1 |$

2.°) $0 < | x - 1 | < \frac{\varepsilon}{12}$, donde $| f(x) - f(1) | < \varepsilon$.

II.9) $\frac{1}{3}$ II.10) 1   II.11) $\frac{3}{4}$

II.12) $\frac{1}{2}$ II.13) 32   II.14) $\frac{1}{2}$

II.15) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ II.16) $\frac{1}{2}$ II.17) $\frac{3}{8}$

II.18) $\frac{6}{5}$ II.19) $\frac{1}{3}$

II.20) $a = -1$, $b = -\frac{14}{3}$ II.21) $f(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 1)$

II.22) $f(x) = x(x + 1)(x + 2)$

II.23) a) $A = 8$ b) 1

II.24) a) $\frac{1}{5}$ b) 0   c) não existe

II.25) a) -1 b) 1   c) não existe

II.26) a) 3   b) -3 c) não existe

II.27) a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) não existe

II.28) a) $a = \frac{1}{2}$ b) $a = -1$ c) não

II.29) $-\infty$ II.30) $-\infty$ II.31) $+\infty$

II.32) $+\infty$ II.33) $+\infty$ II.34) $-\infty$

II.35) a) 0   b) 0

II.36) a) 0   b) não existe

II.37) a) $+\infty$ b) $-\infty$

II.38) a) 3   b) 3

II.39) a) 1   b) $+\infty$

II.40) a) 0   b) 0

II.41) a) 0   b) não existe

II.42) -1 II.43) $a = \frac{25}{3}$

II.44) $\frac{1}{5}$ II.45) $\frac{2}{3}$ II.46) $10\sqrt{2}$

II.47) 2   II.48) -4 II.49) $+\infty$

II.50) $\sqrt[3]{3}$ II.51) 0   II.52) 4

II.53) 0   II.54) $+\infty$ II.55) $\frac{1}{2}$

II.56) $-\infty$ II.57) $\sqrt[4]{e^3}$ II.58) $\frac{1}{\sqrt{e^3}}$

II.59) $\frac{1}{\sqrt[3]{e^4}}$ II.60) e^6 II.61) $8 \ln 2$ II.62) -1 II.63) -3

III.1) a) $f'(x) = \dfrac{\cos x \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y}{\cos^3 y}$ b) $f'(x) = \dfrac{-2x \operatorname{sen} 2x - xye^{xy} - y}{x^2 e^{xy} + x \ln x}$

III.2) a) $\frac{3}{2}$ b) 2   c) 0   d) ∞

III.3) 240 cm^3/s

III.4) a) $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ e $\left[\frac{5\pi}{4}; 2\pi\right]$ b) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$

III.5) $x = 1$ dm

III.6) máximo relativo: -2
mínimo relativo: $+4$

III.7) $m = 24$ e $n = -13$

IV.1) a) $A = 1$, $B = 2$, $C = -2$
b) $\frac{x^2}{2} + 2x - 2 \ln | x + 1 |$

IV.2) $\dfrac{2x\sqrt{(1 + x)^3}}{3} - \dfrac{4\sqrt{(1 + x)^5}}{15} + c$ IV.3) $X = \dfrac{\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \ln | \sec x + \operatorname{tg} x |}{2} + c$

IV.4) $\displaystyle\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x \operatorname{tg} x} dx = I$

Fazendo $\sec x + \operatorname{tg} x = u$, temos

$$(\sec x + \operatorname{tg} x)' = \frac{du}{dx}$$

$$(\sec x)' + (\operatorname{tg} x)' = \frac{du}{dx}$$

$$(\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \sec^2 x)\, dx = du$$

Substituindo na integral, vem:

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln | u | + c = \ln | \sec x + \operatorname{tg} x | + c$$

IV.5) $\ln | \operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x | + c$ IV.6) $-\frac{1}{2} \ln^2 \cos x + c$

IV.7) a) $\dfrac{(1+x)^{n+1}}{n+1} + c_1$

b) $\binom{n}{0}x + \binom{n}{1}\dfrac{x^2}{2} + \binom{n}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dots + \binom{n}{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \binom{n}{n}\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c_2$

c) $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$

IV.8) $a = 1, \quad b = -2 \text{ e } c = 2$

IV.9) a) $a = 4$ e $b = 1$

b) $\dfrac{38}{3}$

c) porque (note que $f(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx \ (= I_1 + I_2)$$

IV.10) $I(a+1; n) = \displaystyle\int_0^1 x^{a+1} \cdot (1-x)^n\,dx$

Vamos integrar por partes, fazendo

$$f(x) = x^{a+1} \text{ (portanto, } f'(x) = (a+1)\,x^a)$$

e

$$g'(x) = (1-x)^n \left(\text{portanto, } g(x) = \int (1-x)^n\,dx = -\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)$$

Assim,

$$I(a+1; n) = \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^n\,dx = \underbrace{\left(-x^{a+1} \cdot \frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg]_0^1}_{0} - \int_0^1 (a+1)\,x^a \cdot \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{a+1}{n+1} \cdot x^a (1-x)^{n+1}\,dx = \frac{a+1}{n+1} \cdot I(a; n+1)$$

IV.11) a) Vamos escrever $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x\,dx$

Fazendo $f(x) = \operatorname{sen}^{n-1} x$ e $g'(x) = \operatorname{sen} x$, temos

$$f'(x) = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cdot \cos x \quad \text{e} \quad g(x) = \int g'(x)\,dx = \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

Então:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \underbrace{-\operatorname{sen}^{n-1} x \cdot \cos x\Big]_0^{\pi/2}}_{0} - \int_0^{\pi/2} (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cdot \cos x\,(-\cos x)\,dx$$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x\,dx = (n-1)\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)\,dx$$

$$I_n = (n-1)\underbrace{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx}_{I_{n-2}} - (n-1)\underbrace{\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx}_{I_n}$$

$I_n = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n$

$I_n + (n-1)\,I_n = (n-1)\,I_{n-2}$

Logo, $\quad I_n = \dfrac{n-1}{n}\,I_{n-2}$

b) $I_2 = \dfrac{\pi}{4}$; $I_4 = \dfrac{3\pi}{16}$; $I_6 = \dfrac{5\pi}{32}$

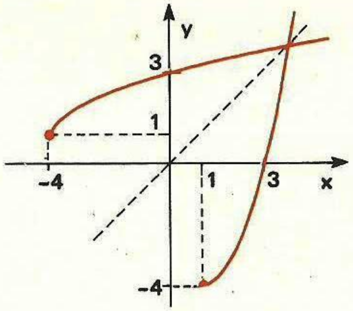
RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS DE VESTIBULARES

TESTES

1	a	21	a	41	d	61	b	81	d	101	b
2	e	22	e	42	b	62	c	82	b	102	d
3	b	23	d	43	d	63	e	83	e	103	b
4	a	24	d	44	a	64	d	84	c	104	c
5	b	25	c	45	b	65	a	85	b	105	b
6	b	26	e	46	d	66	a	86	a	106	c
7	b	27	c	47	e	67	d	87	c	107	e
8	d	28	b	48	d	68	b	88	d	108	d
9	b	29	e	49	b	69	d	89	a	109	b
10	c	30	b	50	a	70	b	90	a	110	a
11	b	31	c	51	e	71	a	91	b	111	d
12	b	32	b	52	b	72	c	92	c	112	e
13	d	33	c	53	b	73	d	93	d	113	c
14	e	34	b	54	a	74	e	94	e	114	c
15	d	35	b	55	a	75	a	95	a	115	c
16	a	36	e	56	e	76	b	96	b	116	e
17	b	37	e	57	e	77	e	97	e	117	e
18	c	38	a	58	d	78	d	98	e	118	b
19	e	39	c	59	a	79	c	99	b	119	a
20	e	40	b	60	d	80	b	100	b	—	—

QUESTÃO DISCURSIVAS

120) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$



121) 2x

122) $+\infty$

123) $\frac{1}{2}$

124) 0

125) $\begin{cases} 1.^\circ)\ x \neq a \\ 2.^\circ)\ \cos a \end{cases}$

126) $\begin{cases} a)\ \dfrac{1}{3k^2} \\ b)\ +\infty \end{cases}$

127) cos a

128) -4

129) -6

130) 3 ou 1

131) $m \leqslant 12$

132) $y = kx^2 + (3-2k)x + k \Leftrightarrow kx^2 - 2kx + k + 3x - y = 0 \Leftrightarrow k(x-1)^2 + (3x-y) = 0$

A última equação é satisfeita para $x = 1$ e $y = 3$, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$. Portanto, todas as curvas passam pelo ponto P(1; 3).

$$y' = 2kx + 3 - 2k$$

Fazendo $x = 1 : y'_{(1)} = 2k + 3 - 2k = 3$

A reta que tangencia as curvas no ponto P tem equação

$$y - 3 = m(x - 1)$$

onde

$$m = y'_{(1)} = 3$$

Portanto, a equação da reta tangente é $\boxed{y = 3x}$

133) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

134) A função dada não é derivável no ponto $x = 1$, pois, como f(x) só é definida para $x \geqslant 1$, não existe a derivada à esquerda no ponto $x = 1$. Assim, só podemos dizer que f(x) é derivável à direita no ponto $x = 1$.

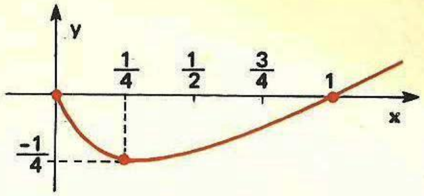
135) $y' = \frac{-\operatorname{sen} x}{|\operatorname{sen} x|}$

136) $t = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\ s$

137) raízes: 0 e 1

ponto de mínimo: $x = \frac{1}{4}$

gráfico:



138) Seja $F(x) = P(x) + Q(x) = P(x) + ax^r$. Temos $P'(0) = 0$ e $P''(0) > 0$. Então, como $F'(x) = P'(x) + arx^{r-1}$, vem $F'(0) = P'(0) = 0$ e como $F''(x) = P''(x) + ar(r-1)x^{r-2}$, vem $F''(0) = P''(0) > 0$ donde F(x) tem mínimo relativo para $x = 0$.

139) $a = b = 4$ m

140) $\frac{b}{2}$

141) 3

142) $\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}; \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$